Conservació de l'estructura PHS en reduccions d'ordre per truncament equilibrat

Antoni Ras
Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya
e-mail: ras@mat.upc.es
16 de gener de 2008

1 Introducció

Aquest *report* recull parcialment, amplia alguns aspectes, adapta i corregeix l'article [1]. El seu objectiu és presentar la reducció de sistemes lineals amb significat físic, incidint en el problema de compatibilitzar les tècniques clàssiques de reducció basades en Gramians amb la conveniència de conservar l'estructura hamiltoniana del sistema original. No s'inclouen els apartats sobre estabilitat asimptòtica dels sistemes reduïts ni la justificació que la reducció per pertorbació singular aproxima el sistema original.

2 Sistemes Hamiltonians amb Ports (PHS)

Un PHS té la forma

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{z} = (J - R)\,\nabla H + B\,u \\ y = B^T\,\nabla H \end{cases}$$

on $z(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ son els estats[1], $u \in \mathbb{R}^m$ són les entrades, $y \in \mathbb{R}^m$ són les sortides, $J = -J^T$ és una matriu $2n \times 2n$ antisimètrica i invertible $\forall z(t)$, $R = R^T \geq 0$ és una matriu $2n \times 2n$ simètrica i semidefinida positiva (SSd+) $\forall z(t)$, B és una matriu $2n \times m$ (que depèn de $z(t)$)[2], ∇H és el gradient del *Hamiltonià* $H\big(z(t)\big)$ respecte de les variables d'estat i el punt indica derivada respecte del temps t.

Propietat 1 $\dot{H} = \dot{z}^T\,\nabla H$

Dem. $H\big(z(t)\big)$ és una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que s'obté per composició de $t \mapsto \big(z_1(t), \ldots, z_{2n}(t)\big)^T$ i $(x_1, \ldots, x_{2n})^T \mapsto H(x_1, \ldots, x_n)$. Per la regla de la cadena:

$$\dot{H}\big(z(t)\big) = \mathrm{J}(H \circ z) = \overbrace{\mathrm{J}(H) \cdot \mathrm{J}(z)}^{\text{(és un escalar)}} = \big(\mathrm{J}(H) \cdot \mathrm{J}(z)\big)^T = \dot{z}^T \cdot \nabla H \;\blacksquare$$

Propietat 2 $\dot{H} = u^T\,y - (\nabla H)^T\,R\,\nabla H \leq y^T\,u$

Dem. Com que $(\nabla H)^T\,J\,\nabla H = 0$ perquè $J = -J^T$, tenim, a partir de la Propietat 1:

$$\dot{H} = \dot{z}^T\,\nabla H = \big((J - R)\,\nabla H + B\,u\big)^T\,\nabla H = \ldots = -(\nabla H)^T\,R\,\nabla H + u^T\,B^T\,\nabla H = -(\nabla H)^T\,R\,\nabla H + u^T\,y$$

Finalment, la desigualtat ve de $(\nabla H)^T\,R\,\nabla H \geq 0$ perquè R és SSd+ i $u^T\,y = y^T\,u$ perquè és un escalar. $\blacksquare$

[1] Els punts de $\mathbb{R}^k$ els escriurem com vectors columna; i.e., $(z_1, \ldots, z_k) = z^T$

[2] A l'article, no pressuposa que hi hagi tantes sortides com entrades i en la segona equació apareix una nova matriu F; però aquí considerarem el cas $F = B^T$, d'acord amb la teoria clàssica de PHS's

Interpretació: Si l'energia H del sistema està fitada inferiorment ($H(t) \geq k \in \mathbb{R}\ \forall t$), com que l'energia que es treu del sistema en un interval $[t_0,\, t]$ val $-\int_{t_0}^{t} y^t\, u\, \mathrm{d}s$, aleshores, integrant en l'expressió de la Propietat 2, s'obté que l'energia que es pot extreure està fitada superiorment per $H(t_0) - k$:

$$-\int_{t_0}^{t} y^t\, u\, \mathrm{d}s \leq -\int_{t_0}^{t} \dot{H}\, \mathrm{d}s = H(t_0) - H(t) \leq H(t_0) - k$$

Es diu que el sistema és *dissipatiu.*

3 Sistemes lineals de segon ordre *mecànics* (SL2M)

Són sistemes de la forma

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M\,\ddot{q} + D\,\dot{q} + K\,q = \mathcal{B}_1\,u \\ y = C_1\,q + C_2\,\dot{q} \end{array} \right.$$

on les matrius M, D i K són SD+ (simètriques i definides positives) i a coeficients constants reals. Se'n diuen així perquè sovint s'obtenen en modelar problemes mecànics: aquestes matrius corresponen aleshores a la massa del sistema, la fricció i els coeficients de rigidesa, respectivament.

De la manera habitual, es transformen en sistemes lineals de primer ordre:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A\,x + \mathcal{B}\,u \\ y = C\,x \end{array} \right.$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}\,K & -M^{-1}\,D \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}\,\mathcal{B}_1 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1\ \ C_2) \quad \text{i} \quad x = (q,\, \dot{q})^T$$

Lema 1 Si E és una matriu quadrada simètrica a coeficients constants i $H(z) := (1/2)\, z^T\, E\, z$ és la forma quadràtica associada, aleshores $\nabla H = E\, z$ i $\nabla^2 H = E$.

Dem. Si desenvolupem, $H(z_1,\, \dots,\, z_n) = \cdots = (1/2) \sum E_{jk}\, z_j\, z_k$. Com que E és simètrica,

$$\partial_{z_j} H = (1/2) \sum E_{jk}\, z_k + (1/2) \sum E_{kj}\, z_k = \sum E_{jk}\, z_k = (E\, z)_j$$

És a dir, $\nabla H = E\, z$. Si tornem a derivar: $\nabla^2 H = E$. ■

Propietat 3 Els SL2M són PHS, si es tria la sortida adient (és a dir, amb $C_1 = \mathbf{0}$ i $C_2 = \mathcal{B}_1^T$).

Dem. Posem $p := M\,\dot{q}$, $z := (q,\, p)^T$ i $H := (1/2)\, \left\{q^T\, K\, q + p^T\, M^{-1}\, p\right\}$. Aleshores

$$H(z) = \cdots = (1/2)\, \left(q^T\, p^T\right) \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

D'acord amb el Lema 1,

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ M^{-1}\, p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \nabla H$$

Aleshores,

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}\,K & -M^{-1}\,D \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}\,\mathcal{B}_1 \end{pmatrix} u \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}\,K & -M^{-1}\,D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \nabla H + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -D \end{pmatrix} \nabla H + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} u$$

que correspon a la primera equació d'un PHS, amb

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{B}_1 \end{pmatrix}$$

A més,

$$y = C\,x = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{B}_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \nabla H = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{B}_1^T \end{pmatrix} \nabla H = B^T\,\nabla H. \blacksquare$$

Observació: Qualsevol sistema Hamiltonià, obtingut a partir de les Equacions d'Euler-Lagrange mitjançant la Transformació de Legendre, es pot escriure com PHS en la forma particular que hem obtingut a la Propietat 3. En general, el Teorema de Darboux garanteix que tot PHS en què el Parèntesi de Poisson associat satisfà la Identitat de Jacobi admet un canvi de variables en què la matriu J passa a tenir la *forma canònica*

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

4 Transformació d'equilibri *(Balancing transformation)*

S'anomena així el canvi de variables (bijectiu) tal que, en les noves coordenades, els dos Gramians coincideixen i són matrius diagonals.

Els Gramians de controlabilitat (W_c) i observabilitat (W_o) són les matrius solució de l'equació tipus Lyapunov[3]

$$\begin{cases} A\,W_c + W_c\,A^T = -B\,B^T \\ A^T\,W_o + W_o\,A = -C^T\,C \end{cases}$$

associada a un sistema lineal com (3).

Com és sabut, la transformació d'equilibri existeix quan els dos Gramians són SD+. Per obtenir-la, es fa una descomposició de Cholesky $W_c = X\,X^T$, $W_o = Y\,Y^T$ i es descomposa en valors singulars $Y^T\,X = U\,\Sigma\,V$. Aleshores, el sistema transformat és $\xi = S\,z$, amb $S = \Sigma^{-1/2}\,U^T\,Y^T$. El canvi invers és $z = T\,\xi$, amb $T = S^{-1} = X\,V\,\Sigma^{-1/2}$. En les variables ξ els dos Gramians coincideixen amb la matriu diagonal Σ (És a dir, $S\,W_c\,S^T = T^T\,W_o\,T = \Sigma$). Els seus vap's, $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n}\}$, s'ordenen de més gran a més petit i s'anomenen *valors singulars de Hankel.*

Propietat 4 La transformació d'equilibri ($\xi = S\,z,\ z = T\,\xi$) d'un SL2M també és PHS.

Dem. Posem

$$H(z) = (1/2)\,z^T\,E\,z, \quad \text{on} \quad E = \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{-1} \end{pmatrix} = E^T \ \text{ és SD+} \quad \text{(Propietat 3)}$$

Aleshores,

$$\widetilde{H}(\xi) := H\big(T\,\xi\big) = (1/2)\,\big(T\,\xi\big)^T\,E\,\big(T\,\xi\big) = (1/2)\,\xi^T\,\underbrace{T^T\,E\,T}_{=:\widetilde{E}}\,\xi = (1/2)\,\xi^T\,\widetilde{E}\,\xi$$

$\widetilde{E}$ és simètrica ($\widetilde{E}^T = T^T\,E^T\,T = T^T\,E\,T = \widetilde{E}$) i definida positiva (si $\exists v \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $0 \geq v^T\,\widetilde{E}\,v = v^T\,T^T\,E\,T\,v = (T\,v)^T\,E\,(T\,v)$, aleshores $T\,v = 0$ i també $v = 0$). El canvi invers és $E = S^T\,\widetilde{E}\,S$. Si posem $\widetilde{J} := S\,J\,S^T$, $\widetilde{R} := S\,R\,S^T$ i $\widetilde{B} := S\,B$, tindrem que el sistema transformat té l'estructura d'un PHS:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = S\,\dot{z} = S\,\big((J-R)\,\nabla H + B\,u\big) = S\,(J-R)\,E\,z + S\,B\,u = \\ \quad = S\,(J-R)\,S^T\,\widetilde{E}\,S\,z + \widetilde{B}\,u = (\widetilde{J} - \widetilde{R})\,\widetilde{E}\,\xi + \widetilde{B}\,u = \Big(\widetilde{J} - \widetilde{R}\Big)\,\nabla\widetilde{H} + \widetilde{B}\,u \\ \\ y = B^T\,\nabla H = (T\,\widetilde{B})^T\,E\,z = \widetilde{B}^T\,T^T\,E\,T\,\xi = \widetilde{B}^T\,\widetilde{E}\,\xi = \widetilde{B}^T\,\nabla\widetilde{H} \end{cases}$$

[3]La solució és única i els Gramians SSd+ quan el sistema és asimptòticament estable (tots els vap's d'A tenen part real < 0)

A més $\widetilde{J}$ és antisimètrica ($\widetilde{J}^T = S\,J^T\,S^T = -S\,J\,S^T = -\widetilde{J}$) i invertible ($S$ i J ho són) i $\widetilde{R}$ és simètrica (ídem) i definida positiva (argument anàleg que amb $\widetilde{E}$). ■

Observacions: Com que la matriu $\widetilde{J}$ té coeficients constants, el sistema transformat també compleix l'Identitat de Jacobi i se li pot aplicar el Teorema de Darboux. Es pot veure que, en general, qualsevol transformació bijectiva d'un PHS (encara que no sigui SL2M) també és PHS. Naturalment, si el SL2M és dissipatiu, també ho és el sistema transformat.

5 Models de reducció d'ordre

Aplicar una reducció d'ordre a un sistema com (3) vol dir projectar-lo sobre un subespai de dimensió $d < 2n$ (habitualment d també serà parell). El procediment clàssic de reducció associada a la transformació d'equilibri consisteix en quedar-se només ambe els d valors de Hankel més grans.

Re-escribim la versió PHS de (3) de la forma[4]

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{z} = (J-R)\,\nabla H + B\,u \\ y = B^T\,\nabla H \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dot{z} = A\,z + B\,u \\ y = C\,z \end{array}\right. \quad \text{on} \left\{\begin{array}{l} A := (J-R)\,E \\ C := B^T\,E \end{array}\right.$$

Quan li apliquem la transformació d'equilibri obtenim

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{\xi} = \widetilde{A}\,\xi + \widetilde{B}\,u \\ y = \widetilde{C}\,\xi \end{array}\right. \qquad \text{on} \left\{\begin{array}{l} \widetilde{A} := (\widetilde{J}-\widetilde{R})\,\widetilde{E} = \ldots = S\,(J-R)\,E\,T = S\,A\,T \\ \widetilde{B} = S\,B \\ \widetilde{C} := \widetilde{B}^T\,\widetilde{E} = B^T\,S^T\,T^T\,E\,T = B^T\,E\,T = C\,T \end{array}\right.$$

Si fem servir l'índex 1 pels estats que conservem i el 2 pels restants, obtenim la descomposició de les matrius del canvi:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \text{ i } T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}, \quad \text{on } S_1 \text{ és } d\times 2n,\ S_2 \text{ és } (2n-d)\times 2n,\ T_1 \text{ és } 2n\times d, \text{ i } T_2 \text{ és } 2n\times(2n-d),$$

i podem re-escriure el sistema transformat (4) de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \qquad \text{on} \left\{\begin{array}{ll} \widetilde{A}_{11} \text{ és } d\times d & \widetilde{A}_{12} \text{ és } d\times(2n-d) \\ \widetilde{A}_{21} \text{ és } (2n-d)\times d & \widetilde{A}_{22} \text{ és } (2n-d)\times(2n-d) \\ \widetilde{B}_1 \text{ és } d\times m & \widetilde{B}_2 \text{ és } (2n-d)\times m \\ \widetilde{C}_1 \text{ és } m\times d & \widetilde{C}_2 \text{ és } m\times(2n-d) \end{array}\right.$$

Com que T és la inversa de S, s'obté que $S_j\,T_k$ dóna la Identitat quan $j = k$ i una matriu de zeros quan $j \neq k$ ($j,\,k \in \{1,\,2\}$). Pel que fa a les transformacions, es dedueixen les fórmules següents:

$$\begin{array}{lll} \widetilde{A}_{jk} = S_j\,A\,T_k & \widetilde{J}_{jk} = S_j\,J\,S_k^T & \widetilde{R}_{jk} = S_j\,R\,S_k^T \\ \widetilde{B}_j = S_j\,B & \widetilde{C}_k = C\,T_k & \widetilde{E}_{jk} = T_j^T\,E\,T_k \end{array}$$

En aquest context, la reducció clàssica per equilibri seria el sistema (de dimensió d)

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \widetilde{A}_{11}\,\xi_1 + \widetilde{B}_1\,u \\ y = \widetilde{C}_1\,\xi_1 \end{array}\right.$$

[4]Compte que ara les matrius A i C no són les mateixes que a (3)!

Lema 2 Existeix un subespai U de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensió d tal que $\left(S_1^T\, T_1^T\right)_{|U} = \mathbf{1}_{|U}$. A més, $\mathbb{R}^{2n} = U \oplus \operatorname{Ker} T_1^T$.

Dem. Com $T_1^T\, S_1^T = (S_1\, T_1)^T = \mathbf{1}$, S_1^T és injectiva, $T_1^T : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ és exhaustiva i el seu nucli té dimensió $n-d$. Podem construir, doncs, una base $\{v_1, \ldots, v_{2n-d}, u_1, \ldots, u_d\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $< v_1, \ldots, v_{2n-d} >= \operatorname{Ker} T_1^T$. Diguem $w_j := T_1^T(u_j)$. Com, per construcció, $\mathbb{R}^{2n} = \operatorname{Ker} T_1^T \oplus < u_1, \ldots, u_d >$, tenim que $< w_1, \ldots, w_d >= \operatorname{Im} T_1^T = \mathbb{R}^d$, perquè

$$0 = \sum \lambda_j\, w_j = \cdots = T_1^T \left(\sum \lambda_j\, u_j\right) \implies \sum \lambda_j\, u_j \in \operatorname{Ker} T_1^T \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0.$$

Diguem $\widetilde{u}_j := S_1^T(w_j) \in \mathbb{R}^{2n}$. Per tant, $\widetilde{u}_j = \sum \alpha_{jr}\, v_r + \sum \beta_{js}\, u_s$. Ara bé,

$$w_j = \left(T_1^T\, S_1^T\right)(w_j) = \cdots = 0 + \sum \beta_{js}\, w_s \implies \beta_{js} = \delta_{js} \text{ i } \widetilde{u}_j = \sum \alpha_{jr}\, v_r + u_j.$$

Definim $U :=< \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_d >$. Aleshores, $\left(S_1^T\, T_1^T\right)_{|U} = \mathbf{1}_{|U}$, perquè

$$\left(S_1^T\, T_1^T\right)(\widetilde{u}_j) = 0 + \left(S_1^T\, T_1^T\right)(u_j) = \cdots = \widetilde{u}_j.$$

Com S_1^T és injectiva, U també té dimensió d. A més, $U \cap \operatorname{Ker} T_1^T = \{0\}$ perquè $\left(S_1^T\, T_1^T\right)_{|U} = \mathbf{1}_{|U}$. Per tant, $\mathbb{R}^{2n} = U \oplus \operatorname{Ker} T_1^T$.

Observació: L'article [1] afirma, en canvi, que hi ha un subespai $\widetilde{U}$ tal que $\mathbb{R}^{2n} = \widetilde{U} \oplus \operatorname{Ker} S_1$ i $(T_1\, S_1)_{|\widetilde{U}} = \mathbf{1}_{|\widetilde{U}}$. Això també és cert (la demostració és anàloga), però no és el que es necessita (ni hi equival) a la propietat 5:

Propietat 5 La reducció clàssica per equilibri (5) d'un SL2M no és mai PHS.

Dem. Si fos PHS caldria que $\widetilde{A}_{11}\, \xi_1 = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right) \nabla \widetilde{H}_{11}$, és a dir, caldria que $\widetilde{A}_{11} = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right) \widetilde{E}_{11}$; però

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{11} &= S_1\, A\, T_1 = S_1\, (J - R)\, E\, T_1 \\ \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right) \widetilde{E}_{11} &= S_1\, (J - R)\, S_1^T\, T_1^T\, E\, T_1 \end{aligned}$$

I $S_1^T\, T_1^T \neq \mathbf{1}_{|\mathbb{R}^{2n}}$, com hem vist al Lema 2. ■

Per resoldre aquest contratemps, [1] proposa dues reduccions alternatives que sí conserven l'estructura PHS. La primera l'anomena *reducció PHS basada en els Gramians* i es construeix a partir d'un nou *Hamiltonià restringit*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H}_c : \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & (1/2)\, \xi^T\, \widetilde{E}_{11}\, \xi \end{array}$$

($\widetilde{E}_{11}$ és simètrica: $\widetilde{E}_{11}^T = \left(T_1^T\, E\, T_1\right)^T = \cdots = T_1^T\, E\, T_1 = \widetilde{E}_{11}$. També és definida positiva: si $v^T\, \widetilde{E}_{11}\, v = 0$, es completa $v \in \mathbb{R}^d$ a un vector $w^T := (v^T, \mathbf{0}^T) \in \mathbb{R}^{2n}$ i, aleshores, $w^T\, \widetilde{E}\, w = \cdots = v^T\, \widetilde{E}_{11}\, v = 0$. Per tant, $w = 0$ i també $v = 0$). El sistema reduït corresponent (reducció PHS basada en els Gramians) és

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right) \nabla \widetilde{H}_c + \widetilde{B}_1\, u \\ y = \widetilde{B}_1^T\, \nabla \widetilde{H}_c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \left(S_1\, (J - R)\, S_1^T\, T_1^T\, E\, T_1\right)\, \xi_1 + \widetilde{B}_1\, u \\ y = \left(B^T\, S_1^T\, T_1^T\, E\, T_1\right)\, \xi_1 \end{array} \right.$$

Propietat 6 El sistema reduït (6) és PHS[5]

Dem. Que $\widetilde{J}_{11}$ és antisimètrica i $\widetilde{R}_{11}$ és SD+ es demostra com a la propietat 4. Com $\widetilde{J}_{11}$ és a coeficients constants, es segueix complint la Identitat de Jacobi. A més, si el SL2M era dissipatiu, (6) també ho serà (es pot emprar un raonament del mateix tipus que abans per veure com $\widetilde{E}_{11}$ era D+). ■

Observació: D'acord amb el Lema 2 i la Propietat 5, els sistemes reduïts (5) i (6) coincideixen només pel estats $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^d$ tals que $E\, T_1\, \widetilde{u} \in U$.

[5]Pot ser degenerat, és a dir, amb la matriu antisimètrica $\widetilde{J}_{11}$ no invertible

Observació: En general, no es pot garantir que $\widetilde{J}_{11}$ sigui invertible. A [1] insinua que sempre ho serà si d és parell (possiblement perquè els vap's no nuls de les matrius antisimètriques reals són complexes conjugats); però això és fals com posa de manifest el

Contraexemple Considerem el cas particular en què $n = 4$, $d = n - d = 2$ i

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aleshores,

$$S\,J\,S^T = \cdots = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{i } \widetilde{J}_{11} = \mathbf{0}.$$

La segona proposta de reducció que presenta [1] considera el *Hamiltonià pertorbat*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H}_p : \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & (1/2)\,\xi^T\,Q\,\xi, \quad \text{on } Q = \widetilde{E}_{11} - \widetilde{E}_{12}\,\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21} \end{array}$$

Cal veure que Q és SD+. Primer cal observar que la simetria de $\widetilde{E}$ implica que $\widetilde{E}_{jj}^T = \widetilde{E}_{jj}$ i $\widetilde{E}_{jk}^T = \widetilde{E}_{kj}$. D'aquí es dedueix fàcilment que $Q^T = Q$. Per veure que Q és D+, si es descomposa $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T)$, la mateixa observació permet veure que

$$\begin{aligned} \xi^T\,\widetilde{E}\,\xi &= \xi_1^T\,\widetilde{E}_{11}\,\xi_1 + \xi_1^T\,\widetilde{E}_{12}\,\xi_2 + \xi_2^T\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1 + \xi_2^T\,\widetilde{E}_{22}\,\xi_2 = \\ &= \xi_1^T\,\widetilde{E}_{11}\,\xi_1 + \xi_1^T\,\widetilde{E}_{21}^T\,\xi_2 + \xi_2^T\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1 + \xi_2^T\,\widetilde{E}_{22}\,\xi_2 - \xi_1^T\,\widetilde{E}_{12}\,\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1 + \xi_1^T\,\widetilde{E}_{21}^T\,\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1 = \\ &= \xi_1^T\,Q\,\xi_1 + \left(\xi_2 + \widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1\right)^T\,\widetilde{E}_{22}\,\left(\xi_2 + \widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1\right) \end{aligned}$$

Per tant, donat $0 \neq \xi_1 \in \mathbb{R}^d$, si fem $\widetilde{\xi}^T := \left(\xi_1^T, -\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\xi_1\right) \neq 0$, deduïm que $0 \neq \widetilde{\xi}^T\,\widetilde{E}\,\widetilde{\xi} = \cdots = \xi_1^T\,Q\,\xi_1$.

Observació: Caldria comprovar que la matriu $\widetilde{E}_{22}$ és invertible. [1] sembla insinuar que, per garantir-ho, cal imposar que tots els vap's de $(\widetilde{J}_{22} - \widetilde{R}_{22})\widetilde{E}_{22}$ tinguin part real estrictament negativa. Però, en realitat, és innecessari: el mateix argument que hem fet servir per veure que $\widetilde{E}_{11}$ era D+ quan hem definit el Hamiltonià restringit prova que $\widetilde{E}_{22}$ també és D+ i, en conseqüència, invertible.

De manera anàloga al cas precedent, es demostra la

Propietat 7 El sistema reduït amb Hamiltonià pertorbat

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right)\,\nabla\widetilde{H}_p + \widetilde{B}_1\,u \\ y = \widetilde{B}_1^T\,\nabla\widetilde{H}_p \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \left(S_1\,(J-R)\,S_1^T\,Q\right)\,\xi_1 + \widetilde{B}_1\,u \\ y = \left(B^T\,S_1^T\,Q\right)\,\xi_1 \end{array} \right.$$

és PHS [6].

Observació: Malgrat que, finalment, (7) només difereix de (6) en el Hamiltonià, en realitat s'obtenen de forma diferent. De fet, (7) es dedueix tot aplicant la teoria de la pertorbació als valors de Hankel que es volen eliminar, és a dir, substituint Σ_2 en la matriu Σ per $\varepsilon\,\Sigma_2$, amb $\varepsilon > 0$, i fent el límit $\varepsilon \to 0$. (Veure Annex 1)

Observació: De la mateixa manera que la reducció directa per truncament del sistema equilibrat no dóna un PHS, igualment quan s'aplica aquesta reducció al resultat de la pertorbació singular del sistema (4) tampoc s'obté el PHS (7).

[6] Pot ser degenerat (*vd* nota 5)

6 Annex 1: Deducció del sitema reduït per pertorbació

La deducció del sistema PHS reduït mitjançant una adaptació de la tècnica de pertorbació geomètrica singular (*vd* [2]) que exposa [1] és parcialment incorrecta, encara que el resultat final, és a dir el sistema (7), sí que és vàlid.

La idea de base consisteix en modificar el Gramià balancejat Σ tot multiplicant per una constant $\varepsilon > 0$ tots els valors singulars de Hankel que s'han d'eliminar en el sitema reduït. El primer problema és que si es fa això els Gramians deixaran d'estar equilibrats (no tindran la mateixa matriu) i cal decidir, doncs, si la matriu

$$\Sigma^\varepsilon := \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon\,\Sigma_2 \end{pmatrix}$$

correspon al Gramià de controlabilitat o al d'observabilitat. Si, per exemple, triem $\Sigma^\varepsilon = W_o^\varepsilon$, aleshores cal introduir el canvi $\xi^\varepsilon = S^\varepsilon\, z$; $\quad z = T^\varepsilon\,\xi$, amb[7]

$$S^\varepsilon = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ (1/\sqrt{\varepsilon})\,S_{21} & (1/\sqrt{\varepsilon})\,S_{22} \end{pmatrix} \qquad T^\varepsilon = (S^\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & \sqrt{\varepsilon}\,T_{12} \\ T_{21} & \sqrt{\varepsilon}\,T_{22} \end{pmatrix}$$

De retruc, ara

$$W_c^\varepsilon := \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (1/\varepsilon)\,\Sigma_2 \end{pmatrix}$$

Si s'aplica el canvi al sistema (3), resulta[8]

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\xi}^\varepsilon = (\widetilde{J}^\varepsilon - \widetilde{R}^\varepsilon)\,\nabla \widetilde{H}^\varepsilon + \widetilde{B}^\varepsilon\,u \\ y = \left(\widetilde{B}^\varepsilon\right)^T\,\nabla \widetilde{H}^\varepsilon \end{cases} \quad \text{amb} \quad \begin{cases} \widetilde{J}^\varepsilon - \widetilde{R}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11} & (1/\sqrt{\varepsilon})\left(\widetilde{J}_{12} - \widetilde{R}_{12}\right) \\ (1/\sqrt{\varepsilon})\left(\widetilde{J}_{21} - \widetilde{R}_{21}\right) & (1/\varepsilon)\left(\widetilde{J}_{22} - \widetilde{R}_{22}\right) \end{pmatrix} \\ \widetilde{B}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ (1/\sqrt{\varepsilon})\,\widetilde{B}_2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{H}^\varepsilon\,(\xi^\varepsilon) = (1/2)\,(\xi^\varepsilon)^T\,\widetilde{E}^\varepsilon\,\xi^\varepsilon, \text{ on } \widetilde{E}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \widetilde{E}_{11} & \sqrt{\varepsilon}\,\widetilde{E}_{12} \\ \sqrt{\varepsilon}\,\widetilde{E}_{21} & \varepsilon\,\widetilde{E}_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si distingim subíndexs a (8), ho podem posar de la forma

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1^\varepsilon = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right)\,\nabla_{\xi_1^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon + (1/\sqrt{\varepsilon})\,\left(\widetilde{J}_{12} - \widetilde{R}_{12}\right)\,\nabla_{\xi_2^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon + \widetilde{B}_1\,u \\ \dot{\xi}_2^\varepsilon = (1/\sqrt{\varepsilon})\,\left(\widetilde{J}_{21} - \widetilde{R}_{21}\right)\,\nabla_{\xi_1^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon + (1/\varepsilon)\,\left(\widetilde{J}_{22} - \widetilde{R}_{22}\right)\,\nabla_{\xi_2^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon + (1/\sqrt{\varepsilon})\,\widetilde{B}_2\,u \\ \\ y = \left(\widetilde{B}_1\right)^T\,\nabla_{\xi_1^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon + (1/\sqrt{\varepsilon})\,\left(\widetilde{B}_2\right)^T\,\nabla_{\xi_2^\varepsilon}\widetilde{H}^\varepsilon \end{cases}$$

Cal aplicar ara el nou canvi

$$\widehat{\xi} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (1/\sqrt{\varepsilon})\,\mathbf{1} \end{pmatrix}\,\xi^\varepsilon$$

en el qual el Hamiltonià es transforma en

$$\widehat{H}\left(\widehat{\xi}\right) = (1/2)\,\widehat{\xi}^T\,\widehat{E}\,\widehat{\xi}, \text{ on } \widehat{E} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}_{11} & \varepsilon\,\widetilde{E}_{12} \\ \varepsilon\,\widetilde{E}_{21} & \varepsilon^2\,\widetilde{E}_{22} \end{pmatrix}$$

i que transforma (9) en

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\widehat{\xi}}_1 = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right)\,\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H} + (1/\varepsilon)\,\left(\widetilde{J}_{12} - \widetilde{R}_{12}\right)\,\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H} + \widetilde{B}_1\,u \\ \dot{\widehat{\xi}}_2 = (1/\varepsilon)\,\left(\widetilde{J}_{21} - \widetilde{R}_{21}\right)\,\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H} + (1/\varepsilon^2)\,\left(\widetilde{J}_{22} - \widetilde{R}_{22}\right)\,\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H} + (1/\varepsilon)\,\widetilde{B}_2\,u \\ \\ y = \left(\widetilde{B}_1\right)^T\,\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H} + (1/\varepsilon)\,\left(\widetilde{B}_2\right)^T\,\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H} \end{cases}$$

[7] A [1], l'exponent de $\sqrt{\varepsilon}$ a la matriu T^ε és negatiu; però aleshores no seria cert que, com s'hi afirma, $T^\varepsilon = (S^\varepsilon)^{-1}$

[8] A [1], els exponents de ε a la matriu $\widetilde{E}^\varepsilon$ són negatius, perquè ho dedueix de la seva expressió (incorrecta) de T^ε

Segons [1] i [2], quan u està fitada uniformement i tots els vap's de $\left(\widetilde{J}_{22} - \widetilde{R}_{22}\right)\,\widetilde{E}_{22}$ tenen part real estrictament negativa, el sistema (10) es pot aproximar[9] pel sistema reduït

$$(11) \qquad \begin{cases} \dot{\widehat{\xi}}_1 = \left(\widetilde{J}_{11} - \widetilde{R}_{11}\right)\,\left(\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H}\right)_{|\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H}=0} + \widetilde{B}_1\,u \\ \\ y = \left(\widetilde{B}_1\right)^T\,\left(\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H}\right)_{|\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H}=0} \end{cases}$$

Aïllem $\widehat{\xi}_2$ a $\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H} = 0$:

$$0 = \nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H} = \varepsilon\,\widetilde{E}_{21}\,\widehat{\xi}_1 + \varepsilon^2\,\widetilde{E}_{22}\,\widehat{\xi}_2 \implies \widehat{\xi}_2 = -(1/\varepsilon)\,\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\,\widehat{\xi}_1$$

Ho substituïm:

$$\left(\nabla_{\widehat{\xi}_1}\widehat{H}\right)_{|\nabla_{\widehat{\xi}_2}\widehat{H}=0} = \widetilde{E}_{11}\,\widehat{\xi}_1 + \varepsilon\,\widetilde{E}_{12}\,\widehat{\xi}_2 = \cdots = \left(\widetilde{E}_{11} - \widetilde{E}_{12}\,\widetilde{E}_{22}^{-1}\,\widetilde{E}_{21}\right)\,\widehat{\xi}_1 = Q\,\xi_1 = \nabla\widetilde{H}_p$$

i, finalment, com que $\widehat{\xi}_1 = \xi_1$, (11) es converteix, doncs, en el sistema (7).

Referències

[1] Hartmann, C.; Vulcanov, V-M.; Schütte, C.: "Balanced truncation of second-order systems: structure-preservation and stability". Sotmés a *SIAM J. Control and Optimization*, 2007.

[2] Fenichel, N.: "Geoemetric singular perturbation theory for ordinary differential equations". *J. Differential Equations*, **31**:53-98, 1979.

[9] A [1] es demostra la convergència del sistema reduït (11) cap a (10), en el sentit que la 2-norma de Hardy de la diferència entre les respectives funcions de transferència tendeix a 0 quan $\varepsilon \to 0$