IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións
Ourense, 12–13–14 de novembro de 2009

Consorcios y valor de Shapley

M. Dolors Llongueras Arola y Antoni Magaña Nieto [1]

[1]Departamento de Matemática Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya

RESUMEN

La coordinación de estrategias en un juego cooperativo, cuando un grupo de jugadores decide actuar en conjunto, es la base de la noción de consorcio. Un consorcio en un juego cooperativo es una coalición que posee una estructura interna y, al mismo tiempo, se comporta como un miembro individual.

En este trabajo se define el valor de consorcio de Shapley y se determinan expresiones para la diferencia entre el valor de Shapley de un jugador en el juego inicial y su valor de Shapley en el juego de consorcio.

Palabras y frases clave: juego cooperativo, consorcio, valor de Shapley.

1. INTRODUCCIÓN

Sea N un conjunto de jugadores. Un subconjunto de jugadores S puede actuar de forma coordinada al menos de dos maneras. La primera consiste en formar efectivamente una coalición, en cuyo caso se dice que la coalición se ha convertido en *alianza*, se origina una estructura de coaliciones y aparece el juego cociente, analizándose mediante dicho juego las consecuencias de esta formación. La segunda consiste en coordinar las estrategias de los jugadores de S formando un *consorcio*. Si una coalición S decide formar consorcio está imponiendo que ningún subconjunto propio de S podrá negociar con los jugadores de $N \setminus S$. O, de otra manera, que ningún subconjunto propio de S aporta utilidad a ningún subconjunto de $N \setminus S$.

La formación de consorcios en juegos cooperativos puede ser beneficiosa para los jugadores que deciden integrarse en ellos y desfavorable para los demás. Es conveniente, por tanto, disponer de alguna herramienta que permita establecer, de antemano, si es adecuado o no formar un consorcio.

El objetivo de este trabajo es la aplicación del valor de Shapley como instrumento de medida para decidir sobre la conveniencia de formar o no un consorcio, tanto desde el punto de vista individual como desde el colectivo.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se recuerda la definición de consorcio dada por Kalai y Samet (1987), así como la caracterización posterior de Carreras (1996). A continuación se concreta dicha caracterización para una estructura de consorcios. En la Sección 3, se define el valor de consorcio de Shapley y se determinan expresiones para la diferencia entre el valor de Shapley de un jugador en el juego inicial y su valor de Shapley en el juego de consorcio. Finalmente, en la Sección 4, se analizan los consorcios en los juegos simples.

2. EL JUEGO DE CONSORCIO

Sean $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores y v un juego cooperativo sobre N, es decir, una función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$. Según Kalai y Samet (1987), una coalición $S \subseteq N$ es un *consorcio* en v si

$$v(R \cup T) = v(R) \text{ para toda } T \subset S \text{ y } R \subseteq N \setminus S.$$

Es fácil ver que los jugadores de un consorcio son indiferentes entre sí, es decir, si $i, j \in S$ entonces $v(R \cup \{i\}) = v(R \cup \{j\})$ para toda coalición $R \subseteq N \setminus \{i, j\}$.

Definición (Carreras, 1996) Sean v un juego en N y $S \subseteq N$. Se define el *juego de consorcio* v^S en N por

$$v^S(T) = \begin{cases} v(T) & \text{si} \quad S \subseteq T, \\ v(T \setminus S) & \text{si} \quad S \nsubseteq T. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que S es un consorcio en v^S. De la definición anterior se deduce fácilmente que v^S conserva las propiedades de monotonía, superaditividad y no negatividad si v las cumple.

Sean $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Se define

$$v^{S,T} = (v^S)^T.$$

Nótese que $v^{S,T} = v^{T,S}$ ya que para toda $R \subseteq N$ se tiene

$$v^{S,T}(R) = \begin{cases} v(R) & \text{si} \quad S, T \subseteq R, \\ v(R \setminus T) & \text{si} \quad S \subseteq R, T \nsubseteq R, \\ v(R \setminus S) & \text{si} \quad S \nsubseteq R, T \subseteq R, \\ v(R \setminus \{T \cup S\}) & \text{si} \quad S, T \nsubseteq R. \end{cases} \tag{1}$$

S y T son consorcios en este juego.

Y, en general, si $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ es una estructura de coaliciones en N, entonces se define

$$v^{\mathcal{B}} = v^{S_1, S_2, \ldots, S_m} = (\ldots((v^{S_1})^{S_2})\ldots)^{S_m},$$

es decir,

$$v^{\mathcal{B}}(T) = \begin{cases} v(T) & \text{si} \quad S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq T, \\ v(T \setminus S_1) & \text{si} \quad S_1 \not\subseteq T,\ S_2, \ldots, S_m \subseteq T, \\ \quad \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v(T \setminus S_m) & \text{si} \quad S_m \not\subseteq T,\ S_1, S_2, \ldots, S_{m-1} \subseteq T, \\ v(T \setminus (S_1 \cup S_2)) & \text{si} \quad S_1, S_2 \not\subseteq T,\ S_3, \ldots, S_m \subseteq T, \\ \quad \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v(T \setminus (S_{m-1} \cup S_m)) & \text{si} \quad S_{m-1}, S_m \not\subseteq T,\ S_1, \ldots, S_{m-2} \subseteq T, \\ \quad \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v(T \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m)) & \text{si} \quad S_1, S_2, \ldots, S_m \not\subseteq T. \end{cases} \tag{2}$$

Y se tiene un nuevo juego donde $S_1, S_2, \ldots, S_m$ son consorcios (y, de nuevo, el orden de formación no importa).

3. EL VALOR DE CONSORCIO DE SHAPLEY

En esta sección utilizaremos el valor de Shapley φ para medir el efecto interno y externo de la formación de un consorcio. Consideraremos también el *valor aditivo de Shapley*, definido para cada v y cada $S \subseteq N$ por

$$\varphi_S[v] = \begin{cases} \sum_{i \in S} \varphi_i[v] & \text{si} \quad S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si} \quad S = \emptyset. \end{cases}$$

Definición. Sean v un juego en N y $S \subseteq N$. El *valor de consorcio de Shapley* de S en v es $\varphi_S[v^S]$.

Observaciones

1. El valor de consorcio de un jugador aislado coincide con el valor de Shapley en el juego inicial:
$$\varphi_{\{i\}}[v^{\{i\}}] = \varphi_i[v].$$

2. Debido a la indiferencia existente entre los jugadores de un consorcio se cumple que
$$\varphi_S[v^S] = s \cdot \varphi_i[v^S], \text{ para cualquier } i \in S \text{ y siendo } s = |S|.$$

3. El valor de Shapley de los jugadores que en el juego del consorcio optan por formar el consorcio S puede ser mayor, igual o menor que su valor de Shapley en el juego inicial. Así, es interesante comparar los valores de Shapley de los jugadores en el juego que surge tras la formación del consorcio con los valores de Shapley en el juego inicial; tanto para los jugadores que forman un consorcio como para los demás. Consideraremos el incremento
$$\Delta_i^S \varphi[v] \quad = \quad \varphi_i[v^S] - \varphi_i[v].$$

También es interesante proporcionar una medida *global* sobre la formación del consorcio. Esta medida se obtendrá evaluando

$$\Delta_S\varphi[v] = \varphi_S[v^S] - \varphi_S[v] = \sum_{i\in S} \Delta_i^S\varphi[v].$$

Para la formación del consorcio, en principio, parece importante que $\Delta_i^S\varphi[v] > 0$ se cumpla para cada $i \in S$. No obstante, si ello no se cumple pero al menos se satisface $\Delta_S\varphi[v] > 0$, podría pensarse en una redistribución de las utilidades entre los miembros de S de modo que fuese convincente para todos sus jugadores. Por consiguiente, este incremento nos facilita una medida de la conveniencia de formar o no un consorcio.

Definición. Un consorcio formado por una coalición $S \subseteq N$ es, respecto a φ, *positivo* si $\Delta_S\varphi[v] > 0$, *negativo* si $\Delta_S\varphi[v] < 0$ y *nulo* o *indiferente* si $\Delta_S\varphi[v] = 0$.

Así, si la diferencia es positiva es beneficioso para el conjunto de los jugadores de S actuar en consorcio, mientras que si es negativa no será recomendable.

Sean v un juego en $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de índices $R = \{1, 2, \ldots, m\}$ con $m \geq 2$. Consideramos $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ con $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq N$ tales que $S_k \cap S_l = \emptyset$ para todo $k, l \in R$ siendo $k \neq l$. Consideraremos el incremento $\Delta_i^{\mathbb{S}}\varphi[v] = \varphi_i[v^{\mathbb{S}}] - \varphi_i[v]$, tanto si $i \in S_k$ para algún $k \in R$, como si $i \notin S_k$ para todo $k \in R$. Si $i, j \in T$, en adelante utilizaremos la notación $T_i = T \setminus \{i\}$, $T_{ij} = T \setminus \{i, j\}$, y así sucesivamente.

Teorema. Con las condiciones anteriores, para cada $\mathbb{S}$ se cumple:

(a) $$\Delta_i^{\mathbb{S}}\varphi[v] = \sum_{T \supseteq \mathbb{S}} \gamma_n(t)[v(T_i) - v(T \setminus S_k)] +$$

$$\sum_{\substack{T \supseteq S_k \\ \mathbb{S}\setminus S_k \nsubseteq T}} \gamma_n(t)[v(T \setminus \bigcup_{j\in R\setminus\{k\}} S_j) - v(T) + v(T_i) - v(T \setminus \mathbb{S})] +$$

$$\sum_{l_1 \in R\setminus\{k\}} \sum_{\substack{T \supseteq S_k, S_{l_1} \\ \mathbb{S}\setminus\{S_k, S_{l_1}\} \nsubseteq T}} \gamma_n(t)\Big[v(T \setminus \bigcup_{j\in R\setminus\{k, l_1\}} S_j) - v(T) + v(T_i) - v(T \setminus \bigcup_{j\in R\setminus\{l_1\}} S_j)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{l_1 \in R\setminus\{k\}} \sum_{l_2 \in R\setminus\{k, l_1\}} \sum_{\substack{T \supseteq S_k, S_{l_1}, S_{l_2} \\ \mathbb{S}\setminus\{S_k, S_{l_1}, S_{l_2}\} \nsubseteq T}} \gamma_n(t)\Big[v(T \setminus \bigcup_{j\in R\setminus\{k, l_1, l_2\}} S_j) - v(T) + v(T_i) -$$

$$v(T \setminus \bigcup_{j\in R\setminus\{l_1, l_2\}} S_j)\Big]$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{l_1\in R\smallsetminus\{k\}}\ \sum_{l_2\in R\smallsetminus\{k,l_1\}}\ \sum_{l_3\in R\smallsetminus\{k,l_1,l_2\}}\ \sum_{\substack{T\supseteq S_k,S_{l_1},S_{l_2},S_{l_3}\\ \mathbb{S}\setminus\{S_k,S_{l_1},S_{l_2},S_{l_3}\}\not\subseteq T}} \gamma_n(t)\Big[v(T\setminus \bigcup_{j\in R\smallsetminus\{k,l_1,l_2,l_3\}} S_j)$$

$$-v(T)+v(T_i)-v(T\setminus \bigcup_{j\in R\smallsetminus\{l_1,l_2,l_3\}} S_j)\Big]+\cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(m-2)!}\sum_{l_1\in R\smallsetminus\{k\}}\cdots\sum_{l_{m-2}\in R\smallsetminus\{k,l_1,\ldots,l_{m-3}\}}\ \sum_{\substack{T\supseteq S_k,S_{l_1},\ldots,S_{l_{m-2}}\\ \mathbb{S}\setminus\{S_k,S_{l_1},\ldots,S_{l_{m-2}}\}\not\subseteq T}} \gamma_n(t)\Big[v(T\setminus \bigcup_{j\in R\smallsetminus\{k,l_1,\ldots,l_{m-2}\}} S_j)$$

$$-v(T)+v(T_i)-v(T\setminus \bigcup_{j\in R\smallsetminus\{l_1,\ldots,l_{m-2}\}} S_j)\Big]-\sum_{\substack{T\ni i\\ S_k\not\subseteq T}}\gamma_n(t)[v(T)-v(T_i)],$$

si $i\in S_k$ para algún $k\in R$.

(b) $\Delta_{\mathbb{S}}\varphi[v]=\sum_{\substack{i\in S_k\\ k\in R}}\Delta_i^{\mathbb{S}}\varphi[v].$

(c) $$\Delta_i^{\mathbb{S}}\varphi[v]=\sum_{j\in R}\ \sum_{\substack{T\supseteq S_j\\ \mathbb{S}\setminus S_j\not\subseteq T}}\gamma_n(t)[v(T\setminus S_j)-v(T)+v(T_i)-v(T_i\setminus S_j)]+$$

$$\frac{1}{2!}\sum_{j\in R}\ \sum_{k\in R\smallsetminus\{j\}}\ \sum_{\substack{T\supseteq S_j,S_k\\ \mathbb{S}\setminus\{S_j,S_k\}\not\subseteq T}}\gamma_n(t)\Big[v(T\setminus(S_j\cup S_k))-v(T)+v(T_i)-$$

$$v(T_i\setminus(S_j\cup S_k))\Big]+$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{l_1\in R}\ \sum_{l_2\in R\smallsetminus\{l_1\}}\cdots\sum_{l_{m-1}\in R\smallsetminus\{l_1,\ldots,l_{m-2}\}}\ \sum_{\substack{T\supseteq S_{l_1},\ldots,S_{l_{m-1}}\\ \mathbb{S}\setminus\{S_{l_1},\ldots,S_{l_{m-1}}\}\not\subseteq T}}\gamma_n(t)\Big[v(T\setminus\bigcup_{j=l_1}^{l_{m-1}}S_j)$$

$$-v(T)+v(T_i)-v(T_i\setminus\bigcup_{j=l_1}^{l_{m-1}}S_j)\Big],\qquad \text{si } i\notin S_k \text{ para todo } k\in R.$$

4. CONSORCIOS EN JUEGOS SIMPLES

A continuación, analizamos un ejemplo de formación de dos consorcios simultáneos en el caso particular de los juegos simples, que constituyen una clase especialmente interesante de juegos cooperativos. Notemos que la clase de los juegos simples es invariante bajo la formación de consorcios, es decir, si $v \in \mathcal{SG}_N$ y $\emptyset \neq S \subseteq N$ entonces $v^S \in \mathcal{SG}_N$.

Ejemplo. Se considera el juego de mayoría ponderada

$$v \equiv [21; 14, 12, 7, 4, 4]$$

correspondiente al Ayuntamiento de Barcelona (2007–2011).

Cuadro 1: Composición del Ayuntamiento de Barcelona (2007–2011).

	Grupo municipal	*Concejales*
1. PSC	Partit dels Socialistes de Catalunya	14
2. CiU	Convergència i Unió	12
3. PPC	Partit Popular de Catalunya	7
4. ERC	Esquerra Republicana de Catalunya	4
5. ICV-EUiA	Iniciativa per Catalunya Verds-Esquerra Unida i Alternativa	4
Total		41

Supongamos que CiU y ERC (jugadores 2 y 4, respectivamente) por un lado, y PSC e ICV (jugadores 1 y 5, respectivamente) por otro, deciden formar consorcio. Surgen así dos consorcios simultáneos $S_1 = \{2, 4\}$ y $S_2 = \{1, 5\}$. Determinamos $\Delta_i^{\{S_1,S_2\}}\varphi[v]$ para cada jugador.

Cuadro 2: Formación de dos consorcios simultáneos en el Ayuntamiento de Barcelona.

	i	1	2	3	4	5	$\Delta_{\mathbb{S}}\varphi[v]$
	$\varphi_i[v]$	0.4000	0.2333	0.2333	0.0667	0.0667	
$S_1 = \{2, 4\}$	$\varphi_i[v^{\{S_1\}}]$	0.3333	0.1667	0.3333	0.1667	0	0.0667
$S_2 = \{1, 5\}$	$\varphi_i[v^{\{S_2\}}]$	0.2500	0.1667	0.1667	0.1667	0.2500	-0.1000
$\{S_1, S_2\}$	$\varphi_i[v^{\{S_1,S_2\}}]$	0.1833	0.1833	0.2667	0.1833	0.1833	-0.0333
	$\Delta_i^{\{S_1,S_2\}}\varphi[v]$	-0.2167	-0.0500	0.0333	0.1167	0.1167	

Observamos que la formación de los consorcios no es recomendable desde un punto de vista global. No obstante, individualmente los partidos que forman parte del consorcio y tienen un menor número de concejales son los beneficiados de dicha formación, junto con el jugador 3 que, aunque no está en ningún consorcio, también se beneficia de la nueva situación. Globalmente el más perjudicado es el jugador 1.

Agradecimientos. Este trabajo ha contado con la financiación parcial del proyecto MTM 2006-06064 del Ministerio de Educación y Ciencia y de la European

Regional Development Fund, y del proyecto SGR 2005-00651 del Gobierno de la Generalitat de Catalunya.

REFERENCIAS

Carreras, F. (1996) On the existence and formation of partnerships in a game. Games and Economic Behavior, 12, 54–67.

Carreras, F.; Llongueras, M. D.; Magaña, A. (2005) On the convenience to form coalitions or partnerships in simple games. Annals of Operations Research, 137, 67–89.

Kalai, E. y Samet, D. (1987) On weighted Shapley values. International Journal of Game Theory, 16, 205–222.

Shapley, L. S. (1953) A value for n–person games. En: Contributions to the Theory of Games II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.). Princeton University Press, 307–317.