



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS



DEPARTAMENTO DE RESISTENCIA DE MATERIALES
Y ESTRUCTURAS EN LA INGENIERÍA

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROCESOS DE
COMPACTACIÓN Y EXTRUSIÓN DE
MATERIALES PULVERULENTOS**

Aplicación a la Pulvimetalurgia Industrial

TESIS DOCTORAL

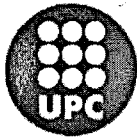
Presentada por:

RAFAEL WEYLER PÉREZ

Dirigida por el profesor:

Dr. XAVIER OLIVER OLIVELLA

Barcelona, Mayo de 2000.



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**



**DEPARTAMENTO DE RESISTENCIA DE MATERIALES
Y ESTRUCTURAS EN LA INGENIERÍA**

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROCESOS DE COMPACTACIÓN Y EXTRUSIÓN DE MATERIALES PULVERULENTOS

Aplicación a la Pulvimetalurgia Industrial

TRABAJO REALIZADO COMO PARTE DE LOS REQUISITOS
EXIGIDOS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR.

Presentada por:

RAFAEL WEYLER PÉREZ

Dirigida por el profesor:

Dr. XAVIER OLIVER OLIVELLA

Barcelona, Mayo de 2000.

*A mi abuela por su fe
en este momento*

Agradecimientos

Mi sincero agradecimiento al Dr. Xavier Oliver Olivella por la inestimable ayuda que me prestó al aceptar la supervisión de esta tesis y de quien he recibido doctos consejos y sugerentes recomendaciones.

Al Dr. Antonio Viedma Martínez por haberme iniciado en el largo camino de la investigación y por su valioso apoyo durante todos estos años.

Al Dr. Gabriel Bugada Castelltort por proporcionarme amablemente el mallador.

También he de expresar mi gratitud a la Generalitat de Catalunya, Direcció General de Recerca, por la colaboración económica recibida a través del Programa de becas predoctorales para la formación de personal investigador.

A la Asociación de Ingenieros Industriales de Catalunya por la concesión de la Beca para la realización de tesis doctorales de la carrera de Ingeniero Industrial.

A AMES, SA. por la información y documentación técnica facilitada.

Y a todos aquellos a quienes he solicitado consejo e informaciones y en especial al Dr. Juan Carlos Cante Terán y al Dr. Sergio Oller Martínez, por su ayuda y colaboración.

Índice General

1	Descripción del problema. Objetivos.	1
1.1	Proceso industrial.	2
1.2	Compactación uniaxial en frío.	7
1.3	Objetivo de la tesis.	9
1.4	Contenido de la tesis.	10
2	Antecedentes.	13
2.1	Modelos para la compactación de pulvimateriales.	14
2.1.1	Modelos fenomenológicos macroscópicos.	15
2.2	Deficiencias de los modelos macroscópicos actuales.	31
3	Formulación del modelo constitutivo.	35
3.1	Cinemática.	36
3.2	Modelo constitutivo.	40
3.2.1	Modelo elástico.	41
3.2.2	Modelo plástico.	42
3.2.3	Tensor elastoplástico tangente.	48
3.2.4	Modelo plástico particular.	50
3.2.5	Modelo viscoplástico.	58
3.3	Integración de la ecuación constitutiva.	59
3.4	Modelo de fricción.	71
A1	Evolución de las variables de endurecimiento.	75
A1.1	Modelo continuo.	75
A1.2	Modelo discreto.	77
A2	Cálculo del corrector plástico.	79
A2.1	Cálculo del caso general.	79
A2.1.1	Direcciones de flujo.	79
A2.1.2	Cálculo de los multiplicadores plásticos.	81
A2.1.3	Cálculo de la variable interna de endurecimiento.	86

A2.2	Simplificación del modelo general.	87
A2.3	Definiciones.	89
A3	Calculo del tensor constitutivo tangente.	93
A3.1	Tensor constitutivo tangente continuo.	93
A3.2	Tensor constitutivo tangente. Formulación compacta.	95
A3.3	Tensor constitutivo tangente. Modelo general.	98
A3.3.1	Linealización del predictor elástico.	98
A3.3.2	Linealización de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$	103
A3.3.3	Linealización del estado tensional.	104
A3.4	Tensor constitutivo tangente. Particularización modelo general.	108
A3.5	Tensor constitutivo tangente. Modelo viscoplástico.	110
A3.6	Definiciones.	112
4	Discretización por elementos finitos.	121
4.1	Formulación de Galerkin.	122
4.1.1	Formulación continua.	122
4.1.2	Discretización del modelo.	124
4.1.3	Modelo de fricción.	126
4.2	Formulación mixta.	131
4.2.1	Formulación mixta continua.	131
4.2.2	Discretización del modelo mixto.	134
4.2.3	Modelo de fricción.	138
4.3	Discretización e implementación de la matriz tangente.	139
4.3.1	Linealización de la formulación de Galerkin.	140
4.3.2	Linealización de la formulación mixta.	143
B1	Cálculo de la matriz de rigidez tangente.	153
B1.1	Linealización de la formulación de Galerkin.	153
B1.1.1	Linealización de las fuerzas internas.	153
B1.1.2	Linealización de las fuerzas externas.	155
B1.2	Linealización de la formulación de mixta.	163
B1.2.1	Linealización de las fuerzas internas.	163
B1.2.2	Linealización de las fuerzas externas.	171
5	Adaptación a una metodología del tipo lagrangiano actualizado.	
	Remallado automático.	181
5.1	Descomposición del problema.	182
5.1.1	Consideraciones sobre la formulación mixta.	188
5.2	Estrategia automática de remallado.	189
5.2.1	Estimador de error.	190

5.2.2	Criterio automático de remallado.	192
5.2.3	Optimización y definición de la nueva malla.	194
5.2.4	Transferencia de información.	200
C1	Descomposición del movimiento para la formulación mixta.	203
C1.1	Modelo continuo.	203
C1.2	Modelo discreto.	204
C2	Transferencia de información.	207
6	Ejemplos de simulación numérica.	211
6.1	Definición de datos.	211
6.2	Ejemplos de simulación.	218
6.2.1	Compactación de una pieza cilíndrica.	218
6.2.2	Compactación de un casquillo de gran esbeltez.	225
6.2.3	Pieza 4844.	230
7	Conclusiones y líneas futuras.	253
7.1	Conclusiones.	253
7.2	Líneas futuras.	255

Capítulo 1

Descripción del problema. Objetivos.

Tradicionalmente, la pulvimetalurgia se ha definido como la producción de componentes a partir de polvos metálicos sin pasar por el estado fundido. En la actualidad esta definición es excesivamente restrictiva, ya que se trata de una técnica versátil empleada en la producción de componentes metálicos y no metálicos. Está especialmente indicada en el caso de materiales de elevado punto de fusión, metales duros o de la elaboración de piezas con porosidad controlada como cojinetes o filtros. Son éstos los casos que han propiciado el desarrollo de esta técnica de fabricación, más que las razones económicas o los requisitos energéticos del proceso.

Inicialmente, la pulvimetalurgia era empleada en la elaboración de piezas que eran muy difíciles o imposibles de obtener por otros medios con la tecnología existente. Ejemplo de ello era la elaboración de componentes de elevado punto de fusión como el Wolframio, cuya demanda en la elaboración de lámparas eléctricas incandescentes motivó un avance significativo en el desarrollo de la pulvimetalurgia [33]. También era empleada cuando se deseaba conseguir unas propiedades difíciles de obtener por otros métodos. Sin embargo, actualmente la pulvimetalurgia es una técnica de uso corriente y con una aplicación creciente. Ello es debido a la capacidad de producir piezas complejas de forma rápida y simple, con unas tolerancias muy ajustadas que reducen considerablemente la necesidad de maquinados posteriores, haciendo de ella una técnica económicamente competitiva. Además, las mejoras en la calidad y composición de los polvos, el empleo de mejores prensas y hornos junto con una gran variedad de tratamientos post-sinterizados han permitido en numerosas ocasiones obtener piezas con unas prestaciones preferibles a las conseguidas con métodos tradicionales.

En contrapartida, no todas las geometrías ni tamaños son susceptibles de poder ser fabricados con esta técnica. Y de ser factible, en ocasiones resulta necesario

efectuar mecanizados posteriores [46]. Otra limitación importante son los elevados costes de matricería, siendo sólo amortizables en la producción de grandes series. Además, la calidad del producto acabado mejora con la presión aplicada, haciéndose necesario el empleo de prensas de gran capacidad. No obstante, la resistencia mecánica suele ser inferior a la de las piezas macizas. Otra de las desventajas de la pulvimetalurgia es el elevado coste del polvo empleado como materia prima.

Hoy día, la producción de la pulvimetalurgia va destinada principalmente a la industria automovilística, seguida muy de lejos por la industria aeronáutica, eléctrica, electrónica, armamentística, máquina herramienta, etc.

1.1 Proceso industrial.

En líneas generales, la elaboración de una pieza consiste en dar a la mezcla de polvo la forma deseada y posteriormente dotar a la pieza de las propiedades mecánicas finales, existiendo para ello diversos procedimientos. No obstante, salvo ligeras variantes el proceso de fabricación se subdivide fundamentalmente en cuatro etapas: la elaboración y preparación del material, la compactación, el sinterizado y en determinados casos la ejecución de operaciones suplementarias.

Preparación del material.

Aparte de la composición química, las características básicas del polvo son el tamaño de la partícula, la distribución de tamaños, la forma de la partícula y la superficie específica de las mismas [46]. Estas propiedades están íntimamente ligadas al procedimiento utilizado en su obtención. Existen diversos métodos de producción, pudiendo ser estos mecánicos, químicos, electrolíticos o por atomización. La elección de uno u otro dependerá de las propiedades requeridas para el polvo, las cuales marcarán su comportamiento durante el proceso de fabricación y las características finales del producto acabado. En la figura 1.1 se muestran distintas morfologías típicas de materiales pulverulentos.

Las partículas muy finas e irregulares proporcionan grandes superficies de contacto que favorecen los enlaces entre partículas pero dificultan la fluidez del polvo. Por otro lado, las partículas de forma esférica tienen una buena fluidez, facilitando el movimiento del polvo de unas zonas a otras, sin embargo generan menores superficies de contacto entre partículas.

Otro aspecto a tener en cuenta es la mezcla de polvos de distinta granulometría, morfología y composición. En este sentido, la mezcla es un importante proceso que implica más de un constituyente. La homogeneidad de las propiedades del compacto dependerá en gran medida de la uniformidad de la mezcla.

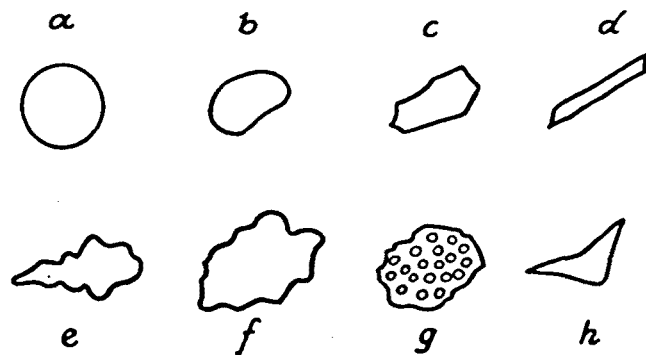


Figura 1.1: Morfologías correspondientes a materiales pulverulentos: (a) Esférica, (b) redondeada, (c) angular, (d) acicular, (e) dendrítica, (f) irregular, (g) porosa, (h) fragmentada.

Compactación.

La compactación es una etapa intermedia dentro del proceso de fabricación pero de especial importancia. Su finalidad es consolidar el polvo en la forma deseada, darle el grado de porosidad requerido y proporcionarle la resistencia adecuada para su manipulación. La capacidad para producir componentes con la forma y dimensiones apropiadas dependen en gran medida de este proceso, marcando la viabilidad económica de esta técnica de fabricación. En particular, la pérdida de homogeneidad produce distorsiones en la forma de la pieza durante el sinterizado, llegando en casos extremos a provocar la fractura del compacto. Por ello, las pautas de diseño están principalmente definidas por la homogeneidad de las propiedades del compacto así como por las dimensiones finales del mismo, teniendo en cuenta cualquier cambio dimensional que resulte de procesos posteriores como el sinterizado.

En líneas generales, las técnicas de compactación pueden clasificarse en técnicas de conformado sin presión y técnicas de conformado con presión. El primero es empleado para conseguir piezas altamente porosas como filtros o láminas porosas para electrodos. Básicamente consiste en sinterizar el polvo sin más compactación que la conseguida por la gravedad o la vibración, obteniendo piezas poco densas y resistentes. Las técnicas de conformado con presión son las más comunes. En ellas, la aplicación de presión puede efectuarse en frío o en caliente. Durante la compactación en caliente, la consolidación y el sinterizado se realizan de forma simultánea, mejorando la compresibilidad del material y las prestaciones del producto acabado [40], al tiempo que se aumentan las dificultades técnicas y los costes. Este tipo de prensado suele ser empleado en la elaboración de piezas muy duras de carburos cementados o metal duro. Por contra, la compactación en frío únicamente persigue la consolidación del polvo, siendo éste el proceso más frecuente en la industria.

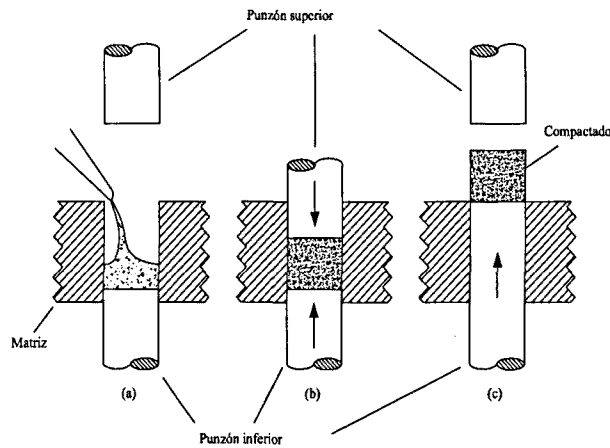


Figura 1.2: Secuencia de compactación: (a) Llenado, (b) Prensado, (c) Expulsión.

De entre todas ellas, el presente trabajo se centra exclusivamente en el proceso de compactación en frío por troquel o compactación uniaxial.

En la figura 1.2 se muestran las etapas usuales que intervienen en la compactación uniaxial en frío. La aplicación de presión se consigue mediante el movimiento adecuado de los punzones, cuya secuencia de movimientos tiene una influencia directa en las propiedades del producto final. Básicamente, el proceso consiste en: llenar la cavidad o cámara de compactación con polvo, consolidar el material mediante aplicación de presión, y posteriormente proceder a la expulsión del aglomerado. Las prensas utilizadas para tal fin pueden ser mecánicas o hidráulicas. La diferencia entre ambas radica en que las primeras permiten controlar el desplazamiento de los punzones (control en desplazamiento), mientras que las segundas permiten controlar la presión aplicada por los punzones (control en fuerzas).

La densificación de material se produce durante el prensado. La distribución de densidades en el compacto resultante es una de las propiedades más útiles, indicando la calidad del prensado y determinando el comportamiento del material durante las etapas posteriores. Como regla general, la densidad del polvo en verde aumenta con el incremento de presión, la compresibilidad del polvo, la disminución de la dureza y resistencia de las partículas y con la reducción de la velocidad de compactación. Así mismo, el incremento de la presión de compactación o la densidad del compacto favorecen el aumento de la resistencia de éste. Por otro lado, la homogeneidad de las propiedades (entre ellas la densidad) depende principalmente de factores como la fricción polvo-matriz, la geometría de la pieza, la fluidez del polvo, la secuencia de compactación y la velocidad de prensado, entre otras. La capacidad de encontrar una secuencia de compactación que, teniendo en cuenta estos factores, permita obtener

una distribución uniforme de densidades marcará en gran medida la viabilidad de emplear esta técnica de fabricación.

Sinterizado.

El resultado de la compactación es un conglomerado frágil con una resistencia suficiente para su manipulación, pero que en ningún caso posee unas prestaciones mecánicas aptas para su uso ingenieril. El sinterizado tiene por objeto incrementar dichas prestaciones mecánicas hasta un nivel aceptable. Se trata de un proceso físico-químico que se lleva a cabo elevando la temperatura del aglomerado.

La soldadura entre partículas se produce por difusión atómica, razón por la que la temperatura de sinterizado es inferior a la temperatura de fusión del material base, siendo en algunos casos considerablemente menor. Ello permite el uso de hornos más simples y reduce las necesidades energéticas considerablemente. Sin embargo, el polvo es una mezcla de distintos componentes, alguno de los cuales puede fundir durante el sinterizado dando lugar a lo que se denomina sinterizado de fase líquida. La formación de una fase líquida facilita la difusión, y con ello el proceso de sinterización, no obstante el incremento de líquido puede generar deformaciones indeseables de la geometría. El aumento de la densidad incrementa la superficie de contacto entre partículas, favoreciendo el sinterizado. Así mismo, el aumento de la temperatura y el tiempo de exposición son las variables ambientales que tienden también a favorecer el sinterizado.

Normalmente el proceso se desarrolla en hornos de atmósfera controlada, la cual se consigue en numerosas situaciones a partir de los gases residuales procedentes de la combustión del carburante (frecuentemente gas natural o propano).

Existe un gran interés en conocer los mecanismos que intervienen en el sinterizado, siendo ésta una de las áreas de investigación que la pulvimetalurgia tiene abiertas.

Operaciones suplementarias.

En algunos casos, la pieza después de sinterizada es sometida a procesos adicionales con la finalidad de mejorar alguna de las propiedades o modificar las dimensiones. Ejemplo de ello es el *presionado final de represión*, que consiste en comprimir la pieza sinterizada efectuando un trabajo en frío con la finalidad de aumentar la densidad y mejorar las propiedades mecánicas. También se utiliza para afinar las dimensiones en piezas de tolerancia más fina.

Una alternativa más eficiente pero más costosa es el *presinterizado*. En ella, el sinterizado se interrumpe a una temperatura intermedia, donde el compacto presenta una buena maquinabilidad. Un caso especial es el *forjado-sinterizado*, que se aplica cuando se pretende aumentar la densidad y cambiar significativamente la forma de

la pieza. En ocasiones, el resinterizado posterior incrementa considerablemente las propiedades mecánicas, pudiendo ocasionar un encogimiento de la pieza.

En otras ocasiones se efectúa un reprensado en frío, conocido por calibrado, con la finalidad de corregir las dimensiones y no con la intención de mejorar las prestaciones mecánicas.

Al igual que las piezas obtenidas con otras técnicas, las piezas sinterizadas son susceptibles de ser sometidas a tratamientos térmicos con la finalidad de modificar sus propiedades.

Otro proceso es el infiltrado que consiste en rellenar los poros superficiales con otro metal de más bajo punto de fusión como el plomo. Otra variante es la impregnación, técnica similar en la que los poros superficiales se impregnan de materiales orgánicos como aceites o ceras. Estos procesos reducen el riesgo de absorber elementos corrosivos en manipulaciones posteriores, mejoran la capacidad de maquinado y las propiedades antifriccionales.

Adicionalmente, se pueden efectuar diversas operaciones para completar la manufactura de las piezas sinterizadas, como el maquinado, cizallamiento, esmerilado, pulido, etc. No obstante, conviene que estos procesos sean los mínimos posibles, puesto que incrementan considerablemente los costes de producción.

Limitaciones en el diseño.

Las posibilidades geométricas de las piezas producidas son enormes, aunque la etapa de compactación impone unas severas limitaciones. Algunas de estas limitaciones pueden apreciarse en la figura 1.3. Aunque el tamaño de las piezas a compactar supone una limitación, esta es salvable con el uso de prensas de mayor capacidad. Otra restricción, técnicamente más compleja de solventar, es consecuencia directa de la geometría de la pieza. La fluidez de los polvos es limitada, haciendo que las esquinas, las zonas esbeltas y las zonas de la cámara de compactación inicialmente vacías pueden ser difíciles de llenar durante la compactación, resultando regiones menos densificadas. También se deben evitar las paredes delgadas y las esquinas afiladas en la cámara de compactación por las heterogeneidades que generan y el riesgo de fractura que conllevan durante la expulsión.

La expulsión del aglomerado también supone una limitación sobre la geometría de la pieza. Las acanaladuras y los orificios transversales a la dirección de prensado, los conos invertidos y los roscados impiden la expulsión del compacto y deben hacerse por maquinado.

Otro aspecto a evitar son las formas esbeltas y bordes afilados en los punzones, ya que tienden a romperse incrementando los costes de mantenimiento. La elaboración de piezas con tolerancias de precisión también requiere un mayor mantenimiento de los utillajes, ya que el desgaste sufrido por éstos obliga a reemplazarlos con mayor

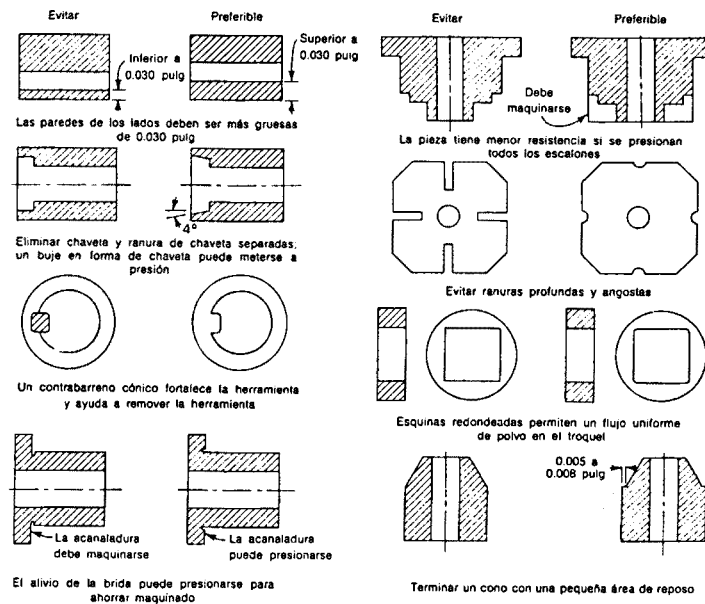


Figura 1.3: Recomendaciones de diseño para la fabricación de piezas sinterizadas.

frecuencia.

En muchas ocasiones, las piezas poseen unas características geométricas que impiden su obtención directa a partir de la compactación, generando un producto semiacabado que debe ser corregido posteriormente por maquinado.

1.2 Compactación uniaxial en frío.

Como se aprecia en las figuras 1.2 y 1.4, el proceso de compactación está compuesto por cuatro etapas: llenado de la cavidad o cámara de compactación, transporte de cámaras, prensado y expulsión. La tolva de alimentación se coloca sobre la parte inferior de la cámara de compactación y se procede a llenarla completamente de polvo con ayuda de la gravedad. Posteriormente, se procede a enrasar a nivel con la cara superior de la matriz, eliminando la porción de polvo rebosante. Acto seguido, la tolva se retira y los punzones superiores se desplazan para cerrar la cámara de compactación y proceder al prensado.

Como se aprecia en la figura 1.4, en numerosas ocasiones resulta técnicamente imposible llenar toda la cámara de compactación durante la operación de llenado, quedando ésta vacía en su parte superior. El relleno de esta zona se efectúa con el movimiento de los punzones y la matriz, añadiendo una etapa adicional al proceso.

En cualquier caso, como ya se mencionó en el apartado 1.1, el objetivo de la

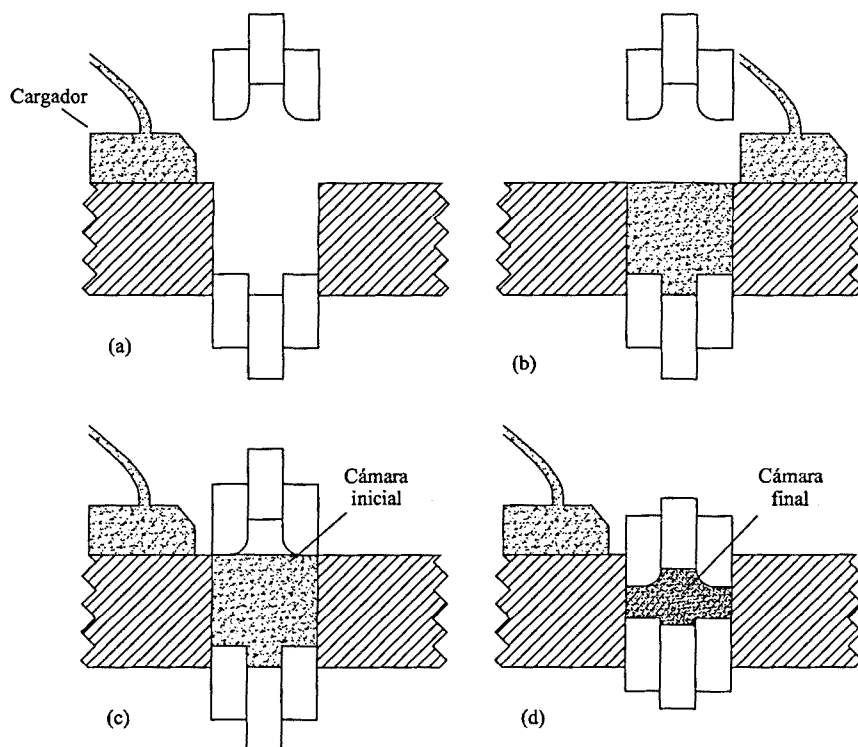


Figura 1.4: Etapas del proceso de compactación: (a) Cámara inicial abierta, (b) Llenado de la cámara inicial, (c) Cierre de la cámara inicial, (d) Cámara final.

fase de la compactación es obtener un compacto de dimensiones apropiadas y con una distribución de densidades lo más uniforme posible. Ello se consigue aplicando sobre los punzones una secuencia adecuada de movimientos. No obstante, dicha secuencia estará íntimamente relacionada con la geometría de la cámara inicial, siendo ésta otro parámetro de diseño independiente de especial relevancia cuando resulta imposible llenar la cámara de compactación.

Descripción de la fase de transporte de cámaras y transferencia. En numerosas ocasiones, el llenado de la cámara inicial es un problema complejo que puede influir considerablemente en la secuencia de prensado y en las propiedades finales del compacto. Existen numerosas geometrías en las que la cámara inicial queda parcialmente llena, siendo necesario rediseñar la cámara y el movimiento de los punzones para conseguir llenarla. Esta secuencia se puede efectuar con la intención de mover simplemente el polvo de unas zonas a otras sin compactarlo, proceso denominado transporte de cámaras, o efectuando una compactación en determinadas regiones con la intención que se transfiera polvo desde la zona prensada a la zona vacía,

proceso denominado transferencia. En la práctica ambos procesos producen una compactación local del material. No obstante, un criterio para distinguir ambas se obtiene en función del volumen de la cámara de compactación. Impidiendo el movimiento relativo entre los punzones que están en contacto con la zona sin rellenar, el volumen de la cámara de compactación se mantiene constante durante el transporte de cámaras. Por contra, durante la transferencia el volumen se reduce.

Normalmente, el transporte de cámaras se efectúa bajando los punzones superiores y la matriz junto con los punzones inferiores más elevados. Por contra, durante la transferencia se mantienen fijos los punzones inferiores al tiempo que se bajan los punzones superiores y la matriz.

Descripción de la fase de prensado. Durante la fase de prensado se produce la densificación del material en todas las regiones de la cámara de compactación. Generalmente, la frontera entre el transporte de cámaras y el prensado es difusa, resultando imposible identificar cuando termina una y comienza la otra. Lo mismo puede decirse de la transferencia. Un criterio lógico es definir el inicio de la fase de prensado cuando la cámara de compactación se ha llenado completamente, lo que puede suceder estando muy avanzada la compactación. Esto indica la imposibilidad de separar la fase de transferencia/transporte de cámaras de la fase de prensado, obligando a diseñar ambas fases de forma conjunta.

1.3 Objetivo de la tesis.

Como ya se ha mencionado anteriormente, es conocido que uno de los principales problemas asociado a la fabricación de piezas sinterizadas se debe a la pérdida de homogeneidad en las propiedades del compacto obtenido durante la etapa de compactación. Por ello, es primordial encontrar una secuencia de compactación apropiada durante la fase de diseño que haga factible la producción de la pieza. Es en este entorno donde la simulación por ordenador está empezando a ser empleada con la finalidad de ser una herramienta complementaria que ayude a encontrar la secuencia de compactación óptima con el mínimo número de pruebas experimentales, ayudando a reducir de esta forma los costes del proceso.

Actualmente, la investigación destinada a la simulación numérica de los procesos de compactación se centra principalmente en la etapa de prensado. Sin embargo, existen numerosos casos prácticos en los que antes de prensar es necesario efectuar un movimiento previo de los punzones con la finalidad de reubicar el polvo para llenar al cámara de compactación. Este proceso, denominado transporte de cámaras o transferencia, puede ser relevante tanto para definir la secuencia óptima de compactación como para predecir correctamente la distribución final de las propiedades

del compacto.

El objetivo principal de la tesis se centra en la ampliación y mejora de la simulación numérica de la fase de compactación de pulvimateriales, considerando adicionalmente las etapas de transporte de cámaras y transferencia, con la finalidad de facilitar y mejorar el desarrollo y diseño de los procesos de compactación. La tesis forma parte de una línea de investigación de más largo alcance destinada a la simulación numérica de todo el proceso de fabricación. En este sentido, el trabajo desarrollado incorpora el estudio de nuevas etapas que intervienen durante la compactación, aumentando el realismo de los procesos de compactación simulados.

Con este propósito, se deben desarrollar unas líneas de trabajo como partes complementarias del objetivo final:

- Formulación de un modelo constitutivo capaz de simular de forma conjunta la fase de transferencia/transporte de cámaras y la fase de prensado. En lo posible, el modelo propuesto deberá ampliar o integrar el modelo desarrollado en el estudio de la fase de prensado por considerarlo válido para describir el comportamiento del pulvimaterial durante la etapa intermedia/final del prensado. En caso contrario, el nuevo modelo a desarrollar deberá proporcionar la misma calidad de respuesta durante estas etapas.
- Implementación del modelo numérico, contemplando la posibilidad de reproducir movimientos sin compactación.
- Ampliación y mejora del código informático desarrollado para el estudio de la fase de prensado. Siendo claramente previsible la necesidad de desarrollar una estrategia de remallado automático.
- Validación de la herramienta propuesta.

1.4 Contenido de la tesis.

Se presenta un modelo numérico que permite estudiar conjuntamente las etapas de transferencia/transporte de cámaras y de prensado. Para la consecución de tal objetivo, la tesis se estructura en siete capítulos que son brevemente presentados a continuación.

En el capítulo 2 se hace una breve descripción de los modelos empleados hasta la fecha para la simulación numérica del proceso de compactación. También se exponen brevemente las limitaciones que presentan estos modelos y que podrían marcar las directrices de trabajo en un futuro inmediato.

En el capítulo 3 se desarrolla la formulación matemática del modelo numérico propuesto. En primer lugar se hace una presentación de la cinemática en la que

se desarrolla el problema. También se formula el modelo constitutivo propuesto, haciendo especial énfasis en la superficie de fluencia, la regla de flujo, las variables de endurecimiento y la disipación, siendo éstas desarrolladas de una forma genérica. Posteriormente, se presenta el modelo aplicado en esta tesis para el estudio del proceso conjunto de las etapas de transferencia/transporte de cámaras y de prensado, siendo este modelo un caso particular del modelo genérico comentado previamente. El capítulo se completa con tres anexos en los que se desarrolla con detalle el algoritmo de retorno a la superficie de fluencia y el tensor constitutivo tangente (tanto para el caso general como para su particularización), así como la demostración de otros detalles de interés.

En el capítulo 4 se presenta la implementación numérica del modelo propuesto, formulando las ecuaciones que gobiernan el problema en su forma débil. El planteamiento se realiza en base a la formulación estándar de Galerkin y la formulación mixta de tres campos, destinada al estudio de problemas incompresibles. También se expone la problemática y la solución adoptada en la implementación de los términos adicionales procedentes del modelo de fricción. El capítulo se completa con un anexo donde se desarrolla detalladamente los términos de la matriz tangente que deben ser implementados, tanto en la formulación de Galerkin como en la formulación mixta.

En el capítulo 5 se describe una estrategia de remallado automático que permite eludir las distorsiones generadas por el empleo de una formulación lagrangiana. En la primera parte del capítulo se describen las modificaciones a realizar sobre las ecuaciones cinemáticas y sobre la ecuación constitutiva, con objeto de desarrollar una formulación del tipo lagrangiano actualizado. También se efectúan las modificaciones oportunas sobre la forma débil del problema, tanto en la formulación convencional de Galerkin como en la formulación mixta. En la segunda parte del capítulo se presentan los componentes que integran la estrategia automática de remallado propuesta para los procesos de compactación.

En el capítulo 6 se presentan ejemplos numéricos del proceso de compactación. El capítulo se subdivide en dos partes. En la primera se describe los parámetros que caracterizan al modelo numérico. Mientras que en la segunda se presentan los resultados numéricos obtenidos con el modelo propuesto para distintos ejemplos. Los dos primeros ejemplos estudiados son sencillos y conciernen sólo a la fase de prensado. La finalidad de estos ejemplos es verificar el modelo constitutivo y justificar el empleo de algunas herramientas numéricas. Los ejemplos restantes están destinados a estudiar la influencia de la transferencia y el transporte de cámaras en los procesos de prensado.

Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del estudio, sugiriendo las líneas futuras de investigación.

Capítulo 2

Antecedentes.

El mayor conocimiento y las mejoras efectuadas en el proceso de fabricación han propiciado la elaboración de piezas cada vez más complejas y con elevadas prestaciones a unos costes competitivos. Dentro de esta dinámica de innovación y desarrollo, en los últimos años ha habido un creciente interés en modelar el proceso con la finalidad de realizar diseños por ordenador y reducir al máximo los tradicionales métodos de prueba y error. En este sentido es fundamental modelar el pulvimaterial adecuadamente para posibilitar unos resultados cuantitativamente aceptables. No obstante, debido a la variedad de materiales y la complejidad de su comportamiento, la especificación, cuantificación y validación de los modelos constitutivos a partir de los resultados experimentales constituye todavía un problema delicado pendiente de solución.

Un importante requisito en la modelización de los pulvimateriales es la viabilidad para determinar los parámetros que intervienen en su definición. Los modelos propuestos deben ser calibrados y validados a partir de ensayos experimentales. Desde un punto de vista práctico, debe haber un equilibrio entre la cantidad de parámetros utilizados y la calidad de la respuesta suministrada por el modelo. Cuanto mayor sea el número de parámetros requeridos para definir el modelo mayor, será la cantidad de información necesaria para determinarlos, aumentando el número y la complejidad de los ensayos. Aspecto este que dificulta su implantación en la industria. En este sentido, los ensayos pueden ser clasificados en dos categorías: ensayos para la calibración de modelos y ensayos para la definición de modelos. Los primeros son ensayos pensados para ser aplicados por la industria, como por ejemplo el ensayo de compresión simple o una compactación uniaxial de simple efecto. Estos ensayos deben ser sencillos y baratos, capaces de suministrar la mínima información necesaria para determinar los parámetros que definen el modelo. El segundo tipo de ensayos se realiza con la finalidad de definir las características que debe poseer el modelo constitutivo, siendo normalmente desarrollados por grupos de investigación. Suelen

ser costosos y complejos (bien por el análisis que implica o por la complejidad técnica que supone llevarlos a cabo). Este tipo de ensayos también pueden ser empleados para validar la respuesta suministrada por el modelo.

Los modelos constitutivos presentados en este capítulo han sido pensados para simular la fase de prensado y la expulsión a lo sumo, obviando la fase de transferencia.

2.1 Modelos para la compactación de pulvimateriales.

Con el objetivo de comprender y modelar el comportamiento de los pulvimateriales se han propuesto numerosos modelos constitutivos. En líneas generales, los modelos matemáticos empleados para la simulación numérica de pulvimateriales pueden ser clasificados en función de la escala en que el problema sea analizado, esto es, a escala microscópica (modelos microscópicos) y a escala macroscópica (modelos macroscópicos).

Los modelos microscópicos analizan el comportamiento de cada partícula y su interacción con las partículas vecinas [2][3][25][51][59][69][96][108][113]. El objetivo de estos modelos es predecir el comportamiento de las partículas a nivel microscópico durante parte o todo el proceso de compactación con la finalidad de pronosticar las propiedades macroscópicas del material o reproducir algún comportamiento característico de éste. No obstante, estos modelos tienden a reproducir el comportamiento del polvo más cualitativamente que no cuantitativamente, normalmente debido al empleo de aproximaciones excesivamente simplistas como, por ejemplo, considerar que las partículas tienen una geometría simple (una esfera o un elipsoide) o un tamaño considerablemente mayor al real. En la práctica, estos modelos no son adecuados para simular procesos reales tanto por la calidad de los resultados obtenidos como por el coste computacional requerido en la simulación de casos prácticos.

Los modelos macroscópicos analizan el comportamiento de las partículas en su conjunto, tratando los poros homogéneamente y considerando al polvo como un medio continuo [1][22][39]. Para ello, los parámetros microscópicos que definen el comportamiento del polvo no se tienen en cuenta directamente, sino que son englobados en un conjunto de variables macroscópicas medibles que deben ser calibradas experimentalmente. Del mismo modo, el comportamiento del pulvimaterial se reproduce a nivel macroscópico quedando oculto aspectos como el incremento de las superficies de contacto entre partículas, el movimiento relativo entre ellas, etc.

Recientemente se están empleando una tercera categoría de modelos, modelos multinivel, que combinan los modelos microscópicos con los modelos macroscópicos basándose en la teoría de homogeneización. Básicamente, estos modelos estudian el

comportamiento de pulvimaterial a nivel microscópico en los puntos de integración, mientras que el equilibrio del medio se estudia a nivel macroscópico como un medio continuo. En esta categoría se encuentran los modelos que asumen una periodicidad en su estructura interna, como el propuesto por Tsumori *et al.* [112] para la compactación en caliente, que suponen la existencia de unidades estructurales conocidas por celdas y que en conjunto generan una estructura periódica en el entorno de los puntos de integración del modelo macroscópico. En este caso, el comportamiento del material depende de la propia configuración de la celda y de la ecuación constitutiva de sus integrantes. Otro punto de vista es el utilizado por Ransing *et al.* [38][91] que proponen analizar a nivel microscópico unos cientos o miles de partículas, cada una de ellas discretizada y modelizada como un medio continuo, en una pequeña vecindad del entorno de los puntos de integración del modelo macroscópico.

2.1.1 Modelos fenomenológicos macroscópicos.

Establecer un modelo constitutivo que describa las características cambiantes del pulvimaterial durante las distintas etapas de un proceso típico de compactación es un problema difícil aún abierto. Las propiedades varían considerablemente de unos tipos de polvos a otros en función de la composición, la proporción de componentes, la morfología de las partículas, la granulometría, etc. Esto unido a la evolución tan notable en sus propiedades durante el proceso hace que la definición de un modelo general sea extremadamente complejo.

Los modelos fenomenológicos macroscópicos suponen una simplificación del modelo general habiendo sido ampliamente utilizados con éxito en la simulación de procesos de compactación. En los últimos años se han desarrollado numerosos y diversos modelos propiciados por el desarrollo de la informática y de herramientas numéricas como es el Método de los Elementos Finitos. Una característica común de todos ellos es el empleo de la teoría de la plasticidad, quedando caracterizados por una superficie de fluencia, una ley de endurecimiento y una regla de flujo. Algunos de estos modelos son modificaciones de modelos inicialmente propuestos para materiales porosos, mientras que otros provienen de modelos formulados inicialmente para materiales friccionales, de aquí su clasificación en *modelos de materiales porosos* y en *modelos de materiales friccionales*. Por otro lado, el desarrollo de la compactación puede ser cuantificado de alguna manera por medio del incremento de la densidad. Por esta razón, ha sido generalizado el uso de la densidad como variable de endurecimiento, lo que implica que fenómenos como la difusión se consideran despreciables.

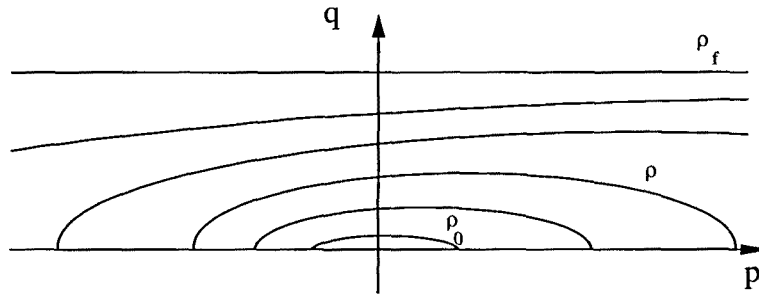


Figura 2.1: Superficie de fluencia típica correspondiente a un medio poroso dibujada en el plano $p - q$ (siendo $p = -I_1/3$ y $q = \sqrt{3J_2}$).

Modelos porosos.

Los modelos basados en materiales porosos son generalizaciones de la superficie de fluencia de Von Mises en los que la porosidad se tiene en cuenta introduciendo un término adicional correspondiente al primer invariante de las tensiones I_1 . Generalmente, sobre todo en el caso de materiales metálicos, estos modelos buscan degenerar en la superficie de Von Mises cuando el material alcanza la densidad teórica.

En este sentido, se han desarrollado diversos modelos para el análisis de sólidos porosos como los propuestos por Kuhn y Downey [63], por Shima y Oyane [97] o por Green [42] que han sido referencia obligada de numerosos modelos posteriores. La superficie de fluencia correspondiente a estos modelos puede ser representada por medio de la ecuación:

$$\phi = A J_2 + B I_1^2 - Y^2 = 0 \quad (2.1)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones y A , B , C e Y^2 son parámetros dependientes del material que definen la evolución de la superficie de fluencia en función de la variable de endurecimiento. En el espacio de tensiones principales (espacio de Haigh-Werstergaard), esta expresión corresponde a un elipsoide centrado en el origen de coordenadas. Sin embargo, esta superficie de fluencia puede ser fácilmente generalizada para tener en cuenta el caso en que el elipsoide no está centrado en el origen del eje de presiones. Considerando esta posibilidad, un grupo mayor de modelos pueden ser englobados dentro de la superficie de fluencia descrita por la expresión:

$$\phi = A J_2 + B (I_1 - C)^2 - Y^2 = 0 \quad (2.2)$$

La forma general de esta superficie se puede ver en la figura 2.1. La ecuación (2.2) es aplicable a un gran número de modelos constitutivos empleados para la simulación de procesos de compactación, donde la elección de la regla de flujo y la ley de

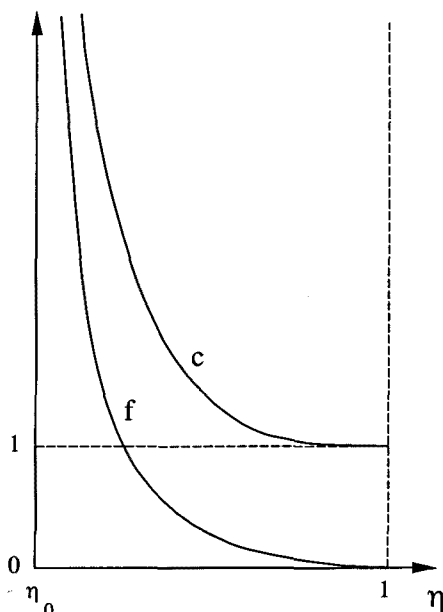


Figura 2.2: Evolución típica de los parámetros del material $c(\eta)$ y $f(\eta)$.

endurecimiento junto con la evolución de las variables A , B , C e Y^2 marcan las diferencias entre los distintos modelos.

Dentro de esta categoría puede incluirse el modelo propuesto por Abouaf [1], donde los coeficientes A , B , C e Y^2 son parámetros dependientes de la densidad relativa que es considerada como la variable de endurecimiento. En el modelo original estos coeficientes se definen como:

$$A = 3c(\eta) \quad ; \quad B = f(\eta) \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad Y^2 = \bar{\sigma}_y^2 \quad (2.3)$$

siendo $\bar{\sigma}_y$ es el límite de fluencia del material base, mientras que la evolución de los coeficientes c y f se describen en la figura 2.2. Obsérvese que cuando la densidad relativa alcanza la densidad teórica $\eta = 1$ entonces $c = 1$ y $f = 0$, degenerando la superficie de fluencia (2.2) en la superficie de Von Mises.

En principio, este modelo puede ser empleado tanto en procesos de compactación en frío como en procesos de compactación en caliente, donde ha sido ampliamente empleado [9][11][22][27][52][56][93][94][118]. Ya que la ecuación constitutiva corresponde a la de un modelo hiperelástico, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas, que considera tanto el problema térmico como el problema mecánico. La energía libre correspondiente al modelo se expresa en función de las deformaciones elásticas de Green-Lagrange, la temperatura y las variables de endurecimiento que en este caso es la densidad relativa. El tensor velocidad de las deformaciones inelásticas d^p se obtiene a partir de un potencial viscoplástico Φ que depende de las

tensiones, de la densidad relativa y de la temperatura. Un potencial viscoplástico de uso frecuente viene definido por la expresión:

$$\Phi = \frac{A(T)}{n(T) + 1} (3c(\eta)J_2 + f(\eta)I_1^2)^{n(T)+1} \quad (2.4)$$

donde A y n son respectivamente el coeficiente y el exponente correspondientes a una ley potencial empleada para describir la relajación de sólidos viscosos.

Aryapour y Stutz [4] modificaron este modelo con la finalidad de considerar aquellos procesos en los que la compactación se produce conjuntamente con el incremento de la temperatura y de la presión, en cuyo caso la deformación inelástica se compone de una parte plástica y otra viscoplástica.

Otra variante de la ecuación (2.2) es el modelo propuesto por Shima y Oyane [97], también empleado por Bagaviev *et al.* [5], Iankov [50], Köller y Massinger [58] y Lippmann *et al.* [70] entre otros. En este caso, se emplea una regla de flujo asociada y se utiliza también la densidad relativa η como variable de endurecimiento. La definición de los parámetros A , B , C e Y^2 de la ecuación (2.2) correspondiente a este modelo están dados por

$$A = 3 \quad ; \quad B = \frac{1}{9f(\eta)^2} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad Y^2 = (\eta^n \bar{\sigma}_y)^2 \quad (2.5)$$

donde f se define como $f(\eta) = \frac{1}{a(1-\eta)^m}$, mientras que a , m y n son parámetros característicos del material y $\bar{\sigma}_y$ el límite de fluencia del material base. Krishnaswami y Trasorras [61] sugieren una evolución distinta para el parámetro f con una constante material adicional, en particular $f = a \frac{(1+\eta)^m}{\eta^k}$.

Uno de los inconvenientes de este modelo es que no reproduce correctamente el comportamiento del pulvimaterial a tracción.

Otro modelo que ha servido de referencia en los procesos de compactación es el modelo Cam-Clay desarrollado en mecánica de suelos. La superficie de fluencia de este modelo usualmente viene representada por la expresión¹ [28][92]:

$$\phi = q^2 + M^2 (p - p_0) (p - p_1) = 0 \quad (2.6)$$

donde p y q están relacionados con los invariantes tensionales por medio de las relaciones $q = \sqrt{3J_2}$ y $p = -I_1/3$, mientras que M , p_0 y p_1 son parámetros del material. En la figura 2.3 se tiene una interpretación gráfica de esta superficie. La ecuación (2.6) es completamente equivalente a la ecuación (2.2), donde los coeficientes A , B ,

¹Esta expresión se ha generalizado para que el inicio de la elipse no coincida con el origen de coordenadas. No obstante, el modelo original puede recuperarse simplemente haciendo $p_1 = 0$.

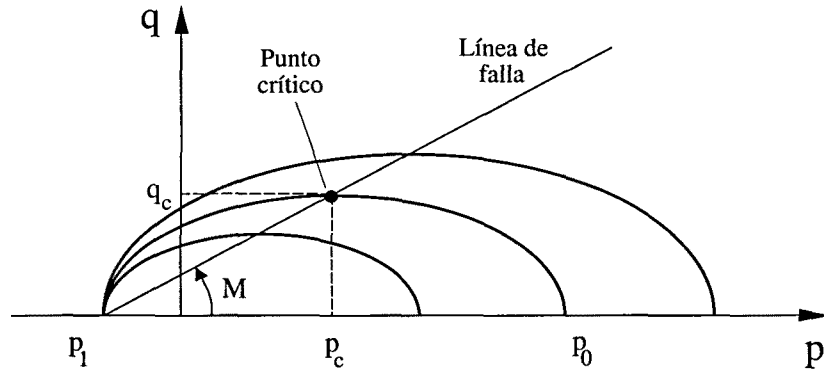


Figura 2.3: Superficie de fluencia correspondiente al modelo Cam-Clay

C e Y^2 se evalúan como:

$$A = \sqrt{3} \quad ; \quad B = \frac{M^2}{9} \quad ; \quad C = \frac{3}{2}(p_0(\eta) + p_1(\eta)) \quad ; \quad Y^2 = -M^2 \left(\frac{p_0(\eta) - p_1(\eta)}{2} \right)^2 \quad (2.7)$$

Las deformaciones plásticas se determinan utilizando una regla de flujo asociada, mientras que la variable de endurecimiento utilizada es la densidad η .

Como se aprecia en la figura 2.3, una característica del modelo Cam-Clay es que a la izquierda del punto crítico (punto máximo de la superficie situado sobre la línea de falla) se producen dilatancias, lo que produce una disminución de la densidad y , en consecuencia, una contracción de la superficie de fluencia. Esta circunstancia hace que los puntos situados a la izquierda de la línea de falla tiendan hacia el punto crítico por contracción de la superficie de fluencia.

Doremus *et al.* [32] utilizan una modificación del modelo Cam-Clay propuesta por Häggblad [45] en la que la línea de falla es una curva que tiende asintóticamente a un valor máximo q_{\max} con el aumento de la presión:

$$q_c = q_{\max} (1 - e^{-\lambda p_c}) \quad (2.8)$$

donde q_{\max} y λ son parámetros característicos del material. La superficie de fluencia se define a través de las ecuaciones (2.2) y (2.7) teniendo en cuenta que $p_0 = 2p_c$ y $p_1 = 0$. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.4.

A pesar que la superficie de fluencia de este modelo se puede representar por medio de la ecuación (2.2), esta superficie no degenera en la superficie de fluencia de Von-Mises ya que p_1 permanece fijo.

Coccoz *et al.* [24], basándose en observaciones experimentales sobre la dilatancia producida en determinados procesos de carga compresivos, decidieron utilizar este

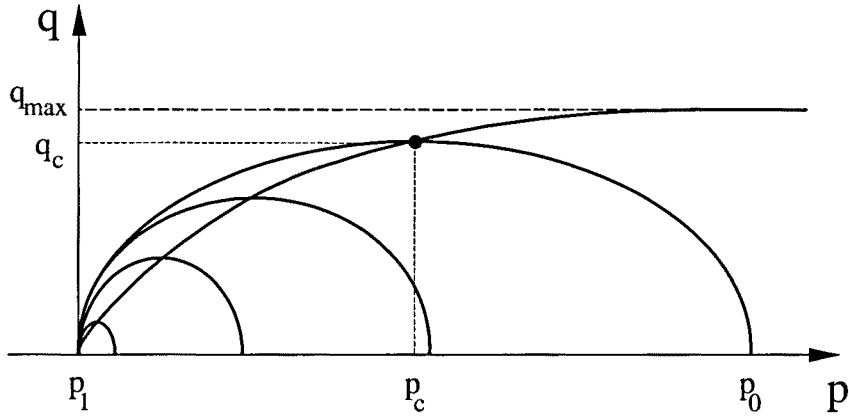


Figura 2.4: Modificación del modelo Cam-Clay para compactación de polvos.

modelo al tiempo que propusieron una modificación del mismo. Básicamente, permiten una cierta cohesión y utilizan una línea de falla curva que tiende asintóticamente a un valor máximo q_{\max} . En particular, esta línea se define como:

$$p_c = -\frac{1}{2}K_p \ln \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_{\max}} \right)^A \right] ; \quad q_c = q_{\max} \tanh \left(\frac{M_0 p_c}{q_{\max}} \right) \quad (2.9)$$

donde K_p , A , y M_0 son parámetros característicos del material, mientras que el centro de la elipse p_c y su máximo q_c se relacionan con los coeficientes definidos en (2.7) por medio de las relaciones:

$$M = \frac{dq_c}{dp_c} ; \quad p_1 = p_c - \frac{q_c}{M} ; \quad p_0 = 2p_c - p_1 \quad (2.10)$$

Combiene destacar que la superficie de fluencia de este modelo si degenera en la superficie de fluencia Von Mises.

Tanto el módulo de Young E como el coeficiente de Poisson ν se consideran dependientes de la densidad.

Posteriormente, Mosbah y Bouvard [75], proponen otra variante del modelo Cam-Clay donde también utilizan una línea de falla curva al tiempo que permiten evolucionar el inicio de la elipse p_1 con la densidad. La peculiaridad de esta variante es que la definición y calibración de la superficie de fluencia se realiza de forma simultánea a partir de dos ensayos: una compactación axial de una pieza cilíndrica donde se miden las tensiones axial $\sigma_z^d = \sigma_z^d(\eta)$ y radial $\sigma_r^d = \sigma_r^d(\eta)$ medias durante todo el prensado, y otro correspondiente a un ensayo de compresión simple donde se mide la tensión límite $\sigma_z^c = \sigma_z^c(\eta)$ del conglomerado para distintos valores de la



densidad. Durante toda la compactación el estado tensional está sobre la superficie de fluencia, verificando la ecuación:

$$\phi = A (\sigma_z^d - \sigma_r^d)^2 + B (\sigma_z^d + 2\sigma_r^d - C)^2 - 1 = 0 \quad (2.11a)$$

donde se ha considerado que el coeficiente Y^2 es la unidad $Y^2 = 1$. Así mismo, la deformación plástica radial ε_r^p es nula durante todo el proceso, de donde se deduce la ecuación:

$$-\frac{A}{3} (\sigma_z^d - \sigma_r^d) + 2B (\sigma_z^d + 2\sigma_r^d - C) = 0 \quad (2.11b)$$

Por otro lado, en el ensayo de compresión simple se alcanza la superficie de fluencia para la tensión axial σ_z^c :

$$\phi = \frac{A}{3} \sigma_z^c{}^2 + B (\sigma_z^c - C)^2 - 1 = 0 \quad (2.11c)$$

Los coeficientes A , B y C correspondientes a la ecuación (2.2) se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (2.11a-c) para cada valor de la densidad. También en este caso, tanto el módulo de Young E como el coeficiente de Poisson ν se consideran dependientes de la densidad.

Otro modelo cuya superficie de fluencia es un caso particular de la ecuación (2.2) es el modelo empleado por Weber y Brown [115]. La superficie de fluencia propuesta está fundamentada en la superficie propuesta por Kuhn y Downey [63], definiendose como:

$$A = 1 \quad ; \quad B = \frac{6(1 - \eta^2)}{2 + \eta^2} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad Y^2 = \frac{3\eta^2}{2 + \eta^2} \bar{\sigma}_y^2 \quad (2.12)$$

donde $\bar{\sigma}_y$ es la resistencia del material que se evalúa a través de la ley de endurecimiento:

$$\bar{\sigma}_y = s_0 \left(2 - e^{-\varepsilon^p / \varepsilon_0^p} \right)$$

siendo ε^p y s_0 la deformación microscópica plástica equivalente y la resistencia inicial de la matriz respectivamente. Los valores iniciales determinados para el polvo metálico Hoeganaes MH-100 son $\varepsilon_0^p = 0.1237$ y $\bar{\sigma}_{y0} = 51.3$ MPa. Por tanto, el modelo emplea la densidad relativa η y la deformación plástica equivalente ε^p como variable de endurecimiento. Se asume flujo asociado para la formulación del modelo, si bien reconocen que puede ser fácilmente generalizado para tener en cuenta el caso no asociado, teniendo en cuenta que este debe degenerar en el flujo asociado cuando se alcanza la densidad teórica. Por otro lado, módulo de Young se considera dependiente de la densidad.

Un inconveniente de este modelo es suponer la misma resistencia a tracción que a compresión, lo que está en contra de las observaciones experimentales.

Otra variante de este modelo es la propuesta por Cante [15] y Oliver *et al.* [83]. En particular, consideran la resistencia del material $\bar{\sigma}_y$ como un valor constante e igual al límite de fluencia del material base. Mientras que los parámetros A , B , C e Y^2 empleados son:

$$A = 1 \quad ; \quad B = \frac{1}{9} \left(\frac{1 - \eta^2}{2 + \eta^2} \right)^a \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad Y^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\eta - \eta_0}{1 - \eta_0} \right)^b \bar{\sigma}_y^2 \quad (2.13)$$

donde a y b son constantes características del material y η_0 la densidad relativa inicial.

El modelo empleado por Barata y Martins [7] también está entre los modelos cuya superficie de fluencia tienen la forma de la ecuación (2.2). Esta superficie fue inicialmente propuesta por Doraivelu *et al.* [31]. Su definición viene dada a través de los coeficientes A , B , C e Y^2 como:

$$A = 2 + \eta^2 \quad ; \quad B = \frac{1}{3} (1 - \eta^2) \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad Y^2 = (2\eta^2 - 1) \bar{\sigma}_y^2 \quad (2.14)$$

donde $\bar{\sigma}_y$ es la resistencia del material para la densidad teórica. Un inconveniente de este modelo es que carece de sentido para densidades relativas menores a $\eta < 1/\sqrt{2}$, puesto que la resistencia del material se vuelve negativa $Y^2 < 0$. Además, supone la misma resistencia a tracción que a compresión, estando en contra de las observaciones experimentales. La variable de endurecimiento utilizada es la densidad, mientras que la regla de flujo empleada es una regla de flujo asociada.

Kumar y Ashok [64] utilizan el modelo empleado por Hwang y Kobayashi [49] en la compactación de polvos metálicos. Los parámetros A , B , C e Y^2 correspondientes a la superficie de fluencia (2.2) dependen de la densidad relativa y se determinan como:

$$A = 2 + \eta^2 \quad ; \quad B = \frac{1}{3} (1 - \eta^2) \quad ; \quad C = \alpha + \left[\frac{3\beta^2 - (2 + \eta^2)\alpha^2}{1 - \eta^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad Y^2 = \beta^2 \quad (2.15)$$

donde $\alpha(\eta) = c\eta^n \ln(1 + \eta_c - \eta)$ y $\beta(\eta) = \frac{\eta^2 - \eta_c^2}{1 - \eta_c^2}$, siendo c y n constantes materiales y η_c la densidad relativa crítica ($\eta_c < \eta_0$).

Otro tipo de modelo es el empleado por Brekelmans *et al.* [12]. Este modelo fue anteriormente utilizado para polvos cerámicos por Park [86]. Los parámetros A , B , C e Y^2 correspondientes a la superficie de fluencia dependen de la densidad relativa plástica η^p (densidad permanente después de la descarga local) que es la variable de endurecimiento, y se definen como:

$$A = 1 \quad ; \quad B = \left(\frac{f(\eta^p)}{3} \right)^2 \quad ; \quad C = 3 \frac{d(\eta^p) + c(\eta^p)}{2} \quad ; \quad Y^2 = \left(f(\eta^p) \frac{d(\eta^p) + c(\eta^p)}{2} \right)^2 \quad (2.16)$$

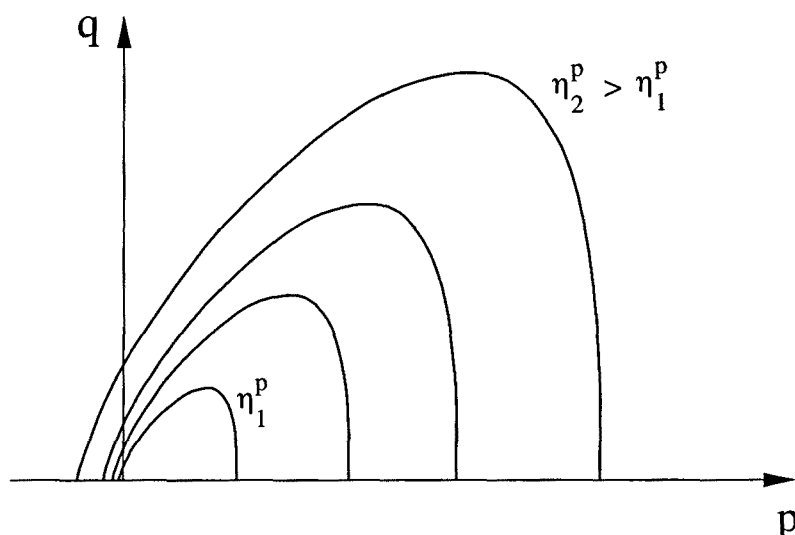


Figura 2.5: Superficie de fluencia asimétrica correspondiente al modelo propuesto por Sava.

donde $c(\eta^p) \leq 0$ representa la cohesión, $d(\eta^p) > 0$ la presión hidrostática de densificación y $f(\eta^p) > 0$ la razón entre los ejes de la elipse. Estos parámetros se determinan calibrando tres curvas:

$$c(\eta^p) = c_1 + \gamma d(\eta^p) \quad (2.17a)$$

$$d(\eta^p) = d_1 \left[\left(1 - \frac{\eta^p}{\eta_{\max}^p} \right)^\beta - 1 \right] \quad (2.17b)$$

$$f(\eta^p) = f_1 + (f_2 - f_1) \frac{\eta^p - \eta_{\text{ini}}^p}{\eta_{\max}^p - \eta_{\text{ini}}^p} \quad (2.17c)$$

siendo $c_1 \leq 0$, $\gamma \leq 0$, $d_1 > 0$, $\beta < 0$, $f_1 > 0$ y $f_2 > 0$ constantes características del material. Por otro lado, las deformaciones plásticas se determinan utilizando una regla de flujo asociada. Mientras que los parámetros elásticos se consideran linealmente proporcionales a la densidad relativa plástica η^p .

Hasta ahora, la superficie de fluencia de todos los modelos presentados son elipses que pueden ser representadas por medio de la ecuación (2.2). Sin embargo, existen evidencias experimentales que indican que la superficie de fluencia no es simétrica [88], alejándose de la forma elíptica sugerida en los modelos anteriores. En este sentido, Sava [95] propone un modelo en que la superficie de fluencia es asimétrica:

$$\phi = J_2 + k(I_1 - a)^n (I_1 - b)^m = 0 \quad (2.18)$$

donde k , n y m son parámetros del material, mientras que $a \geq 0$ representa el valor

máximo que puede alcanzar el primer invariante en un estado hidrostático de tracción y $b \leq 0$ el valor mínimo que puede alcanzar el primer invariante en un estado hidrostático de compresión. La única variable de endurecimiento considerada es la densidad relativa plástica η^p que corresponde a la densidad relativa permanente después de la descarga local. Por otro lado, las deformaciones plásticas se determinan utilizando una regla de flujo asociada. En particular, para el polvo metálico ensayado, los parámetros k , n y m son constantes características del material y los parámetros a y b se determinan a partir de la densidad relativa plástica η^p como:

$$a = \alpha_1 \frac{(\ln \eta^p - \ln \eta_0^p)^{\beta_1}}{(\ln \eta^p)^{\gamma_1}} \quad (2.19a)$$

$$b = \alpha_2 \frac{(\ln \eta^p - \ln \eta_0^p)^{\beta_2}}{(\ln \eta^p)^{\gamma_2}} \quad (2.19b)$$

donde α_1 , β_1 , γ_1 , α_2 , β_2 y γ_2 son constantes características del material. En la figura 2.5 se aprecia la forma de esta superficie de fluencia y su evolución con la densidad plástica. Esta superficie necesita tres ensayos para ser calibrada: una compactación axial, un ensayo de compresión simple y una compresión isostática.

Los parámetros elásticos, en particular el módulo de Young, se consideran variables en función de la densidad relativa plástica η^p .

Modelos friccionales.

Un gran número de modelos utilizados en la simulación de procesos de compactación están pensados para reproducir el comportamiento del material a densidades relativamente altas. En algunos casos, estos modelos consideran el mismo comportamiento a tracción que a compresión, lo que supone una limitación importante en la simulación de determinados procesos. En este sentido, existen evidencias experimentales indicando que el comportamiento del pulvimaterial a bajas presiones hidrostáticas se asemeja más al comportamiento descrito por materiales granulares [13], resultando más apropiado el uso de este tipo de modelos en estos casos. Este comportamiento se ha observado para distintas morfologías en un amplio rango de densidades, siendo este rango mayor cuanto más esféricas son las partículas. Dentro de los modelos aplicados a la simulación de procesos de compactación, la categoría de modelos que tiene en cuenta este comportamiento corresponde a los modelos denominados modelos friccionales. Estos modelos suelen ser variaciones de modelos inicialmente propuestos y empleados en mecánica de suelos.

Los modelos friccionales consisten esencialmente en una superficie de fluencia múltiple compuesta por una superficie de falla propia de materiales granulares, como la superficie de Mohr-Coulomb o de Drucker-Prager, y una superficie de cierre o *cap* que caracteriza el proceso compresivo del material.

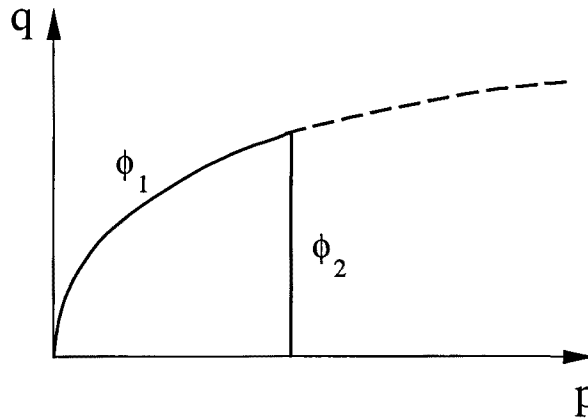


Figura 2.6: Superficie de fluencia del modelo Krieg.

Una versión excesivamente simplista de este tipo de modelos es el modelo Krieg para hormigón celular propuesto por Bandstra *et al.* [6] como una primera aproximación para modelar polvos metálicos. La superficie de falla es una superficie parabólica mientras que el *cap* lo forma una superficie plana normal al eje hidrostático que se desplaza en función de la variable de endurecimiento. Estas superficies se definen como:

$$\phi_1 = J_2 + \left(a_0 + \frac{a_1}{3} I_1 + \frac{a_2}{9} I_1^2 \right) = 0 \quad (2.20a)$$

$$\phi_2 = - \left(\frac{1}{3} I_1 + f \right) = 0 \quad (2.20b)$$

donde a_0 , a_1 y a_2 son constantes que caracterizan el material y f la máxima resistencia a compresión que depende de la deformación volumétrica, considerada como la variable de endurecimiento. La forma de esta superficie se representa gráficamente en la figura 2.6.

Dentro de este tipo de modelos, Trasorras *et al.* [110] emplean un modelo compuesto por una superficie de Drucker-Prager modificada ϕ_1 y una superficie elíptica descentrada como *cap* ϕ_2 . En ambas superficies se supone una regla de flujo asociada, mientras que los parámetros elásticos se consideran constantes. Este modelo fue originariamente propuesto por DiMaggio y Sandler [30] para modelar suelos granulares. La superficie de fluencia se define por medio de las ecuaciones:

$$\phi_1(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \gamma e^{\beta I_1} + \theta I_1 - \alpha = 0 \quad (2.21a)$$

$$\phi_2(I_1, J_2, K) = J_2 + R^{-2} (I_1 - L(K))^2 - R^{-2} (X(K) - L(K))^2 = 0 \quad (2.21b)$$

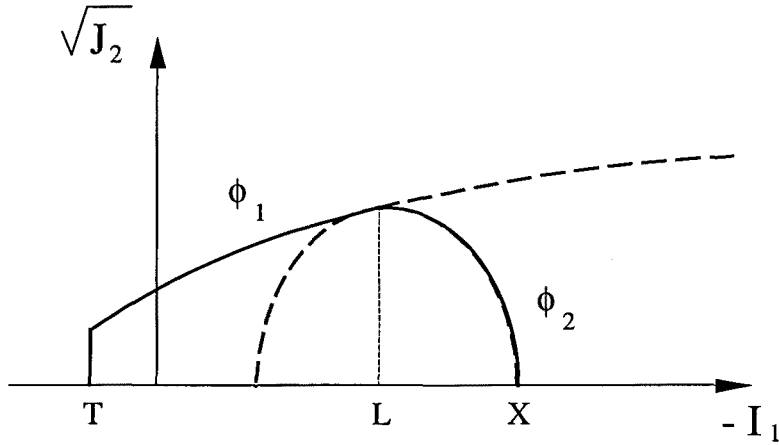


Figura 2.7: Superficie de fluencia para el modelo *cap*.

donde α , β , γ y θ son parámetros materiales, R es el cociente entre el radio mayor y el radio menor de la elipse, $X = X(K)$ es el valor de I_1 en la intersección de ϕ_2 con el eje hidrostático, $L = L(K)$ es el centro de la elipse en el eje de presiones y K es la variable de endurecimiento que DiMaggio identificó con la deformación volumétrica plástica ε_v^p (íntimamente relacionada con la densidad plástica η^p), proponiendo la ley de endurecimiento:

$$K = \varepsilon_v^p = W (1 - e^{D(X(K)-X_0)}) \quad (2.22)$$

donde W , X_0 , X y D son parámetros característicos del material. La superficie ϕ_1 se trunca con otra superficie fija $I_1 = T$ para limitar el valor a tracción a un valor considerado como la tensión de fractura. Por otro lado, el *cap* intersecta a la superficie ϕ_1 en su punto máximo. En ambos casos la intersección se produce formando una esquina como puede apreciarse en la figura 2.7.

Uno de los inconvenientes de este modelo es que la elipse crece con la variable de endurecimiento K manteniendo la relación entre sus radios constante. Al permanecer el factor de forma constante, la deformación volumétrica plástica ε_v^p no tiende a un valor límite a medida que se incrementa la presión hidrostática, contradiciendo las observaciones experimentales. A fin de evitar estos problemas, Krauss *et al.* [60] efectuaron mejoras en el modelo permitiendo el endurecimiento de la superficie de falla ϕ_1 y la evolución del factor de forma de la superficie ϕ_2 con la variable de endurecimiento K . Además, consideraron los parámetros elásticos dependientes de la densidad. Otras versiones de este modelo también han sido aplicadas por Chtourou [23] y Oldenburg [79][80].

Otra variante es el modelo propuesto por Khoei y Lewis [53][54][55][66] compuesto por una superficie de Mohr-Coulomb como superficie de falla ϕ_1 y una superficie

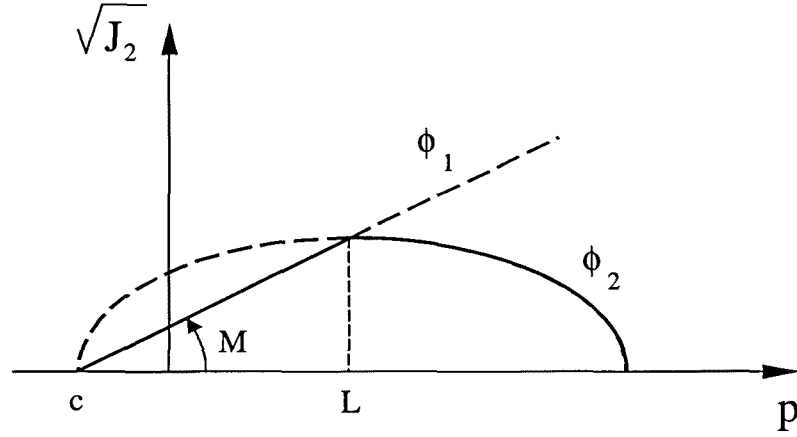


Figura 2.8: Superficie de fluencia del modelo propuesto por Khoei y Lewis definida en el plano $p - \sqrt{J_2}$ siendo $p = -I_1/3$.

elíptica como $\text{cap } \phi_2$, considerando una regla de flujo asociada en ambas superficies. La forma de estas superficies vienen dadas por las expresiones:

$$\phi_1 = \frac{1}{3}I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \cos \theta - \sqrt{\frac{J_2}{3}} \sin \theta \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (2.23a)$$

$$\phi_2 = J_2 + M^2 \left[\left(\frac{I_1}{3} - \sigma_c \right)^2 - \left(\sigma_c - \frac{c}{\tan \phi} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.23b)$$

siendo $\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)$ el ángulo de dilatancia que depende del tercer invariante de las tensiones desviadoras J_3 [28], c la cohesión interna, ϕ el ángulo de rozamiento interno, M la pendiente de la superficie de Mohr-Coulomb en el espacio $p - \sqrt{J_2}$ y σ_c es la tensión crítica que viene definida en términos de la deformación volumétrica plástica ε_v^p , que es la variable de endurecimiento considerada. La representación gráfica de la superficie de fluencia se muestra en la figura 2.8.

La evolución del centro de la elipse definida por ϕ_2 se define en términos de la tensión crítica σ_c como:

$$L = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } \sigma_c < 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_c \geq 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde la tensión crítica σ_c se define como:

$$\sigma_c = \sigma_{c0} e^{-\bar{\varepsilon}_v^p / \bar{\alpha}} \quad (2.25a)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\bar{\varepsilon}_v^p} = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_v^p & \text{si } \dot{\varepsilon}_v^p, \text{ o } \sigma_c < -\frac{1}{3}I_1 \text{ y } \sigma_c < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.25b)$$

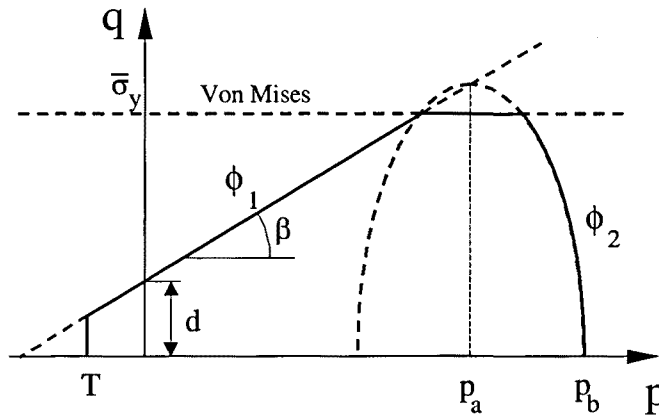


Figura 2.9: Superficie de fluencia correspondiente al modelo empleado por Coube.

donde σ_{c0} y $\bar{\chi}$ son parámetros que dependen del material.

En la figura 2.8 se aprecia que la intersección de ambas superficies se produce en el máximo de la elipse definida por el *cap* ϕ_2 . Bajo esta condición, para que la deformación volumétrica plástica ε_v^p tienda a un valor límite, se hace tender la superficie de Mohr-Coulomb a la superficie de Von-Mises. Ello se consigue haciendo evolucionar la cohesión interna c y al ϕ ángulo de rozamiento interno durante la compactación. No obstante, este procedimiento permite estados hidrostáticos a tracción excesivamente elevados, recuperando una de las principales desventajas que presentaban los modelos de materiales porosos.

Otro modelo, propuesto Coube [25], considera una superficie de fluencia compuesta básicamente por una superficie de Drucker-Prager como superficie de falla ϕ_1 y una superficie elíptica como *cap* ϕ_2 . Estas superficies se definen como:

$$\phi_1 = \sqrt{3}\sqrt{J_2} + \frac{1}{3}\tan\beta I_1 - d = 0 \quad (2.26a)$$

$$\phi_2 = 3R^2 J_2 + \frac{1}{9}(I_1 - 3p_a)^2 - R^2(d + p_a \tan\beta)^2 = 0 \quad (2.26b)$$

siendo d y β dos parámetros característicos del material que representan la cohesión y la fricción interna, R el parámetro del material que controla la excentricidad del *cap* y p_a una función de la variable de endurecimiento que controla la posición del *cap*. Estos parámetros pueden identificarse gráficamente en la figura 2.9.

Por otro lado, para evitar que la superficie de fluencia permita estados tensionales con una componente desviadora o una componente hidrostática a tracción excesivamente grandes, la superficie de fluencia se trunca con la superficie de Von Mises y con una superficie plana normal al eje de presiones en el lado de las tracciones. La superficie resultante se muestra gráficamente en la figura 2.9.

La variable de endurecimiento considerada es la densidad relativa plástica η^p (o lo que es completamente equivalente, la deformación volumétrica ε_v^p), mientras que la ley de endurecimiento considerada está dada por la expresión:

$$\varepsilon_v^p = \ln \frac{\eta^p}{\eta_0^p} = W \left(1 - e^{-c_1 p a^2} \right) \quad (2.27)$$

siendo W , c_1 y c_2 parámetros característicos del material.

La evolución de los parámetros R , d y β se determina en función de la variable de endurecimiento como:

$$R = \frac{R_1 - R_2}{1 + \left(\frac{\eta^p}{\eta_c^p} \right)^k} + R_2 \quad (2.28a)$$

$$d = d_0 e^{c_{eq} \ln \frac{\eta^p}{\eta_0^p}} \quad (2.28b)$$

$$\tan \beta = b_0 - b_{eq} \ln \frac{\eta^p}{\eta_0^p} \quad (2.28c)$$

donde R_1 , R_2 , η_c^p , k , b_0 , b_{eq} , d_0 y d_{eq} son constantes características del material. Mientras que la evolución del parámetro p_a se obtiene a partir de un ensayo de compresión axial:

$$p_a = \frac{-\sigma_z - Rd \sqrt{1 + \frac{4}{9R^2}}}{1 + R \tan \beta \sqrt{1 + \frac{4}{9R^2}}} \quad (2.28d)$$

siendo σ_z la tensión axial medida en el ensayo.

La regla de flujo propuesta es una regla de flujo asociada para ambas superficies, aunque también considera el caso no asociado para la superficie de Drucker-Prager, reduciendo la componente esférica de la dirección del flujo plástico por considerar que el caso asociado produce una dilatación excesiva e irreal. Adicionalmente, considera variables los parámetros elásticos.

Marais y Mitchell [73] propusieron una superficie de fluencia similar pero con una regla de flujo no asociada. La superficie de fluencia está compuesta por una superficie de Drucker-Prager como superficie de falla ϕ_1 y una elipse como *cap* ϕ_2 , las cuales se formulan como:

$$\phi_1 = \sqrt{J_2} + \frac{1}{3} \tan \beta I_1 - \bar{k} = 0 \quad (2.29a)$$

$$\phi_2 = J_2 + \frac{1}{9} \left(\frac{C_3}{C_2} \right)^2 (I_1 - 3C_1)^2 - C_3^2 = 0 \quad (2.29b)$$

donde $\beta(\eta)$, $\bar{k}(\eta)$, $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$ y $C_3(\eta)$ son parámetros dependientes de la densidad relativa que es considerada la variable de endurecimiento. La interpretación gráfica

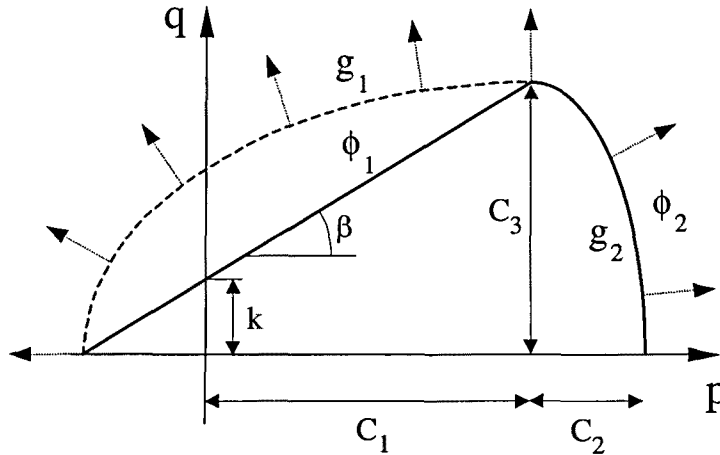


Figura 2.10: Superficie de fluencia y potencial plástico correspondiente al modelo empleado por Marais y Mitchell.

de estos parámetros se muestra en la figura 2.10. Su evolución viene definida por las expresiones:

$$\beta = a + b\eta + c\eta^2 \quad ; \quad \bar{k} = d\eta^f \quad ; \quad C_1 = g\eta^h \quad ; \quad C_2 = je^{m\eta} \quad ; \quad C_3 = C_1 \tan \beta - \bar{k} \quad (2.30a)$$

siendo a, b, c, d, f, g, h, j y m constantes materiales. En el modelo propuesto, el ángulo β disminuye con la densidad relativa hasta anularse teóricamente cuando el material se densifica completamente, degenerando en la superficie de Von Mises. Esta procedimiento presenta los mismos inconvenientes que se comentaron para el modelo de Khoei y Lewis [53][55].

La intersección de ambas superficies se produce en el punto máximo del *cap*, aunque en el modelo original empleado por Watson y Wert [114] admiten un punto de intersección distinto. Además, en el modelo de Watson y Wert suponen una regla de flujo asociada. Esta consideración implica que el punto intersección de ambas superficies no tenga una dirección de flujo única, razón por la que proponen emplear una regla de flujo no asociada en la superficie de falla. En particular, para definir la regla de flujo proponen los potenciales plásticos:

$$g_1 = J_2 + \frac{1}{9} (I_1 - 3C_1)^2 \tan \beta \quad (2.31a)$$

$$g_2 = J_2 + \frac{1}{9} (I_1 - 3C_1)^2 \left(\frac{C_3}{C_2} \right)^2 \quad (2.31b)$$

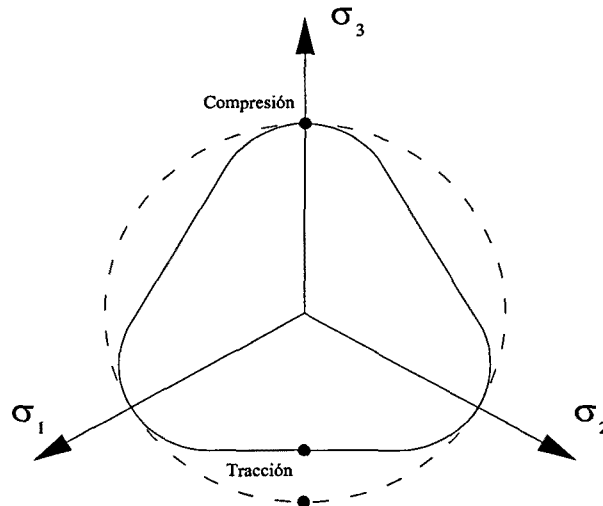


Figura 2.11: Superficie de fluencia dependiente del tercer invariante $\phi = \phi(J_3)$. La resistencia a tracción es inferior que la resistencia a compresión.

2.2 Deficiencias de los modelos macroscópicos actuales.

Los modelos constitutivos presentados en el apartado 2.1.1 son aproximaciones matemáticas de la realidad. Por un lado, un modelo general capaz de tener en cuenta todas las variables fenomenológicas que intervienen de alguna manera en el proceso sería extremadamente complejo, resultando difícil si no imposible operar con este modelo. Por otro, la información suministrada por los ensayos es limitada. La formulación de un modelo constitutivo práctico debe tener en cuenta estos aspectos, considerando sólo las variables más relevantes que intervienen en el proceso y que puedan ser evaluadas experimentalmente de una forma relativamente sencilla. Sin embargo, llegar a esta solución es un problema difícil que todavía permanece abierto debido al comportamiento complejo de los pulvimateriales. En este apartado se pretende señalar algunas de las posibles limitaciones efectuadas sobre los modelos que podrían ser relevantes en la caracterización del material, bien por ser difíciles de cuantificar, bien por la dificultad que entraña considerarlas. No obstante, su incorporación tiende a incrementar el número de parámetros que debe ser calibrado, por lo que su inclusión o no en el modelo debería ser una solución de compromiso entre la importancia del fenómeno y su dificultad para evaluarlo y calibrarlo.

Un primer aspecto, que empieza a ser considerado por algunos autores que trabajan con modelos microscópicos [25][96], es el efecto del tercer invariante del tensor

desviador de tensiones J_3 . En general, el efecto del tercer invariante se ha despreciado, aunque su influencia real resulta bastante desconocida. En este sentido Mosbah *et al.* [76] han efectuado un estudio experimental por considerar que este término podría ser importante durante la descarga, cuando la tensión axial pasa a ser de tracción. En este caso, la influencia del tercer invariante J_3 hace que la resistencia a compresión, que es el valor calibrado experimentalmente, difiera de la resistencia a tracción sobreestimándolo como se muestra en la figura 2.11. Esta posibilidad ha sido sugerida mediante simulaciones numéricas por Mosbah y Boubard [75]. No obstante, los resultados experimentales obtenidos no son concluyentes debido a la dispersión de las mediciones, haciéndose necesario un estudio más profundo.

Por otro lado, hay autores que sostienen que la densidad por si sola no puede definir la evolución de la cohesión [13]. Considerando que durante la compactación se crean enlaces entre partículas que incrementan la cohesión, pero que también se producen deformaciones que destruyen dichos enlaces (sin ser deformaciones dilatantes necesariamente), sugieren la posibilidad de utilizar una variable de endurecimiento independiente para la cohesión distinta de la densidad. Además, sugieren la posibilidad que esta variable no dependa de toda la deformación sino únicamente de su historia más reciente.

En cuanto a la regla de flujo, es muy frecuente considerarla asociada. No obstante, en el caso de materiales friccionales esta regla conduce a una dilatancia irreal sobre la superficie de falla, haciéndose necesario el empleo de una regla de flujo no asociada. Por otro lado, evaluaciones experimentales de los potenciales plásticos (considerando a la densidad como variable de endurecimiento) efectuadas Pavier y Dorémus [88] muestran un comportamiento dispar entre la superficie de fluencia y el potencial plástico en las proximidades del eje de presiones. Este comportamiento supone aplicar una regla de flujo no asociada en esta zona, posibilidad que no ha sido contemplada por ninguno de los modelos presentados en el apartado 2.1.1.

Por otro lado, ensayos triaxiales efectuados por Shima *et al.* [98] muestran para algunos tipos de pulvimateriales una forma cóncava de las líneas de isodensidad en las proximidades del eje hidrostático. Habitualmente se escoge la densidad como variable de endurecimiento, en cuyo caso las líneas de isodensidad coinciden con la superficie de fluencia. Sin embargo, considerar cóncava la superficie de fluencia tiene graves inconvenientes al perder la unicidad de la proyección sobre la superficie de fluencia. Shima *et al.* [98] sostienen que considerar la densidad como única variable de endurecimiento es insuficiente para definir la evolución de la superficie de fluencia, proponiendo añadir una nueva variable de endurecimiento que tenga en cuenta el proceso de carga y modificar al menos uno de los parámetros de la superficie de fluencia. De esta forma, modificando el proceso de carga es posible obtener curvas de isodensidad cóncavas a partir de superficies de fluencia convexas. Con la finalidad de concretar, proponen modificar el límite de fluencia del material

base $\bar{\sigma}_y$, correspondiente al modelo propuesto por Shima y Oyane [97], en función de la deformación equivalente $\bar{\sigma}_y = K \bar{\varepsilon}$ que viene dada por la expresión:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \eta^{n-1} \sqrt{\frac{2}{3} \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) + (f \dot{\varepsilon}_v)} \quad (2.32)$$

Los modelos constitutivos presentados en el apartado 2.1.1 han sido pensados para reproducir básicamente la fase de prensado. Bajo esta consideración, las mediciones realizadas para la calibración de los modelos suelen efectuarse cuando el compacto tiene cierta solidez para su manipulación. Esto implica que la calibración se efectúe en un rango de densidades elevado, lo que no entraña grandes problemas durante la simulación de la fase de prensado. Sin embargo, es sabido que los mecanismos que marcan el comportamiento del polvo (reacomodamiento de las partículas, deformación plástica y fractura de las mismas) son distintos a bajas densidades que a altas densidades, por lo que los resultados de las mediciones difícilmente son extrapolables. En este sentido, diseñar un modelo para simular la fase de transporte de cámaras implica que éste deba ser calibrado a bajas densidades, haciéndose necesario modificar los ensayos a otros más apropiados.

Capítulo 3

Formulación del modelo constitutivo.

En este capítulo se presenta un modelo matemático destinado a la simulación de procesos de prensado y transporte de cámaras. El modelo constitutivo se centra en la teoría de medios continuos aplicada a medios que sufren grandes deformaciones plásticas, limitándose al caso de procesos puramente mecánicos desde el punto de vista termodinámico.

En primer lugar, se realiza una breve exposición de la cinemática en la que se desarrolla el modelo. Por otro lado, la densidad es una variable de vital importancia en los procesos de compactación, tanto para caracterizar el modelo como por ser una variable de gran interés desde el punto de vista industrial. En este sentido, la densidad está íntimamente relacionada con las variables cinemáticas a través de la ecuación de continuidad, razón por la cual se describe en este apartado.

Posteriormente, se plantean las ecuaciones constitutivas que definen el modelo tanto en el caso plástico como en el caso viscoplástico. Para ello se formulan las variables que describen el proceso, la condición de fluencia y las leyes de evolución de una forma general. Se propone un modelo genérico capaz de reproducir una gran variedad de modelos particulares, ya sean existentes en la actualidad o completamente nuevos, y que son utilizados para la simulación de procesos de compactación. La superficie de fluencia se considera únicamente dependiente del primer y segundo invariante tensorial además de las variables de endurecimiento. La regla de flujo utilizada no se limita única y exclusivamente al caso asociado sino que se considera también el caso no asociado. En ambos casos se llega a una integración cerrada de la ecuación constitutiva. A partir de aquí, se propone un modelo concreto para simular conjuntamente las etapas de transporte de cámaras y de prensado. Sin embargo, la formulación de este modelo se realiza particularizando el modelo genérico.

Finalmente, se describe la integración de la ecuación constitutiva que se expone

de una manera genérica, dejando para los anexos A2 y A3 una descripción detallada de la misma.

Una simulación realista del proceso de compactación debe tener en cuenta las interacciones del polvo con su entorno. Es bien conocido que la fricción del polvo con las paredes del molde influyen notablemente en las propiedades finales de la pieza. Por esta razón, en la sección 3.4 se propone un modelo destinado a describir este fenómeno.

3.1 Cinemática.

La descripción de las deformaciones que sufre el medio se halla inmersa en la cinemática de grandes deformaciones. Para su formulación, se define $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($n_{\text{dim}} = 2, 3$) como la configuración de referencia del material que se desea compactar, considerándose a Ω_0 como un conjunto abierto y acotado que representa al grupo de partículas que constituyen el material. Si $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$ es el intervalo de tiempo durante el cual se realiza el proceso de compactación, la deformación del cuerpo viene representada por la aplicación $\varphi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$. De forma que la posición de cualquier partícula $\mathbf{X} \in \Omega_0$ en un instante $t \in [0, T]$ está dada por la ecuación de movimiento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$. En este contexto, la configuración deformada del cuerpo en el instante t viene definida por el conjunto de puntos del espacio $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t)$.

A partir de la ecuación de movimiento se define el campo de desplazamientos $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ como:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

Por otro lado, el tensor gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ está dado por la expresión:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.1)$$

en el que $\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ es el tensor gradiente material de desplazamientos.

Dado que durante la compactación se producen deformaciones elásticas y plásticas, se supone válida la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} , introducida por Kröner [62] y desarrollada por Lee y Liu [65] y Mandel [72] entre otros. La descomposición considera que para cada punto del espacio $\mathbf{x} \in \Omega_t$ en el instante $t \in [0, T]$ existe una vecindad \mathcal{O}_x contenida en la configuración Ω_t tal que es válida la descomposición:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \quad (3.2)$$

en el que el tensor $\mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t)$ corresponde a la parte elástica y $\mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t)$ a la parte plástica.

Hipótesis 3.1 *Durante el proceso de compactación se producen principalmente deformaciones plásticas, siendo las deformaciones elásticas pequeñas en comparación con ellas. Bajo esta consideración, la distinción entre las configuraciones intermedia y deformada es despreciable, por lo que se acepta la hipótesis que $\mathbf{F}^p \approx \mathbf{F}$ y $\mathbf{F}^e \approx \mathbf{1}$.*

En la configuración de referencia Ω_0 , se definen el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} y su componente plástica \mathbf{C}^p como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{C}^p(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^{pT}(\mathbf{X}, t) \cdot \overline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \quad (3.3b)$$

donde \mathbf{g} y $\overline{\mathbf{G}}$ son el tensor métrico en la configuración espacial e intermedia respectivamente. A partir de las expresiones (3.3a-b) se definen los tensores de deformación de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{G}) \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{C}^p(\mathbf{X}, t)) \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{E}^p(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^p(\mathbf{X}, t) - \mathbf{G}) \quad (3.4c)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{E}^e(\mathbf{X}, t) + \mathbf{E}^p(\mathbf{X}, t) \quad (3.4d)$$

siendo \mathbf{G} el tensor métrico en la configuración material, \mathbf{E} el tensor de deformación total, \mathbf{E}^e corresponde al tensor de deformación elástico y \mathbf{E}^p al tensor de deformación plástico. Conviene destacar como las definiciones (3.4a-c) conducen a la descomposición aditiva de la deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} .

De forma análoga, se definen en la configuración espacial Ω_t el tensor izquierdo de Finger \mathbf{b}^{-1} y su componente elástica $\mathbf{b}^{e^{-1}}$ como:

$$\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{-T}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{b}^{e^{-1}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{e^{-T}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \cdot \overline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{e^{-1}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (3.5b)$$

de donde se deducen el tensor de deformación de Almansi total \mathbf{e} , su componente elástica \mathbf{e}^e y su componente plástica \mathbf{e}^p como:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{e^{-1}}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{e}^p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}^{e^{-1}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}^{-1}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{e}^p(\mathbf{x}, t) \quad (3.6d)$$

Análogamente a lo que sucedía en la configuración material, las definiciones (3.6a-c) conducen a la descomposición aditiva de la deformación de Almansi \mathbf{e} .

Las ecuaciones (3.4d) y (3.6d) muestran la conexión entre la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones y la descomposición aditiva del tensor de deformaciones en su parte elástica y plástica, la cual fue formulada previamente por Green y Nagdhi [41], Sidoroff [99], Kleiber [57] y Simo y Ortiz [103].

A través de los operadores *pull-back* $\phi^*(\cdot)$ y *push-forward* $\phi_*(\cdot)$ es posible relacionar los tensores espaciales con los tensores materiales. De la aplicación de estos operadores sobre las definiciones (3.3a-b), (3.4a-c), (3.5b-b) y (3.6a-c) surgen las relaciones:

$\mathbf{C} = \phi^*(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{g} = \phi_*(\mathbf{C}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^{-1}$	(3.7)
$\mathbf{C}^p = \phi^*(\mathbf{b}^{e^{-1}}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{b}^{e^{-1}} = \phi_*(\mathbf{C}^p) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{C}^p \cdot \mathbf{F}^{-1}$	
$\mathbf{G} = \phi^*(\mathbf{b}^{-1}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{b}^{-1} = \phi_*(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1}$	
$\mathbf{E} = \phi^*(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{e} = \phi_*(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}$	
$\mathbf{E}^e = \phi^*(\mathbf{e}^e) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e}^e \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{e}^e = \phi_*(\mathbf{E}^e) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{F}^{-1}$	
$\mathbf{E}^p = \phi^*(\mathbf{e}^p) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e}^p \cdot \mathbf{F}$	$\mathbf{e}^p = \phi_*(\mathbf{E}^p) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E}^p \cdot \mathbf{F}^{-1}$	

En la configuración de referencia Ω_0 , las derivadas de los tensores de deformación se calculan directamente a partir de las derivadas temporales por tratarse de una configuración que permanece fija:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (3.8a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^e(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{E}^e(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (3.8b)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{E}^p(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (3.8c)$$

Sin embargo, la configuración espacial Ω_t evoluciona durante el proceso, por lo que la derivación de los tensores espaciales se calculan a través de una derivada objetiva. Teniendo en cuenta las relaciones (3.7) y (3.8a-c) se obtiene:

$$\mathbf{d} = Lv(\mathbf{e}) = \phi_* \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{d}^e = Lv(\mathbf{e}^e) = \phi_* \left(\frac{\partial \mathbf{E}^e}{\partial t} \right) \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{d}^p = Lv(\mathbf{e}^p) = \phi_* \left(\frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} \right) \quad (3.9c)$$

en el que $Lv(\cdot)$ es el operador que corresponde a la derivada de Lie, la cual es una derivada objetiva que se define como $Lv(\cdot) = \phi_* \left(\frac{\partial \phi^*(\cdot)}{\partial t} \right)$.

La combinación de las ecuaciones (3.4d) y (3.6d) con las definiciones (3.8a-c) y (3.9a-c) conducen a la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (3.10b)$$

Densidad relativa.

Una de las variables más importantes, si no la más importante, desde el punto de vista industrial durante la etapa de compactación es la densidad. Su distribución dentro de una pieza tiene una influencia notable en las propiedades mecánicas finales. Es por esta razón que cualquier código de compactación debe simular la densidad.

En un material poroso como el que se considera, es posible realizar múltiples definiciones de la densidad como se describe a continuación. Para todo punto del espacio $\mathbf{x} \in \Omega_t$ se delimita una vecindad $\mathcal{O}_x \subset \Omega_t$, la cual contiene una cantidad de masa δm y ocupa un volumen δv . Este volumen lo compone el volumen que ocupa la parte sólida δv_s junto con el volumen de vacíos δv_v . Se define la densidad aparente del polvo en el punto \mathbf{x} como la densidad del material teniendo en cuenta los vacíos:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta m}{\delta v} = \frac{\delta m}{\delta v_s + \delta v_v} \quad (3.11)$$

Por otro lado, se define la densidad teórica del polvo en el punto \mathbf{x} como la densidad máxima que teóricamente puede alcanzar el polvo, en otras palabras, la densidad del material eliminando los vacíos:

$$\rho^t(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta m}{\delta v_s} \quad (3.12)$$

La densidad relativa se define como el cociente entre la densidad aparente y la densidad teórica:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho^t(\mathbf{x}, t)} \quad (3.13)$$

La densidad aparente depende del material que constituye el polvo, de la forma de los granos y de su empaquetamiento. Sin embargo, la densidad teórica está determinada por el material que constituye el polvo, mientras que la densidad relativa

está determinada por la forma de los granos y su empaquetamiento pero no por el material que lo constituye. Desde este punto de vista, resulta interesante observar que es indistinto utilizar la porosidad en lugar de la densidad relativa. La porosidad ϕ se define como el cociente entre el volumen de vacíos y el volumen de la parte sólida $\phi = \frac{v_v}{v_s}$. En base a esta definición, es inmediato establecer una relación entre ambas variables:

$$\eta = \frac{1}{1 + \phi} \quad (3.14)$$

Sea $\omega_t = \varphi(\omega_0, t) \subset \Omega_t$ un subdominio arbitrario que define un volumen material. La ley de conservación de la masa establece que la masa del subdominio ω_t permanecerá invariable durante todo el proceso $[0, T]$. Esta ley se traduce en una ecuación de continuidad que, en su forma lagrangiana, está dada por [111]:

$$\rho(\mathbf{X}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\text{Det}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))} \quad (3.15)$$

donde $\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X}, 0)$ es la densidad aparente inicial. Dividiendo a ambos lados de la ecuación (3.15) por la densidad teórica ρ^t se obtiene una forma alternativa de la ecuación de continuidad en función de las densidades relativas:

$$\eta(\mathbf{X}, t) = \frac{\eta_0(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))} \quad (3.16)$$

donde $\eta_0(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X}, 0)$ es la densidad relativa inicial. Análogamente, la ley de continuidad en su forma espacial se escribe como:

$$\dot{\eta}(\mathbf{x}, t) = -\eta(\mathbf{x}, t) \text{tr}(\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)) \quad (3.17)$$

siendo \mathbf{d} el tensor gradiente velocidad de deformación definido en (3.9a).

Observación 3.1 *La hipótesis 3.1 junto con la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación (3.10b) permiten relacionar de forma aproximada la densidad relativa con las deformaciones plásticas a través de la ecuación de continuidad y del tensor velocidad de deformación plástica:*

$$\dot{\eta} = -\eta \text{tr}(\mathbf{d}) \underset{\text{hipótesis 3.1}}{\approx} -\eta \text{tr}(\mathbf{d}^p) \quad (3.18)$$

3.2 Modelo constitutivo.

A continuación se realiza una descripción de las ecuaciones constitutivas que definen el comportamiento del pulvymaterial durante el proceso de compactación. Para ello

se describen los elementos que definen el modelo constitutivo como la energía libre, la condición de fluencia, las leyes de evolución, etc. Posteriormente, se impone sobre el modelo la segunda ley de la termodinámica a través de la desigualdad de Clausius-Duhem.

3.2.1 Modelo elástico.

Se considera que la respuesta elástica corresponde a la de un material hiperelástico. Para ello, se supone que el estado local termodinámico se encuentra definido por las variables $\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\Xi}, \bar{\mathbf{G}}, T$ que corresponden respectivamente al tensor de deformación elástica, al vector de variables internas, al tensor métrico y a la temperatura definidas en la configuración intermedia. Admitiendo que la parte mecánica se encuentra desacoplada de la parte térmica, la densidad de energía libre de Helmholtz puede escribirse como:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\Xi}, \bar{\mathbf{G}}) \quad (3.19)$$

Adicionalmente se realiza la hipótesis que la energía libre puede descomponerse en su parte elástica y plástica:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\mathbf{G}}) + \bar{\psi}^p(\bar{\Xi}, \bar{\mathbf{G}}) \quad (3.20)$$

La energía libre se puede definir en la configuración de referencia aplicando el operador *pull-back* desde la configuración intermedia sobre las variables $\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\Xi}$ y $\bar{\mathbf{G}}$:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}^e, \mathbf{C}^p, \Xi) = \Psi^e(\mathbf{E}^e, \mathbf{C}^p) + \Psi^p(\Xi, \mathbf{C}^p) \quad (3.21)$$

De forma análoga, aplicando el operador *push-forward* desde la configuración intermedia sobre las variables $\bar{\mathbf{E}}^e$ y $\bar{\Xi}$, se obtiene la energía libre en términos de la configuración deformada:

$$\psi = \psi(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}}, \xi) = \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}}) + \psi^p(\xi, \mathbf{b}^{e^{-1}}) \quad (3.22)$$

A partir de aquí, el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} se determina como [71]:

$$\mathbf{S} = \varrho_0 \cdot \frac{\partial \Psi^e(\mathbf{E}^e, \mathbf{C}^p)}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3.23)$$

mientras que el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ se obtiene como:

$$\boldsymbol{\tau} = \phi_*(\mathbf{S}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \varrho_0 \cdot \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}})}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis 3.1, que considera que las deformaciones elásticas son muy pequeñas, la energía libre elástica puede definirse directamente en la

configuración deformada mediante la función:

$$\psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}}) \approx \psi^e(\mathbf{e}^e) = \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) : \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ es el tensor constitutivo elástico en la configuración deformada, λ y μ son los coeficientes de Lamé. En este caso, el tensor de tensiones de Kirchhoff se obtiene a partir de las ecuaciones (3.24) y (3.25):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (3.26)$$

En cuanto a la energía libre plástica definida sobre la configuración deformada, la hipótesis 3.1 permite realizar la simplificación:

$$\psi^p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}^{e^{-1}}) \approx \psi^p(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.27)$$

3.2.2 Modelo plástico.

El comportamiento del polvo durante el proceso de compactación, el cual engloba la fase de transferencia y de prensado, se simula a partir de un modelo plástico. El modelo distingue entre un estado elástico y uno plástico. El estado elástico reproduce el comportamiento elástico de los granos. Por contra, el estado plástico reproduce las deformaciones plásticas de los granos, el movimiento relativo entre ellos y la pérdida de vacíos.

Evolución del dominio elástico.

En la formulación del modelo plástico se definen unos criterios de fluencia los cuales limitan el espacio de tensiones al llamado conjunto de tensiones admisibles:

$$\mathbb{E}_\tau = \{(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_q} \mid \phi_\alpha \leq 0 \text{ para todo } \alpha\} \quad (3.28)$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ las tensiones de Kirchhoff, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ y \mathbf{q} las variables de endurecimiento, n_q la dimensión del vector \mathbf{q} y ϕ_α el conjunto de superficies de fluencia simples que definen la condición de fluencia. En los procesos de compactación, \mathbb{E}_τ se considera un conjunto cerrado aunque al final del proceso puede degenerar en un conjunto abierto. El dominio elástico se define como el interior del conjunto \mathbb{E}_τ :

$$\text{int}(\mathbb{E}_\tau) = \{(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_q} \mid \phi_\alpha < 0 \text{ para todo } \alpha\} \quad (3.29)$$

Mientras que la frontera del conjunto \mathbb{E}_τ define la condición de fluencia en el espacio de tensiones:

$$\partial\mathbb{E}_\tau = \{(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_q} \mid \phi_\alpha = 0 \text{ para algun } \alpha\} \quad (3.30)$$

El dominio elástico evoluciona a medida que avanza el proceso de compactación. Esta evolución se realiza a través de las variables de endurecimiento que, como puede verse de la ecuación (3.28), son de dos tipos diferentes. En primer lugar se considera la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$, la cual no es una variable interna puesto que depende única y exclusivamente de la densidad relativa. Es habitual en los procesos de compactación considerar la densidad como variable de endurecimiento. En segundo lugar se tiene el vector de variables internas de endurecimiento \mathbf{q} definido en el espacio de tensiones. Este vector se relaciona a través de las leyes de endurecimiento con un vector de variables de endurecimiento $\boldsymbol{\xi}$ definido en el espacio de deformaciones. No obstante, sobre estas leyes se realiza la hipótesis que la variable de endurecimiento en tensiones q_i es función únicamente de la variable de endurecimiento en deformaciones ξ_i :

$$q_i = q_i(\xi_i) \quad (3.31)$$

En particular, la ley de endurecimiento está dada por:

$$q_i = -\frac{\partial \psi^p(\xi_i)}{\partial \xi_i} = -\hat{K}'_i(\xi_i) \quad (3.32)$$

Por otro lado, las variables internas de endurecimiento consideradas son escalares y, por tanto, independientes de la configuración en que se representen.

Condición de fluencia.

La condición de fluencia con que se trabaja es una superficie múltiple compuesta por cuatro superficies simples, las cuales se intersectan entre sí formando esquinas. Los índices que identifican cada una de las superficies simples definen un conjunto que denotaremos por \mathbb{J}_ϕ , el cual está integrado por cuatro elementos $\mathbb{J}_\phi = \{01, 1, 2, 02\}$. La formulación de la superficie de fluencia se realiza a través de los invariantes tensoriales, pero considerando el efecto del tercer invariante despreciable:

$$\phi_{01} = \theta_{01} (I_1 - A_{01}) \quad (3.33a)$$

$$\phi_1 = A_1 J_2 + B_1 (I_1 + K_1)^2 + C_1 \sqrt{J_2} + D_1 (I_1 - A_{01}) - Y_1^2 \quad (3.33b)$$

$$\phi_2 = A_2 J_2 + B_2 (I_1 + K_2)^2 + C_2 \sqrt{J_2} + D_2 (I_1 + A_{02}) - Y_2^2 \quad (3.33c)$$

$$\phi_{02} = -\theta_{02} (I_1 + A_{02}) \quad (3.33d)$$

Los términos I_1 y J_2 son el primer invariante y el segundo invariante desviador del tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. Los coeficientes θ_{01} y θ_{02} tienen la finalidad de incluir o excluir las superficies ϕ_{01} y ϕ_{02} respectivamente de la condición de fluencia. Para ello toman el valor 0 en caso de excluir la superficie o 1 en caso de incluirla.

Los parámetros A_{01} , A_1 , A_2 , A_{02} , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , Y_1^2 e Y_2^2 caracterizan la superficie de fluencia correspondiente y son dependientes exclusivamente de las variables de endurecimiento.

Las superficies ϕ_{01} y ϕ_{02} no se definen libremente. En particular, la superficie ϕ_{01} no es independiente de la superficie ϕ_1 , ya que se impone que ambas intersecten al eje de presiones en el mismo punto. Una condición similar se aplica sobre las superficies ϕ_{02} y ϕ_2 . Estas condiciones conducen a las relaciones:

$$Y_1^2 = B_1 (A_{01} + K_1)^2 \quad (3.34a)$$

$$Y_2^2 = B_2 (A_{02} - K_2)^2 \quad (3.34b)$$

La finalidad de las superficies ϕ_{01} y ϕ_{02} es evitar las singularidades que tienen lugar en la intersección del eje de presiones con las superficies ϕ_1 y ϕ_2 como consecuencia de cortar al eje en un ángulo oblicuo o de una regla de flujo no asociada. Por contra, las superficies ϕ_{01} y ϕ_{02} deben desactivarse si los vectores de flujo definidos en el eje de presiones son linealmente dependientes de los vectores de flujo de las superficies ϕ_1 y ϕ_2 .

La superficie de fluencia múltiple definida en la ecuación (3.33a-d) pretende ser una superficie general capaz de englobar como casos particulares distintos modelos utilizados en la simulación de procesos de compactación. Ello no implica que todas las superficies simples que definen la superficie general sean utilizadas ni que todos los términos definidos en la expresión general estén presentes en un modelo particular. Por otro lado, la restricción que se exige en la definición del modelo particular es la convexidad de la superficie de fluencia múltiple.

La superficie de fluencia es un escalar y, por tanto, independiente de la configuración en que se represente. Sin embargo, es posible formularla indistintamente en términos de variables espaciales o en términos de variables materiales dependiendo de la forma como se calculen los invariantes I_1 y J_2 . Estos invariantes escritos en función de las variables espaciales definen la superficie de fluencia en la configuración espacial y se calculan como:

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} \quad (3.35a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|^2 \quad (3.35b)$$

siendo $\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{g}^{-1}$. Análogamente, los invariantes escritos en función de las variables materiales definen la superficie de fluencia en la configuración material y se calculan como:

$$I_1 = \text{TR}(\mathbf{S}) \quad (3.36a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\text{DEV}(\mathbf{S})\|_C^2 \quad (3.36b)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, y los operadores $\text{TR}(\mathbf{S})$, $\text{DEV}(\mathbf{S})$ junto con la norma $\|\text{DEV}(\mathbf{S})\|_C$ se definen como:

$$\text{TR}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbf{C} \quad (3.37a)$$

$$\text{DEV}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{TR}(\mathbf{S}) \mathbf{C}^{-1} \quad (3.37b)$$

$$\|\text{DEV}(\mathbf{S})\|_C^2 = \text{DEV}(\mathbf{S})^{ij} \text{DEV}(\mathbf{S})^{kl} \mathbf{C}_{ik} \mathbf{C}_{jl} \quad (3.37c)$$

Leyes de evolución.

Para completar el modelo, es preciso definir la regla de flujo de las deformaciones plásticas y las leyes de evolución de las variables de endurecimiento. Estas leyes caracterizan la irreversibilidad del proceso.

La evolución de la deformación plástica está dada por la regla de flujo conocida como regla de Koiter [105][101] aplicada al caso de grandes deformaciones:

$$Lv(\mathbf{e}^p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{m}_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \quad (3.38)$$

donde $\dot{\lambda}_\alpha$ es el parámetro de consistencia plástico y \mathbf{m}_α define la dirección del flujo plástico para la superficie $\alpha \in \mathbb{J}_\phi$. Los parámetros de consistencia $\dot{\lambda}_\alpha$ deben satisfacer las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda}_\alpha \geq 0, \quad \phi_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\lambda}_\alpha \phi_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_\phi \quad (3.39)$$

Las cuales tienen consecuencias físicas inmediatas. La primera condición exige la irreversibilidad de las variables plásticas, la segunda asegura que el estado tensional pertenezca al conjunto de tensiones admisibles \mathbb{E}_τ , y la última congela la evolución plástica durante el estado elástico. A estas condiciones debe añadirse la condición de consistencia:

$$\dot{\lambda}_\alpha \dot{\phi}_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_\phi \quad (3.40)$$

Esta condición determina el valor de los parámetros de consistencia $\dot{\lambda}_\alpha$. Por otro lado, el tensor \mathbf{m}_α se define a partir de un potencial plástico como:

$$\mathbf{m}_\alpha = \frac{\partial G_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.41)$$

Un caso particular, aunque frecuente, es el denominado flujo asociado, el cual se obtiene haciendo coincidir el potencial plástico con la superficie de fluencia. Aunque

en este trabajo, la regla de flujo no se limita exclusivamente al caso asociado, se consideran únicamente las reglas de flujo obtenidas de la siguiente forma:

$$\mathbf{m}_\alpha = \bar{\alpha}_\alpha \mathbf{m}_{dev_\alpha} + \bar{\beta}_\alpha \mathbf{m}_{esf_\alpha} \quad \text{para } \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{m}_\alpha = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad \text{para } \alpha \in \{01, 02\} \quad (3.42b)$$

donde $\bar{\alpha}_\alpha$ y $\bar{\beta}_\alpha$ son dos coeficientes que se suponen constantes, \mathbf{m}_{dev_α} y \mathbf{m}_{esf_α} se calculan a partir del flujo asociado:

$$\mathbf{m}_{esf_\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{g}^{-1} \right) \mathbf{g} \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{m}_{dev_\alpha} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \mathbf{m}_{esf_\alpha} \quad (3.43b)$$

El caso de flujo asociado se recupera tomando $\bar{\alpha}_\alpha = 1$ y $\bar{\beta}_\alpha = 1$. El cálculo de las direcciones de flujo \mathbf{m}_α se lleva a cabo en el anexo A2.

Con respecto a las variables de endurecimiento, se consideran dos leyes distintas dependiendo de la naturaleza de la variable. Dada una partícula $\mathbf{X} \in \Omega_0$ en un instante de tiempo $t \in [0, T]$, la ley de endurecimiento de la variable $\hat{\eta}(\mathbf{X}, t)$ se calcula a partir de la cinemática a través de la expresión:

$$\dot{\hat{\eta}}(\mathbf{X}, t) = H_{\hat{\eta}}(\eta) \langle \dot{\eta}(\mathbf{X}, t) \rangle \quad (3.44)$$

donde $H_{\hat{\eta}}(\eta)$ es la función unitaria de Heaviside definida como:

$$H_{\hat{\eta}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < \hat{\eta} \\ 1 & \text{si } \eta \geq \hat{\eta} \end{cases} \quad (3.45)$$

Como se muestra en el anexo A1 la ley (3.44) puede ser integrada de forma cerrada. Según el lema A1.4 esta ley es equivalente a tomar $\hat{\eta}(\mathbf{X}, t)$ como la densidad relativa máxima que ha alcanzado la partícula \mathbf{X} durante la compactación:

$$\hat{\eta}(\mathbf{X}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} [\eta(\mathbf{X}, \tau)] \quad (3.46)$$

La definición (3.44) es útil en la determinación de la matriz tangente. Sin embargo, su aplicación directa para el cálculo de la variable $\hat{\eta}$ en el caso discreto genera un error de integración debido a la discontinuidad de dicha ecuación. Este error puede ser eliminado fácilmente a través de la expresión (3.46), la cual permite calcular directamente la variable $\hat{\eta}$ en cualquier instante.

La variable $\hat{\eta}$ presenta una importante ventaja desde el punto de vista de coste computacional ya que su cálculo no implica determinar el estado tensional ni, en consecuencia, conocer previamente el multiplicador plástico λ_α para todo $\alpha \in \mathbb{J}_\phi$.

Observación 3.2 Si el proceso de carga es monótono, entonces la evolución de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ coincide con el de la densidad relativa durante todo el proceso ($\dot{\hat{\eta}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\eta}(\mathbf{X}, t) \forall t \in [0, T]$). Por otro lado, si el proceso de carga no es monótono, entonces la densidad relativa puede decrecer por dos razones:

- Si se producen deformaciones elásticas de carácter dilatante durante la descarga.
- Si se producen deformaciones plásticas de carácter dilatante. En particular, combinando las ecuaciones (3.9c), (3.18) y (3.38) se tiene que:

$$\dot{\eta} \approx -\eta \operatorname{tr}(\mathbf{d}^p) = -\eta \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \dot{\lambda}_\alpha \operatorname{tr}(\mathbf{m}_\alpha) \quad (3.47)$$

de donde se deduce que los términos $\operatorname{tr}(\mathbf{m}_\alpha) > 0$ provocan deformaciones plásticas dilatantes.

Bajo esta consideración, tomar la densidad relativa como variable de endurecimiento produce softening durante la dilatación, mientras que la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ congela la superficie de fluencia.

La evolución del vector de variables internas ξ está dada por una ley asociada para el caso de superficies de fluencia múltiples:

$$\dot{\xi} = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\eta}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.48)$$

Disipación plástica.

Hasta ahora, se han definido los elementos que integran el modelo constitutivo. No obstante, debe comprobarse que dicho modelo verifique la segunda ley de la termodinámica, la cual se satisface de forma automática si se demuestra que la disipación plástica \mathcal{D}^p es positiva. La representación de la disipación en su forma material está dada por la expresión:

$$\mathcal{D}^p = -\rho_0 \dot{\Psi} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad (3.49)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.21), (3.23) y (3.32) en la ecuación (3.49) se puede reescribir la disipación como:

$$\mathcal{D}^p = \rho_0 \cdot \frac{\partial \Psi^e(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^p - \frac{\partial \Psi^p(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3.50)$$

En esta ecuación, las variables $\dot{\mathbf{E}}^p$ y $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ están definidas a través de las leyes de evolución en su forma material. Sin embargo, las derivadas de las variables internas de endurecimiento son objetivas y no dependen de la configuración en que se represente por tratarse de escalares. Por otro lado, la regla de flujo (3.38) en su forma material está dada por:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{M}_\alpha(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \quad (3.51)$$

donde \mathbf{M}_α es el *pull-back* de la dirección de flujo plástico espacial \mathbf{m}_α , representada como $\mathbf{M}_\alpha = \phi^*(\mathbf{m}_\alpha)$ (ver anexo A2). Introduciendo las ecuaciones (3.51) y (3.48) en la expresión de la disipación (3.50) se tiene:

$$\mathcal{D}^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \dot{\lambda}_\alpha \left(\mathbf{S} : \mathbf{M}_\alpha + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad (3.52)$$

En general, es posible encontrar un proceso de carga tal que para la superficie β se cumpla que $\dot{\lambda}_\alpha \neq 0$ si $\alpha = \beta$ y $\dot{\lambda}_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \beta$. Por esta razón, para que la disipación sea positiva en cualquier proceso debe verificarse la desigualdad (3.52) para cada superficie por separado:

$$\dot{\lambda}_\alpha \left(\mathbf{S} : \mathbf{M}_\alpha + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_\phi \quad (3.53)$$

Análogamente, es posible plantear esta desigualdad en términos de variables espaciales aplicando el operador *push-forward* $\phi_*(\cdot)$ sobre las variables materiales:

$$\dot{\lambda}_\alpha \left(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{m}_\alpha + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_\phi \quad (3.54)$$

3.2.3 Tensor elastoplástico tangente.

La derivada objetiva del tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}$ se relaciona con la derivada objetiva del tensor de deformaciones \mathbf{e} a través del tensor elastoplástico tangente \mathbf{c}^{ep} referido a la configuración espacial:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{c}^{ep} : L_v(\mathbf{e}) \quad (3.55)$$

donde se ha usado la derivada de Lie como derivada objetiva. El tensor \mathbf{c}^{ep} se calcula derivando la ecuación constitutiva (3.26):

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = L_v(\mathbf{c}) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + \mathbf{c} : (L_v(\mathbf{e}) - L_v(\mathbf{e}^p)) \quad (3.56)$$

Aplicando la derivada de Lie sobre el tensor elástico y haciendo el doble producto con las deformaciones elásticas, el primer término de la ecuación (3.56) se puede escribir como:

$$L_v(\mathbf{c}) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{a} : L_v(\mathbf{e}) \quad (3.57)$$

donde el tensor \mathbf{a} se escribe como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a})^{ijkl} = & -2\lambda \left[\Gamma^{ijkl} \operatorname{tr}(\mathbf{e}^e) + g^{ij} (\mathbf{e}^e)^{kl} \right] - \\ & -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}^e)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}^e)^{jk} + (\mathbf{e}^e)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}^e)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

El cálculo del segundo término de la ecuación (3.56) se obtiene aplicando la condición de consistencia plástica (3.40). Para ello, se definen los conjuntos \mathbb{J}_{adm} y \mathbb{J}_{act} como:

$$\mathbb{J}_{adm} = \left\{ \alpha \in \mathbb{J}_\phi \mid \phi_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\eta}, \mathbf{q}) = 0 \right\} \quad (3.59a)$$

$$\mathbb{J}_{act} = \left\{ \alpha \in \mathbb{J}_{adm} \mid \dot{\phi}_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \hat{\eta}, \mathbf{q}) = 0 \right\} \quad (3.59b)$$

De la definición de \mathbb{J}_{act} y de la ecuación (3.40) se deduce que $\dot{\lambda}_\alpha \neq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{J}_{act}$, y que $\dot{\lambda}_\alpha = 0$ para todo $\alpha \notin \mathbb{J}_{act}$. Por tanto, aplicando la condición de consistencia sobre cada elemento de \mathbb{J}_{act} y utilizando la regla de la cadena se tiene:

$$\dot{\phi}_\alpha = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} : L\nu(\boldsymbol{\tau}) + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \hat{\eta}} \dot{\hat{\eta}} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{g}} L\nu(\mathbf{g}) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_{act} \quad (3.60)$$

Combinando (3.60) con las ecuaciones (3.32), (3.38), (3.48), (3.44) y haciendo uso de las expresiones:

$$L\nu(\mathbf{g}) = 2 L\nu(\mathbf{e}) \quad (3.61)$$

$$\dot{\eta} = -\eta \mathbf{g}^{-1} : L\nu(\mathbf{e}) \quad (3.62)$$

se obtiene el multiplicador plástico para todo $\alpha \in \mathbb{J}_{act}$:

$$\dot{\lambda}_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} G_{\alpha\beta}^{-1} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - H_{\hat{\eta}}(\eta) \eta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \hat{\eta}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{g}} \right) : L\nu(\mathbf{e}) \quad (3.63)$$

donde la matriz \mathbf{G} se calcula como:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \mathbf{m}_\beta + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \hat{\eta}} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\xi) \cdot \frac{\partial \phi_\beta}{\partial \mathbf{q}} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act} \quad (3.64)$$

Sustituyendo (3.38), (3.57) y (3.63) en (3.56) se deduce el tensor elastoplástico tangente:

$$\mathbf{c}^{ep} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act}} G_{\alpha\beta}^{-1} (\mathbf{c} : \mathbf{m}_\alpha) \otimes \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - H_{\hat{\eta}}(\eta) \eta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \hat{\eta}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{g}} \right) \quad (3.65)$$

3.2.4 Modelo plástico particular.

En el apartado anterior se ha presentado un modelo general destinado a la simulación de procesos de compactación. Particularizándolo se pretende reproducir una gran variedad de modelos destinados a la simulación de dichos procesos. Con ello se consigue obtener un modelo concreto de una forma rápida y cómoda, facilitando el desarrollo de otros nuevos. Concretamente, en este apartado se propone un modelo para la simulación de procesos de compactación, obtenido a partir del caso general.

Evolución del dominio elástico.

La evolución del dominio elástico se realiza a través de una única variable de endurecimiento $\hat{\eta}(\mathbf{X}, t)$, la cual depende exclusivamente de la evolución de la densidad relativa. Bajo esta consideración, el término plástico de la energía libre definido en (3.22) es nulo:

$$\psi^p(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (3.66)$$

Condición de fluencia.

La condición de fluencia considerada en el presente trabajo para la simulación de los procesos de compactación, se obtiene de simplificar la superficie de fluencia múltiple (3.33a-d) de la siguiente forma:

$$\phi_{01} = I_1 - A_{01} \quad (3.67a)$$

$$\phi_1 = C_1 \sqrt{J_2} + D_1 (I_1 - A_{01}) \quad (3.67b)$$

$$\phi_2 = A_2 J_2 + B_2 I_1^2 - Y_2^2 \quad (3.67c)$$

en la que los coeficientes de la superficie se definen como:

$A_{01} = \sqrt{3} \frac{c(\hat{\eta})}{\tan \phi}$	$A_{02} = r_1(\hat{\eta})$
$C_1 = 1$	$A_2 = 2$
$D_1 = \frac{\tan \phi}{\sqrt{6}}$	$B_2 = 2 \left(\frac{r_2(\hat{\eta})}{r_1(\hat{\eta})} \right)^2$

(3.68)

Adicionalmente, se debe de añadir la condición (3.34b) que para el modelo considerado se reduce a la expresión:

$$Y_2^2 = B_2 A_{02}^2 \quad (3.69)$$

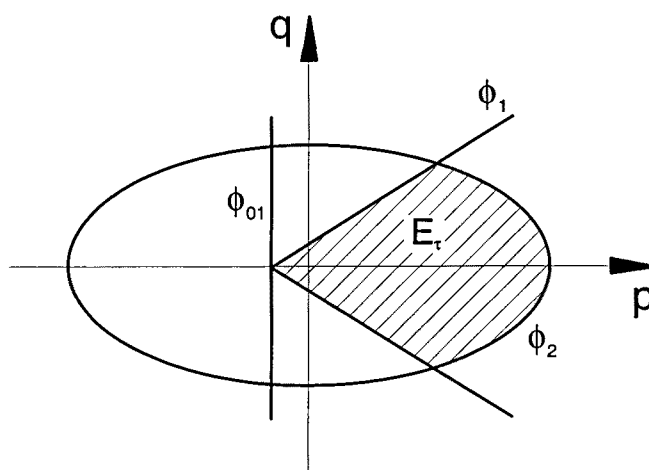


Figura 3.1: Condición de fluencia.

El conjunto \mathbb{J}_ϕ , formado por las superficies simples que definen la condición de fluencia (3.67a-c), es un subconjunto del caso general definido por $\mathbb{J}_\phi = \{01, 1, 2\}$.

La condición de fluencia, representada en el plano $p - q$, se muestra en la figura 3.1, en el que $p = -\frac{I_1}{3}$ y $q = \sqrt{3J_2}$. Como se aprecia en la figura 3.2, la superficie ϕ_1 representa el cono en el espacio de Haigh-Werstergaard, donde el parámetro $c(\hat{\eta})$ corresponde al radio de la base del cono en el plano octaédrico que pasa por el origen del espacio, y ϕ es el ángulo que forma el cono con el eje de presiones. Se trata de una superficie característica de materiales friccionales conocida como superficie de Drucker-Prager [28]. Experimentalmente se ha mostrado que este tipo de superficies reproducen el comportamiento de los pulvimateriales de una forma más apropiada a bajas tensiones hidrostáticas [13]. Por otro lado, $r_1(\hat{\eta})$ y $r_2(\hat{\eta})$ son los radios de la elipse definida por ϕ_2 en el plano $I_1 - \sqrt{J_2}$. En el espacio de Haigh-Werstergaard la superficie ϕ_2 representa un elipsoide centrado en el origen. Esta superficie fue inicialmente propuesta por Kuhn y Downey [63], empleada por G.G. Weber y S.B. Brown [115] y modificada posteriormente por J.C. Cante [15][18][19]. En esta tesis, los cambios realizados conciernen básicamente a la forma y evolución de la superficie durante las etapas iniciales y finales de la compactación.

Observación 3.3 *No debe confundirse los parámetros c y ϕ con la cohesión \tilde{c} y el ángulo de fricción interna $\tilde{\phi}$ definidos en los modelos de Mohr-Coulomb. Aunque ambos parámetros no son independientes de los definidos por el modelo de Mohr-Coulomb, su relación no es única y requiere alguna condición adicional [84]. En concreto, si se considera que la superficie ϕ_1 circunscribe a la superficie de Mohr-Coulomb, entonces*

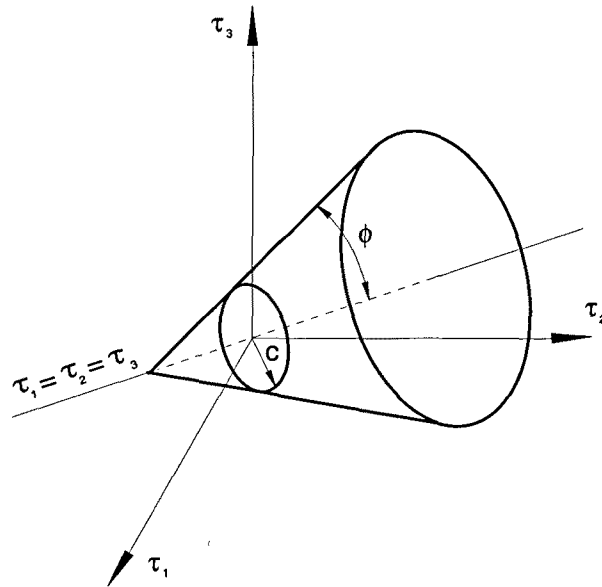


Figura 3.2: Superficie ϕ_1 en el espacio de Haigh-Werstergaard.

los parámetros de ambas superficies se relacionan a través de las expresiones:

$$c = \frac{2\sqrt{6} \cos \tilde{\phi}}{3 - \sin \tilde{\phi}} \tilde{c}$$

$$\phi = \arctan \left(2\sqrt{2} \frac{\sin \tilde{\phi}}{3 - \sin \tilde{\phi}} \right)$$

Pero si se considera que la superficie ϕ_1 está inscrita en la superficie de Mohr-Coulomb entonces la relación de dichos parámetros está dada por:

$$c = \frac{2\sqrt{6} \cos \tilde{\phi}}{3 + \sin \tilde{\phi}} \tilde{c}$$

$$\phi = \arctan \left(2\sqrt{2} \frac{\sin \tilde{\phi}}{3 + \sin \tilde{\phi}} \right)$$

La superficie ϕ_1 tiene especial relevancia durante la fase de transferencia, en las etapas iniciales de la fase de prensado y durante la expulsión de la pieza en la matriz. La superficie ϕ_2 tiene especial relevancia durante la fase de prensado.

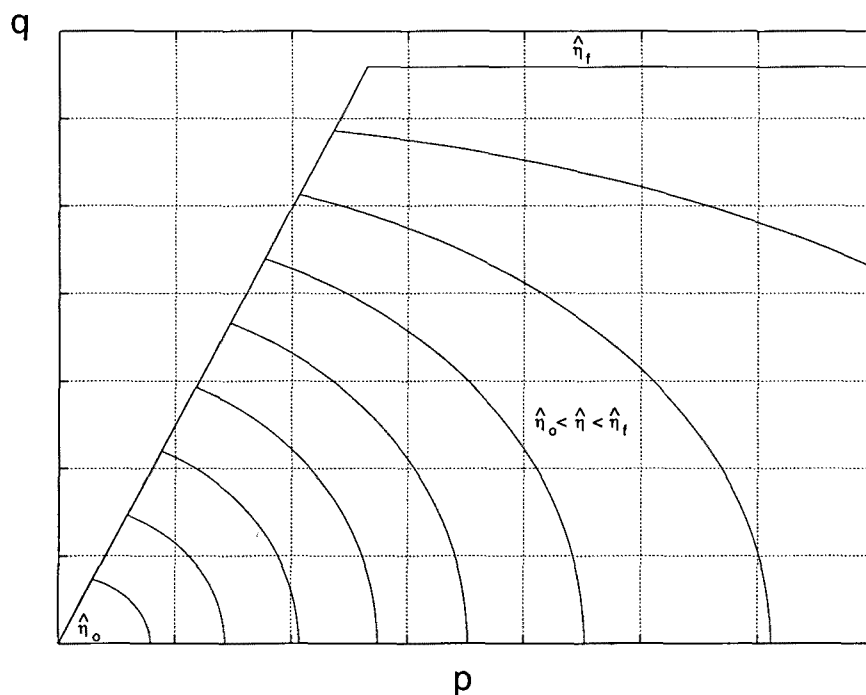


Figura 3.3: Evolución de la superficie de fluencia vs la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

En la figura 3.3 se representa la evolución de la superficie de fluencia (3.67a-c) en el plano $p-q$. Su evolución depende de la evolución de la densidad a través de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ definida en (3.46). Inicialmente, cuando el valor de la variable de endurecimiento toma el valor de la densidad inicial del material ($\hat{\eta} = \eta_0$), la superficie de fluencia tiene un dominio elástico muy pequeño, el cual contiene al origen del plano $p-q$. El reducido tamaño del dominio se traduce físicamente en una incapacidad de resistir tensiones sin que el material sufra deformaciones irreversibles. A medida que la densidad aumenta, crece la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ y con ella el dominio elástico, lo que significa un incremento de la resistencia del material. No obstante, la resistencia a compresión y tracción crecen de forma desigual, siendo considerablemente mayor su resistencia a compresión que su resistencia a tracción. Finalmente, a medida que la densidad tiende a la densidad teórica, la superficie de fluencia tiende a una superficie de Von-Mises truncada por el lado de las tracciones a través de la superficie de Drucker-Prager. En este caso, el material se comporta como un metal en procesos de compresión, pero como un material frágil en procesos de tracción.

A medida que avanza el proceso de compactación, se producen incrementos de densidad que conlleven a incrementos de la resistencia a tracción. Fundamental-

mente, la capacidad del material para resistir tracciones depende de la superficie ϕ_1 , la cual está representada por una recta en el plano $p - q$. Se considera que la fricción interna del material permanece fija durante el proceso, con lo que la pendiente permanece invariable. Sin embargo, se considera que se produce un incremento de la cohesión con el aumento de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ (ver figura 3.4) que, al no variar la superficie su pendiente, implica un desplazamiento de la superficie hacia la izquierda.

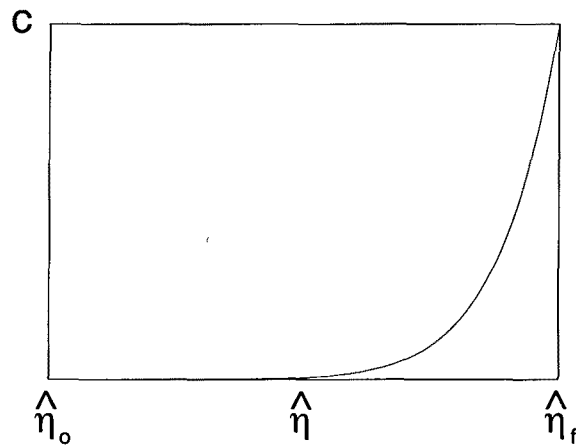


Figura 3.4: Evolución de la cohesión vs la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$.

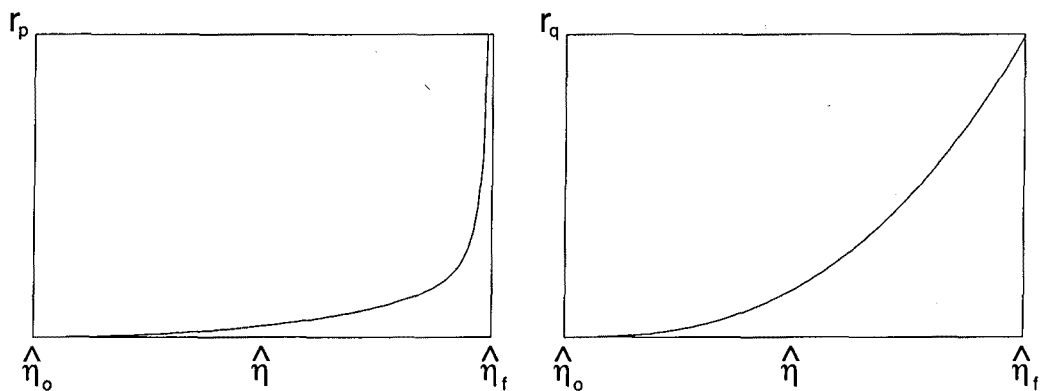


Figura 3.5: Evolución de los radios de la superficie ϕ_2 .

Por otro lado, el aumento de la densidad también produce un incremento de la resistencia a compresión del material. Este incremento de resistencia es controlado

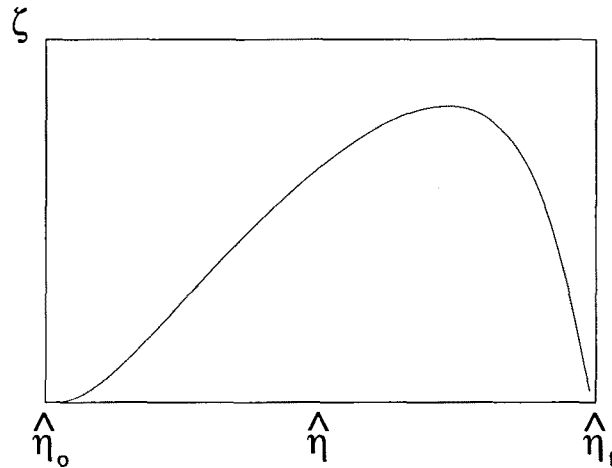


Figura 3.6: Coeficiente de forma ζ de la elipse definida por la superficie ϕ_2 .

por la superficie ϕ_2 , la cual describe una elipse en el plano $p - q$ cuyos radios se representan en la figura 3.5. Otro parámetro significativo es el coeficiente de forma ζ que controla el relación entre los radios de la elipse y, por tanto, controla su forma. Este parámetro, representado en la figura 3.6, está definido por la expresión:

$$\zeta(\hat{\eta}) = \left(\frac{r_q(\hat{\eta})}{r_p(\hat{\eta})} \right)^2 = 27 \left(\frac{r_2(\hat{\eta})}{r_1(\hat{\eta})} \right)^2$$

donde r_q es el radio de la elipse en el eje q y r_p es el radio de la elipse en el eje p . Observando las figuras 3.5 y 3.6 es posible clasificar el comportamiento de la superficie ϕ_2 a medida que avanza el proceso de compactación:

Zona de baja densidad. Tiene lugar para densidades próximas a la densidad inicial.

De la figura 3.5 se observa que la superficie crece lentamente en esta zona, provocando que el dominio elástico sea pequeño. Sin embargo, de la figura 3.6 se observa que la forma de la superficie cambia rápidamente. Inicialmente, el radio de presiones es mucho mayor que el desviador, haciendo que la superficie sea muy estirada. A medida que aumenta la densidad, los radios tienden a igualarse muy rápidamente y, por tanto, la superficie tiende hacia una forma circular.

Zona de densidad intermedia. Es la más amplia de todas y se extiende hasta densidades próximas a la densidad teórica. La evolución de la superficie se caracteriza por aumentar rápidamente sus radios sin alterar significativamente su forma, lo que implica un crecimiento considerable del dominio elástico con la densidad.

Zona de alta densidad. Tiene lugar para densidades próximas a la densidad teórica.

En esta zona, la superficie crece y cambia de forma simultáneamente. El radio de presiones crece con la densidad de manera asintótica al contrario del radio desviador que lo hace de forma limitada, de aquí que la elipse degenera en el cilindro de Von Mises, en cuyo caso, el dominio elástico no está acotado.

Hay autores que prefieren definir directamente el coeficiente de forma ζ [15][83]. Sin embargo, el comportamiento del polvo es muy poco sensible a variaciones de este parámetro, lo que complica la calibración del modelo y hace desaconsejable esta forma de proceder. En este sentido, es preferible definir la evolución de los radios de la elipse y a partir de ellos obtener el coeficiente de forma.

Leyes de evolución.

La evolución de la deformación plástica definida en (3.38) se particulariza a través de las direcciones de flujo m_α . La regla de flujo considerada se representa gráficamente en la figura 3.7. En particular, se considera una regla de flujo puramente desviadora ($\bar{\alpha}_1 = 1$ y $\bar{\beta}_1 = 0$) para la superficie de Drucker-Prager ϕ_1 , y una regla de flujo asociada ($\bar{\alpha}_2 = 1$ y $\bar{\beta}_2 = 1$) para el caso de la superficie ϕ_2 . Bajo estas consideraciones, las direcciones de flujo se reducen a las expresiones:

$$\mathbf{m}_{01} = \mathbf{g} \quad (3.70a)$$

$$\mathbf{m}_1 = \left(\sqrt{2}A_1\sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_1 \right) \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} \quad (3.70b)$$

$$\mathbf{m}_2 = A_2 \text{dev}(\boldsymbol{\tau}) + 2B_2 I_1 \mathbf{g} \quad (3.70c)$$

Con respecto a la variable de endurecimiento, se considera la ley de endurecimiento correspondiente a la variable $\hat{\eta}$ dada por las ecuaciones (3.44) y (3.46).

Observación 3.4 *Para valores de $\hat{\eta}$ próximos a la densidad relativa inicial η_0 y para valores de $\hat{\eta}$ próximos a la densidad relativa final η_f , se tiene que el radio de presiones r_p de la superficie ϕ_2 es mucho más grande que su radio desviador r_q (esto es un coeficiente de forma $\zeta \ll 1$). En esta situación, la regla de flujo asociada implica que la componente esférica del flujo sea nula o despreciable en una amplia región de la superficie ϕ_2 (ver figura 3.8).*

Disipación plástica.

La comprobación de la segunda ley de la termodinámica se realiza a través de la desigualdad (3.54) deducida para el caso general. Teniendo en cuenta que la única

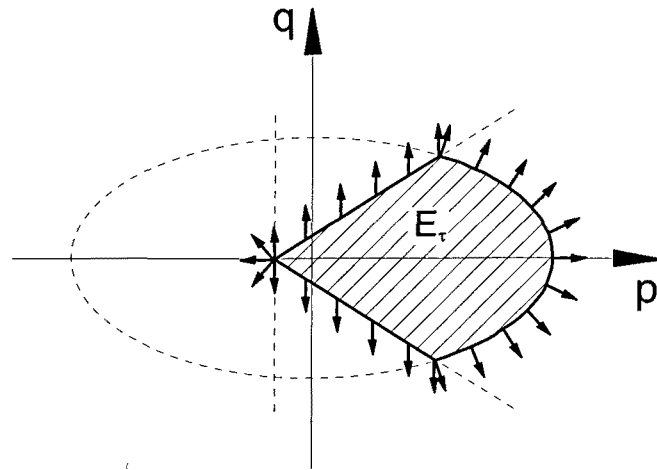


Figura 3.7: Regla de flujo.

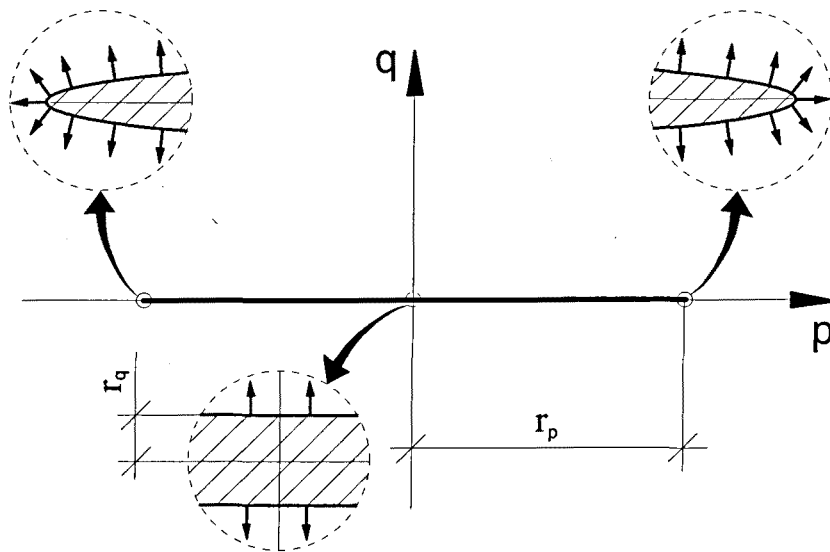


Figura 3.8: Regla de flujo sobre la superficie ϕ_2 cuando el coeficiente de forma verifica que $0 \leq \zeta \ll 1$.

variable de endurecimiento es $\widehat{\eta}$, esta desigualdad se reduce a:

$$\dot{\lambda}_\alpha \boldsymbol{\tau} : \mathbf{m}_\alpha \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{J}_\phi \quad (3.71)$$

Sustituyendo en (3.71) las direcciones de flujo (3.70a-c) se llega a las desigualdades:

$$\dot{\lambda}_{01} I_1 \geq 0 \quad (3.72a)$$

$$\dot{\lambda}_1 C_1 \sqrt{J_2} \geq 0 \quad (3.72b)$$

$$\dot{\lambda}_2 (2A_2 J_2 + 2B_2 I_1^2) \geq 0 \quad (3.72c)$$

Las desigualdades (3.72b) y (3.72c) se verifican automáticamente ya que, según la definición (3.68), los coeficientes $C_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$ y $B_2 \geq 0$. Por otro lado, de la aplicación de las condiciones de Kuhn-Tucker sobre la superficie ϕ_{01} se deducen las condiciones:

- Si $I_1 < A_{01} \implies \phi_{01} < 0$ y $\dot{\lambda}_{01} = 0$
- Si $I_1 > A_{01} \implies \phi_{01} = 0$ y $\dot{\lambda}_{01} > 0$

Sin embargo, si $I_1 < 0$ entonces $\dot{\lambda}_{01} I_1 \leq 0$. La única forma de evitar que el término $\dot{\lambda}_{01} I_1$ sea negativo es que $\dot{\lambda}_{01} = 0$, lo que se consigue imponiendo que $A_{01} \geq 0$. Por tanto, la desigualdad (3.72a) se verificará si $A_{01} \geq 0$, la cual es una condición razonable puesto que equivale a suponer que la cohesión del material sea no negativa.

3.2.5 Modelo viscoplástico.

Al contrario de lo que sucedía en el modelo plástico, en el modelo viscoplástico el estado tensional $(\boldsymbol{\tau}, \widehat{\eta}, q)$ puede estar fuera del conjunto de tensiones admisibles \mathbb{E}_τ , lo cual implica una modificación de las leyes de evolución. Al haberse definido en el modelo constitutivo una superficie de fluencia múltiple, se aplica una regularización de Duvaut-Lions. En este caso, la ley de evolución de las deformaciones irreversibles está dada por:

$$Lv(\mathbf{e}^p) = \frac{1}{\tau} \mathbf{c}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \overline{\boldsymbol{\tau}}) \quad (3.73)$$

donde $\tau \in (0, \infty)$ es un parámetro conocido como tiempo de relajación, y $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ corresponde a la solución del modelo *rate-independent* o invíscido.

En el caso de las variables internas \mathbf{q} , se postula la ecuación de evolución:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}) \quad (3.74)$$

donde $\bar{\mathbf{q}}$ corresponde a la solución de la variable interna en el modelo invíscido.

Es interesante destacar que la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ no se ve alterada en el caso del modelo viscoplástico, ya que su evolución depende de las variables cinemáticas y no del estado tensional. Así, puede representarse la solución del caso invíscido a través del operador proyección como $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\eta}, \bar{\mathbf{q}}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\eta}, \mathbf{q})$ siendo $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}}$ el operador proyección.

El orden de magnitud del estado tensional en las etapas iniciales de la compactación es muy diferente al de las etapas finales. Por esta razón, se ha considerado la posibilidad de permitir que el tiempo de relajación evolucione durante la compactación $\tau = \tau(\hat{\eta})$, lo que permite penalizar en mayor o menor medida la violación de la condición de fluencia en virtud de su tamaño.

3.3 Integración de la ecuación constitutiva.

El objetivo de la integración de las ecuaciones constitutivas es la determinación de las variables internas y las variables dependientes a partir de las variables libres.

La integración se realiza de forma incremental en el tiempo para los puntos correspondientes a la cuadratura del elemento, lo que implica una discretización del intervalo de tiempo de interés. Sea $[0, T] = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ una discretización cualquiera del intervalo de interés. Suponiendo, para toda partícula $\mathbf{X} \in \Omega_0$, conocido el campo de desplazamientos $\Delta \mathbf{U}_{n+1} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ en el incremento de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ y las variables $\{\boldsymbol{\varphi}_n, \mathbf{E}_n^p, \hat{\eta}_n, \boldsymbol{\xi}_n\}$ en el instante t_n , la integración de la ecuación constitutiva consiste en determinar las variables $\{\boldsymbol{\varphi}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p, \hat{\eta}_{n+1}, \boldsymbol{\xi}_{n+1}\}$ en el instante t_{n+1} . Una vez conocidas, el resto de variables quedan automáticamente determinadas, incluidas las variables espaciales las cuales se calculan a través del operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ evaluado en el instante t_{n+1} .

La integración numérica se lleva a cabo de la forma usual mediante un algoritmo predictor-corrector. Para ello, la ecuación constitutiva se formula en la configuración material y su integración se realiza en dos partes. La primera es una predicción elástica, la cual congela las variables irreversibles como la deformación plástica de Green-Lagrange y el vector de variables internas $\boldsymbol{\xi}$. La segunda es una corrección plástica, la cual relaja el estado tensional solución de la predicción elástica hasta verificar las condiciones de Kuhn-Tucker. La resolución secuencial de ambas equivale a resolver el problema original.

Determinación de las variables cinemáticas.

Conocido el campo de desplazamientos $\Delta \mathbf{U}_{n+1}$ en el instante t_{n+1} , la ecuación de movimiento se actualiza de la forma:

$$\varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \Delta \mathbf{U}_{n+1} \quad (3.75)$$

A partir de la ecuación de movimiento (3.75) se obtienen las relaciones:

$$\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_n(\mathbf{X}) + \text{GRAD}(\Delta \mathbf{U}_{n+1}(\mathbf{X})) \quad (3.76)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{n+1}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{X}) - \mathbf{G}) \quad (3.77)$$

$$\eta_{n+1}(\mathbf{X}) = \frac{\eta_0(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{X}))} \quad (3.78)$$

Una vez actualizado el gradiente de deformaciones \mathbf{F}_{n+1} y teniendo en cuenta las relaciones (3.7), la deformación \mathbf{E}_{n+1} se puede poner en su forma espacial a través del operador *push-forward* aplicado en el instante t_{n+1} :

$$\mathbf{e}_{n+1} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \cdot \mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (3.79)$$

Conviene mencionar aquí que la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ se calcula directamente a partir de la ecuación (3.78), ya que únicamente depende de las variables cinemáticas. Así, como se muestra en el anexo A1, la variable $\hat{\eta}_{n+1}$ se calcula como:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \} = \begin{cases} \eta_{n+1} & \text{si } \hat{\eta}_n < \eta_{n+1} \\ \hat{\eta}_n & \text{si } \hat{\eta}_n \geq \eta_{n+1} \end{cases} \quad (3.80)$$

Algoritmo predictor-corrector.

La actualización de la deformación plástica se realiza a partir de la ecuación (3.51) discretizada:

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \sum_{\alpha \in \mathbf{J}_\phi} \Delta \lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{M}_\alpha^{n+1} \quad (3.81)$$

donde $\Delta \lambda_\alpha^{n+1}$ se define como $\Delta \lambda_\alpha^{n+1} = \Delta t_{n+1} \dot{\lambda}_\alpha(t_{n+1})$ y las direcciones de flujo en su forma material \mathbf{M}_α^{n+1} (las cuales se definen en el anexo A2) evaluadas en el instante t_{n+1} . La aplicación del operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ a ambos lados de la ecuación (3.81) permite calcular la deformación plástica en su forma espacial:

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p) + \sum_{\alpha \in \mathbf{J}_\phi} \Delta \lambda_\alpha^{n+1} \hat{\mathbf{m}}_\alpha^{n+1} \quad (3.82)$$

donde $\phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p)$ se calcula aplicando del operador *push-forward* en el instante t_{n+1} :

$$\phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p) = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \cdot \mathbf{E}_n^p \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (3.83)$$

Se define el predictor elástico congelando el flujo plástico ($\Delta\lambda_\alpha^{n+1} = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{J}_\phi$) durante el incremento de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p) \quad (3.84a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}}) \quad (3.84b)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\xi}_n \quad (3.84c)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{trial} = \mathbf{q}_n = -\widehat{\mathbf{K}}'(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial}) \quad (3.84d)$$

Por otro lado, se define el conjunto de superficies activas *trial* como:

$$\mathbb{J}_{trial}^{n+1} = \{\alpha \in \mathbb{J}_\phi \mid \phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, \widehat{\eta}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}^{trial}) > 0\} \quad (3.85)$$

Este conjunto determina si las variables internas evolucionan o no. En particular, si $\mathbb{J}_{trial}^{n+1} = \emptyset$ se tiene un incremento elástico ya que el predictor elástico es un estado admisible. En este caso, el predictor elástico se convierte en la solución del sistema, esto es $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$. Por contra, si $\mathbb{J}_{trial}^{n+1} \neq \emptyset$ se tiene un incremento plástico ya que se viola al menos una condición de fluencia, lo que implica una violación de las condiciones de Kuhn-Tucker (3.39) y, por tanto, una evolución de las variables internas.

Utilizando las ecuaciones (3.26), (3.82) y (3.84b), las tensiones se pueden escribir como:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : \mathbf{m}_\alpha^{n+1} \quad (3.86)$$

Las variables internas de endurecimiento se calculan a partir de la expresión (3.48):

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (3.87)$$

La variable de endurecimiento en tensiones se obtiene evaluando la ley de endurecimiento (3.32) en el instante t_{n+1} :

$$\mathbf{q}_{n+1} = -\widehat{\mathbf{K}}'(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \quad (3.88)$$

Las ecuaciones (3.82), (3.86), (3.87) y (3.88) definen el corrector plástico. Las deformaciones plásticas, las tensiones y las variables internas son incógnitas a las que

se deben añadir los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_\alpha^{n+1}$. Para su evaluación se deben incluir además las condiciones de Kuhn-Tucker (3.39) en su forma discreta:

$$\phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 \quad (3.89a)$$

$$\Delta\lambda_\alpha^{n+1} \geq 0 \quad (3.89b)$$

$$\Delta\lambda_\alpha^{n+1} \phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0 \quad (3.89c)$$

que deben verificarse para toda $\alpha \in \mathbb{J}_\phi$. La solución del sistema formado por (3.82), (3.86), (3.87), (3.88) y (3.89a-c) se realiza a través de un algoritmo del tipo Predictor-Corrector aplicado al caso de superficies de fluencia múltiples. Para ello, se define el conjunto de superficies activas \mathbb{J}_{act}^{n+1} como:

$$\mathbb{J}_{act}^{n+1} = \{\alpha \in \mathbb{J}_\phi \mid \phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0\} \quad (3.90)$$

En principio, este conjunto es desconocido y su determinación requiere de un proceso iterativo, el cual finaliza cuando se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker para toda $\alpha \in \mathbb{J}_\phi$.

Observación 3.5 *Violar una condición de fluencia en la predicción elástica ($\alpha \in \mathbb{J}_{trial}^{n+1}$) no implica que esta restricción esté activa ($\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$). Sin embargo, aunque es frecuente que el conjunto \mathbb{J}_{act}^{n+1} solución esté contenido en el conjunto \mathbb{J}_{trial}^{n+1} , en general, las definiciones (3.90) y (3.85) no implican que $\mathbb{J}_{act}^{n+1} \subseteq \mathbb{J}_{trial}^{n+1}$. Esto es fácil de comprobar con un ejemplo como el que se muestra en la figura 3.9*

Dado un conjunto $\mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$, la determinación de los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_\alpha^{n+1}$ implica resolver un sistema de ecuaciones no lineal:

$$R_{\lambda_\alpha}(\Delta\lambda_{01}^{n+1}, \Delta\lambda_1^{n+1}, \Delta\lambda_2^{n+1}, \Delta\lambda_{02}^{n+1}) = \phi_\alpha^{n+1} = 0 \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1} \quad (3.91a)$$

$$\Delta\lambda_\alpha^{n+1} = 0 \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{J}_{act}^{n+1} \quad (3.91b)$$

$$R_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) = \boldsymbol{\xi}_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} = 0 \quad (3.91c)$$

donde las ecuaciones (3.82), (3.86) y (3.88) están definidas de forma implícita. La resolución de este sistema de ecuaciones se lleva a cabo de forma iterativa, desacoplando el sistema (3.91a-b) del sistema (3.91c), dada su distinta naturaleza, y resolviéndolos alternativamente en cada iteración. En particular, el rango del sistema definido por (3.91a) coincide con el número de elementos de \mathbb{J}_{act}^{n+1} (en la práctica no más de tres ya que si $\text{int}(\mathbb{E}_\tau) \neq \emptyset$ entonces $\alpha = 01$ y $\alpha = 02$ no pueden ser elementos de \mathbb{J}_{act}^{n+1} simultáneamente). Mientras que (3.91c) es un sistema diagonal de rango n_q , siendo n_q la dimensión del vector de variables de endurecimiento \mathbf{q}_{n+1} .

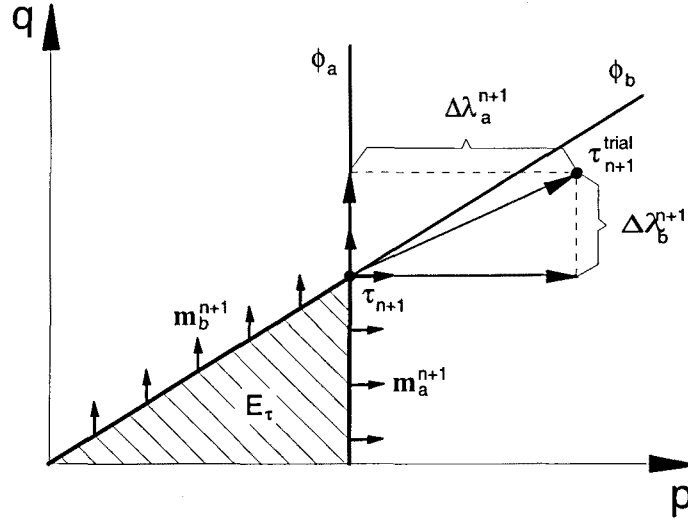


Figura 3.9: Ejemplo de retorno a una superficie de fluencia convexa en el que $\mathbb{J}_{act}^{n+1} \not\subseteq \mathbb{J}_{trial}^{n+1}$. En particular, $\mathbb{J}_{trial}^{n+1} = \{a\}$ y $\mathbb{J}_{act}^{n+1} = \{a, b\}$.

El sistema de ecuaciones no lineal (3.91a) se resuelve de forma iterativa, en la que la solución de cada iteración está dada por la ecuación:

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda(\Delta \lambda_{n+1}^{(k)})}{\partial \Delta \lambda_{n+1}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{R}_\lambda(\Delta \lambda_{n+1}^{(k)}) \quad (3.92)$$

donde $\Delta \lambda_{n+1}$ es el vector multiplicadores plásticos con componentes $\Delta \lambda_\alpha^{n+1}$ en las que $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)$, $\mathbf{R}_\lambda(\Delta \lambda_{n+1})$ es el vector de términos independientes cuyas componentes son los residuos $R_{\lambda_\alpha}(\Delta \lambda_{n+1})$ tales que $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)$, y $\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda(\Delta \lambda_{n+1})}{\partial \Delta \lambda_{n+1}}$ es la matriz de coeficientes. Teniendo en cuenta que por definición de la superficie de fluencia $\phi_{n+1} = \phi_{n+1}(\tau_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}), \hat{\eta}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}(\Delta \lambda_{n+1}))$, la matriz de coeficientes se calcula derivando (3.91a) respecto al vector de multiplicadores plásticos $\Delta \lambda_{n+1}$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda(\Delta \lambda_{n+1}^{(k)})}{\partial \Delta \lambda_{n+1}} \right]_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \tau_{n+1}} \cdot \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}} + \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1} \quad (3.93)$$

No obstante, la complejidad del algoritmo se centra en el cálculo de esta matriz ya que implica evaluar previamente las derivadas $\frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}}$ y $\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}}$, las cuales son desconocidas a priori. Su determinación se lleva a cabo derivando las ecuaciones (3.86), (3.87) y (3.88), llegando al sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{n+1} & \mathbf{A}_{12}^{n+1} \\ \mathbf{A}_{21}^{n+1} & \mathbf{A}_{22}^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_\beta^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} : \mathbf{m}_\beta^{n+1} \\ -\hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)}) \cdot \frac{\partial \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

en el que las incógnitas son las derivadas $\frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_{\beta}^{n+1}}$ y $\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_{\beta}^{n+1}}$. Los coeficientes \mathbf{A}_{11}^{n+1} , \mathbf{A}_{12}^{n+1} , \mathbf{A}_{21}^{n+1} y \mathbf{A}_{22}^{n+1} están dados por:

$$\mathbf{A}_{11}^{n+1} = \mathbf{I} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)} \Delta \lambda_{\alpha(k)}^{n+1} \mathbf{c} : \frac{\partial \mathbf{m}_{\alpha}^{n+1}}{\partial \tau_{n+1}} \quad (3.95a)$$

$$\mathbf{A}_{12}^{n+1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)} \Delta \lambda_{\alpha(k)}^{n+1} \mathbf{c} : \frac{\partial \mathbf{m}_{\alpha}^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (3.95b)$$

$$\mathbf{A}_{21}^{n+1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)} \Delta \lambda_{\alpha(k)}^{n+1} \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)}) \cdot \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \tau_{n+1}} \quad (3.95c)$$

$$\mathbf{A}_{22}^{n+1} = \mathbf{1} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}(k)} \Delta \lambda_{\alpha(k)}^{n+1} \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)}) \cdot \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (3.95d)$$

Combinando las ecuaciones (A2.3a-d) y (A2.4a-d) junto con (3.94) y las definiciones (3.95a-d) es posible despejar analíticamente las derivadas $\frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_{\beta}^{n+1}}$ y $\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda_{\beta}^{n+1}}$. Un desarrollo analítico y detallado del cálculo de estas derivadas se describe en el anexo A2.

Por otro lado, las variables internas de endurecimiento $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)}$ aparecen de forma implícita en la matriz de coeficientes (3.93), lo que implica que el sistema de ecuaciones (3.91c) no esté realmente desacoplado del sistema de ecuaciones (3.91a). Por este motivo, para cada iteración de la ecuación (3.92) se resuelve el sistema de ecuaciones (3.91c) de forma independiente. A partir de los multiplicadores plásticos $\Delta \lambda_{\alpha}^{n+1}$ dados por la ecuación (3.92) en la iteración (k), los cuales se considerarán fijos, se resuelve el sistema de ecuaciones (3.91c). Este sistema, que en general será no lineal, se resuelve aplicando iterativamente la ecuación:

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j+1)} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j)})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+1}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j)}) \quad (3.96)$$

donde $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ es el vector de variables internas de endurecimiento en deformaciones, $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1})$ es el vector de residuos definido en (3.91c), y $\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+1}}$ es la matriz de coeficientes que se calcula teniendo en cuenta las ecuaciones (3.87) y (3.88):

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j)})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+1}} = \mathbf{1} + \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{\phi}} \Delta \lambda_{\alpha(k)}^{n+1} \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \mathbf{q}_{n+1}} \right) \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)(j)}) \quad (3.97)$$

En base a la suposición realizada sobre la ecuación (3.31) esta matriz es diagonal, por lo que calcular su inversa es inmediato.

Observación 3.6 *La variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ no aparece en la matriz de coeficientes (3.93) ya que por su naturaleza esta variable no depende de los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_\alpha^{n+1}$. Es más, esta variable es conocida a priori a partir de la ecuación (3.78), lo cual supone una ventaja desde el punto de vista de coste computacional puesto que no implica resolver una ecuación adicional.*

El algoritmo empleado para la integración de la ecuación constitutiva se resume en la cuadro 3.1.

Matriz tangente consistente.

El algoritmo presentado en el cuadro 3.1 es susceptible de ser linealizado de forma exacta, lo que conduce a una expresión cerrada de la matriz tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} . Esta matriz relaciona la variación de las tensiones con la variación de las deformaciones en el instante t_{n+1} . Dicha relación viene dada por la expresión:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1}^{ep} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.98)$$

Al igual que en el caso continuo, su cálculo se obtiene derivando la ecuación constitutiva (3.86) junto con la ecuación (3.82) en el instante t_{n+1} :

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \mathbf{c} : \mathbf{m}_\alpha^{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} \quad (3.99)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación (ver lema A3.3.1 en el anexo A3):

$$d\mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) = \mathbf{a}_{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.100)$$

siendo \mathbf{a}_{n+1} un tensor de cuarto orden descrito en el anexo A3. Este tensor depende únicamente de las deformaciones elásticas y de las constantes elásticas del material $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p)$.

La variación de los multiplicadores plásticos $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$ se calculan derivando la condición de fluencia $\phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \hat{\eta}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0$ para toda $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$:

$$0 = d\phi_\alpha^{n+1} = \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\boldsymbol{\tau}_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\hat{\eta}_{n+1}} d\hat{\eta}_{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} : d\mathbf{q}_{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} : d\mathbf{g} \quad (3.101)$$

donde el término $d\mathbf{g}$ está dado por la expresión $d\mathbf{g} = 2 d\mathbf{e}_{n+1}$, el término $d\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ se calcula a partir de la ecuación (3.99), $d\mathbf{q}_{n+1}$ se obtiene derivando las ecuaciones (3.87) y (3.88):

$$d\mathbf{q}_{n+1} = - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) \quad (3.102)$$

- Cálculo del predictor elástico.
 - $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}})$
 - $\mathbf{q}_{n+1}^{trial} = \mathbf{q}_n = -\widehat{\mathbf{K}}'(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial})$
 - $\mathbb{J}_{trial}^{n+1} = \{\alpha \in \mathbb{J}_\phi \mid \phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}^{trial}) > 0\}$
- Verificación de la condición de fluencia.

SI $\mathbb{J}_{trial}^{n+1} = \emptyset$ ENTONCES

 - $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$

SI NO

 1. Cálculo del conjunto $\mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$.
 - $\mathbb{J}_{act}^{n+1(k)} = \{\alpha \in \mathbb{J}_\phi \mid \phi_\alpha^{n+1}(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)}) > 0 \text{ y } \Delta\lambda_\alpha^{n+1(k)} \neq 0\}$
 2. Cálculo del multiplicador plástico $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)}$.
 - $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} = 0$ para $\forall \alpha \notin \mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$
 - $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_\lambda(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)})}{\partial \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{R}_\lambda(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k)})$ para $\forall \alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$
 3. Cálculo de la variable interna de endurecimiento $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)}$ para el valor $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)}$.
 - 3.1. Cálculo del residuo $\mathbf{R}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)})$.
 - $\mathbf{R}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)}) = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)} - \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1(k+1)} \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1(k+1)(j)}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}$
 - 3.2. SI $\|\mathbf{R}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)})\| > TOL$ ENTONCES
 - $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j+1)} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)})}{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+1}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{R}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)(j)})$
 - IR A (3.1)
 - 3.3. Cálculo de la variable interna de endurecimiento
 - $\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = -\widehat{\mathbf{K}}'(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)})$
 - 3.5. Verificación del conjunto $\mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$.
 - SI $\Delta\lambda_\alpha^{n+1(k+1)} < 0$ para algun $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1(k)}$ ENTONCES IR A (1)
 4. Cálculo del residuo $\mathbf{R}_\lambda(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)})$.
 - $\mathbf{R}_\lambda(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)}) = \phi_{n+1}^{(k+1)}$
 5. Verificar convergencia.

SI $\|\mathbf{R}_\lambda(\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(k+1)})\| < TOL$ ENTONCES

 - $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : \mathbf{m}_\alpha^{n+1}$
 - $\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}$
 - FIN
 6. IR A (1)

Cuadro 3.1: Algoritmo de retorno para el modelo plástico.

Como se describirá detalladamente en el apartado A3.3.2 del anexo A3, el término $d\widehat{\eta}_{n+1}$ está dado por la expresión:

$$d\widehat{\eta}_{n+1} = -\mathbf{H}_{\widehat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \mathbf{g}^{-1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.103)$$

En el sistema de ecuaciones formado por (3.99), (3.101) y (3.102) aparecen como incógnitas $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$, $d\mathbf{m}_\alpha^{n+1}$ y $d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right)$. Si se derivan las direcciones de flujo \mathbf{m}_α^{n+1} y las derivadas $\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}$ en el instante t_{n+1} se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(mm)}^{n+1} & \mathbf{A}_{(mq)}^{n+1} \\ \mathbf{A}_{(qm)}^{n+1} & \mathbf{A}_{(qq)}^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{m}_{n+1} \\ d\left(\frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{(m)}^{n+1} \\ \mathbf{B}_{(q)}^{n+1} \end{pmatrix} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{(m)\alpha}^{n+1} \\ \mathbf{C}_{(q)\alpha}^{n+1} \end{pmatrix} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \quad (3.104)$$

donde los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}_{(mm)}^{n+1}$, $\mathbf{A}_{(mq)}^{n+1}$, $\mathbf{A}_{(qm)}^{n+1}$ y $\mathbf{A}_{(qq)}^{n+1}$ y los vectores de términos independientes $\mathbf{B}_{(m)}^{n+1}$, $\mathbf{B}_{(q)}^{n+1}$, $\mathbf{C}_{(m)}^{n+1}$ y $\mathbf{C}_{(q)}^{n+1}$ se determinan en el apartado A3.2 del anexo A3. Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.104) se obtienen las incógnitas $d\mathbf{m}_\alpha^{n+1}$ y $d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right)$ en función de las deformaciones $d\mathbf{e}_{n+1}$ y de la incógnita $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$:

$$d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} = \widetilde{\mathbf{H}}_{(m)\alpha}^{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \overline{\mathbf{H}}_{(m)\alpha\beta}^{n+1} d(\Delta\lambda_\beta^{n+1}) \quad (3.105a)$$

$$d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) = \widetilde{\mathbf{H}}_{(q)\alpha}^{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \overline{\mathbf{H}}_{(q)\alpha\beta}^{n+1} d(\Delta\lambda_\beta^{n+1}) \quad (3.105b)$$

donde las matrices $\widetilde{\mathbf{H}}_{(m)\alpha}^{n+1}$, $\widetilde{\mathbf{H}}_{(q)\alpha}^{n+1}$, $\overline{\mathbf{H}}_{(m)\alpha\beta}^{n+1}$ y $\overline{\mathbf{H}}_{(q)\alpha\beta}^{n+1}$ se definen en el apartado A3.2 del anexo A3.

Teniendo en cuenta que la ecuación (3.101) se verifica para toda $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$, y combinándola con las ecuaciones (3.105a-b) se despeja el multiplicador plástico $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$:

$$d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\overline{\mathbf{G}}_{\alpha\beta}^{n+1}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) - \mathbf{H}_{\widehat{\eta}_n} \eta_{n+1} \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\widehat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} - \mathbf{H}_\beta^{n+1} \right) \quad (3.106)$$

donde la matriz $\overline{\mathbf{G}}^{n+1}$ y el tensor \mathbf{H}^{n+1} se definen como:

$$\overline{\mathbf{G}}_{\alpha\beta}^{n+1} = \mathbf{G}_{\alpha\beta}^{n+1} - \sum_{\gamma \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \overline{\mathbf{H}}_{(m)\gamma\beta}^{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \overline{\mathbf{H}}_{(q)\gamma\beta}^{n+1} \right)$$

$$\mathbf{H}_\alpha^{n+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\beta^{n+1} \left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \widetilde{\mathbf{H}}_{(m)\beta}^{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \widetilde{\mathbf{H}}_{(q)\beta}^{n+1} \right)$$

donde $G_{\alpha\beta}^{n+1}$

$$G_{\alpha\beta}^{n+1} = \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\boldsymbol{\tau}_{n+1}} : \mathbf{c} : \mathbf{m}_\beta^{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1} \quad (3.107)$$

en el que el término $G_{\alpha\beta}$ evaluado en el instante t_{n+1} se definió en la ecuación (3.107) para el caso continuo.

Combinando las ecuaciones (3.98), (3.99), (3.105a-b) y (3.106) se despeja la matriz tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1}^{ep} &= (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : \widetilde{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\alpha}^{n+1} - \\ &- \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\overline{G}_{\alpha\beta}^{n+1} \right)^{-1} \left(\mathbf{c} : \overline{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1} \right) \otimes \left(\frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\boldsymbol{\tau}_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) - \mathbf{H}_{\widehat{\eta}_n} \eta_{n+1} \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\widehat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} - \mathbf{H}_\beta^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (3.108)$$

donde el tensor $\overline{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1}$ se define como:

$$\overline{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1} = \mathbf{m}_\alpha^{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\beta^{n+1} \overline{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\beta\alpha}^{n+1}$$

Observación 3.7 Cuando $\Delta t_{n+1} \rightarrow 0$ se puede ver fácilmente que $\Delta\lambda_\alpha^{n+1} \rightarrow 0$, $\overline{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1} \rightarrow \mathbf{m}_\alpha^{n+1}$, $\mathbf{H}_\alpha^{n+1} \rightarrow 0$ y $\overline{G}_{\alpha\beta}^{n+1} \rightarrow G_{\alpha\beta}^{n+1}$. De aquí es fácil comprobar que la matriz tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} degenera en el tensor elastoplástico tangente del caso continuo, el cual está definido por la ecuación (3.65).

Un desarrollo detallado de la matriz tangente consistente se realiza en el anexo A3.

Integración del modelo viscoplástico.

El algoritmo del modelo viscoplástico de Duvaut-Lions requiere la aplicación previa del algoritmo presentado en el cuadro 3.1 para el caso plástico durante el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Conocida la solución del caso invíscido, la discretización de la ecuación (3.73) en su forma material está dada por:

$$\mathbf{E}_{n+1}^{vp} = \mathbf{E}_n^{vp} + \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_{n+1}} \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{-1} : (\mathbf{S}_{n+1} - \overline{\mathbf{S}}_{n+1}) \quad (3.109)$$

donde Ξ_{n+1} es el tensor elástico escrito en la configuración material, $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}$ es la proyección del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff sobre la superficie de fluencia $\bar{\mathbf{S}}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{S}_{n+1})$, y donde el incremento de tiempo está dado por $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. Aplicando el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ sobre la ecuación (3.109) se obtiene la deformación viscoplástica para t_{n+1} en la descripción espacial:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{vp} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^{vp}) + \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_{n+1}} \mathbf{c}^{-1} : (\boldsymbol{\tau}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) \quad (3.110)$$

donde, al igual que en el caso invíscido, $\phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^{vp})$ se calcula aplicando del operador *push-forward* en el instante t_{n+1} sobre la deformación viscoplástica en el instante t_n :

$$\phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^{vp}) = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \cdot \mathbf{E}_n^{vp} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (3.111)$$

Siguiendo el paralelismo con el caso plástico, se define el predictor elástico congelando las variables viscoplásticas durante el incremento de tiempo considerado $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{vp\,trial} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^{vp}) \quad (3.112a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{vp\,trial}) \quad (3.112b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.110) y (3.112b) en (3.26) se obtienen las tensiones en el instante t_{n+1} :

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{vp}) = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_{n+1}} (\boldsymbol{\tau}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) \quad (3.113)$$

Donde es inmediato calcular las tensiones $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ a partir del predictor elástico $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}$ y de la solución del modelo invíscido $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ utilizando la ecuación:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (1 - \vartheta_{n+1}) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \vartheta_{n+1} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} \quad (3.114)$$

siendo ϑ_{n+1} un parámetro adimensional definido como:

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{n+1}}{\Delta t_{n+1}}} \quad (3.115)$$

Análogamente, las variables internas de endurecimiento en tensiones se calculan discretizando la ecuación (3.74) en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, obteniéndose:

$$\mathbf{q}_{n+1} = (1 - \vartheta_{n+1}) \mathbf{q}_{n+1}^{trial} + \vartheta_{n+1} \bar{\mathbf{q}}_{n+1} \quad (3.116)$$

donde \mathbf{q}_{n+1}^{trial} está definido en la ecuación (3.84d) y $\bar{\mathbf{q}}_{n+1}$ es la solución de las variables internas de endurecimiento en el modelo invíscido. El cálculo de la variable interna de endurecimiento en deformaciones se calcula a partir de la ley de endurecimiento definida en (3.32):

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \widehat{\mathbf{K}}'^{-1}(\mathbf{q}_{n+1}) \quad (3.117)$$

- Cálculo de la solución plástica $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\mathbf{q}})$.
 - Ver algoritmo cuadro (3.1).
- Cálculo de la solución viscoplástica:
 - $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (1 - \vartheta_{n+1}) \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \vartheta_{n+1} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$
 - $\mathbf{q}_{n+1} = (1 - \vartheta_{n+1}) \mathbf{q}_{n+1}^{trial} + \vartheta_{n+1} \bar{\mathbf{q}}_{n+1}$
 - $\mathbf{e}_{n+1}^{vp} = \phi_*(\mathbf{E}_n^{vp}) + \vartheta_{n+1} \mathbf{c}^{-1} : (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1})$
 - $\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \hat{\mathbf{K}}'^{-1}(\mathbf{q}_{n+1})$

Cuadro 3.2: Algoritmo de retorno para el modelo viscoplástico.

Observación 3.8 De las ecuaciones (3.114) y (3.116) se puede ver que si $\tau \rightarrow 0$, entonces se recupera el modelo plástico, $\boldsymbol{\tau}_{n+1} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ y $\mathbf{q}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_{n+1}$. No obstante, actualizar las deformaciones viscoplásticas utilizando la ecuación (3.110) genera inestabilidades numéricas para valores de τ pequeños. Sin embargo, sustituyendo la ecuación (3.114) en (3.110) permite obtener una expresión alternativa que evita este inconveniente:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{vp} = \phi_*(\mathbf{E}_n^{vp}) + \vartheta_{n+1} \mathbf{c}^{-1} : (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) \quad (3.118)$$

El algoritmo empleado en la integración del modelo viscoplástico se resume en el cuadro (3.2).

Matriz tangente consistente viscoplástica.

Al igual que en el caso plástico, la matriz tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{evp} en el caso viscoplástico relaciona la variación de las tensiones con la variación de las deformaciones en el instante t_{n+1} . Dicha relación viene dada por la expresión:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1}^{evp} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.119)$$

Su cálculo se obtiene derivando la expresión (3.114), en la cual se debe tener en cuenta que el tiempo de relajación se considera dependiente de las variables de endurecimiento $\tau_{n+1} = \tau(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1})$:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (1 - \vartheta_{n+1}) d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \vartheta_{n+1} d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} - (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) d\vartheta_{n+1} \quad (3.120)$$

La variación de la tensión plástica $d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ está dada por las ecuaciones (3.98) y (3.108). La variación de la tensión *trial* está dada por la expresión (ver apartado A3.3.1 del anexo A3):

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.121)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación (ver lema A3.3.1 en el anexo A3):

$$dc : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}}) = \mathbf{a}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.122)$$

donde el tensor $\mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}}$ se definió en (3.84a) y \mathbf{a}_{n+1}^{trial} es un tensor de cuarto orden que depende únicamente de las deformaciones elásticas *trial* y de las constantes elásticas $\mathbf{a}_{n+1}^{trial} = \mathbf{a}_{n+1}^{trial}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p^{trial}})$. Este tensor se describe en el anexo A3.

Por otro lado, teniendo en cuenta la ecuación (3.103), la variación del tiempo de relajación se realiza a través del parámetro $d\vartheta_{n+1}$ como:

$$d\vartheta_{n+1} = \frac{\tau'(\hat{\eta}_{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \vartheta_{n+1}^2 H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \mathbf{g}^{-1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (3.123)$$

Combinando las ecuaciones (3.119), (3.121) y (3.123) se obtiene la matriz tangente consistente viscoplástica \mathbf{c}_{n+1}^{evp} :

$$\mathbf{c}_{n+1}^{evp} = (1 - \vartheta_{n+1}) (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) + \vartheta_{n+1} \mathbf{c}_{n+1}^{ep} - \frac{\tau'_{n+1}}{\Delta t_{n+1}} \vartheta_{n+1}^2 H_{\hat{\eta}_n} \eta_{n+1} (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) \otimes \mathbf{g}^{-1} \quad (3.124)$$

Observación 3.9 Si $\tau \rightarrow 0$ para $\forall \hat{\eta}$, entonces $\tau'(\hat{\eta}) \rightarrow 0$ y $\vartheta \rightarrow 1$, lo que implica que la matriz tangente consistente viscoplástica degenera en la obtenida para el modelo plástico $\mathbf{c}_{n+1}^{evp} \rightarrow \mathbf{c}_{n+1}^{ep}$.

3.4 Modelo de fricción.

Un aspecto adicional a tener en cuenta es el comportamiento del polvo cuando interactúa con su entorno. En este sentido, hay que tener presente las fuerzas de fricción, que describe la resistencia al deslizamiento del polvo respecto a las paredes del molde. Este fenómeno tiene una influencia notable en las propiedades finales del compacto, por lo que debe ser tenido en cuenta si se quiere modelar correctamente el proceso, incrementando de esta forma la complejidad de el análisis.

El modelo de fricción considerado es un modelo de fricción dinámica del tipo Northon-Hoff, el cual se caracteriza por considerar la dependencia de la fricción respecto a la velocidad relativa entre el polvo y la pared del molde [22][52][18][19]. Su representación matemática está dado por la expresión:

$$t_T = -\mu_d(\eta) \text{sign}(V_T^{rel}) |V_T^{rel}|^\alpha < t_N > \quad (3.125)$$

donde μ_d es el coeficiente de fricción dinámico, t_N y t_T corresponden respectivamente al esfuerzo normal y tangencial que el polvo realiza sobre la superficie de contacto,

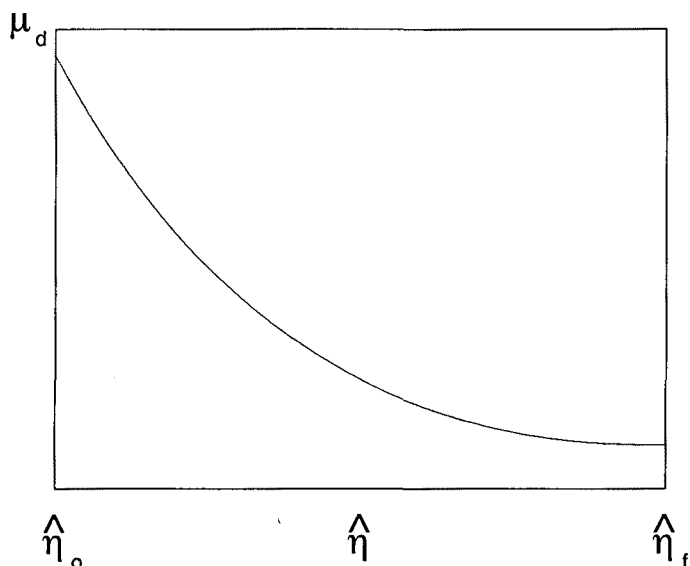


Figura 3.10: Evolución del coeficiente de fricción dinámico vs densidad relativa.

V_T^{rel} es la velocidad relativa entre el polvo y la pared, y α es un coeficiente que controla la no linealidad de la velocidad. En particular, se ha considerado el caso en que $\alpha = 1$.

Observación 3.10 *El empleo de un modelo de fricción dinámica implica una dependencia del tiempo t en los resultados, independientemente del modelo constitutivo empleado para el polvo. Concretamente, esta dependencia tiene lugar en la ecuación (3.125) por medio de la velocidad de compactación.*

La naturaleza de las fuerzas fricción producida por cuerpos que están en contacto es extremadamente compleja. Existen numerosos factores que afectan a la fricción como son los materiales que intervienen en el proceso, la morfología, la granulometría, la rugosidad de las superficies del molde, la temperatura de trabajo, la velocidad de carga, etc. El modelo considerado supone una simplificación del problema general al englobar todos estos factores dentro de un único parámetro, concretamente el coeficiente de fricción dinámico μ_d , que debe ser determinado experimentalmente.

Por otro lado, en el transcurso del proceso de compactación se alteran los factores microscópicos que caracterizan a la fricción y que son englobados dentro del coeficiente de fricción dinámico μ_d . Por esta razón, es de esperar que este coeficiente evolucione durante el proceso [89][87][37][116], y en particular lo haga en función de las variables que miden el avance del proceso, esto es, las variables de endurecimiento $\hat{\eta}$ y q . De hecho, existe una evidencia experimental que muestra la dependencia

del coeficiente de fricción respecto de la densidad, por lo que se ha considerado en caso en que $\mu_d = \mu_d(\hat{\eta})$.

No obstante, hay que tener presente que el coeficiente de fricción dinámico μ_d no depende única y exclusivamente del pulvimaterial empleado, sino que también depende de los elementos de matriceria, del proceso considerado y de las condiciones en se lleva a cabo. La alteración de cualquiera de ellos modifica el comportamiento del coeficiente μ_d y, por tanto, su calibración.

Típicamente, los materiales pulverulentos a bajas densidades presentan un coeficiente de fricción elevado que disminuye paulatinamente con el aumento de la densidad. Este comportamiento queda claramente reflejado en la figura 3.10, la cual muestra la dependencia del coeficiente de fricción dinámico μ_d con respecto a la densidad a través de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$. La justificación de tal comportamiento reside en el incremento de la película de lubricante sobre las paredes del molde y en la reducción de la rugosidad superficial de las partículas que integran el polvo [10]. El primero se debe a fenómenos de difusión en los que el lubricante tiende a salir del interior del pulvimaterial como consecuencia de la reducción del volumen de vacíos. El segundo se debe al pulido sufrido por las partículas que componen la superficie del compacto durante la deformación.

Anexo A1

Evolución de las variables de endurecimiento.

La finalidad de este anexo se centra en dos objetivos. En primer lugar, demostrar que la ecuación (3.44) puede ser integrada de manera cerrada y en el que la integración es precisamente la expresión (3.46). En segundo lugar, desarrollar unas relaciones discretas a partir de las ecuaciones (3.44) o (3.46) que sean útiles para la implementación del modelo.

A1.1 Modelo continuo.

La evolución de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ en el instante $t \in [0, T]$ está definida a través de la expresión:

$$\dot{\hat{\eta}}_t = H_{\hat{\eta}_t}(\eta_t) \langle \dot{\eta}_t \rangle \quad (\text{A1.1})$$

siendo $H_{\hat{\eta}}(\eta)$ la función unitaria de Heaviside definida por:

$$H_{\hat{\eta}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < \hat{\eta} \\ 1 & \text{si } \eta \geq \hat{\eta} \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

Es posible expresar la evolución de esta variable de una forma diferente integrando la ecuación (A1.1):

$$\hat{\eta}_t = \max_{\tau \in [0, t]} [\eta_\tau] \quad (\text{A1.3})$$

El objetivo de este apartado es demostrar que la ecuación (A1.3) equivale a integrar la expresión (A1.1). Para ello, admitida la definición (A1.1), se deducen los siguientes lemas:

Lema A1.1 *La función $\hat{\eta}_t = \hat{\eta}(t)$ es monótona creciente.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $t_1, t_2 \in [0, T]$ dos instantes tales que $t_1 \leq t_2$. Por la ecuación (A1.1) se tiene que:

$$\dot{\hat{\eta}}_\tau = H_{\hat{\eta}_\tau}(\eta_\tau) \langle \dot{\eta}_\tau \rangle \geq 0 \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (\text{A1.4})$$

de donde se deduce que

$$\hat{\eta}_{t_2} - \hat{\eta}_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\hat{\eta}}_\tau d\tau \geq 0 \quad (\text{A1.5})$$

Y por tanto, $\hat{\eta}_{t_1} \leq \hat{\eta}_{t_2}$. □

Lema A1.2 Sean $t_1, t_2 \in [0, T]$ dos instantes tales que para $t_1 < t_2$ se tiene que $H_{\hat{\eta}_{t_1}}(\eta_{t_1}) = 0$ y $H_{\hat{\eta}_{t_2}}(\eta_{t_2}) = 1$, entonces existe un $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que $\hat{\eta}_{t^*} = \eta_{t^*}$.

DEMOSTRACIÓN: Por definición de la función unitaria de Heaviside $H_{\hat{\eta}}(\eta)$ y por el lema A1.1, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet H_{\hat{\eta}_{t_1}}(\eta_{t_1}) = 0 \implies \hat{\eta}_{t_1} > \eta_{t_1} \\ \bullet H_{\hat{\eta}_{t_2}}(\eta_{t_2}) = 1 \implies \hat{\eta}_{t_2} \leq \eta_{t_2} \\ \bullet \hat{\eta}_{t_1} \leq \hat{\eta}_{\tau} \leq \hat{\eta}_{t_2} \quad \forall \tau \in [t_1, t_2] \end{array} \right\} \implies \eta_{t_1} < \hat{\eta}_{\tau} \leq \eta_{t_2} \quad \forall \tau \in [t_1, t_2] \quad (\text{A1.6})$$

Por otro lado, se define la función $f(t)$ como:

$$f(t) = \eta_t - \hat{\eta}_t \quad (\text{A1.7})$$

De las ecuaciones (A1.6) y (A1.7) se obtienen las condiciones:

$$f(t_1) = \eta_{t_1} - \hat{\eta}_{t_1} < 0 \quad (\text{A1.8a})$$

$$f(t_2) = \eta_{t_2} - \hat{\eta}_{t_2} \geq 0 \quad (\text{A1.8b})$$

Al ser $f(t)$ continua en $[t_1, t_2]$ (ya que η_t y $\hat{\eta}_t$ son continuas), por el teorema del valor intermedio de Bolzano $\exists t^* \in [t_1, t_2]$ tal que $f(t^*) = 0$, lo que implica que $\hat{\eta}_{t^*} = \eta_{t^*}$. □

Lema A1.3 Sea el intervalo $[0, t]$. Si $\hat{\eta}_0 = \eta_0$ y $H_{\hat{\eta}_t}(\eta_t) = 1$ entonces $\hat{\eta}_t = \eta_t$.

DEMOSTRACIÓN: Se escoge un t_0 de la siguiente forma:

- Si $H_{\hat{\eta}_{\tau}}(\eta_{\tau}) = 1$ para $\forall \tau \in [0, t]$, se toma $t_0 = 0$.
- Si $\exists \tau \in [0, t]$ que verifique $H_{\hat{\eta}_{\tau}}(\eta_{\tau}) = 0$, por el lema A1.2 $\exists t^* \in [\tau, t]$ tal que $\hat{\eta}_{t^*} = \eta_{t^*}$. Teniendo esto en cuenta, se toma el valor $t_0 = t^*$ que verifique que $\nexists \tau \in [t_0, t]$ tal que $H_{\hat{\eta}_{\tau}}(\eta_{\tau}) = 0$.

En cualquier caso, tal y como se ha definido t_0 , $H_{\hat{\eta}_{\tau}}(\eta_{\tau}) = 1$ para $\forall \tau \in [t_0, t]$ con $\hat{\eta}_{t_0} = \eta_{t_0}$.

Por otro lado, por ser $H_{\hat{\eta}_{\tau}}(\eta_{\tau}) = 1$ se tiene que $\hat{\eta}_{\tau} = \langle \dot{\eta}_{\tau} \rangle \geq \dot{\eta}_{\tau}$, de donde se deduce:

$$\hat{\eta}_{t_2} - \hat{\eta}_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\hat{\eta}}_{\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{\eta}_{\tau} \rangle d\tau \geq \int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}_{\tau} d\tau = \eta_{t_2} - \eta_{t_1} \quad (\text{A1.9})$$

pero como $\hat{\eta}_{t_0} = \eta_{t_0}$, la ecuación (A1.9) se reduce a:

$$\hat{\eta}_t \geq \eta_t \quad (\text{A1.10})$$

Por definición, si $H_{\hat{\eta}_t}(\eta_t) = 1$ se tiene que:

$$\hat{\eta}_t \leq \eta_t \quad (\text{A1.11})$$

La única posibilidad de verificar la condición (A1.10) y (A1.11) simultáneamente es que $\hat{\eta}_t = \eta_t$. □

Lema A1.4 Sea el intervalo $[0, t]$ tal que $\hat{\eta}_0 = \eta_0$, entonces $\hat{\eta}_t = \max_{\tau \in [0, t]} [\eta_{\tau}]$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau \in [0, t]$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } H_{\hat{\eta}_\tau}(\eta_\tau) = 0 \implies \hat{\eta}_\tau > \eta_\tau \\ \bullet \text{ Si } H_{\hat{\eta}_\tau}(\eta_\tau) = 1 \implies \hat{\eta}_\tau = \eta_\tau \text{ (lema A1.3)} \end{array} \right\} \implies \hat{\eta}_\tau \geq \eta_\tau \quad (\text{A1.12})$$

Por otro lado, por el lema A1.1 se tiene $\hat{\eta}_t \geq \hat{\eta}_\tau$ que combinándola con la desigualdad (A1.12) se deduce que:

$$\hat{\eta}_t \geq \eta_\tau \quad \forall \tau \in [0, t] \quad (\text{A1.13})$$

□

A1.2 Modelo discreto.

La ecuación (A1.3) en su forma discreta para el instante t_{n+1} está dada por:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \eta_n, \eta_{n-1}, \dots, \eta_2, \eta_1, \eta_0 \} \quad (\text{A1.14})$$

Es fácil ver que esta ecuación se puede escribir de una forma alternativa más práctica como:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \} \quad (\text{A1.15})$$

Utilizando la definición de máximo $\max \{ a, b \} = \frac{(a+b)+|a-b|}{2}$ y de la función de Macaulay $\langle a \rangle = \frac{a+|a|}{2}$, se puede reescribir la ecuación (A1.15) de una forma alternativa como:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \hat{\eta}_n + \langle \eta_{n+1} - \hat{\eta}_n \rangle \quad (\text{A1.16})$$

A partir de estas ecuaciones, se está en disposición de deducir el siguiente lema para el caso discreto:

Lema A1.5 Si $\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \}$ entonces la función unitaria de Heaviside verifica la igualdad $H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1})$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada valor de las variables $\hat{\eta}_n$ y η_{n+1} , la variable $\hat{\eta}_{n+1}$ está definida a través de la ecuación (A1.15). El lema se demuestra calculando la función unitaria de Heaviside $H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1})$ y $H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1})$ para cada combinación de las variables $\hat{\eta}_n$ y η_{n+1} .

1. Si $\eta_{n+1} > \hat{\eta}_n$ entonces la variable $\hat{\eta}_{n+1}$ está dada por:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \} = \eta_{n+1} > \hat{\eta}_n$$

Por definición de la función unitaria de Heaviside se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{\eta}_{n+1} = \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = 1 \\ \bullet \hat{\eta}_n < \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) = 1 \end{array} \right\} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \quad (\text{A1.17})$$

2. Si $\eta_{n+1} = \hat{\eta}_n$ entonces la variable $\hat{\eta}_{n+1}$ está dada por:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \} = \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n$$

Por definición de la función unitaria de Heaviside se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{\eta}_{n+1} = \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = 1 \\ \bullet \hat{\eta}_n = \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) = 1 \end{array} \right\} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \quad (\text{A1.18})$$

3. Si $\eta_{n+1} < \hat{\eta}_n$ entonces la variable $\hat{\eta}_{n+1}$ está dada por:

$$\hat{\eta}_{n+1} = \max \{ \eta_{n+1}, \hat{\eta}_n \} = \hat{\eta}_n > \eta_{n+1}$$

Por definición de la función unitaria de Heaviside se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{\eta}_{n+1} > \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = 0 \\ \bullet \hat{\eta}_n > \eta_{n+1} \implies H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) = 0 \end{array} \right\} \implies H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \quad (\text{A1.19})$$

Por tanto, para cualquier combinación de las variables $\hat{\eta}_n$ y η_{n+1} se tiene que $H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1})$. \square

La utilidad del lema A1.5 estriba en que al ser la función de Heaviside una función discontinua, en el caso que $\hat{\eta}_{n+1} = \eta_{n+1}$, podría suceder que $H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) = 0$ como consecuencia de un error de tipo numérico. Sin embargo, el cálculo de $H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1})$ elude este problema. En particular, este lema es utilizado en el cálculo de la matriz tangente.

Anexo A2

Cálculo del corrector plástico.

El objetivo de este anexo es realizar una descripción detallada del corrector plástico. Concretamente, en la sección 3.3 se mostró como el algoritmo predictor-corrector requería solucionar un sistema de ecuaciones no lineales dado por (3.89a-c). La resolución iterativa de este sistema de ecuaciones conduce a la definición de las matrices de coeficientes (3.93) y (3.97), cuyo cálculo se desarrolla detalladamente en este anexo.¹

A2.1 Cálculo del caso general.

Como ya se mencionó en la sección 3.3, los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_{n+1}$ y las variables internas de endurecimiento \mathbf{q}_{n+1} se determinan desacoplando el sistema de ecuaciones (3.89a-c). En este apartado se desarrollan las matrices de coeficientes definidas en (3.93) y (3.97), necesarias para resolver el sistema de ecuaciones de forma desacoplada.

A2.1.1 Direcciones de flujo.

El primer paso en la resolución del corrector plástico es la evaluación de las direcciones de flujo de las deformaciones plásticas, las cuales están dadas por las expresiones (ver (3.42a-b) y (3.43a-b)):

$$\mathbf{m}_\gamma = \bar{\alpha}_\gamma \mathbf{m}_{dev_\gamma} + \bar{\beta}_\gamma \mathbf{m}_{esf_\gamma} \quad \text{para } \gamma \in \{1, 2\} \quad (\text{A2.1a})$$

$$\mathbf{m}_\gamma = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad \text{para } \gamma \in \{01, 02\} \quad (\text{A2.1b})$$

siendo los tensores \mathbf{m}_{esf_γ} y \mathbf{m}_{dev_γ} :

$$\mathbf{m}_{esf_\gamma} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{g}^{-1} \right) \mathbf{g} \quad (\text{A2.2a})$$

$$\mathbf{m}_{dev_\gamma} = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \mathbf{m}_{esf_\gamma} \quad (\text{A2.2b})$$

¹Por simplicidad en la notación, y salvo indicación expresa, se suprimirá durante todo el anexo la referencia al instante t_{n+1} .

Como se desprende de las ecuaciones anteriores, el cálculo de las direcciones de flujo \mathbf{m}_γ se obtiene a partir de las derivadas de la superficie de fluencia (3.33a-d) con respecto a las tensiones $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{\partial \phi_{01}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \theta_1 \mathbf{g} \quad (\text{A2.3a})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} = A_1 \text{dev}(\boldsymbol{\tau}) + 2B_1 (I_1 + K_1) \mathbf{g} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} + D_1 \mathbf{g} \quad (\text{A2.3b})$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} = A_2 \text{dev}(\boldsymbol{\tau}) + 2B_2 (I_1 + K_2) \mathbf{g} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_2 \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} + D_2 \mathbf{g} \quad (\text{A2.3c})$$

$$\frac{\partial \phi_{02}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = -\theta_2 \mathbf{g} \quad (\text{A2.3d})$$

Combinando estas ecuaciones con las expresiones (A2.1a-b) y (A2.2a-b) se obtienen las direcciones de flujo en la configuración espacial:

$$\mathbf{m}_{01} = \theta_1 \mathbf{g} \quad (\text{A2.4a})$$

$$\mathbf{m}_1 = \bar{\alpha}_1 \left(\sqrt{2} A_1 \sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 \right) \mathbf{n} + \bar{\beta}_1 \left(2B_1 (I_1 + K_1) + D_1 \right) \mathbf{g} \quad (\text{A2.4b})$$

$$\mathbf{m}_2 = \bar{\alpha}_2 \left(\sqrt{2} A_2 \sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_2 \right) \mathbf{n} + \bar{\beta}_2 \left(2B_2 (I_1 + K_2) + D_2 \right) \mathbf{g} \quad (\text{A2.4c})$$

$$\mathbf{m}_{02} = -\theta_2 \mathbf{g} \quad (\text{A2.4d})$$

donde \mathbf{n} es un tensor unitario definido en la configuración espacial:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} \quad (\text{A2.5})$$

Aplicando el operador *pull-back* $\phi^*(\cdot)$ sobre las ecuaciones (A2.4a-d) se obtienen las direcciones del flujo plástico \mathbf{M}_γ en su forma material:

$$\mathbf{M}_{01} = \theta_1 \mathbf{C} \quad (\text{A2.6a})$$

$$\mathbf{M}_1 = \bar{\alpha}_1 \left(\sqrt{2} A_1 \sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 \right) \mathbf{N} + \bar{\beta}_1 \left(2B_1 (I_1 + K_1) + D_1 \right) \mathbf{C} \quad (\text{A2.6b})$$

$$\mathbf{M}_2 = \bar{\alpha}_2 \left(\sqrt{2} A_2 \sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} C_2 \right) \mathbf{N} + \bar{\beta}_2 \left(2B_2 (I_1 + K_2) + D_2 \right) \mathbf{C} \quad (\text{A2.6c})$$

$$\mathbf{M}_{02} = -\theta_2 \mathbf{C} \quad (\text{A2.6d})$$

donde \mathbf{N} es un tensor unitario definido en la configuración material:

$$\mathbf{N} = \mathbf{C} \cdot \frac{\text{DEV}(\mathbf{S})}{\|\text{DEV}(\mathbf{S})\|_c} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{A2.7})$$

Análogamente, la determinación de la ley de evolución de la variable de endurecimiento \mathbf{q} implica evaluar las derivadas de la superficie de fluencia (3.33a-d) con respecto al vector de variables internas \mathbf{q} . Concretamente, en el caso de la variable interna de endurecimiento i -ésima q_i , estas derivadas se calculan como:

$$\frac{\partial \phi_{01}}{\partial q_i} = -\theta_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial q_i} \quad (\text{A2.8a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_i} = & (I_1 - A_{01}) \left((I_1 + 2K_1 + A_{01}) \frac{\partial B_1}{\partial q_i} + 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial q_i} + \frac{\partial D_1}{\partial q_i} \right) + \\ & + J_2 \frac{\partial A_1}{\partial q_i} + \sqrt{J_2} \frac{\partial C_1}{\partial q_i} + (2B_1 (A_{01} + K_1) - D_1) \frac{\partial A_{01}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (\text{A2.8b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial q_i} = & (I_1 + A_{02}) \left((I_1 + 2K_2 - A_{02}) \frac{\partial B_2}{\partial q_i} + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial q_i} + \frac{\partial D_2}{\partial q_i} \right) + \\ & + J_2 \frac{\partial A_2}{\partial q_i} + \sqrt{J_2} \frac{\partial C_2}{\partial q_i} + (D_2 - 2B_2 (A_{02} - K_2)) \frac{\partial A_{02}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (\text{A2.8c})$$

$$\frac{\partial \phi_{02}}{\partial q_i} = -\theta_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial q_i} \quad (\text{A2.8d})$$

Disipación plástica.

Una vez conocidas las direcciones de flujo \mathbf{m}_γ y las derivadas $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \mathbf{q}}$, conviene hacer un paréntesis en este punto y desarrollar las desigualdades derivadas del segundo principio de la termodinámica para la disipación plástica. Como se vio en la sección 3.2.2, la disipación plástica será positiva si se verifica la desigualdad (ver (3.54)):

$$\dot{\lambda}_\gamma \left(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{m}_\gamma + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad \forall \gamma \in \mathbb{J}_\phi \quad (\text{A2.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A2.4a-d) en la desigualdad (A2.9) se obtiene:

$$\theta_1 \dot{\lambda}_{01} \left(I_1 - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_{01}}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad (\text{A2.10a})$$

$$\dot{\lambda}_1 \left[\bar{\alpha}_1 (2A_1 J_2 + C_1 \sqrt{J_2}) + \bar{\beta}_1 (2B_1 (I_1 + K_1) I_1 + D_1 I_1) + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{q}} \right] \geq 0 \quad (\text{A2.10b})$$

$$\dot{\lambda}_2 \left[\bar{\alpha}_2 (2A_2 J_2 + C_2 \sqrt{J_2}) + \bar{\beta}_2 (2B_2 (I_1 + K_2) I_1 + D_2 I_1) + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{q}} \right] \geq 0 \quad (\text{A2.10c})$$

$$-\theta_2 \dot{\lambda}_{02} \left(I_1 + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \phi_{02}}{\partial \mathbf{q}} \right) \geq 0 \quad (\text{A2.10d})$$

donde $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \mathbf{q}}$ está dada por las ecuaciones (A2.8a-d).

A2.1.2 Cálculo de los multiplicadores plásticos.

En este apartado se desarrolla la matriz de coeficientes (3.93) de una forma práctica para su implementación.

En líneas generales, las variables internas y las variables dependientes en el instante t_{n+1} se obtienen a partir del predictor elástico. Por la forma en como se ha definido la condición de fluencia, resulta conveniente calcular el estado final a partir de los invariantes tensionales y las variables de endurecimiento.

El punto de partida es el cálculo de las tensiones, el cual se lleva a cabo a partir de la ecuación (3.86). Si se sustituye en esta ecuación las direcciones de flujo dadas en (A2.4a-d) se tiene:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{trial} - \left[\dot{\theta}_1 \Delta \lambda_{01} - \theta_2 \Delta \lambda_{02} + \sum_{\gamma=1,2} \bar{\beta}_\gamma (2B_\gamma (I_1 + K_\gamma) + D_\gamma) \Delta \lambda_\gamma \right] \mathbf{c} : \mathbf{g} -$$

$$-\left[\sum_{\gamma=1,2} \sqrt{2}\bar{\alpha}_{\gamma} (2A_{\gamma}\sqrt{J_2} + C_{\gamma}) \Delta\lambda_{\gamma} \right] \mathbf{c} : \mathbf{n} \quad (\text{A2.11})$$

Por otro lado, es fácil ver que $\mathbf{c} : \mathbf{n} = 2\mu\mathbf{n}$ y que $\mathbf{c} : \mathbf{g} = 3k\mathbf{g}^{-1}$ donde k es el módulo volumétrico, el cual se define a partir de los coeficientes de Lamé como $k = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$. Teniendo en cuenta estas igualdades, si se aplica el operador $\text{dev}(\cdot)$ a ambos lados de la ecuación (A2.11) se llega a expresión:

$$\sqrt{J_2^{trial}} \mathbf{n}^{trial} = \left[\left(1 + 2\mu \sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} \Delta\lambda_{\gamma} \right) \sqrt{J_2} + \mu \sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} \Delta\lambda_{\gamma} \right] \mathbf{n} \quad (\text{A2.12})$$

De la cual se deduce la dirección y la magnitud de retorno de la parte desviadora en función del predictor elástico:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^{trial} \quad (\text{A2.13})$$

$$\sqrt{J_2} = \alpha \left[\sqrt{J_2^{trial}} - \mu \sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} \Delta\lambda_{\gamma} \right] \quad (\text{A2.14})$$

donde el parámetro α se define como:

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\mu \sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} \Delta\lambda_{\gamma}} \quad (\text{A2.15})$$

Análogamente, si se aplica el operador $\text{tr}(\cdot)$ a ambos lados de la ecuación (A2.11) se demuestra que:

$$I_1 = \beta^2 \left[I_1^{trial} - 9k \left(\theta_1 \Delta\lambda_{01} - \theta_2 \Delta\lambda_{02} + \sum_{\gamma=1,2} \bar{\beta}_{\gamma} (2B_{\gamma} K_{\gamma} + D_{\gamma}) \Delta\lambda_{\gamma} \right) \right] \quad (\text{A2.16})$$

donde el parámetro β se define como:

$$\beta = \frac{1}{1 + 18k \sum_{\gamma=1,2} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} \Delta\lambda_{\gamma}} \quad (\text{A2.17})$$

A partir de las definiciones (A2.15) y (A2.17) se obtienen las derivadas de los parámetros α y β respecto a los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_{\gamma}$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Delta\lambda_{\gamma}} = -2\mu\alpha^2 \left(\sum_{\beta=1,2} \bar{\alpha}_{\beta} A_{\beta} \delta_{\gamma\beta} + \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_{\gamma}} \right) \quad (\text{A2.18a})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \Delta\lambda_{\gamma}} = -18k\beta^2 \left(\sum_{\beta=1,2} \bar{\beta}_{\beta} B_{\beta} \delta_{\gamma\beta} + \hat{\mathbf{B}}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_{\gamma}} \right) \quad (\text{A2.18b})$$

donde $\delta_{\gamma\beta} = 1$ si $\gamma = \beta$ y $\delta_{\gamma\beta} = 0$ si $\gamma \neq \beta$. Los parámetros $\hat{\mathbf{A}}^*$ y $\hat{\mathbf{B}}^*$ están definidos en la sección A2.3 al final del anexo.

La derivada de J_2 respecto al multiplicador plástico $\Delta\lambda_\gamma$ se obtiene a partir de las ecuaciones (A2.14) y (A2.18a):

$$\frac{\partial J_2}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -2\mu\alpha\sqrt{J_2} \left[\sum_{\beta=1,2} \bar{\alpha}_\beta (2A_\beta\sqrt{J_2} + C_\beta) \delta_{\gamma\beta} + (2\hat{\mathbf{A}}^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \right] \quad (\text{A2.19})$$

donde el parámetro $\hat{\mathbf{C}}_{n+1}^*$ está definido en la sección A2.3 al final del anexo. Consecuentemente, la derivada de $\sqrt{J_2}$ se obtiene de forma inmediata a partir de (A2.19):

$$\frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -\mu\alpha \left[\sum_{\beta=1,2} \bar{\alpha}_\beta (2A_\beta\sqrt{J_2} + C_\beta) \delta_{\gamma\beta} + (2\hat{\mathbf{A}}^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \right] \quad (\text{A2.20})$$

De forma análoga, a partir de las ecuaciones (A2.16) y (A2.18b) se obtiene la derivada de I_1 respecto a los multiplicadores plásticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = & -9k\beta \left[\theta_1 \delta_{\gamma(01)} - \theta_2 \delta_{\gamma(02)} + \sum_{\beta=1,2} \bar{\beta}_\beta (2B_\beta(I_1 + K_\beta) + D_\beta) \delta_{\gamma\beta} + \right. \\ & \left. + (2(\hat{\mathbf{B}}^* + \hat{\mathbf{K}}_1^*) + \hat{\mathbf{D}}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

donde $\delta_{\gamma(01)} = 1$ si $\gamma = 01$ y $\delta_{\gamma(01)} = 0$ si $\gamma \neq 01$, análogamente, $\delta_{\gamma(02)} = 1$ si $\gamma = 02$ y $\delta_{\gamma(02)} = 0$ si $\gamma \neq 02$. Los parámetros $\hat{\mathbf{D}}^*$ y $\hat{\mathbf{K}}_1^*$ están definidos en la sección A2.3 al final del anexo.

Conviene recordar aquí que las incógnitas que aparecen en (A2.14) y (A2.16) para el cálculo de los invariantes $\sqrt{J_2}$ e I_1 son los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_\gamma$ y las variables internas de endurecimiento \mathbf{q} , las cuales aparecen de forma implícita a través de los coeficientes que definen la superficie de fluencia. No es el caso de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ que ya es conocida a partir de la cinemática. La derivada de \mathbf{q} respecto al multiplicador plástico $\Delta\lambda_\gamma$ se obtiene derivando la ley de endurecimiento (3.88):

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -\hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.22})$$

Por otro lado, las variables internas de endurecimiento en deformaciones $\boldsymbol{\xi}$ se calculan a partir de la expresión (3.87), donde si se sustituye la regla de flujo dada en (A2.8a-d) se llega a la expresión:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{trial} + \hat{\mathbf{A}}J_2 + \hat{\mathbf{B}}(I_2)^2 + \hat{\mathbf{C}}\sqrt{J_2} + (2\hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{D}})I_1 + \hat{\mathbf{K}}_2 + \hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{T}} \quad (\text{A2.23})$$

en la que los coeficientes $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{K}}_1$, $\hat{\mathbf{K}}_2$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ se definen en la sección A2.3 al final del anexo. Sin embargo, desarrollar la ecuación (A2.22) requiere derivar la ecuación (A2.23), lo que implica que se ha de derivar previamente los coeficientes $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{K}}_1$, $\hat{\mathbf{K}}_2$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ respecto al multiplicador plástico $\Delta\lambda_\gamma$. La derivada de estos coeficientes están dadas por:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = \frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 1} + \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 2} + \bar{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24a})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 1} + \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 2} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24b})$$

$$\frac{\partial \widehat{C}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 1} + \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 2} + \overline{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24c})$$

$$\frac{\partial \widehat{D}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 1} + \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 2} + \overline{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24d})$$

$$\frac{\partial \widehat{K}_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \sum_{\beta=1,2} \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial \mathbf{q}} K_\beta + B_\beta \frac{\partial K_\beta}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta_{\gamma \beta} + \overline{K}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24e})$$

$$\frac{\partial \widehat{K}_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \sum_{\beta=1,2} K_\beta \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial \mathbf{q}} K_\beta + 2B_\beta \frac{\partial K_\beta}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta_{\gamma \beta} + (\overline{K}_{21} + \overline{K}_{22}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24f})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = & - \left(\frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} D_1 + A_{01} \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta_{\gamma 1} + \left(\frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} D_2 + A_{02} \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta_{\gamma 2} + \\ & + \overline{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A2.24g})$$

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial Y_1^2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 1} + \frac{\partial Y_2^2}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma 2} + \overline{Y} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24h})$$

$$\frac{\partial \widehat{T}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \theta_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma(01)} + \theta_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} \delta_{\gamma(02)} + \overline{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \quad (\text{A2.24i})$$

donde los coeficientes \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} , \overline{D} , \overline{K}_1 , \overline{K}_{21} , \overline{K}_{22} , \overline{H} , \overline{Y} y \overline{T} están definidos en la sección A2.3 al final del anexo. Sustituyendo en (A2.22) la derivada de la ecuación (A2.23) y haciendo uso de las ecuaciones (A2.24a-i) se llega al sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{P}_{01} \delta_{\gamma(01)} + \mathbf{P}_1 \delta_{\gamma 1} + \mathbf{P}_2 \delta_{\gamma 2} + \mathbf{P}_{02} \delta_{\gamma(02)}) \quad (\text{A2.25})$$

definiéndose la matriz de coeficientes \mathbf{Q} como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_q \quad (\text{A2.26})$$

donde la matriz \mathbf{P}_q está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_q = & \left(\overline{A} - 4\mu\alpha \widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{A}}^* \right) J_2 + \left(\overline{B} - 36k\beta \widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}^* \right) (I_1)^2 - \mu\alpha \widehat{\mathbf{C}} \otimes \widehat{\mathbf{C}}^* + \\ & + \left[\overline{C} - 2\mu\alpha \left(\widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{C}}^* + \widehat{\mathbf{C}} \otimes \widehat{\mathbf{A}}^* \right) \right] \sqrt{J_2} - 9k\beta \left(\widehat{\mathbf{D}} + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 \right) \otimes \left(\widehat{\mathbf{D}}^* + 2\widehat{\mathbf{K}}_1^* \right) + \\ & + \left[2\overline{K}_1 + \overline{D} - 18k\beta \left(2 \left(\widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{K}}_1^* + \widehat{\mathbf{K}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{B}}^* \right) + \widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{D}}^* + \widehat{\mathbf{D}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}^* \right) \right] I_1 + \\ & + \left(\overline{K}_{21} + \overline{K}_{22} \right) + \overline{H} - \overline{Y} - \overline{T} \end{aligned} \quad (\text{A2.27})$$

Los vectores del término independiente \mathbf{P}_{01} , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_{02} se definen en la sección A2.3 al final del anexo.

Sustituyendo la igualdad (A2.25) en las ecuaciones (A2.19), (A2.20) y (A2.21) se obtienen las derivadas de los invariantes tensionales con respecto a los multiplicadores plásticos:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = -2\mu\alpha \sqrt{J_2} \left[\sum_{\beta \neq 1,2} \overline{\alpha}_\beta \left(2A_\beta \sqrt{J_2} + C_\beta \right) \delta_{\gamma \beta} - \right.$$

$$- \left(2\sqrt{J_2} \widehat{\mathbf{A}}^* + \widehat{\mathbf{C}}^* \right) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_\gamma \Big] \quad (\text{A2.28a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = & -\mu\alpha \left[\sum_{\beta=1,2} \bar{\alpha}_\beta \left(2A_\beta \sqrt{J_2} + C_\beta \right) \delta_{\gamma\beta} - \right. \\ & \left. - \left(2\sqrt{J_2} \widehat{\mathbf{A}}^* + \widehat{\mathbf{C}}^* \right) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.28b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = & -9k\beta \left[\theta_1 \delta_{\gamma(01)} + \sum_{\beta=1,2} \bar{\beta}_\beta \left(2B_\beta (I_1 + K_\beta) + D_\beta \right) \delta_{\gamma\beta} - \right. \\ & \left. - \theta_2 \delta_{\gamma(02)} - \left(2(\widehat{\mathbf{B}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_1^*) + \widehat{\mathbf{D}}^* \right) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.28c})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (A2.25) y (A2.28a-c) la matriz de coeficientes (3.93) se obtiene derivando los residuos (3.91a) de las superficies que pertenecen a \mathbb{J}_{act} con respecto a los multiplicadores plásticos:

$$\frac{\partial R_{\lambda_{01}}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \theta_1 \left(\frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} - \frac{\partial A_{01}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \right) \quad (\text{A2.29a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = & A_1 \frac{\partial J_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + [D_1 + 2B_1 (I_1 + K_1)] \frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + C_1 \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + J_2 \frac{\partial A_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \\ & + (I_1 + K_1)^2 \frac{\partial B_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + 2B_1 (I_1 + K_1) \frac{\partial K_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \sqrt{J_2} \frac{\partial C_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \\ & + (I_1 - A_{01}) \frac{\partial D_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} - D_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} - \frac{\partial Y_1^2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A2.29b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\lambda_2}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = & A_2 \frac{\partial J_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + [D_2 + 2B_2 (I_1 + K_2)] \frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + C_2 \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + J_2 \frac{\partial A_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \\ & + (I_1 + K_2)^2 \frac{\partial B_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + 2B_2 (I_1 + K_2) \frac{\partial K_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \sqrt{J_2} \frac{\partial C_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \\ & + (I_1 + A_{01}) \frac{\partial D_2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + D_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} - \frac{\partial Y_2^2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A2.29c})$$

$$\frac{\partial R_{\lambda_{02}}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = -\theta_2 \left(\frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda_\gamma} + \frac{\partial A_{02}}{\partial \Delta \lambda_\gamma} \right) \quad (\text{A2.29d})$$

Por definición, los coeficientes A_β , B_β , C_β , D_β , K_β e Y_β^2 dependen única y exclusivamente de las variables de endurecimiento $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$ y \mathbf{q} . Por tanto, haciendo uso de la regla de la cadena y de la ecuación (A2.25), la derivada de estos coeficientes respecto a los multiplicadores plásticos $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ está dada por la expresión:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_\gamma \quad (\text{A2.30})$$

Las ecuaciones (A2.29a-d) permiten determinar la matriz de coeficientes (3.93). Una vez conocida esta matriz se está en disposición de aplicar la ecuación (3.92), la cual, aplicada de forma iterativa según el algoritmo descrito en el cuadro (3.1), permite conocer los multiplicadores plásticos $\Delta \boldsymbol{\lambda}$.

A2.1.3 Cálculo de la variable interna de endurecimiento.

Como se indicó en el algoritmo del cuadro 3.1, el cálculo del multiplicador plástico $\Delta\lambda$ no está desacoplado del cálculo de la variable interna de endurecimiento ξ . Sin embargo, la determinación de ambas variables se lleva a cabo de forma desacoplada, resolviendo el sistema de ecuaciones (3.91c) para cada iteración de (3.92). A partir del multiplicador plástico $\Delta\lambda$ obtenido de (3.92) se resuelve el sistema de ecuaciones (3.91c) aplicando de forma iterativa la ecuación (3.96). El objetivo de este apartado es desarrollar la matriz de coeficientes definida en (3.97), la cual debe ser calculada en cada iteración de (3.96).

Considerando el multiplicador plástico $\Delta\lambda$ fijo, la derivada de las ecuaciones (A2.15) y (A2.17) respecto las variables internas de endurecimiento en tensiones \mathbf{q} está dada por:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}} = -2\mu\alpha^2\hat{\mathbf{A}}^* \quad (\text{A2.31a})$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{q}} = -18k\beta^2\hat{\mathbf{B}}^* \quad (\text{A2.31b})$$

donde los coeficientes $\hat{\mathbf{A}}^*$ y $\hat{\mathbf{B}}^*$ están definidos en la sección A2.3 al final del anexo. Análogamente, teniendo en cuenta las ecuaciones (A2.31a-b) y derivando las expresiones (A2.14) y (A2.16) respecto al vector de variables internas de endurecimiento \mathbf{q} , se obtienen las derivadas de los invariantes tensionales:

$$\frac{\partial J_2}{\partial\mathbf{q}} = -2\mu\alpha\sqrt{J_2} \left(2\sqrt{J_2}\hat{\mathbf{A}}^* + \hat{\mathbf{C}}^* \right) \quad (\text{A2.32a})$$

$$\frac{\partial\sqrt{J_2}}{\partial\mathbf{q}} = -\mu\alpha \left(2\sqrt{J_2}\hat{\mathbf{A}}^* + \hat{\mathbf{C}}^* \right) \quad (\text{A2.32b})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{q}} = -9k\beta \left[2 \left(\hat{\mathbf{B}}^* I_1 + \hat{\mathbf{K}}_1^* \right) + \hat{\mathbf{D}}^* \right] \quad (\text{A2.32c})$$

donde, al igual que antes, los coeficientes $\hat{\mathbf{C}}^*$, $\hat{\mathbf{D}}^*$ y $\hat{\mathbf{K}}_1^*$ están definidos en la sección A2.3 al final del anexo.

Por otro lado, derivando la expresión (A2.23) y teniendo en cuenta las ecuaciones (A2.32a-c), (A2.43a-i), y (A2.44a-j), la derivada del vector de variables internas ξ respecto al vector \mathbf{q} está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{q}} = & \text{Diag} \left(\bar{\mathbf{A}} - 4\mu\alpha\hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{A}}^* \right) J_2 + \text{Diag} \left(\bar{\mathbf{B}} - 36k\beta\hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{B}}^* \right) (I_1)^2 + \\ & + \text{Diag} \left(\bar{\mathbf{C}} - 2\mu\alpha \left(\hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{C}}^* + \hat{\mathbf{C}} \otimes \hat{\mathbf{A}}^* \right) \right) \sqrt{J_2} - \mu\alpha \text{Diag} \left(\hat{\mathbf{C}} \otimes \hat{\mathbf{C}}^* \right) + \\ & + \text{Diag} \left[2\bar{\mathbf{K}}_1 + \bar{\mathbf{D}} - 18k\beta \left(2\hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{K}}_1^* + 2\hat{\mathbf{K}}_1 \otimes \hat{\mathbf{B}}^* + \hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^* + \hat{\mathbf{D}} \otimes \hat{\mathbf{B}}^* \right) \right] I_1 + \\ & + \text{Diag} \left[\left(\bar{\mathbf{K}}_{21} + \bar{\mathbf{K}}_{22} \right) - 9k\beta \left(\hat{\mathbf{D}} + 2\hat{\mathbf{K}}_1 \right) \otimes \left(\hat{\mathbf{D}}^* + 2\hat{\mathbf{K}}_1^* \right) + \bar{\mathbf{H}} - \bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{T}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.33})$$

donde el operador $\text{Diag}(\cdot)$ representa a la matriz formada por los términos de la diagonal y se define como:

$$[\text{Diag}(\mathbf{A})]_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición (A2.27), la expresión (A2.33) se puede reescribir de la forma:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\gamma \frac{\partial\phi_\gamma}{\partial\mathbf{q}} \right) = \text{Diag}(\mathbf{P}_\mathbf{q}) \quad (\text{A2.34})$$

Si se deriva el residuo definido en (3.91c) con respecto a las variables internas de endurecimiento ξ y utilizando la regla de la cadena junto con las ecuaciones (3.88) y (A2.34) se deduce que la matriz de coeficientes definida en (3.97) está dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \xi} = \mathbf{1} + \widehat{\mathbf{K}}''(\xi) \cdot \text{Diag}(\mathbf{P}_q) \quad (\text{A2.35})$$

Resulta interesante la similitud entre la matriz $\frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \xi}$ y la matriz \mathbf{Q} definida en (A2.26). No obstante, la matriz $\frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \xi}$ es una matriz diagonal como consecuencia de la condición (3.31), lo que implica que el cálculo de la ecuación (3.96) sea relativamente sencillo. Por contra, la matriz \mathbf{Q} es una matriz llena debido a que no se consideran desacopladas las componentes del vector de variables internas de endurecimiento \mathbf{q} en la definición de la condición de fluencia.

A2.2 Simplificación del modelo general.

En la sección A2.1 se ha desarrollado el cálculo de las matrices de coeficientes definidas en (3.93) y (3.97) para el modelo general. En este apartado, el cálculo se realizará para el modelo particular propuesto en la sección 3.2.4. Sin embargo, en lugar de calcular el corrector plástico para el modelo particular, se simplificarán los resultados obtenidos en la sección A2.1.

La condición de fluencia está definida en (3.67a-c) y (3.68). Conviene recordar que en este modelo la superficie de fluencia no depende de la variable de endurecimiento \mathbf{q} :

$$\phi_\gamma = \phi_\gamma(\boldsymbol{\tau}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}) \quad \forall \gamma \in \mathbb{J}_\phi \quad (\text{A2.36})$$

siendo $\mathbb{J}_\phi = \{01, 1, 2\}$. De aquí que las derivadas de los coeficientes que definen la condición de fluencia sean nulas:

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial B_\beta}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial C_\beta}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial D_\beta}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial Y_\beta^2}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = 0 \quad \forall \beta, \gamma \in \mathbb{J}_\phi \quad (\text{A2.37})$$

ya que, utilizando la regla de la cadena, la derivada de estos coeficientes está dada por la relación $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \Delta \lambda_\gamma} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \lambda_\gamma}$.

El cálculo del estado tensional se lleva a cabo a partir de los invariantes tensionales, los cuales se ponen en función de los invariantes tensionales del predictor elástico. Para ello se determinan los parámetros α y β definidos en (A2.15) y (A2.17) respectivamente:

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\mu A_2 \Delta \lambda_2} \quad (\text{A2.38a})$$

$$\beta = \frac{1}{1 + 18k B_2 \Delta \lambda_2} \quad (\text{A2.38b})$$

Sustituyendo estos parámetros en las ecuaciones (A2.14) y (A2.16) se obtienen los invariantes tensionales:

$$\sqrt{J_2} = \alpha \left[\sqrt{J_2^{trial}} - \mu C_1 \Delta \lambda_1 \right] \quad (\text{A2.39a})$$

$$I_1 = \beta^2 \left[I_1^{trial} - 9k \Delta \lambda_{01} \right] \quad (\text{A2.39b})$$

A partir de las ecuaciones (A2.28a-c) se obtienen las derivadas de los invariantes tensionales respecto a los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_\gamma$ para el modelo particular:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -2\mu\alpha\sqrt{J_2} \left[C_1\delta_{\gamma 1} + 2A_2\sqrt{J_2}\delta_{\gamma 2} \right] \quad (\text{A2.40a})$$

$$\frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -\mu\alpha \left[C_1\delta_{\gamma 1} + 2A_2\sqrt{J_2}\delta_{\gamma 2} \right] \quad (\text{A2.40b})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = -9k\beta \left[\delta_{(01)\gamma} + 2B_2I_1\delta_{\gamma 2} \right] \quad (\text{A2.40c})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (A2.40a-c), la matriz de coeficientes (3.93) se obtiene derivando el residuo (3.91a) de las superficies que pertenecen a \mathbb{J}_{act} . En particular, simplificando las ecuaciones (A2.29a-d) se tiene:

$$\frac{\partial R_{\lambda_{01}}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = \frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.41a})$$

$$\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = D_1 \frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda_\gamma} + C_1 \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.41b})$$

$$\frac{\partial R_{\lambda_2}}{\partial \Delta\lambda_\gamma} = A_2 \frac{\partial J_2}{\partial \Delta\lambda_\gamma} + 2B_2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda_\gamma} \quad (\text{A2.41c})$$

A2.3 Definiciones.

Definición de los parámetros $\hat{\mathbf{A}}^*$, $\hat{\mathbf{B}}^*$, $\hat{\mathbf{C}}^*$, $\hat{\mathbf{D}}^*$ y $\hat{\mathbf{K}}_1^*$:

$$\hat{\mathbf{A}}^* = \bar{\alpha}_1 \frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \bar{\alpha}_2 \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.42a})$$

$$\hat{\mathbf{B}}^* = \bar{\beta}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.42b})$$

$$\hat{\mathbf{C}}^* = \bar{\alpha}_1 \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \bar{\alpha}_2 \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.42c})$$

$$\hat{\mathbf{D}}^* = \bar{\beta}_1 \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.42d})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1^* = \bar{\beta}_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} K_1 + B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} K_2 + B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.42e})$$

Definición de los coeficientes $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{K}}_1$, $\hat{\mathbf{K}}_2$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43a})$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43b})$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43c})$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43d})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} K_1 + B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_1 + \left(\frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} K_2 + B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43e})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = K_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} K_1 + 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_1 + K_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} K_2 + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43f})$$

$$\hat{\mathbf{H}} = - \left(\frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} D_1 + A_{01} \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_1 + \left(\frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} D_2 + A_{02} \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43g})$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \frac{\partial Y_1^2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial Y_2^2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.43h})$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \theta_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_{01} + \theta_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_{02} \quad (\text{A2.43i})$$

Definición de los coeficientes \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{K}_1 , \bar{K}_{21} , \bar{K}_{22} , \bar{H} , \bar{Y} y \bar{T} :

$$\bar{A} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 A_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44a})$$

$$\bar{B} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 B_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44b})$$

$$\bar{C} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 C_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44c})$$

$$\bar{D} = \frac{\partial^2 D_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 D_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44d})$$

$$\bar{K}_1 = \sum_{\gamma=1,2} \left(\frac{\partial^2 B_\gamma}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} K_\gamma + \frac{\partial B_\gamma}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_\gamma}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial K_\gamma}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \mathbf{q}} + B_\gamma \frac{\partial^2 K_\gamma}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_\gamma \quad (\text{A2.44e})$$

$$\bar{K}_{21} = 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44f})$$

$$\bar{K}_{22} = \sum_{\alpha=1,2} K_\alpha \left(\frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} K_\alpha + 2 \frac{\partial B_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_\alpha}{\partial \mathbf{q}} + 2 \frac{\partial K_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \mathbf{q}} + 2B_\alpha \frac{\partial^2 K_\alpha}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_\alpha \quad (\text{A2.44g})$$

$$\begin{aligned} \bar{H} = & - \left(\frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} D_1 + \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} + A_{01} \frac{\partial^2 D_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_1 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_{02}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} D_2 + \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} + A_{02} \frac{\partial^2 D_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right) \Delta \lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{A2.44h})$$

$$\bar{Y} = \frac{\partial^2 Y_1^2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 Y_2^2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44i})$$

$$\bar{T} = \theta_1 \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_1 + \theta_2 \frac{\partial^2 A_{02}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A2.44j})$$

Definición de los vectores \mathbf{P}_{01} , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_{02} :

$$\mathbf{P}_{01} = -\theta_1 \left[9k\beta \left(2\widehat{\mathbf{B}}I_1 + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 + \widehat{\mathbf{D}} \right) + \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} \right] \quad (\text{A2.45a})$$

$$\mathbf{P}_1 = P_{(J_2)1}J_2 + P_{(I_1^2)1}(I_1)^2 + P_{(\sqrt{J_2})1}\sqrt{J_2} + P_{(I_1)1}I_1 + P_{(*)1} \quad (\text{A2.45b})$$

$$\mathbf{P}_2 = P_{(J_2)2}J_2 + P_{(I_1^2)2}(I_1)^2 + P_{(\sqrt{J_2})2}\sqrt{J_2} + P_{(I_1)2}I_1 + P_{(*)2} \quad (\text{A2.45c})$$

$$\mathbf{P}_{02} = \theta_2 \left[9k\beta \left(2\widehat{\mathbf{B}}I_1 + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 + \widehat{\mathbf{D}} \right) - \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} \right] \quad (\text{A2.45d})$$

siendo los parámetros $P_{(J_2)1}$, $P_{(J_2)2}$, $P_{(I_1^2)1}$, $P_{(I_1^2)2}$, $P_{(\sqrt{J_2})1}$, $P_{(\sqrt{J_2})2}$, $P_{(I_1)1}$, $P_{(I_1)2}$, $P_{(*)1}$ y $P_{(*)2}$:

$$P_{(J_2)\gamma} = \frac{\partial A_\gamma}{\partial \mathbf{q}} - 4\mu\alpha\bar{\alpha}_\gamma A_\gamma \widehat{\mathbf{A}} \quad (\text{A2.46a})$$

$$P_{(I_1^2)\gamma} = \frac{\partial B_\gamma}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} - 36k\beta\bar{\beta}_\gamma B_\gamma \widehat{\mathbf{B}} \quad (\text{A2.46b})$$

$$P_{(\sqrt{J_2})\gamma} = \frac{\partial C_\gamma}{\partial \mathbf{q}} - 2\mu\alpha\bar{\alpha}_\gamma \left(A_\gamma \widehat{\mathbf{C}} + C_\gamma \widehat{\mathbf{A}} \right) \quad (\text{A2.46c})$$

$$P_{(I_1)\gamma} = 2 \left(\frac{\partial B_\gamma}{\partial \mathbf{q}} K_\gamma + B_\gamma \frac{\partial K_\gamma}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{\partial D_\gamma}{\partial \mathbf{q}} - 18k\beta\bar{\beta}_\gamma \left[2 \left(K_\gamma \widehat{\mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{K}}_1 \right) + B_\gamma \widehat{\mathbf{D}} + D_\gamma \widehat{\mathbf{B}} \right] \quad (\text{A2.46d})$$

$$P_{(*)1} = K_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} K_1 + 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial Y_1^2}{\partial \mathbf{q}} - \left(\frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} D_1 + A_{01} \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \right) - \mu\alpha\bar{\alpha}_1 C_1 \widehat{\mathbf{C}} - 9k\beta\bar{\beta}_1 (D_1 + 2B_1 K_1) \left(\widehat{\mathbf{D}} + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 \right) \quad (\text{A2.46e})$$

$$P_{(*)2} = K_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} K_2 + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial Y_2^2}{\partial \mathbf{q}} + \left(\frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} D_2 + A_{02} \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \right) - \mu\alpha\bar{\alpha}_\alpha C_\alpha \widehat{\mathbf{C}} - 9k\beta\bar{\beta}_2 (D_2 + 2B_2 K_2) \left(\widehat{\mathbf{D}} + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 \right) \quad (\text{A2.46f})$$

Anexo A3

Calculo del tensor constitutivo tangente.

El objetivo de este anexo es desarrollar una expresión para el tensor constitutivo tangente en el caso en que $J_{act}^{n+1} \neq \emptyset$. En la sección A3.1 se obtienen algunos resultados necesarios para la formulación del tensor constitutivo tangente continuo descrito en la sección 3.2.3 . Posteriormente, se formula el tensor constitutivo tangente consistente para el caso discreto. En particular, en la sección A3.2 se desarrolla este tensor de una forma compacta. Sin embargo, esta formulación es útil para comprender los términos que intervienen en el tensor pero es inapropiada para su implementación numérica. Con esta finalidad, en la sección A3.3 se desarrolla este tensor con una formulación más efectiva para su implementación.

A3.1 Tensor constitutivo tangente continuo.

Como se mencionó en la sección 3.2.3, el tensor elastoplástico tangente se obtiene a partir de la derivada objetiva del tensor de tensiones de Kirchhoff:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = L_v(\mathbf{c}) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + \mathbf{c} : (L_v(\mathbf{e}) - L_v(\mathbf{e}^p)) \quad (\text{A3.1})$$

En esta sección se deduce el primer término de la ecuación (A3.1) en el que aparece la derivada del tensor constitutivo elástico $L_v(\mathbf{c})$. El resultado se muestra en el siguiente lema:

Lema A3.1 *El producto doblemente contraído entre la derivada del tensor constitutivo elástico $L_v(\mathbf{c})$ y las deformaciones elásticas \mathbf{e}^e se obtiene a partir de la igualdad:*

$$L_v(\mathbf{c}) : \mathbf{e}^e = \mathbf{a} : L_v(\mathbf{e}) \quad (\text{A3.2})$$

siendo \mathbf{e}^e el tensor de deformaciones elásticas $\mathbf{e}^e = \mathbf{e} - \mathbf{e}^p$ y en el que el tensor \mathbf{a} se define como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a})^{ijkl} = & -2\lambda \left[I^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}^e) + g^{ij} (\mathbf{e}^e)^{kl} \right] - \\ & -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}^e)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}^e)^{jk} + (\mathbf{e}^e)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}^e)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición, la derivada de Lie del tensor constitutivo elástico $L_v(\mathbf{c})$ está dada por:

$$L_v(\mathbf{c}) = \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi^*(\mathbf{c}) \right) \quad (\text{A3.4})$$

Por tanto, el primer paso es escribir el tensor constitutivo elástico en la configuración material aplicando el operador *pull-back* $\phi^*(\cdot)$:

$$[\Xi]^{abcd} = [\phi^*(\mathbf{c})]^{abcd} = (\mathbf{F}^{-1})^a_i (\mathbf{F}^{-1})^b_j (\mathbf{F}^{-1})^c_k (\mathbf{F}^{-1})^d_l c^{ijkl} \quad (\text{A3.5})$$

donde Ξ es el tensor constitutivo elástico formulado en la configuración material:

$$\Xi = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2\mu \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \quad (\text{A3.6})$$

definiéndose el tensor $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}$ como:

$$[\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}]^{abcd} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{C}^{-1})^{ac} (\mathbf{C}^{-1})^{bd} + (\mathbf{C}^{-1})^{ad} (\mathbf{C}^{-1})^{bc} \right] \quad (\text{A3.7})$$

Derivando el tensor constitutivo elástico material Ξ se tiene:

$$\dot{\Xi} = \lambda \dot{\mathbf{G}} + 2\mu \dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{C}^{-1}} \quad (\text{A3.8})$$

donde el tensor $\dot{\mathbf{G}}$ se define como:

$$\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \dot{\mathbf{C}}^{-1} \quad (\text{A3.9})$$

y donde

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{C}^{-1}}]^{abcd} &= \frac{1}{2} \left[(\dot{\mathbf{C}}^{-1})^{ac} (\mathbf{C}^{-1})^{bd} + (\mathbf{C}^{-1})^{ac} (\dot{\mathbf{C}}^{-1})^{bd} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\dot{\mathbf{C}}^{-1})^{ad} (\mathbf{C}^{-1})^{bc} + (\mathbf{C}^{-1})^{ad} (\dot{\mathbf{C}}^{-1})^{bc} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.10})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}}$, la derivada temporal $\dot{\mathbf{C}}^{-1}$ se obtiene a partir de la expresión $\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{1}$:

$$\dot{\mathbf{C}}^{-1} = -2\mathbf{C}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A3.11})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A3.9), (A3.10) y (A3.11) en la ecuación (A3.8) y aplicando el operador *push-forward* $\phi_*(\cdot)$ se tiene:

$$\begin{aligned} [L_v(\mathbf{c})]^{ijkl} &= \lambda \left[\phi_* \left(\dot{\mathbf{G}} \right) \right]^{ijkl} + 2\mu \left[\phi_* \left(\dot{\mathbf{I}}_{\mathbf{C}^{-1}} \right) \right]^{ijkl} \\ &= -2\lambda \left[L_v(\mathbf{e})^{ij} g^{kl} + g^{ij} L_v(\mathbf{e})^{kl} \right] - \\ &\quad - 2\mu \left[L_v(\mathbf{e})^{ik} g^{jl} + g^{ik} L_v(\mathbf{e})^{jl} + L_v(\mathbf{e})^{il} g^{jk} + g^{il} L_v(\mathbf{e})^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

Desarrollando el doble producto $L_v(\mathbf{c}) : \mathbf{e}^e$ se tiene que:

$$L_v(\mathbf{c}) : \mathbf{e}^e = \mathbf{a} : L_v(\mathbf{e})$$

donde el tensor \mathbf{a} se define:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a})^{ijkl} &= -2\lambda \left[\Gamma^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}^e) + g^{ij} (\mathbf{e}^e)^{kl} \right] - \\ &\quad - 2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}^e)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}^e)^{jk} + (\mathbf{e}^e)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}^e)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned}$$

□

A3.2 Tensor constitutivo tangente. Formulación compacta.

En esta sección se desarrolla el tensor constitutivo tangente discreto de una forma compacta. Una formulación detallada del cálculo de este tensor se deja para la sección A3.3.

La determinación del tensor constitutivo tangente se desarrolla a partir de la relación entre las tensiones de Kirchhoff y las deformaciones elásticas de Almansi en el instante t_{n+1} :

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) \quad (\text{A3.13})$$

En el que el tensor constitutivo tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} se obtiene de relacionar la variación de las tensiones con la variación de las deformaciones en el instante t_{n+1} :

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1}^{ep} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.14})$$

Por tanto, derivando la ecuación (A3.13) se llega a la expresión:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = d\mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) + \mathbf{c} : (d\mathbf{e}_{n+1} - d\mathbf{e}_{n+1}^p) \quad (\text{A3.15})$$

Teniendo en cuenta el lema A3.2 que se formulará posteriormente en la sección A3.3.1, la ecuación (A3.15) se reduce a la expresión

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) : d\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{c} : d\mathbf{e}_{n+1}^p \quad (\text{A3.16})$$

siendo el tensor \mathbf{a}_{n+1} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{n+1})^{ijkl} = & -2\lambda \left[\Gamma^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) + g^{ij} (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{kl} \right] - \\ & -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{jk} + (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.17})$$

Por otro lado, la regla de flujo de las deformaciones plásticas descrita en la configuración material está dada por la ecuación:

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{M}_\alpha^{n+1} \quad (\text{A3.18})$$

Teniendo en cuenta que el multiplicador plástico $\Delta\lambda_\alpha^{n+1}$ es nulo en el caso de las restricciones no activas $\alpha \notin \mathbb{J}_{act}^{n+1}$, la derivada de la ecuación (A3.18) y la aplicación posterior del operador *push-forward* $\phi_*(\cdot)$ sobre las variables materiales conducen a la expresión:

$$d\mathbf{e}_{n+1}^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \mathbf{m}_\alpha^{n+1} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} \quad (\text{A3.19})$$

Sustituyendo la ecuación (A3.19) en (A3.16) se tiene que:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}) : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \mathbf{c} : \mathbf{m}_\alpha^{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} \quad (\text{A3.20})$$

En el segundo término de la ecuación (A3.20) aparece la variación de los multiplicadores plásticos $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$, los cuales se calculan derivando la condición de fluencia $\phi_\alpha^{n+1}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0$ para toda $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$:

$$0 = d\phi_\alpha^{n+1} = \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}} : d\boldsymbol{\tau}_{n+1} + \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}} d\hat{\boldsymbol{\eta}}_{n+1} + \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} : d\mathbf{q}_{n+1} + \frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial g} : dg \quad (\text{A3.21})$$

donde $d\tau_{n+1}$ se calcula a partir de la ecuación (A3.20), mientras que $d\mathbf{q}_{n+1}$ se obtiene derivando la ecuación:

$$\mathbf{q}_{n+1} = -\widehat{\mathbf{K}}'(\xi_{n+1}) \quad (\text{A3.22})$$

cuya derivada está dada por la expresión:

$$d\mathbf{q}_{n+1} = -\widehat{\mathbf{K}}''(\xi_{n+1}) \cdot d\xi_{n+1} \quad (\text{A3.23})$$

y en el que el vector de variables internas de endurecimiento en deformaciones ξ_{n+1} se calcula como:

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{trial} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_\phi} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \quad (\text{A3.24})$$

de donde se deduce que la derivada del vector de variables de endurecimiento está dada por la ecuación:

$$d\xi_{n+1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} + \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) \quad (\text{A3.25})$$

Sustituyendo la ecuación (A3.25) en (A3.23) se llega a la expresión:

$$d\mathbf{q}_{n+1} = - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \widehat{\mathbf{K}}''(\xi_{n+1}) \cdot \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \widehat{\mathbf{K}}''(\xi_{n+1}) \cdot d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) \quad (\text{A3.26})$$

Por otro lado, $d\widehat{\eta}_{n+1}$ y $d\mathbf{g}$ están dadas por las expresiones:

$$d\mathbf{g} = 2 d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.27a})$$

$$d\widehat{\eta}_{n+1} = -\mathbf{H}_{\widehat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \mathbf{g}^{-1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.27b})$$

en el que se ha tenido en cuenta la ley de endurecimiento (3.44) evaluada en el instante t_{n+1} y el lema A1.17 del anexo A1.

Las ecuaciones (A3.20), (A3.21), (A3.26) y (A3.27a-b) forman un sistema de ecuaciones en el que $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$, $d\mathbf{m}_\alpha^{n+1}$ y $d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right)$ aparecen como las incógnitas del sistema. La determinación de $d\mathbf{m}_\alpha^{n+1}$ y $d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right)$ para todo $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$ se lleva a cabo derivando las direcciones de flujo (A2.4a-d) y las ecuaciones (A2.8a-d) en el instante t_{n+1} :

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} &= \frac{\partial\mathbf{m}_\alpha^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : d\tau_{n+1} + \frac{\partial\mathbf{m}_\alpha^{n+1}}{\partial\widehat{\eta}_{n+1}} d\widehat{\eta}_{n+1} + \frac{\partial\mathbf{m}_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} : d\mathbf{q}_{n+1} + \frac{\partial\mathbf{m}_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} : d\mathbf{g} \\ d\left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) &= \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tau_{n+1}\partial\mathbf{q}_{n+1}} : d\tau_{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}\partial\mathbf{q}_{n+1}} : d\mathbf{q}_{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{g}\partial\mathbf{q}_{n+1}} : d\mathbf{g} + \\ &\quad + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\widehat{\eta}_{n+1}\partial\mathbf{q}_{n+1}} d\widehat{\eta}_{n+1} \end{aligned}$$

que combinándolas con las ecuaciones (A3.20), (A3.26) y (A3.27a-b) se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(mm)}^{n+1} & \mathbf{A}_{(mq)}^{n+1} \\ \mathbf{A}_{(qm)}^{n+1} & \mathbf{A}_{(qq)}^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{m}_{n+1} \\ d\left(\frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{(m)}^{n+1} \\ \mathbf{B}_{(q)}^{n+1} \end{pmatrix} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{(m)\alpha}^{n+1} \\ \mathbf{C}_{(q)\alpha}^{n+1} \end{pmatrix} d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) \quad (\text{A3.28})$$

donde la matriz de coeficientes \mathbf{A}^{n+1} se define como:

$$\left[\mathbf{A}_{(mm)}^{n+1} \right]_{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \mathbf{I} + \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \tau_{n+1}} : \mathbf{c} \quad (\text{A3.29a})$$

$$\left[\mathbf{A}_{(mq)}^{n+1} \right]_{\beta\gamma} = \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \quad (\text{A3.29b})$$

$$\left[\mathbf{A}_{(qm)}^{n+1} \right]_{\beta\gamma} = \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \tau_{n+1}} : \mathbf{c} \quad (\text{A3.29c})$$

$$\left[\mathbf{A}_{(qq)}^{n+1} \right]_{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \mathbf{1} + \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \quad (\text{A3.29d})$$

para toda $\beta, \gamma \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$. El vector de términos independientes se define como:

$$\left[\mathbf{B}_{(m)}^{n+1} \right]_\beta = \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \tau_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) - H_{\widehat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \widehat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{g}} \quad (\text{A3.30a})$$

$$\left[\mathbf{B}_{(q)}^{n+1} \right]_\beta = \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \tau_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) - H_{\widehat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \widehat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \mathbf{g}} \quad (\text{A3.30b})$$

$$\left[\mathbf{C}_{(m\gamma)}^{n+1} \right]_\beta = \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \mathbf{m}_\gamma^{n+1} + \frac{\partial \mathbf{m}_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \frac{\partial \phi_\gamma^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (\text{A3.30c})$$

$$\left[\mathbf{C}_{(q\gamma)}^{n+1} \right]_\beta = \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \mathbf{m}_\gamma^{n+1} + \frac{\partial^2 \phi_\beta^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \mathbf{q}_{n+1}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \frac{\partial \phi_\gamma^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \quad (\text{A3.30d})$$

para toda $\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$. A partir del sistema de ecuaciones (A3.28), las incógnitas $d\mathbf{m}_\alpha^{n+1}$ y $d\left(\frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}\right)$ se ponen en función de las deformaciones $d\mathbf{e}_{n+1}$ y de la incógnita $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$ como:

$$d\mathbf{m}_\alpha^{n+1} = \widetilde{\mathbf{H}}_{(m)\alpha}^{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \overline{\mathbf{H}}_{(m)\alpha\beta}^{n+1} d(\Delta\lambda_\beta^{n+1}) \quad (\text{A3.31a})$$

$$d\left(\frac{\partial \phi_\alpha^{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}\right) = \widetilde{\mathbf{H}}_{(q)\alpha}^{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \overline{\mathbf{H}}_{(q)\alpha\beta}^{n+1} d(\Delta\lambda_\beta^{n+1}) \quad (\text{A3.31b})$$

donde se define:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{(m)\alpha}^{n+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\left[\mathbf{A}_{(mm)}^{-1} \right]_{\alpha\beta}^{n+1} : \left[\mathbf{B}_{(m)}^{n+1} \right]_\beta + \left[\mathbf{A}_{(mq)}^{-1} \right]_{\alpha\beta}^{n+1} \otimes \left[\mathbf{B}_{(q)}^{n+1} \right]_\beta \right) \quad (\text{A3.32a})$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{(q)\alpha}^{n+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\left[\mathbf{A}_{(qm)}^{-1} \right]_{\alpha\beta}^{n+1} : \left[\mathbf{B}_{(m)}^{n+1} \right]_\beta + \left[\mathbf{A}_{(qq)}^{-1} \right]_{\alpha\beta}^{n+1} \left[\mathbf{B}_{(q)}^{n+1} \right]_\beta \right) \quad (\text{A3.32b})$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{(m)\alpha\beta}^{n+1} = \sum_{\gamma \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\left[\mathbf{A}_{(mm)}^{-1} \right]_{\alpha\gamma}^{n+1} : \left[\mathbf{C}_{(m\beta)}^{n+1} \right]_\gamma + \left[\mathbf{A}_{(mq)}^{-1} \right]_{\alpha\gamma}^{n+1} \left[\mathbf{C}_{(q\beta)}^{n+1} \right]_\gamma \right) \quad (\text{A3.32c})$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{(q)\alpha\beta}^{n+1} = \sum_{\gamma \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \left(\left[\mathbf{A}_{(qm)}^{-1} \right]_{\alpha\gamma}^{n+1} : \left[\mathbf{C}_{(m\beta)}^{n+1} \right]_\gamma + \left[\mathbf{A}_{(qq)}^{-1} \right]_{\alpha\gamma}^{n+1} \left[\mathbf{C}_{(q\beta)}^{n+1} \right]_\gamma \right) \quad (\text{A3.32d})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A3.20), (A3.26), (A3.27a-b) y (A3.31a-b) en cada una la condiciones de persistencia activas (A3.21) se llega a un sistema de ecuaciones que permite despejar la derivada del multiplicador plástico $d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1})$ para toda $\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}$:

$$d(\Delta\lambda_\alpha^{n+1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} (\bar{G}_{\alpha\beta}^{n+1})^{-1} \left(\frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) - H_{\hat{\eta}_n} \eta_{n+1} \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\hat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} - \mathbf{H}_\beta^{n+1} \right) \quad (\text{A3.33})$$

donde se define

$$\bar{G}_{\alpha\beta}^{n+1} = G_{\alpha\beta}^{n+1} - \sum_{\gamma \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\gamma^{n+1} \left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \bar{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\gamma\beta}^{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{(\mathbf{q})\gamma\beta}^{n+1} \right) \quad (\text{A3.34a})$$

$$\mathbf{H}_\alpha^{n+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\beta^{n+1} \left(\frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : \mathbf{c} : \tilde{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\beta}^{n+1} + \frac{\partial\phi_\alpha^{n+1}}{\partial\mathbf{q}_{n+1}} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{(\mathbf{q})\beta}^{n+1} \right) \quad (\text{A3.34b})$$

en el que el término $G_{\alpha\beta}^{n+1}$ está definido por la ecuación (3.107) evaluada en el instante t_{n+1} .

Sustituyendo las ecuaciones (A3.20), (A3.31a) y (A3.33) en (A3.14) se obtiene la matriz tangente consistente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1}^{ep} &= (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) - \sum_{\alpha \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\alpha^{n+1} \mathbf{c} : \tilde{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\alpha}^{n+1} - \\ &- \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} (\bar{G}_{\alpha\beta}^{n+1})^{-1} (\mathbf{c} : \bar{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1}) \otimes \left(\frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\tau_{n+1}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) - H_{\hat{\eta}_n} \eta_{n+1} \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\hat{\eta}_{n+1}} \mathbf{g}^{-1} + 2 \frac{\partial\phi_\beta^{n+1}}{\partial\mathbf{g}} - \mathbf{H}_\beta^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.35})$$

donde el tensor $\bar{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1}$ se define como:

$$\bar{\mathbf{M}}_\alpha^{n+1} = \mathbf{m}_\alpha^{n+1} - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}^{n+1}} \Delta\lambda_\beta^{n+1} \bar{\mathbf{H}}_{(\mathbf{m})\beta\alpha}^{n+1} \quad (\text{A3.36})$$

A3.3 Tensor constitutivo tangente. Modelo general.

El objetivo de esta sección es desarrollar en detalle el tensor constitutivo tangente con la finalidad de ser implementado numéricamente. Su deducción se lleva a cabo a través de los invariantes tensionales, formulando el resultado en la configuración espacial. El procedimiento para su obtención consiste en realizar los cálculos en la configuración material y posteriormente llevar el resultado a la configuración espacial a través del operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$.

A3.3.1 Linealización del predictor elástico.

El predictor elástico, definido por las ecuaciones (3.84a-d), describe el proceso puramente elástico al tiempo que constituye el punto de partida para el cálculo del proceso elastoplástico. De aquí la necesidad de linealizar el predictor elástico durante el cálculo del tensor constitutivo tangente. La

linealización de este estado no depende de la condición de fluencia, por lo que esta parte es común a todos los procesos plásticos.

La linealización de la ecuación (3.84b) implica derivar el tensor elástico cuyo resultado se resume en el siguiente lema:

Lema A3.2 *La derivada del tensor elástico \mathbf{c} respecto al tensor de deformaciones \mathbf{e}_{n+1} se obtiene a través de la expresión:*

$$d\mathbf{c} : \mathbf{e}_{n+1}^* = \mathbf{a}_{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.37})$$

siendo \mathbf{e}_{n+1}^* cualquier tensor de deformación y donde el tensor \mathbf{a}_{n+1} se define como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{n+1})^{ijkl} = & -2\lambda \left[\mathbf{I}^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^*) + g^{ij} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{kl} \right] - \\ & -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{jk} + (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.38})$$

DEMOSTRACIÓN: El tensor elástico \mathbf{c} se puede escribir en la configuración material a través del operador *pull-back* $\phi_{n+1}^*(\cdot)$:

$$[\Xi_{n+1}]^{abcd} = [\phi_{n+1}^*(\mathbf{c})]^{abcd} = (\mathbf{F}_{n+1}^{-1})^a_i (\mathbf{F}_{n+1}^{-1})^b_j (\mathbf{F}_{n+1}^{-1})^c_k (\mathbf{F}_{n+1}^{-1})^d_l c^{ijkl} \quad (\text{A3.39})$$

donde el tensor Ξ_{n+1} está dado por:

$$\Xi_{n+1} = \lambda \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{n+1}^{-1} + 2\mu \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1} \quad (\text{A3.40})$$

siendo el tensor $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1}$:

$$[\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1}]^{abcd} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ac} (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bd} + (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ad} (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bc} \right] \quad (\text{A3.41})$$

Derivando el tensor Ξ_{n+1} se tiene:

$$d\Xi_{n+1} = \lambda d\mathbf{G}_{n+1} + 2\mu d\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1} \quad (\text{A3.42})$$

donde el tensor $d\mathbf{G}_{n+1}$ se define como:

$$d\mathbf{G}_{n+1} = d\mathbf{C}_{n+1}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{n+1}^{-1} + \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \otimes d\mathbf{C}_{n+1}^{-1} \quad (\text{A3.43})$$

y en el que

$$\begin{aligned} [d\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1}]^{abcd} = & \frac{1}{2} \left[(d\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ac} (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bd} + (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ac} (d\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bd} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[(d\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ad} (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bc} + (\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{ad} (d\mathbf{C}_{n+1}^{-1})^{bc} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.44})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $d\mathbf{C}_{n+1} = 2d\mathbf{E}_{n+1}$, el término $d\mathbf{C}_{n+1}^{-1}$ se obtiene derivando la expresión $\mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{1}$:

$$d\mathbf{C}_{n+1}^{-1} = -2\mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot d\mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \quad (\text{A3.45})$$

Sustituyendo las ecuaciones , (A3.43), (A3.44) y (A3.45) en la ecuación (A3.42) y aplicando el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ se tiene:

$$\begin{aligned} [dc]^{ijkl} &= \lambda [\phi_*^{n+1} (d\mathbf{G}_{n+1})]^{ijkl} + 2\mu [\phi_*^{n+1} (d\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}^{n+1})]^{ijkl} \\ &= -2\lambda \left[de_{n+1}^{ij} g^{kl} + g^{ij} de_{n+1}^{kl} \right] - \\ &\quad -2\mu \left[de_{n+1}^{ik} g^{jl} + g^{ik} de_{n+1}^{jl} + de_{n+1}^{il} g^{jk} + g^{il} de_{n+1}^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.46})$$

Desarrollando el doble producto $dc : \mathbf{e}_{n+1}^*$ se llega a la expresión:

$$dc : \mathbf{e}_{n+1}^* = \mathbf{a}_{n+1} : de_{n+1}$$

donde el tensor \mathbf{a}_{n+1} se define:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{n+1})^{ijkl} &= -2\lambda \left[\mathbf{I}^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^*) + g^{ij} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{kl} \right] - \\ &\quad -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{jk} + (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}_{n+1}^*)^{il} g^{jk} \right] \end{aligned}$$

□

Escribiendo la ecuación (3.84b) en la configuración material se tiene:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \mathbf{\Xi}_{n+1} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p) \quad (\text{A3.47})$$

donde $\mathbf{\Xi}_{n+1}$ es el tensor constitutivo elástico escrito en la configuración material. Derivando la ecuación (A3.47) respecto al tensor deformación \mathbf{E}_{n+1} se obtiene la expresión:

$$d\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = d\mathbf{\Xi}_{n+1} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p) + \mathbf{\Xi}_{n+1} : d\mathbf{E}_{n+1} \quad (\text{A3.48})$$

Esta ecuación se puede escribir en la configuración espacial mediante el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = dc : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p\,trial}) + \mathbf{c} : de_{n+1} \quad (\text{A3.49})$$

donde el primer término está dado por el lema A3.2 tomando el tensor de deformaciones $\mathbf{e}_{n+1}^* = \mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{p\,trial}$, mientras que el segundo término ya está directamente en función de de_{n+1} . Por tanto, la ecuación (A3.49) se puede reescribir de la forma:

$$d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) : de_{n+1} \quad (\text{A3.50})$$

siendo el tensor \mathbf{a}_{n+1}^{trial} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{n+1}^{trial})^{ijkl} &= -2\lambda \left[\mathbf{I}^{ijkl} \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial}) + g^{ij} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial})^{kl} \right] - \\ &\quad -2\mu \left[g^{ik} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial})^{jl} + g^{il} (\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial})^{jk} + (\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial})^{ik} g^{jl} + (\mathbf{e}_{n+1}^{e\,trial})^{il} g^{jk} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.51})$$

Linealización del primer invariante *trial*.

La determinación del primer invariante del tensor de tensiones *trial* en términos de las variables materiales está dada por:

$$I_{1_{n+1}}^{trial} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} : \mathbf{g} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) : \phi_*^{n+1}(\mathbf{C}_{n+1}) = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{C}_{n+1} \quad (\text{A3.52})$$

Derivando respecto a las deformaciones \mathbf{E}_{n+1} y teniendo en cuenta que $d\mathbf{C}_{n+1} = 2d\mathbf{E}_{n+1}$ se tiene:

$$dI_{1_{n+1}}^{trial} = d\mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{C}_{n+1} + 2\mathbf{S}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{E}_{n+1} \quad (\text{A3.53})$$

Esta ecuación se puede reescribir en función de las variables espaciales aplicando el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ a cada una de las variables materiales:

$$dI_{1_{n+1}}^{trial} = d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} : \mathbf{g} + 2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.54})$$

Sustituyendo la ecuación (A3.50) en (A3.54) se obtiene:

$$dI_{1_{n+1}}^{trial} = \mathbf{P}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.55})$$

donde se define el tensor \mathbf{P}_{n+1}^{trial} como:

$$\mathbf{P}_{n+1}^{trial} = \mathbf{g} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) + 2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \quad (\text{A3.56})$$

Linealización del segundo invariante *trial*.

La norma del tensor desviador de tensiones *trial* en función de las variables materiales se calcula como:

$$\begin{aligned} \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})\|^2 &= \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) : \mathbf{g} \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) \cdot \mathbf{g} \\ &= \phi_*^{n+1}(\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})) : \phi_*^{n+1}(\mathbf{C}_{n+1}) \cdot \phi_*^{n+1}(\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})) \cdot \phi_*^{n+1}(\mathbf{C}_{n+1}) \\ &= \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) : \mathbf{C}_{n+1} \cdot \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) \cdot \mathbf{C}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A3.57})$$

de donde se define el tensor desviador del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como:

$$\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} (\mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{C}_{n+1}) \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \quad (\text{A3.58})$$

La norma de este tensor se define como:

$$\|\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})\|_C^2 = \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) : \mathbf{C}_{n+1} \cdot \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) \cdot \mathbf{C}_{n+1} \quad (\text{A3.59})$$

De las ecuaciones (A3.57) y (A3.59) se deduce que el segundo invariante de las tensiones *trial* escrito en función de las variables materiales está dado por:

$$J_{2_{n+1}}^{trial} = \frac{1}{2} \|\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})\|_C^2 \quad (\text{A3.60})$$

Derivando la ecuación (A3.58) respecto al tensor \mathbf{E}_{n+1} se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} d(\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})) &= d\mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \frac{2}{3} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \otimes \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{E}_{n+1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{n+1} : d\mathbf{S}_{n+1}^{trial} + \\ &\quad + \frac{2}{3} (\mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{C}_{n+1}) \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot d\mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A3.61})$$

donde se han tenido en cuenta las igualdades:

$$\begin{aligned} d\mathbf{C}_{n+1} &= 2d\mathbf{E}_{n+1} \\ d\mathbf{C}_{n+1}^{-1} &= -2\mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot d\mathbf{E}_{n+1} \cdot \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (A3.61) y (A3.58) y la simetría de los tensores \mathbf{C}_{n+1} y $\text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})$, la derivada de la ecuación (A3.60) respecto al tensor \mathbf{E}_{n+1} está dada por:

$$dJ_{2n+1}^{trial} = [\mathbf{C}_{n+1} \cdot \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) \cdot \mathbf{C}_{n+1} : d\mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2\mathbf{S}_{n+1}^{trial} \cdot \mathbf{C}_{n+1} \cdot \text{DEV}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial})] : d\mathbf{E}_{n+1} \quad (\text{A3.62})$$

Esta ecuación se puede reescribir en función de las variables espaciales aplicando el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ a cada una de las variables materiales:

$$dJ_{2n+1}^{trial} = [\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) : d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + 2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})] : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.63})$$

Sustituyendo la ecuación (A3.50) en (A3.63) se obtiene:

$$dJ_{2n+1}^{trial} = \mathbf{J}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.64})$$

donde se define el tensor \mathbf{J}_{n+1}^{trial} como:

$$\mathbf{J}_{n+1}^{trial} = \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) + 2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) \quad (\text{A3.65})$$

Una forma alternativa de presentar el segundo invariante es a través de su raíz cuadrada $\sqrt{J_{2n+1}^{trial}}$. Su derivada está dada por:

$$d\sqrt{J_{2n+1}^{trial}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{2n+1}^{trial}}} dJ_{2n+1}^{trial} \quad (\text{A3.66})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A3.64) y (A3.65) en (A3.66) se tiene:

$$d\sqrt{J_{2n+1}^{trial}} = \tilde{\mathbf{J}}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.67})$$

donde se define el tensor $\tilde{\mathbf{J}}_{n+1}^{trial}$ como:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{n+1}^{trial} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{n}_{n+1}^{trial} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) + 2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \cdot \mathbf{n}_{n+1}^{trial}] \quad (\text{A3.68})$$

donde $\mathbf{n}_{n+1}^{trial} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})\|}$.

Linealización del tensor unitario desviador \mathbf{n}_{n+1}^{trial} .

El tensor unitario desviador de las tensiones *trial* está definido por la relación:

$$\mathbf{n}_{n+1}^{trial} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})\|} \quad (\text{A3.69})$$

Por definición, el denominador del tensor unitario desviador \mathbf{n}_{n+1}^{trial} depende del segundo invariante de las tensiones *trial*, cuya variación ya se ha calculado en la sección anterior. Sin embargo, el numerador lo constituye un tensor desviador que también es necesario derivar.

Reescribiendo la ecuación (A3.61) en función de las variables espaciales a través del operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ se obtiene la ecuación:

$$d(\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})) = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g} \right] : d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \frac{2}{3} [(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} : \mathbf{g}) \mathbf{I} - \mathbf{g}^{-1} \otimes \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.70})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A3.50) y (A3.56) en (A3.70) se obtiene:

$$d(\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})) = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.71})$$

donde se define el tensor $\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{trial}$ como:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{trial} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}_{n+1}^{trial}) + \frac{2}{3} (\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} : \mathbf{g}) \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} \quad (\text{A3.72})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) = \sqrt{2J_{2n+1}^{trial}} \mathbf{n}_{n+1}^{trial}$, la derivada de $\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})$ respecto al tensor \mathbf{e}_{n+1} se puede calcular como:

$$d(\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})) = \sqrt{2J_{2n+1}^{trial}} d\mathbf{n}_{n+1}^{trial} + \sqrt{2} \mathbf{n}_{n+1}^{trial} d\sqrt{J_{2n+1}^{trial}} \quad (\text{A3.73})$$

Combinando las ecuaciones (A3.67), (A3.70) y (A3.73) se llega a la expresión:

$$d\mathbf{n}_{n+1}^{trial} = \frac{1}{\sqrt{2J_{2n+1}^{trial}}} \left[\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{trial} - \sqrt{2} \mathbf{n}_{n+1}^{trial} \otimes \tilde{\mathbf{J}}_{n+1}^{trial} \right] : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.74})$$

A3.3.2 Linealización de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$.

A partir de la ley de endurecimiento (3.44), se relaciona la derivada de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$ con respecto a la derivada de la densidad relativa η_{n+1} como:

$$d\hat{\eta}_{n+1} = H_{\hat{\eta}_{n+1}}(\eta_{n+1}) d\eta_{n+1} \quad (\text{A3.75})$$

Por otro lado, la derivada de la densidad relativa se calcula a partir de la ley de conservación de la masa (3.16) escrita de la forma:

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{\eta_0^2}{\det(\mathbf{C}_{n+1})} \quad (\text{A3.76})$$

Derivar esta ecuación implica calcular la derivada del determinante de un tensor de segundo orden, la cual se obtiene a partir de siguiente resultado [43]:

$$D(\mathbf{A}; \mathbf{U}) = \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} (\det(\mathbf{A} + \zeta \mathbf{U})) \right|_{\zeta=0} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} : \mathbf{U} \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{T} \quad (\text{A3.77})$$

siendo el tensor \mathbf{A} un tensor de segundo orden $\mathbf{A} \in \mathcal{T}$ en el que \mathcal{T} es el conjunto de todos los tensores de segundo orden. De aquí se deduce que:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C}_{n+1})}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} = \det(\mathbf{C}_{n+1}) \mathbf{C}_{n+1}^{-T} \quad (\text{A3.78})$$

Por tanto, derivando (A3.76) y haciendo uso de la regla de la cadena junto con la ecuación (A3.78) se llega a la expresión:

$$\frac{\partial \eta_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} = -\frac{1}{2} \eta_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \quad (\text{A3.79})$$

donde la derivada de la densidad relativa respecto a las deformaciones se obtiene como:

$$d\eta_{n+1} = -\eta_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} : d\mathbf{E}_{n+1} \quad (\text{A3.80})$$

Sustituyendo esta expresión en (A3.75), aplicando el operador *push-forward* $\phi_*^{n+1}(\cdot)$ a cada una de las variables materiales y teniendo en cuenta lema A1.5 se obtiene:

$$d\hat{\eta}_{n+1} = -H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \mathbf{g}^{-1} : d\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{A3.81})$$

A3.3.3 Linealización del estado tensional.

La linealización del estado tensional se obtiene a partir de la linealización del predictor elástico y de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$, las cuales son conocidas en este momento. En líneas generales, los pasos a seguir son:¹

- Cálculo de la derivada del vector de variables internas de endurecimiento en tensiones: $d\mathbf{q}_{n+1}$
- Cálculo de la derivada de los multiplicadores plásticos a partir de la condición de persistencia: $d\Delta\lambda_{n+1}$
- Cálculo de la derivada de los invariantes tensionales: dJ_2^{n+1} y dI_1^{n+1}
- Cálculo de la derivada del tensor de tensiones: $d\boldsymbol{\tau}_{n+1}$

Linealización de las variables de endurecimiento \mathbf{q}_{n+1} .

El punto de partida es la linealización de los parámetros α y β . Para ello se derivan las definiciones (A2.15) y (A2.17):

$$d\alpha = -2\mu\alpha^2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_\gamma A_\gamma d(\Delta\lambda_\gamma) + \hat{\mathbf{A}}_\eta^* d\hat{\eta} + \hat{\mathbf{A}}^* \cdot d\mathbf{q} \right) \quad (\text{A3.82})$$

$$d\beta = -18k\beta^2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \bar{\beta}_\gamma B_\gamma d(\Delta\lambda_\gamma) + \hat{\mathbf{B}}_\eta^* d\hat{\eta} + \hat{\mathbf{B}}^* \cdot d\mathbf{q} \right) \quad (\text{A3.83})$$

donde los parámetros $\hat{\mathbf{A}}^*$ y $\hat{\mathbf{B}}^*$ se definieron en las ecuaciones (A2.42a-b) del anexo A2, mientras que $\hat{\mathbf{A}}_\eta^*$ y $\hat{\mathbf{B}}_\eta^*$ están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

A partir de aquí, es fácil obtener la derivada de los invariantes tensionales. Derivando la ecuación (A2.14) y haciendo uso de la ecuación (A3.82) se tiene:

$$\begin{aligned} dJ_2 = & -2\mu\alpha\sqrt{J_2} \left[\sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_\gamma (2A_\gamma\sqrt{J_2} + C_\gamma) d(\Delta\lambda_\gamma) + (2\hat{\mathbf{A}}_\eta^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}_\eta^*) d\hat{\eta} + \right. \\ & \left. + (2\hat{\mathbf{A}}^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}^*) \cdot d\mathbf{q} \right] + \alpha^2 \left[dJ_2^{trial} - 2\mu \left(\sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_\gamma C_\gamma \Delta\lambda_\gamma \right) d\sqrt{J_2^{trial}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.84})$$

donde el parámetro $\hat{\mathbf{C}}^*$ se definió en la ecuación (A2.42c) del anexo A2 y el parámetro $\hat{\mathbf{C}}_\eta^*$ está definido en la sección A3.6 al final de este anexo. La derivada de $\sqrt{J_2}$ se obtiene de forma inmediata a partir de la ecuación (A3.84):

$$\begin{aligned} d\sqrt{J_2} = & -\mu\alpha \left[\sum_{\gamma=1,2} \bar{\alpha}_\gamma (2A_\gamma\sqrt{J_2} + C_\gamma) d(\Delta\lambda_\gamma) + (2\hat{\mathbf{A}}_\eta^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}_\eta^*) d\hat{\eta} + \right. \\ & \left. + (2\hat{\mathbf{A}}^*\sqrt{J_2} + \hat{\mathbf{C}}^*) \cdot d\mathbf{q} \right] + \alpha d\sqrt{J_2^{trial}} \end{aligned} \quad (\text{A3.85})$$

¹Por simplicidad en la notación, y salvo indicación expresa, en esta sección se suprimirá la referencia al instante t_{n+1} .

De forma análoga, la derivada de I_1 se obtiene derivando la ecuación (A2.16) y combinándola con la expresión (A3.83):

$$dI_1 = -9k\beta \left[\theta_1 d(\Delta\lambda_{01}) + \sum_{\gamma=1,2} \bar{\beta}_\gamma (2B_\gamma (I_1 + K_\gamma) + D_\gamma) d(\Delta\lambda_\gamma) - \theta_2 d(\Delta\lambda_{02}) + \right. \\ \left. + \left(2 \left(\widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) + \widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* \right) d\hat{\eta} + \left(2 \left(\widehat{\mathbf{B}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_1^* \right) + \widehat{\mathbf{D}}^* \right) \cdot d\mathbf{q} \right] + \beta dI_1^{trial} \quad (\text{A3.86})$$

donde los parámetros $\widehat{\mathbf{D}}^*$ y $\widehat{\mathbf{K}}_1^*$ se definieron en las ecuaciones (A2.42d-e) del anexo A2, y los parámetros $\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^*$ y $\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^*$ están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

La linealización del vector de variables de endurecimiento \mathbf{q} se obtiene derivando la ley de endurecimiento (3.88):

$$d\mathbf{q} = -\widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{A3.87})$$

En el que la derivada del vector de variables internas de endurecimiento en deformaciones $\boldsymbol{\xi}$ se calcula a partir de la expresión (A2.23):

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{trial} + \widehat{\mathbf{A}}J_2 + \widehat{\mathbf{B}}(I_2)^2 + \widehat{\mathbf{C}}\sqrt{J_2} + \left(2\widehat{\mathbf{K}}_1 + \widehat{\mathbf{D}} \right) I_1 + \widehat{\mathbf{K}}_2 + \widehat{\mathbf{H}} - \widehat{\mathbf{Y}} - \widehat{\mathbf{T}} \quad (\text{A3.88})$$

Derivar esta ecuación implica derivar los coeficientes $\widehat{\mathbf{A}}$, $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{D}}$, $\widehat{\mathbf{K}}_1$, $\widehat{\mathbf{K}}_2$, $\widehat{\mathbf{H}}$, $\widehat{\mathbf{T}}$ e $\widehat{\mathbf{Y}}$ definidos en las ecuaciones (A2.43a-i) del anexo A2. Las derivadas de estos coeficientes están dadas por:

$$d\widehat{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_1) + \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_2) + \bar{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89a})$$

$$d\widehat{\mathbf{B}} = \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_1) + \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_2) + \bar{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89b})$$

$$d\widehat{\mathbf{C}} = \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_1) + \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_2) + \bar{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89c})$$

$$d\widehat{\mathbf{D}} = \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_1) + \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_2) + \bar{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89d})$$

$$d\widehat{\mathbf{K}}_1 = \sum_{\alpha=1,2} \left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial \mathbf{q}} K_\alpha + B_\alpha \frac{\partial K_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) d(\Delta\lambda_\alpha) + \bar{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{K}}_1 \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89e})$$

$$d\widehat{\mathbf{K}}_2 = \sum_{\alpha=1,2} K_\alpha \left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial \mathbf{q}} K_\alpha + 2B_\alpha \frac{\partial K_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) d(\Delta\lambda_\alpha) + (\bar{\mathbf{K}}_{21\hat{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}_{22\hat{\eta}}) d\hat{\eta} + \\ + (\bar{\mathbf{K}}_{21} + \bar{\mathbf{K}}_{22}) \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89f})$$

$$d\widehat{\mathbf{H}} = - \left(\frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} D_1 + A_{01} \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \right) d(\Delta\lambda_1) + \left(\frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} D_2 + A_{02} \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \right) d(\Delta\lambda_2) + \\ + \bar{\mathbf{H}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89g})$$

$$d\widehat{\mathbf{Y}} = \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_1) + \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_2) + \bar{\mathbf{Y}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{Y}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89h})$$

$$d\widehat{\mathbf{T}} = \theta_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_{01}) + \theta_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} d(\Delta\lambda_{02}) + \bar{\mathbf{T}}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.89i})$$

donde $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_{21}, \bar{\mathbf{K}}_{22}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{Y}}$ y $\bar{\mathbf{T}}$ se definieron en las ecuaciones (A2.44a-j) del anexo A2, mientras que $\bar{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{K}}_{21\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{K}}_{22\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{H}}_{\hat{\eta}}, \bar{\mathbf{Y}}_{\hat{\eta}}$ Y $\bar{\mathbf{T}}_{\hat{\eta}}$ están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

Derivando la ecuación (A3.88) y combinándola con las ecuaciones (A3.87), (A3.89a-i) y (A3.120a-j), se obtiene la derivada del vector de variables internas \mathbf{q} en función de las derivadas del multiplicador plástico $d(\Delta\lambda_\gamma)$, de la variable de endurecimiento $d\hat{\eta}$ y de los invariantes dJ_2^{trial} , $d\sqrt{J_2^{trial}}$ y dI_1^{trial} :

$$d\mathbf{q} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{A3.90})$$

donde la matriz \mathbf{Q} es la misma matriz que la definida en la ecuación (A2.26) del anexo A2 y en el que el vector de términos independientes \mathbf{P} se define como:

$$\mathbf{P} = -\hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{J}_\phi} \mathbf{P}_\gamma d(\Delta\lambda_\gamma) + \mathbf{P}_{\hat{\eta}} d\hat{\eta} + \mathbf{P}_{J_2} dJ_2^{trial} + \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} d\sqrt{J_2^{trial}} + \mathbf{P}_{I_1} dI_1^{trial} \right) \quad (\text{A3.91})$$

donde los vectores $\mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y \mathbf{P}_{02} se definieron en las ecuaciones (A2.45a-d) del anexo A2, mientras que los vectores $\mathbf{P}_{\hat{\eta}}, \mathbf{P}_{J_2}, \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathbf{P}_{I_1} están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

Linealización de los multiplicadores plásticos.

La linealización de los multiplicadores plásticos correspondientes a las superficies activas se obtienen a partir de la condición de persistencia. Lógicamente, para el caso de superficies no activas se tiene:

$$d(\Delta\lambda_\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \notin \mathbb{J}_{act} \quad (\text{A3.92})$$

Teniendo en cuenta que en el instante t_{n+1} la condición de fluencia verifica que $\phi_\gamma = 0$ para toda $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$, la condición de persistencia se formula como:

$$d\phi_\gamma = 0 \quad \forall \gamma \in \mathbb{J}_{act} \quad (\text{A3.93})$$

Utilizando la regla de la cadena, la condición de fluencia se deriva de la forma:

$$d\phi_\gamma = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial J_2} dJ_2 + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \sqrt{J_2}} d\sqrt{J_2} + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \hat{\eta}} d\hat{\eta} + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} \quad (\text{A3.94})$$

donde se ha considerado que el término $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \mathbf{g}} \cdot d\mathbf{g}$ está definido implícitamente a través de los términos $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial J_2} dJ_2$, $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \sqrt{J_2}} d\sqrt{J_2}$ y $\frac{\partial \phi_\gamma}{\partial I_1} dI_1$. Aplicando la ecuación (A3.94) para todas y cada una de las superficies activas y teniendo en cuenta las ecuaciones (A3.84), (A3.85), (A3.86), (A3.90) y (A3.91), se llega a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las derivadas de los multiplicadores plásticos. Invertido este sistema de ecuaciones se tiene:

$$d(\Delta\lambda_\gamma) = - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{\gamma\beta})^{-1} \left(G_{\hat{\eta}\beta} d\hat{\eta} + G_{J_2\beta} dJ_2^{trial} + G_{\sqrt{J_2}\beta} d\sqrt{J_2^{trial}} + G_{I_1\beta} dI_1^{trial} \right) \quad (\text{A3.95})$$

donde la dimensión del sistema coincide con el número de superficies activas. Aplicando la condición (A3.93) sobre la superficie $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$ y redefiniendo términos se llega a la expresión:

$$d\phi_\gamma = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} G_{\gamma\beta} d(\Delta\lambda_\beta) + G_{\hat{\eta}\beta} d\hat{\eta} + G_{J_2\beta} dJ_2^{trial} + G_{\sqrt{J_2}\beta} d\sqrt{J_2^{trial}} + G_{I_1\beta} dI_1^{trial} = 0 \quad (\text{A3.96})$$

de la cual se obtienen la matriz de coeficientes $G_{\gamma\beta}$ y los parámetros $G_{\hat{\eta}\ \gamma}$, $G_{J_2\ \gamma}$, $G_{\sqrt{J_2}\ \gamma}$, $G_{I_1\ \gamma}$ correspondientes al vector de términos independientes. Estos coeficientes están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

Sustituyendo la ecuación (A3.95) en (A3.90) y (A3.91), se obtiene la derivada del vector de variables de endurecimiento \mathbf{q} en función de la derivada de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}$ y de los invariantes tensoriales *trial*:

$$d\mathbf{q} = \mathbf{H}_{\hat{\eta}} \cdot d\hat{\eta} + \mathbf{H}_{J_2} \cdot dJ_2^{trial} + \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \cdot d\sqrt{J_2^{trial}} + \mathbf{H}_{I_1} \cdot dI_1^{trial} \quad (\text{A3.97})$$

donde los parámetros $\mathbf{H}_{\hat{\eta}}$, \mathbf{H}_{J_2} , $\mathbf{H}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathbf{H}_{I_1} están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

Linealización del tensor de tensiones τ_{n+1} .

El tensor de tensiones τ se puede descomponer en su parte esférica y desviadora:

$$\tau = \sqrt{2}\sqrt{J_2}\mathbf{n}^{trial} + \frac{1}{3}I_1\mathbf{g}^{-1} \quad (\text{A3.98})$$

donde se ha tenido en cuenta la relación (A2.13) en la que $\mathbf{n} = \mathbf{n}^{trial}$. La derivada del tensor de tensiones se obtiene derivando la ecuación (A3.98):

$$d\tau = \sqrt{2}\mathbf{n}^{trial} d\sqrt{J_2} + \sqrt{2}\sqrt{J_2}d\mathbf{n}^{trial} + \frac{1}{3}\mathbf{g}^{-1}dI_1 - \frac{2}{3}I_1de \quad (\text{A3.99})$$

El primer y tercer término se calculan a partir de la derivada de los invariantes $\sqrt{J_2}$ y I_1 , los cuales se calculan a partir de las ecuaciones (A3.85), (A3.86), (A3.95) y (A3.97):

$$d\sqrt{J_2} = \mu\alpha\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^*\sqrt{J_2} + \tilde{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^*\right)d\hat{\eta} + \alpha\left[1 + \mu\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{\sqrt{J_2}}^*\sqrt{J_2} + \tilde{\mathbf{C}}_{\sqrt{J_2}}^*\right)\right]d\sqrt{J_2^{trial}} + \mu\alpha\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{J_2}^*\sqrt{J_2} + \tilde{\mathbf{C}}_{J_2}^*\right)dJ_2^{trial} + \mu\alpha\left(2\tilde{\mathbf{A}}_{I_1}^*\sqrt{J_2} + \tilde{\mathbf{C}}_{I_1}^*\right)dI_1^{trial} \quad (\text{A3.100a})$$

$$dI_1 = 9k\beta\left(2\tilde{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^*I_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{\hat{\eta}}^* + \tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^*\right)d\hat{\eta} + 9k\beta\left(2\tilde{\mathbf{B}}_{J_2}^*I_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{J_2}^* + \tilde{\mathbf{D}}_{J_2}^*\right)dJ_2^{trial} + 9k\beta\left(2\tilde{\mathbf{B}}_{\sqrt{J_2}}^*I_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{\sqrt{J_2}}^* + \tilde{\mathbf{D}}_{\sqrt{J_2}}^*\right)d\sqrt{J_2^{trial}} + \beta\left[1 + 9k\left(2\tilde{\mathbf{B}}_{I_1}^*I_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{I_1}^* + \tilde{\mathbf{D}}_{I_1}^*\right)\right]dI_1^{trial} \quad (\text{A3.100b})$$

donde los coeficientes $\tilde{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\hat{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{I_1}^*$ y $\tilde{\mathbf{K}}_{I_1}^*$ están definidos en la sección A3.6 al final de este anexo.

En el instante t_{n+1} , la variación de las tensiones se relaciona con la variación de las deformaciones totales a través del tensor constitutivo tangente consistente \mathbf{c}^{ep} :

$$d\tau = \mathbf{c}^{ep} : de \quad (\text{A3.101})$$

Combinando las ecuaciones (A3.64), (A3.67), (A3.55), (A3.74), (A3.81), (A3.100a), (A3.100b), (A3.99) y (A3.101) se obtiene el tensor constitutivo tangente como:

$$\mathbf{c}^{ep} = \mathcal{A}_o\mathbf{A}^{trial} + \mathbf{n}^{trial} \otimes \left(-\mathcal{A}_{\hat{\eta}}\mathbf{g}^{-1} + \mathcal{A}_{J_2}\mathbf{J}^{trial} + \mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}\tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{A}_{I_1}\mathbf{P}^{trial}\right) - \mathcal{B}_o\mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \left(-\mathcal{B}_{\hat{\eta}}\mathbf{g}^{-1} + \mathcal{B}_{J_2}\mathbf{J}^{trial} + \mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}\tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{B}_{I_1}\mathbf{P}^{trial}\right) \quad (\text{A3.102})$$

donde se definen los coeficientes:

$$A_o = \sqrt{\frac{J_2}{J_2^{trial}}} \quad (A3.103a)$$

$$A_{\tilde{\eta}} = \sqrt{2}H_{\tilde{\eta}_n}(\eta_{n+1})\mu\alpha\eta \left(2\tilde{A}_{\tilde{\eta}}^*\sqrt{J_2} + \tilde{C}_{\tilde{\eta}}^*\right) \quad (A3.103b)$$

$$A_{J_2} = \sqrt{2}\mu\alpha \left(2\tilde{A}_{J_2}^*\sqrt{J_2} + \tilde{C}_{J_2}^*\right) \quad (A3.103c)$$

$$A_{\sqrt{J_2}} = \sqrt{2} \left[\left(\alpha - \sqrt{\frac{J_2}{J_2^{trial}}} \right) - \mu\alpha \left(2\tilde{A}_{J_2}^*\sqrt{J_2} + \tilde{C}_{J_2}^* \right) \right] \quad (A3.103d)$$

$$A_{I_1} = \sqrt{2}\mu\alpha \left(2\tilde{A}_{I_1}^*\sqrt{J_2} + \tilde{C}_{I_1}^*\right) \quad (A3.103e)$$

$$B_o = \frac{2}{3}I_1 \quad (A3.103f)$$

$$B_{\tilde{\eta}} = 3H_{\tilde{\eta}_n}(\eta_{n+1})k\beta\eta \left(2\tilde{B}_{\tilde{\eta}}^*I_1 + \tilde{K}_{\tilde{\eta}}^* + \tilde{D}_{\tilde{\eta}}^*\right) \quad (A3.103g)$$

$$B_{J_2} = 3k\beta \left(2\tilde{B}_{J_2}^*I_1 + \tilde{K}_{J_2}^* + \tilde{D}_{J_2}^*\right) \quad (A3.103h)$$

$$B_{\sqrt{J_2}} = 3k\beta \left(2\tilde{B}_{\sqrt{J_2}}^*I_1 + \tilde{K}_{\sqrt{J_2}}^* + \tilde{D}_{\sqrt{J_2}}^*\right) \quad (A3.103i)$$

$$B_{I_1} = \beta \left[\frac{1}{3} + 3k \left(2\tilde{B}_{I_1}^*I_1 + \tilde{K}_{I_1}^* + \tilde{D}_{I_1}^* \right) \right] \quad (A3.103j)$$

A3.4 Tensor constitutivo tangente. Particularización modelo general.

Al igual que se hizo con el corrector plástico, en este apartado se linealizará el estado tensional simplificando el cálculo realizado para el modelo general (sección A3.3.3).²

Para todas las superficies activas $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$, la linealización de los multiplicadores plásticos se obtienen a partir del sistema de ecuaciones (A3.95):

$$d\Delta\lambda_\gamma = - \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{\gamma\beta})^{-1} \left(G_{\tilde{\eta}\beta} d\tilde{\eta} + G_{J_2\beta} dJ_2^{trial} + G_{\sqrt{J_2}\beta} d\sqrt{J_2^{trial}} + G_{I_1\beta} dI_1^{trial} \right) \quad (A3.104)$$

donde los coeficientes correspondientes a la superficie ϕ_{01} se obtienen a partir de las ecuaciones (A3.121a-c) y (A3.122a-d):

$$G_{0101} = -9k\beta \quad (A3.105a)$$

$$G_{012} = -18k\beta B_2 I_1 \quad (A3.105b)$$

$$G_{\tilde{\eta}01} = -18k\beta \tilde{B}_{\tilde{\eta}}^* I_1 - \frac{\partial A_{01}}{\partial \tilde{\eta}} \quad (A3.105c)$$

$$G_{I_101} = \beta \quad (A3.105d)$$

²Por simplicidad en la notación, y salvo indicación expresa, en esta sección se suprimirá la referencia al instante t_{n+1} .

en el que $G_{011} = G_{J_2 01} = G_{\sqrt{J_2} 01} = 0$. Análogamente, a partir de las ecuaciones (A3.125a-c) y (A3.126a-d) se obtienen los coeficientes de la superficie ϕ_1 :

$$G_{101} = -9k\beta D_1 \quad (\text{A3.106a})$$

$$G_{111} = -\mu\alpha C_1^2 \quad (\text{A3.106b})$$

$$G_{112} = -2\mu\alpha A_2 C_1 \sqrt{J_2} - 18k\beta B_2 D_1 I_1 \quad (\text{A3.106c})$$

$$G_{\hat{\eta}1} = -18k\beta D_1 \hat{B}_{\hat{\eta}}^* - D_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \hat{\eta}} \quad (\text{A3.106d})$$

$$G_{\sqrt{J_2}1} = \alpha C_1 \quad (\text{A3.106e})$$

$$G_{I_1 1} = \beta D_1 \quad (\text{A3.106f})$$

siendo el coeficiente $G_{J_2 1}$ nulo. De forma similar, a partir de las ecuaciones (A3.127a-c) y (A3.128a-d) se obtienen los coeficientes correspondientes a la superficie ϕ_2 :

$$G_{201} = -18k\beta B_2 I_1 \quad (\text{A3.107a})$$

$$G_{211} = -2\mu\alpha A_2 C_1 \sqrt{J_2} \quad (\text{A3.107b})$$

$$G_{222} = -4\mu\alpha A_2^2 J_2 - 36k\beta B_2^2 (I_1)^2 \quad (\text{A3.107c})$$

$$G_{\hat{\eta}2} = \left(\frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} - 36k\beta B_2 \hat{B}_{\hat{\eta}}^* \right) (I_1)^2 - \frac{\partial Y_2^2}{\partial \hat{\eta}} \quad (\text{A3.107d})$$

$$G_{J_2 2} = \alpha^2 A_2 \quad (\text{A3.107e})$$

$$G_{\sqrt{J_2} 2} = -2\mu\alpha^2 A_2 C_1 \Delta \lambda_1 \quad (\text{A3.107f})$$

$$G_{I_1 2} = 2\beta B_2 I_1 \quad (\text{A3.107g})$$

Una vez determinados estos coeficientes, se está en disposición de conocer el tensor constitutivo tangente a partir de la ecuación (A3.102):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{ep} = & \mathcal{A}_o \boldsymbol{\Lambda}^{trial} + \mathbf{n}^{trial} \otimes \left(-\mathcal{A}_{\hat{\eta}} \mathbf{g}^{-1} + \mathcal{A}_{J_2} \mathbf{J}^{trial} + \mathcal{A}_{\sqrt{J_2}} \tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{A}_{I_1} \mathbf{P}^{trial} \right) - \\ & - \mathcal{B}_o \mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \left(-\mathcal{B}_{\hat{\eta}} \mathbf{g}^{-1} + \mathcal{B}_{J_2} \mathbf{J}^{trial} + \mathcal{B}_{\sqrt{J_2}} \tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{B}_{I_1} \mathbf{P}^{trial} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.108})$$

donde los coeficientes \mathcal{A}_o , $\mathcal{A}_{\hat{\eta}}$, \mathcal{A}_{J_2} , $\mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}$, \mathcal{A}_{I_1} , \mathcal{B}_o , $\mathcal{B}_{\hat{\eta}}$, \mathcal{B}_{J_2} , $\mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathcal{B}_{I_1} coinciden con los definidos en las ecuaciones (A3.103b-j) para el caso general. No obstante, la particularización del modelo se lleva a cabo a través de los coeficientes (A3.120a-t), los cuales están dados por:

$\tilde{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* = A_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{\hat{\eta}\beta}$	$\tilde{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* = C_1 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{1\beta})^{-1} G_{\hat{\eta}\beta}$	(A3.109)
$\tilde{\mathbf{A}}_{J_2}^* = A_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{J_2\beta}$	$\tilde{\mathbf{C}}_{J_2}^* = C_1 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{1\beta})^{-1} G_{J_2\beta}$	
$\tilde{\mathbf{A}}_{\sqrt{J_2}}^* = A_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta}$	$\tilde{\mathbf{C}}_{\sqrt{J_2}}^* = C_1 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{1\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta}$	
$\tilde{\mathbf{A}}_{I_1}^* = A_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{I_1\beta}$	$\tilde{\mathbf{C}}_{I_1}^* = C_1 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{1\beta})^{-1} G_{I_1\beta}$	
$\tilde{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* = B_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{\hat{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^*$	$\tilde{\mathbf{K}}_{\hat{\eta}}^* = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{01\beta})^{-1} G_{\hat{\eta}\beta}$	
$\tilde{\mathbf{B}}_{J_2}^* = B_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{J_2\beta}$	$\tilde{\mathbf{K}}_{J_2}^* = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{01\beta})^{-1} G_{J_2\beta}$	
$\tilde{\mathbf{B}}_{\sqrt{J_2}}^* = B_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta}$	$\tilde{\mathbf{K}}_{\sqrt{J_2}}^* = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{01\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta}$	
$\tilde{\mathbf{B}}_{I_1}^* = B_2 \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{2\beta})^{-1} G_{I_1\beta}$	$\tilde{\mathbf{K}}_{I_1}^* = \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} (G_{01\beta})^{-1} G_{I_1\beta}$	

y en el que $\tilde{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* = \tilde{\mathbf{D}}_{J_2}^* = \tilde{\mathbf{D}}_{\sqrt{J_2}}^* = \tilde{\mathbf{D}}_{I_1}^* = 0$.

A3.5 Tensor constitutivo tangente. Modelo viscoplástico.

En este apartado, se calcula el tensor constitutivo tangente del modelo viscoplástico, el cual se obtiene corrigiendo los coeficientes definidos en las ecuaciones (A3.103a-j). Sin embargo, las correcciones realizadas son independientes de la particularizaciones que se realicen sobre el modelo plástico, por lo que estas correcciones tienen carácter general.

En el modelo viscoplástico, el tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ se puede escribir en función de los invariantes tensionales como:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\zeta_1^{n+1} I_1^{trial} + \zeta_2^{n+1} \bar{I}_1^{n+1} \right) \mathbf{g}^{-1} + \sqrt{2} \left(\zeta_3^{n+1} J_2^{trial} + \zeta_4^{n+1} \bar{J}_2^{n+1} \right) \mathbf{n}_{n+1}^{trial} \quad (\text{A3.110})$$

donde \bar{I}_1^{n+1} y \bar{J}_2^{n+1} son los invariantes tensionales de la solución inviscida, y los coeficientes ζ_1^{n+1} , ζ_2^{n+1} , ζ_3^{n+1} y ζ_4^{n+1} están dados por:

$$\zeta_1^{n+1} = \zeta_3^{n+1} = 1 - \vartheta_{n+1} \quad (\text{A3.111a})$$

$$\zeta_2^{n+1} = \zeta_4^{n+1} = \vartheta_{n+1} \quad (\text{A3.111b})$$

siendo $\vartheta_{n+1} \in [0, 1]$ un parámetro adimensional definido como:

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\tau(\hat{\eta}_{n+1})}{\Delta t_{n+1}}} \quad (\text{A3.112})$$

La dependencia de los coeficientes ζ_1^{n+1} , ζ_2^{n+1} , ζ_3^{n+1} y ζ_4^{n+1} respecto a la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$ hace que la derivada de estos coeficientes no sea nula. En concreto, esta derivada se calcula como:

$$d\zeta_i^{n+1} = \zeta_i'(\hat{\eta}_{n+1}) d\hat{\eta}_{n+1} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{A3.113})$$

siendo las derivadas $\zeta_i'(\hat{\eta}_{n+1})$:

$$\zeta_1'(\hat{\eta}_{n+1}) = \zeta_3'(\hat{\eta}_{n+1}) = -\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial \hat{\eta}_{n+1}} = -\frac{\tau'(\hat{\eta}_{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \vartheta_{n+1}^2 \quad (\text{A3.114a})$$

$$\zeta_2'(\hat{\eta}_{n+1}) = \zeta_4'(\hat{\eta}_{n+1}) = \frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial \hat{\eta}_{n+1}} = \frac{\tau'(\hat{\eta}_{n+1})}{\Delta t_{n+1}} \vartheta_{n+1}^2 \quad (\text{A3.114b})$$

en el que la evolución del tiempo de relajación τ en función de la variable de endurecimiento $\hat{\eta}_{n+1}$ se supone conocido.

Por otro lado, derivando la ecuación (A3.110) se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} = & \frac{1}{3} \left(d\zeta_1 I_1^{trial} + d\zeta_2 \bar{I}_1 \right)_{n+1} \mathbf{g}^{-1} + \sqrt{2} \left(d\zeta_3 \sqrt{J_2^{trial}} + d\zeta_4 \sqrt{\bar{J}_2} \right)_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{trial} + \\ & + \frac{1}{3} \left(\zeta_1 dI_1^{trial} + \zeta_2 d\bar{I}_1 \right)_{n+1} \mathbf{g}^{-1} + \sqrt{2} \left(\zeta_3 \sqrt{dJ_2^{trial}} + \zeta_4 \sqrt{d\bar{J}_2} \right)_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{trial} + \\ & + \frac{1}{3} \left(\zeta_1 I_1^{trial} + \zeta_2 \bar{I}_1 \right)_{n+1} d\mathbf{g}^{-1} + \sqrt{2} \left(\zeta_3 \sqrt{J_2^{trial}} + \zeta_4 \sqrt{\bar{J}_2} \right)_{n+1} d\mathbf{n}_{n+1}^{trial} \end{aligned} \quad (\text{A3.115})$$

Desarrollando esta ecuación y haciendo uso de las ecuaciones (A3.64), (A3.67), (A3.55), (A3.74), (A3.81), (A3.100a), (A3.100b), (A3.101) y (A3.113) se obtiene el tensor constitutivo tangente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1}^{ep} = & \mathcal{A}_o^{vp^{n+1}} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{trial} + \mathbf{n}_{n+1}^{trial} \otimes \left(-\mathcal{A}_{\hat{\eta}}^{vp} \mathbf{g}^{-1} + \mathcal{A}_{J_2}^{vp} \mathbf{J}^{trial} + \mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}^{vp} \tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{A}_{I_1}^{vp} \mathbf{P}^{trial} \right)_{n+1} - \\ & - \mathcal{B}_o^{vp^{n+1}} \mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \left(-\mathcal{B}_{\hat{\eta}}^{vp} \mathbf{g}^{-1} + \mathcal{B}_{J_2}^{vp} \mathbf{J}^{trial} + \mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}^{vp} \tilde{\mathbf{J}}^{trial} + \mathcal{B}_{I_1}^{vp} \mathbf{P}^{trial} \right)_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A3.116})$$

donde las correcciones sobre el modelo plástico se llevan a cabo a través de los coeficientes $\mathcal{A}_o^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{A}_{\hat{\eta}}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{A}_{J_2}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{A}_{I_1}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{B}_o^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{B}_{\hat{\eta}}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{B}_{J_2}^{vp^{n+1}}$, $\mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}^{vp^{n+1}}$ y $\mathcal{B}_{I_1}^{vp^{n+1}}$:

$$\mathcal{A}_o^{vp^{n+1}} = \zeta_3^{n+1} + \zeta_4^{n+1} \mathcal{A}_o^{n+1} \quad (\text{A3.117a})$$

$$\mathcal{A}_{\hat{\eta}}^{vp^{n+1}} = \zeta_4^{n+1} \mathcal{A}_{\hat{\eta}}^{n+1} - \sqrt{2} H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \left(\zeta_3' \sqrt{J_2^{trial}} + \zeta_4' \sqrt{J_2} \right)_{n+1} \quad (\text{A3.117b})$$

$$\mathcal{A}_{J_2}^{vp^{n+1}} = \zeta_4^{n+1} \mathcal{A}_{J_2}^{n+1} \quad (\text{A3.117c})$$

$$\mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}^{vp^{n+1}} = \zeta_4^{n+1} \mathcal{A}_{\sqrt{J_2}}^{n+1} \quad (\text{A3.117d})$$

$$\mathcal{A}_{I_1}^{vp^{n+1}} = \zeta_4^{n+1} \mathcal{A}_{I_1}^{n+1} \quad (\text{A3.117e})$$

$$\mathcal{B}_o^{vp^{n+1}} = \zeta_2^{n+1} \mathcal{B}_o^{n+1} - \frac{2}{3} \zeta_1^{n+1} I_{1n+1}^{trial} \quad (\text{A3.117f})$$

$$\mathcal{B}_{\hat{\eta}}^{vp^{n+1}} = \zeta_2^{n+1} \mathcal{B}_{\hat{\eta}}^{n+1} - \frac{1}{3} H_{\hat{\eta}_n}(\eta_{n+1}) \eta_{n+1} \left(\zeta_1' I_1^{trial} + \zeta_2' \bar{I}_1 \right)_{n+1} \quad (\text{A3.117g})$$

$$\mathcal{B}_{J_2}^{vp^{n+1}} = \zeta_2^{n+1} \mathcal{B}_{J_2}^{n+1} \quad (\text{A3.117h})$$

$$\mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}^{vp^{n+1}} = \zeta_2^{n+1} \mathcal{B}_{\sqrt{J_2}}^{n+1} \quad (\text{A3.117i})$$

$$\mathcal{B}_{I_1}^{vp^{n+1}} = \zeta_2^{n+1} \mathcal{B}_{I_1}^{n+1} + \frac{1}{3} \zeta_1^{n+1} \quad (\text{A3.117j})$$

A3.6 Definiciones.

Definición de los parámetros $\widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^*$, $\widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^*$, $\widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^*$, $\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^*$ y $\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^*$.³

$$\widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* = \bar{\alpha}_1 \frac{\partial A_1}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \bar{\alpha}_2 \frac{\partial A_2}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.118a})$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* = \bar{\beta}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.118b})$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* = \bar{\alpha}_1 \frac{\partial C_1}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \bar{\alpha}_2 \frac{\partial C_2}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.118c})$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* = \bar{\beta}_1 \frac{\partial D_1}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \frac{\partial D_2}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.118d})$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* = \bar{\beta}_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \hat{\eta}} K_1 + B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_1 + \bar{\beta}_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} K_2 + B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.118e})$$

Definición de los vectores $\mathbf{P}_{\hat{\eta}}$, \mathbf{P}_{J_2} , $\mathbf{P}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathbf{P}_{I_1} :

$$\mathbf{P}_{J_2} = \alpha^2 \widehat{\mathbf{A}} \quad (\text{A3.119a})$$

$$\mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} = \alpha \left[\widehat{\mathbf{C}} - 2\mu\alpha \widehat{\mathbf{A}} (\bar{\alpha}_1 C_1 \Delta \lambda_1 + \bar{\alpha}_2 C_2 \Delta \lambda_2) \right] \quad (\text{A3.119b})$$

$$\mathbf{P}_{I_1} = \beta \left(2\widehat{\mathbf{B}} I_1 + \widehat{\mathbf{D}} + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 \right) \quad (\text{A3.119c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\eta}} = & \left(\bar{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}} - 4\mu\alpha \widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* \right) J_2^{n+1} + \left(\bar{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}} - 36k\beta \widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* \right) (I_1)^2 - \mu\alpha \widehat{\mathbf{C}} \otimes \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* + \\ & + \left(\bar{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}} - 2\mu\alpha \left(\widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{C}} \otimes \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* \right) \right) \sqrt{J_2} - 9k\beta \left(\widehat{\mathbf{D}} + 2\widehat{\mathbf{K}}_1 \right) \otimes \left(\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + 2\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) + \\ & + \left[2\bar{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}} - \bar{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}} - 18k\beta \left(2 \left(\widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* \right) + \widehat{\mathbf{B}} \otimes \widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{D}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* \right) \right] I_1 + \\ & + \left(\bar{\mathbf{K}}_{21\hat{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}_{22\hat{\eta}} \right) + \bar{\mathbf{H}}_{\hat{\eta}} - \bar{\mathbf{Y}}_{\hat{\eta}} - \bar{\mathbf{T}}_{\hat{\eta}} \end{aligned} \quad (\text{A3.119d})$$

³Por simplicidad en la notación, y salvo indicación expresa, en esta sección se suprimirá la referencia al instante t_{n+1} .

Definición de los parámetros $\bar{A}_{\hat{\eta}}$, $\bar{B}_{\hat{\eta}}$, $\bar{C}_{\hat{\eta}}$, $\bar{D}_{\hat{\eta}}$, $\bar{K}_{1\hat{\eta}}$, $\bar{K}_{2\hat{\eta}}$, $\bar{H}_{\hat{\eta}}$, $\bar{Y}_{\hat{\eta}}$ Y $\bar{T}_{\hat{\eta}}$:

$$\bar{A}_{\hat{\eta}} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 A_2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120a})$$

$$\bar{B}_{\hat{\eta}} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 B_2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120b})$$

$$\bar{C}_{\hat{\eta}} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 C_2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120c})$$

$$\bar{D}_{\hat{\eta}} = \frac{\partial^2 D_1}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 D_2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120d})$$

$$\bar{K}_{1\hat{\eta}} = \sum_{\gamma=1,2} \left(\frac{\partial^2 B_{\gamma}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} K_{\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_{\gamma}}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial K_{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \hat{\eta}} + B_{\gamma} \frac{\partial^2 K_{\gamma}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_{\gamma} \quad (\text{A3.120e})$$

$$\bar{K}_{21\hat{\eta}} = 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_1}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_2}{\partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120f})$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{22\hat{\eta}} = \sum_{\gamma=1,2} K_{\gamma} \left(\frac{\partial^2 B_{\gamma}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} K_{\gamma} + 2 \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial K_{\gamma}}{\partial \hat{\eta}} + 2 \frac{\partial K_{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \hat{\eta}} \right. \\ \left. + 2B_{\gamma} \frac{\partial^2 K_{\gamma}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A3.120g})$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\hat{\eta}} = - \left(\frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} D_1 + \frac{\partial A_{01}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial D_1}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial A_{01}}{\partial \hat{\eta}} + A_{01} \frac{\partial^2 D_1}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_1 + \\ + \left(\frac{\partial^2 A_{02}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} D_2 + \frac{\partial A_{02}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial D_2}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial D_2}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial A_{02}}{\partial \hat{\eta}} + A_{02} \frac{\partial^2 D_2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \right) \Delta \lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.120h})$$

$$\bar{Y}_{\hat{\eta}} = \frac{\partial^2 Y_1^2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial^2 Y_2^2}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120i})$$

$$\bar{T}_{\hat{\eta}} = \theta_1 \frac{\partial^2 A_{01}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_1 + \theta_2 \frac{\partial^2 A_{02}}{\partial \mathbf{q} \partial \hat{\eta}} \Delta \lambda_2 \quad (\text{A3.120j})$$

Definición de los parámetros $G_{01\gamma}$ para $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$ correspondientes a la superficie 01:

$$G_{0101} = -9k\beta\theta_1^2 - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{01} \quad (\text{A3.121a})$$

$$G_{011} = -9k\beta\bar{\beta}_1\theta_1(2B_1(I_1 + K_1) + D_1) - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_1 \quad (\text{A3.121b})$$

$$G_{012} = -9k\beta\bar{\beta}_2\theta_1(2B_2(I_1 + K_2) + D_2) - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_2 \quad (\text{A3.121c})$$

$$G_{0102} = 9k\beta\theta_1\theta_2 - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{02} \quad (\text{A3.121d})$$

Definición de los parámetros $G_{\widehat{\eta}01}$, G_{J_201} , $G_{\sqrt{J_2}01}$ y G_{I_101} correspondientes a la superficie 01:

$$G_{\widehat{\eta}01} = -\theta_1 \left[9k\beta \left(2\widehat{\mathbf{B}}_{\widehat{\eta}}^* I_1 + 2\widehat{\mathbf{K}}_{1\widehat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{D}}_{\widehat{\eta}}^* \right) + \frac{\partial A_{01}}{\partial \widehat{\eta}} \right] - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\widehat{\eta}} \quad (\text{A3.122a})$$

$$G_{J_201} = -\mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{J_2} \quad (\text{A3.122b})$$

$$G_{\sqrt{J_2}01} = -\mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.122c})$$

$$G_{I_101} = \beta\theta_1 - \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{I_1} \quad (\text{A3.122d})$$

Definición de los parámetros $G_{02\gamma}$ para $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$ correspondientes a la superficie 02:

$$G_{0201} = 9k\beta\theta_1\theta_2 - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{01} \quad (\text{A3.123a})$$

$$G_{021} = 9k\beta\bar{\beta}_1\theta_2[2B_1(I_1 + K_1) + D_1] - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_1 \quad (\text{A3.123b})$$

$$G_{022} = 9k\beta\bar{\beta}_2\theta_2[2B_2(I_1 + K_2) + D_2] - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_2 \quad (\text{A3.123c})$$

$$G_{0202} = -9k\beta\theta_2^2 - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{02} \quad (\text{A3.123d})$$

Definición de los parámetros $G_{\widehat{\eta}02}$, G_{J_202} , $G_{\sqrt{J_2}02}$ y G_{I_102} correspondientes a la superficie 02:

$$G_{\widehat{\eta}02} = \theta_2 \left[9k\beta \left(2\widehat{\mathbf{B}}_{\widehat{\eta}}^* I_1 + 2\widehat{\mathbf{K}}_{1\widehat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{D}}_{\widehat{\eta}}^* \right) - \frac{\partial A_{02}}{\partial \widehat{\eta}} \right] - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\widehat{\eta}} \quad (\text{A3.124a})$$

$$G_{J_202} = -\mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{J_2} \quad (\text{A3.124b})$$

$$G_{\sqrt{J_2}02} = -\mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.124c})$$

$$G_{I_102} = -\beta\theta_2 - \mathbf{P}_{02} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{I_1} \quad (\text{A3.124d})$$

De la forma como se ha definido la condición de fluencia, las superficies ϕ_{01} y ϕ_{02} no pueden estar activas simultáneamente, lo cual significa que los coeficientes G_{0101} y G_{0202} pueden considerarse nulos a pesar de haberlos definido en las expresiones (A3.121a) y (A3.123d) respectivamente.

Definición de los parámetros $G_{1\gamma}$ para $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$ correspondientes a la superficie 1:

$$G_{101} = -9k\beta\theta_1 [2B_1 (I_1 + K_1) + D_1] - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{01} \quad (\text{A3.125a})$$

$$\begin{aligned} G_{111} = & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_1 A_1^2 J_2 - 36k\beta\bar{\beta}_1 B_1^2 (I_1)^2 - 36k\beta\bar{\beta}_1 B_1 (2B_1 K_1 + D_1) I_1 - \\ & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_1 A_1 C_1 \sqrt{J_2} - \mu\alpha\bar{\alpha}_1 C_1^2 - 9k\beta\bar{\beta}_1 (2B_1 K_1 + D_1)^2 - \\ & - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_1 \end{aligned} \quad (\text{A3.125b})$$

$$\begin{aligned} G_{112} = & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_2 A_1 A_2 J_2 - 36k\beta\bar{\beta}_2 B_1 B_2 (I_1)^2 - 2\mu\alpha\bar{\alpha}_2 (A_1 C_2 + A_2 C_1) \sqrt{J_2} - \\ & -18k\beta\bar{\beta}_2 [B_1 (2B_2 K_2 + D_2) + B_2 (2B_1 K_1 + D_1)] I_1 - \mu\alpha\bar{\alpha}_2 C_1 C_2 - \\ & -9k\beta\bar{\beta}_2 (2B_1 K_1 + D_1) (2B_2 K_2 + D_2) - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.125c})$$

$$G_{102} = 9k\beta\theta_2 [2B_1 (I_1 + K_1) + D_1] - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{02} \quad (\text{A3.125d})$$

Definición de los parámetros $G_{\hat{\eta}1}$, $G_{J_2 1}$, $G_{\sqrt{J_2} 1}$ y $G_{I_1 1}$ correspondientes a la superficie 1:

$$\begin{aligned} G_{\hat{\eta}1} = & \left(\frac{\partial A_1}{\partial \hat{\eta}} - 4\mu\alpha A_1 \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* \right) J_2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \hat{\eta}} - 36k\beta B_1 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* \right) (I_1)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial C_1}{\partial \hat{\eta}} - 2\mu\alpha (A_1 \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* + C_1 \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^*) \right) \sqrt{J_2} + K_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \hat{\eta}} K_1 + 2B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \hat{\eta}} \right) - \\ & - 9k\beta (2B_1 K_1 + D_1) \left(\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + 2\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) + \left[2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \hat{\eta}} K_1 + B_1 \frac{\partial K_1}{\partial \hat{\eta}} \right) + \frac{\partial D_1}{\partial \hat{\eta}} - \right. \\ & \left. - 18k\beta \left(D_1 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* + B_1 \widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + 2B_1 \left(K_1 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) \right) \right] I_1 - \mu\alpha C_1 \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* - \\ & - \frac{\partial Y_1^2}{\partial \hat{\eta}} - \left(\frac{\partial D_1}{\partial \hat{\eta}} A_{01} + D_1 \frac{\partial A_{01}}{\partial \hat{\eta}} \right) - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\hat{\eta}} \end{aligned} \quad (\text{A3.126a})$$

$$G_{J_2 1} = \alpha^2 A_1 - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{J_2} \quad (\text{A3.126b})$$

$$G_{\sqrt{J_2} 1} = \alpha \left(C_1 - 2\mu\alpha A_1 \sum_{\gamma \in \{1,2\}} \bar{\alpha}_\gamma C_\gamma \Delta \lambda_\gamma \right) - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.126c})$$

$$G_{I_1 1} = \beta [2B_1 (I_1 + K_1) + D_1] - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{I_1} \quad (\text{A3.126d})$$

Definición de los parámetros $G_{2\gamma}$ para $\gamma \in \mathbb{J}_{act}$ correspondientes a la superficie 2:

$$G_{201} = -9k\beta\theta_1 [2B_2 (I_1 + K_2) + D_2] - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{01} \quad (\text{A3.127a})$$

$$\begin{aligned} G_{21} = & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_1 A_1 A_2 J_2 - 36k\beta\bar{\beta}_1 B_1 B_2 (I_1)^2 - 2\mu\alpha\bar{\alpha}_1 (A_1 C_2 + A_2 C_1) \sqrt{J_2} - \\ & -18k\beta\bar{\beta}_1 [B_1 (2B_2 K_2 + D_2) + B_2 (2B_1 K_1 + D_1)] I_1 - \mu\alpha\bar{\alpha}_1 C_1 C_2 - \\ & -9k\beta\bar{\beta}_1 (2B_1 K_1 + D_1) (2B_2 K_2 + D_2) - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_1 \end{aligned} \quad (\text{A3.127b})$$

$$\begin{aligned} G_{22} = & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_2 A_2^2 J_2 - 36k\beta\bar{\beta}_2 B_2^2 (I_1)^2 - 36k\beta\bar{\beta}_2 B_2 (2B_2 K_2 + D_2) I_1 - \\ & -4\mu\alpha\bar{\alpha}_2 A_2 C_2 \sqrt{J_2} - \mu\alpha\bar{\alpha}_2 C_2^2 - 9k\beta\bar{\beta}_2 (2B_2 K_2 + D_2)^2 - \\ & - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.127c})$$

$$G_{202} = 9k\beta\theta_2 [2B_2 (I_1 + K_2) + D_2] - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{02} \quad (\text{A3.127d})$$

Definición de los parámetros $G_{\hat{\eta}2}$, $G_{J_2 2}$, $G_{\sqrt{J_2} 2}$ y $G_{I_1 2}$ correspondientes a la superficie 2:

$$\begin{aligned} G_{\hat{\eta}2} = & \left(\frac{\partial A_2}{\partial \hat{\eta}} - 4\mu\alpha A_2 \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^* \right) J_2 + \left(\frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} - 36k\beta B_2 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* \right) (I_1)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial C_2}{\partial \hat{\eta}} - 2\mu\alpha (A_2 \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* + C_2 \widehat{\mathbf{A}}_{\hat{\eta}}^*) \right) \sqrt{J_2} + K_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} K_2 + 2B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \hat{\eta}} \right) - \\ & - 9k\beta (2B_2 K_2 + D_2) \left(\widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + 2\widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) + \left[\frac{\partial D_2}{\partial \hat{\eta}} + 2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial \hat{\eta}} K_2 + B_2 \frac{\partial K_2}{\partial \hat{\eta}} \right) - \right. \\ & \left. - 18k\beta \left(D_2 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* + B_2 \widehat{\mathbf{D}}_{\hat{\eta}}^* + 2B_2 \left(K_2 \widehat{\mathbf{B}}_{\hat{\eta}}^* + \widehat{\mathbf{K}}_{1\hat{\eta}}^* \right) \right) \right] I_1 - \mu\alpha C_2 \widehat{\mathbf{C}}_{\hat{\eta}}^* - \\ & - \frac{\partial Y_2^2}{\partial \hat{\eta}} - \left(\frac{\partial D_2}{\partial \hat{\eta}} A_{02} + D_2 \frac{\partial A_{02}}{\partial \hat{\eta}} \right) - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\hat{\eta}} \end{aligned} \quad (\text{A3.128a})$$

$$G_{J_2 2} = \alpha^2 A_2 - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{J_2} \quad (\text{A3.128b})$$

$$G_{\sqrt{J_2} 2} = \alpha \left(C_2 - 2\mu\alpha A_2 \sum_{\gamma \in \{1,2\}} \bar{\alpha}_\gamma C_\gamma \Delta \lambda_\gamma \right) - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.128c})$$

$$G_{I_1 2} = \beta [2B_2 (I_1 + K_2) + D_2] - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{P}_{I_1} \quad (\text{A3.128d})$$

Definición de los parámetros $\mathbf{H}_{\hat{\eta}}$, \mathbf{H}_{J_2} , $\mathbf{H}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathbf{H}_{I_1} :

$$\mathbf{H}_{\hat{\eta}} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\sum_{\gamma, \beta \in \mathbf{J}_{act}} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\hat{\eta}\beta} \mathbf{P}_{\gamma} - \mathbf{P}_{\hat{\eta}} \right) \quad (\text{A3.129a})$$

$$\mathbf{H}_{J_2} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\sum_{\gamma, \beta \in \mathbf{J}_{act}} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{J_2\beta} \mathbf{P}_{\gamma} - \mathbf{P}_{J_2} \right) \quad (\text{A3.129b})$$

$$\mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\sum_{\gamma, \beta \in \mathbf{J}_{act}^{n+1}} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} \mathbf{P}_{\gamma} - \mathbf{P}_{\sqrt{J_2}} \right) \quad (\text{A3.129c})$$

$$\mathbf{H}_{I_1} = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{K}}''(\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\sum_{\gamma, \beta \in \mathbf{J}_{act}^{n+1}} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} \mathbf{P}_{\gamma} - \mathbf{P}_{I_1} \right) \quad (\text{A3.129d})$$

Definición de los coeficientes $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\tilde{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\eta}}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{J_2}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{K}}_{\sqrt{J_2}}^*$, $\tilde{\mathbf{A}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{B}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}_{I_1}^*$, $\tilde{\mathbf{D}}_{I_1}^*$ y $\tilde{\mathbf{K}}_{I_1}^*$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{\eta}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\tilde{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \mathbf{H}_{\tilde{\eta}} - \hat{\mathbf{A}}_{\tilde{\eta}}^* \quad (\text{A3.130a})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{J_2}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{J_2\beta} - \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \mathbf{H}_{J_2} \quad (\text{A3.130b})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\sqrt{J_2}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} - \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.130c})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{I_1}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} A_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} - \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \mathbf{H}_{I_1} \quad (\text{A3.130d})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\tilde{\eta}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\tilde{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{B}}^* \cdot \mathbf{H}_{\tilde{\eta}} - \hat{\mathbf{B}}_{\tilde{\eta}}^* \quad (\text{A3.130e})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{J_2}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{J_2\beta} - \hat{\mathbf{B}}^* \cdot \mathbf{H}_{J_2} \quad (\text{A3.130f})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\sqrt{J_2}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} - \hat{\mathbf{B}}^* \cdot \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.130g})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{I_1}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} - \hat{\mathbf{B}}^* \cdot \mathbf{H}_{I_1} \quad (\text{A3.130h})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\tilde{\eta}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\tilde{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{H}_{\tilde{\eta}} - \hat{\mathbf{C}}_{\tilde{\eta}}^* \quad (\text{A3.130i})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{J_2}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{J_2\beta} - \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{H}_{J_2} \quad (\text{A3.130j})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\sqrt{J_2}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} - \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.130k})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{I_1}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\alpha}_{\gamma} C_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} - \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \mathbf{H}_{I_1} \quad (\text{A3.130l})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\eta}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} D_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\tilde{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{H}_{\tilde{\eta}} - \hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\eta}}^* \quad (\text{A3.130m})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{J_2}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} D_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{J_2\beta} - \hat{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{H}_{J_2} \quad (\text{A3.130n})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\sqrt{J_2}}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} D_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} - \hat{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \quad (\text{A3.130o})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{I_1}^* = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} D_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} - \hat{\mathbf{D}}^* \cdot \mathbf{H}_{I_1} \quad (\text{A3.130p})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\eta}}^* &= 2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_{\gamma} B_{\gamma} K_{\gamma} (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\tilde{\eta}\beta} - \hat{\mathbf{K}}_1^* \cdot \mathbf{H}_{\tilde{\eta}} - \hat{\mathbf{K}}_{1\tilde{\eta}}^* \right) + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \left(\theta_1 (G_{01\beta})^{-1} - \theta_2 (G_{02\beta})^{-1} \right) G_{\tilde{\eta}\beta} \end{aligned} \quad (\text{A3.130q})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{J_2}^* &= 2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_\gamma B_\gamma K_\gamma \left((G_{\gamma\beta})^{-1} \right)^{-1} G_{J_2\beta} - \hat{\mathbf{K}}_1^* \cdot \mathbf{H}_{J_2} \right) + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \left(\theta_1 (G_{01\beta})^{-1} - \theta_2 (G_{02\beta})^{-1} \right) G_{J_2\beta} \end{aligned} \quad (\text{A3.130r})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\sqrt{J_2}}^* &= 2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_\gamma B_\gamma K_\gamma (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{\sqrt{J_2}\beta} - \hat{\mathbf{K}}_1^* \cdot \mathbf{H}_{\sqrt{J_2}} \right) + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \left(\theta_1 (G_{01\beta})^{-1} - \theta_2 (G_{02\beta})^{-1} \right) G_{\sqrt{J_2}\beta} \end{aligned} \quad (\text{A3.130s})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{I_1}^* &= 2 \left(\sum_{\gamma=1,2} \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \bar{\beta}_\gamma B_\gamma K_\gamma (G_{\gamma\beta})^{-1} G_{I_1\beta} - \hat{\mathbf{K}}_1^* \cdot \mathbf{H}_{I_1} \right) + \\ &+ \sum_{\beta \in \mathbb{J}_{act}} \left(\theta_1 (G_{01\beta})^{-1} - \theta_2 (G_{02\beta})^{-1} \right) G_{I_1\beta} \end{aligned} \quad (\text{A3.130t})$$

donde los coeficientes $\hat{\mathbf{A}}^*$, $\hat{\mathbf{B}}^*$, $\hat{\mathbf{C}}^*$, $\hat{\mathbf{D}}^*$, $\hat{\mathbf{K}}_1^*$ se definieron en las ecuaciones (A2.42a-e) del anexo A2. Los coeficientes $G_{\gamma\beta}$, $G_{\tilde{\eta}\beta}$, $G_{J_2\beta}$, $G_{\sqrt{J_2}\beta}$ y $G_{I_1\beta}$ están definidos en las ecuaciones (A3.121a-d), (A3.122a-d), (A3.125a-d), (A3.126a-d), (A3.127a-d), (A3.128a-d), (A3.123a-d) y (A3.124a-d). Y los coeficientes $\mathbf{H}_{\tilde{\eta}}$, \mathbf{H}_{J_2} , $\mathbf{H}_{\sqrt{J_2}}$ y \mathbf{H}_{I_1} están definidos en (A3.129a-d).

Capítulo 4

Discretización por elementos finitos.

El objetivo es conocer el comportamiento del pulvimaterial durante las etapas de transferencia y prensado. A partir de la ecuación de movimiento $\varphi(\mathbf{X}, t)$ es posible conocer cualquier propiedad del medio, por lo que su determinación equivale a conocer como se comporta el pulvimaterial durante la compactación. Por tanto, el problema se reduce a determinar la ecuación de movimiento φ que verifique la ecuación constitutiva (presentada en el capítulo 3) y la ecuación de equilibrio junto con las condiciones de contorno (las cuales serán presentadas en este capítulo).

Una vez planteadas las ecuaciones del problema se procede a su resolución numérica. Para ello, debido a la no linealidad de las ecuaciones su resolución se lleva a cabo de forma incremental, por lo que el problema se reduce a determinar la ecuación de movimiento $\varphi_{n+1}(\mathbf{X})$ en una secuencia de instantes t_{n+1} . En particular, conocida la solución en el instante de tiempo t_n , la determinación de la ecuación de movimiento φ se realiza siguiendo un esquema implícito en el que se resuelven las ecuaciones por el método de los elementos finitos en el instante t_{n+1} .

El punto de partida para la resolución numérica por el método de los elementos finitos es la formulación débil del problema. En primer lugar se presenta la discretización de la forma débil por el método de Galerkin. Es una metodología convencional que funciona bien en la mayoría de los casos, ya que describe correctamente el comportamiento de sólidos compresibles como los pulvimateriales. De hecho, la característica principal de los materiales pulverulentos es su compresibilidad. Sin embargo, existen determinadas situaciones en las que se pretende reproducir procesos incompresibles que pueden degenerar en problemas numéricos, por lo que también se presenta una formulación mixta del problema.

Finalmente, se presenta la linealización de la forma débil del problema y se deducen los términos que integran la matriz de rigidez del problema discreto.

4.1 Formulación de Galerkin.

4.1.1 Formulación continua.

La resolución del problema consiste en determinar la ecuación de movimiento $\varphi(\mathbf{X}, t)$ que, además de satisfacer localmente la ecuación constitutiva presentada en el capítulo 3, verifique las ecuaciones de equilibrio junto con las condiciones de contorno.

Continuando con la notación del capítulo 3, $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t)$ representa el cuerpo deformable en el instante t . Por otro lado, la frontera del cuerpo Ω_t se denota como $\partial\Omega_t$. Dependiendo de la condición de contorno impuesta, la frontera se subdivide en dos tipos diferentes. Así $\partial_\tau\Omega_t \subset \partial\Omega_t$ denota la porción de frontera sobre la que prescribe el vector de tensiones (condición de Neumann) y $\partial_\varphi\Omega_t \subset \partial\Omega_t$ denota la porción de frontera sobre la que se impone la ecuación de movimiento (condición de Dirichlet). Por otro lado, se asume que $\partial_\tau\Omega_t \cap \partial_\varphi\Omega_t = \emptyset$ y que $\overline{\partial_\tau\Omega_t} \cup \overline{\partial_\varphi\Omega_t} = \overline{\partial\Omega_t}$.

El primer paso en la resolución del problema por el método de los elementos finitos es plantear la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno en su forma débil. Por otro lado, la ecuación de equilibrio se plantea para el caso cuasi-estático puesto que las aceleraciones que sufre el cuerpo durante las fases de transferencia y de prensado son despreciables. Representando a $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ como el campo de fuerzas volumétricas aplicadas sobre el cuerpo Ω_t , la formulación local de la ecuación de equilibrio y de las condiciones de contorno planteadas en la configuración espacial en el instante t están dadas por las expresiones[111][34]:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_t \quad (4.1a)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_\tau\Omega_t \quad (4.1b)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \bar{\varphi} \quad \text{en } \partial_\varphi\Omega_t \quad (4.1c)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal al contorno $\partial\Omega_t$ en sentido saliente, $\bar{\mathbf{t}}$ es el vector de tensiones impuesto en la región del contorno $\partial_\tau\Omega_t$ y $\bar{\varphi}$ es el valor de la ecuación de movimiento sobre la región del contorno $\partial_\varphi\Omega_t$. Alternativamente, las ecuaciones (4.1a-c) pueden plantearse en la configuración material como:

$$\operatorname{DIV}(\mathbf{P}) + \rho_0 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_\tau\Omega_0 \quad (4.2b)$$

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \bar{\varphi} \quad \text{en } \partial_\varphi\Omega_0 \quad (4.2c)$$

donde $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{B}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de fuerzas volumétricas, \mathbf{N} es el vector unitario normal al contorno en la configuración de referencia $\partial\Omega_0$ (ver figura 4.2), el cual se describe como $\partial\Omega_0(\mathbf{X}) = \partial\Omega(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)) = \partial\Omega_t(\mathbf{x})$.

Antes de plantear la formulación débil de la ecuación de equilibrio, conviene realizar algunas definiciones previas. A partir de la condición de contorno de Dirichlet formulada en la configuración de referencia Ω_0 (4.2c), se define el espacio de

configuraciones espaciales \mathcal{C} como [100][104]:

$$\mathcal{C} = \left\{ \varphi \in [H^1(\Omega_0)]^{n_{\text{dim}}} \mid \det(\text{GRAD}(\varphi)) > 0 \text{ y } \varphi|_{\partial_\varphi \Omega_0} = \bar{\varphi} \right\} \quad (4.3)$$

Adicionalmente, se define el espacio de funciones de prueba \mathcal{V} como el conjunto de desplazamientos independientes del tiempo que superpuestos sobre la configuración deformada $\Omega_t = \varphi(\Omega_0, t)$ verifiquen la condición de contorno de Dirichlet en el instante t :

$$\mathcal{V} = \left\{ \eta \in [H^1(\Omega_0)]^{n_{\text{dim}}} \mid \eta(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{X} \in \partial_\varphi \Omega_0 \right\} \quad (4.4)$$

Por definición, los elementos del espacio \mathcal{V} se definen sobre la configuración deformada y pueden ser referenciados en la configuración material o en la configuración espacial. En particular, la ecuación (4.4) referencia a los elementos del espacio \mathcal{V} en la configuración de material. No obstante, haciendo uso de la ecuación de movimiento φ , es posible referenciarlos sobre la configuración espacial Ω_t mediante un cambio de variables.

A partir de las ecuaciones (4.1a-c), la definición (4.4), utilizando el producto interno $L_2(\Omega_0)$ y el teorema de la divergencia, se llega a la forma débil de la ecuación de equilibrio que puede expresarse como la suma de dos términos G^{int} y G^{ext} :

$$G(\varphi, \eta) = G^{\text{int}}(\varphi, \eta) - G^{\text{ext}}(\varphi, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V} \quad (4.5)$$

El término G^{ext} representa el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas constituidas por las fuerzas volumétricas y las fuerzas de contacto:

$$G^{\text{ext}}(\varphi, \eta) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta \, d\Omega + \int_{\partial_r \Omega_0} \bar{\mathbf{t}}(\varphi) \cdot \eta \, d\Gamma \quad (4.6)$$

Mientras que el término G^{int} representa el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas. El integrando de este término es un escalar y, por tanto, no depende de la configuración en la que se represente. Su cálculo en función de las variables espaciales está dado por la expresión:

$$G^{\text{int}}(\varphi, \eta) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau}(\varphi) : \nabla(\eta) \, d\Omega \quad (4.7)$$

Dada la objetividad del integrando de G^{int} respecto a la configuración, una formulación equivalente expresada en términos de las variables materiales viene dada por la expresión:

$$G^{\text{int}}(\varphi, \eta) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\varphi) : \text{GRAD}(\eta) \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\varphi) \cdot \mathbf{S}(\varphi) : \text{GRAD}(\eta) \, d\Omega \quad (4.8)$$

donde el tensor \mathbf{P} y \mathbf{S} representan el primer y segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff respectivamente. Ambos tensores se relacionan como $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$. Por otro lado, el tensor gradiente espacial $\nabla(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{x}}$ se relaciona con el tensor gradiente material $\text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{X}}$ a través del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} :

$$\text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) = \nabla(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{F} \quad (4.9)$$

Una vez aquí, el problema se reduce a encontrar la ecuación de movimiento $\boldsymbol{\varphi}_t \in \mathcal{C}$ que satisfaga la ecuación (4.5). Sin embargo, en este punto aparecen dos opciones. Se debe elegir entre hacer uso de la ecuación (4.7) y, por tanto, plantear el problema en términos de las variables espaciales. O por el contrario, utilizar la ecuación (4.8) y plantear el problema en función de las variables materiales. En principio, declinarse por una u otra opción es indistinto, puesto que no supone diferencias importantes ni la implementación ni en el coste computacional.

4.1.2 Discretización del modelo.

La aproximación por el método de los elementos finitos [119][48] implica realizar una subdivisión del cuerpo en subdominios no solapables. Sea $\Omega_0^h = \cup_{e=1}^{n_e} \Omega_0^{(e)}$ una discretización del cuerpo deformable en la configuración de referencia, en el que n_e es el número de elementos y n_p el número de nodos correspondientes¹. Asociado a esta discretización, se define el espacio \mathcal{C}^h como[100]:

$$\mathcal{C}^h = \left\{ \boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{C} \mid \boldsymbol{\varphi}^h \in [C^0(\Omega_0)]^{n_{\text{dim}}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varphi}^h|_{\Omega_0^{(e)}} \in [P^k(\Omega_0^{(e)})] \right\} \quad (4.10)$$

donde P^k representa el espacio de polinomios completos de orden $k \geq 1$. Por definición, \mathcal{C}^h es un subespacio de dimensión finita del espacio de configuraciones espaciales $\mathcal{C}^h \subset \mathcal{C}$. Adicionalmente, se define $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ como el espacio de las funciones de prueba asociadas al espacio \mathcal{C}^h :

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V} \mid \boldsymbol{\eta}^h \in [C^0(\Omega_0)]^{n_{\text{dim}}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\eta}^h|_{\Omega_0^{(e)}} \in [P^k(\Omega_0^{(e)})] \right\} \quad (4.11)$$

En el instante de tiempo t_{n+1} , esta discretización conduce a una aproximación de la ecuación de movimiento $\boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{C}^h$, la cual se obtiene interpolando el campo de desplazamientos nodales:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \approx \boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=1}^{n_p} N_p(\mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_p^h(t) \quad (4.12)$$

¹Por simplicidad en la notación y salvo mención expresa, en lo que resta de capítulo se suprimirá la referencia al instante de tiempo t_{n+1} .

donde las funciones N_p son las funciones de forma y $\widehat{\varphi}_p^h$ es la ecuación de movimiento correspondiente a los nodos. Por otro lado, según el método de Galerkin, la aproximación de los elementos correspondientes al espacio de funciones de prueba se realiza de forma similar a la ecuación de movimiento (4.12):

$$\eta(\mathbf{X}) \approx \eta^h(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^{n_p} N_p(\mathbf{X}) \widehat{\eta}_p^h \quad (4.13)$$

El gradiente material de las variables φ^h y η^h se calcula a partir de las ecuaciones (4.12) y (4.13) respectivamente, llegando a la expresiones:

$$\text{GRAD}(\varphi^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \text{GRAD}(N_p) \widehat{\varphi}_p^h \quad (4.14)$$

$$\text{GRAD}(\eta^h) = \sum_{p=1}^{n_p} \text{GRAD}(N_p) \widehat{\eta}_p^h \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de movimiento aproximada φ^h pertenece al espacio de configuraciones espaciales $\varphi^h \in \mathcal{C}$ y que el desplazamiento η^h pertenece al espacio de funciones de prueba $\eta^h \in \mathcal{V}$, la discretización de la forma débil de la ecuación (4.5) se obtiene a partir de la ecuación de movimiento φ^h (4.12) y del campo de desplazamientos η^h (4.13). En particular, sustituyendo las ecuaciones (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.12), (4.13) y (4.15) en la ecuación (4.5) se llega la expresión:

$$G(\varphi^h, \eta^h) = \sum_{p=1}^{n_p} [\mathbf{F}_p^{\text{int}}(\varphi^h) - \mathbf{F}_p^{\text{ext}}(\varphi^h)] \cdot \widehat{\eta}_p^h = 0 \quad \forall \widehat{\eta}_p^h \text{ tal que } \widehat{\eta}_p^h|_{\partial_\varphi \Omega_0} = 0 \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{F}_p^{\text{int}}$ y $\mathbf{F}_p^{\text{ext}}$ representan al vector de fuerzas internas y el vector de fuerzas externas que actúan sobre el nodo p en la configuración deformada. El término $\mathbf{F}_p^{\text{ext}}$ se calcula a partir del trabajo virtual de las fuerzas externas (4.6) como:

$$\mathbf{F}_p^{\text{ext}}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} N_p \rho_0 \mathbf{B} d\Omega + \int_{\partial_\tau \Omega_0} N_p \bar{\mathbf{t}}(\varphi^h) d\Gamma \quad (4.17)$$

Sin embargo, al igual que sucedía para el trabajo virtual de las fuerzas internas G^{int} , el vector de fuerzas internas $\mathbf{F}_p^{\text{int}}$ se puede calcular en términos de las variables materiales o en términos de las variables espaciales. Usando las expresiones (4.7), (4.9) y (4.15) se obtiene el vector $\mathbf{F}_p^{\text{int}}$ en función de las variables espaciales:

$$\mathbf{F}_p^{\text{int}}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau}(\varphi^h) \cdot \nabla N_p d\Omega \quad (4.18)$$

Análogamente, combinando las ecuaciones (4.8) y (4.15) se obtiene el vector \mathbf{F}_p^{int} en función de las variables materiales:

$$\mathbf{F}_p^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h) = \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^h) \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^h) : \text{GRAD}(N_p) d\Omega \quad (4.19)$$

No obstante, las ecuaciones (4.18) y (4.19) no corresponden a la forma espacial y material del vector de fuerzas internas. En realidad se trata de dos modos distintos de calcular el mismo vector. Físicamente, el vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} representa la fuerza que las tensiones ejercen sobre unos puntos específicos de la discretización del cuerpo. Concretamente, dado que los desplazamientos admisibles $\boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}$ se definen en la configuración deformada, el vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} representa la fuerza aplicada sobre los nodos de la configuración deformada. Se trata, por tanto, de un vector espacial que puede ser calculado utilizando indistintamente variables espaciales (4.18) o utilizando variables materiales (4.19).

Adoptando notación matricial y teniendo en cuenta que la ecuación (4.16) debe verificarse para todo $\boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h$, esta ecuación se puede reescribir como [100]:

$$\mathbf{F}^{res}(\boldsymbol{\varphi}^h) = \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h) - \mathbf{F}^{ext}(\boldsymbol{\varphi}^h) = 0 \quad (4.20)$$

en el que \mathbf{F}^{res} representa la fuerza residual o desequilibrada que actúa sobre los nodos de la discretización. La ecuación (4.20) establece que, para que exista equilibrio, la fuerza externa que actúan sobre los nodos debe ser igual a la fuerza que ejercen las tensiones sobre los nodos.

4.1.3 Modelo de fricción.

Como se aprecia de la ecuación (4.17), el vector de fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} se descompone en una parte volumétrica y otra correspondiente a las fuerzas de contacto. Mientras que el cálculo del término volumétrico no entraña ninguna dificultad, el término correspondiente a las fuerzas de contacto merece algunos comentarios adicionales.

Antes de especificar las fuerzas de contacto conviene precisar el mecanismo por el que se produce el contacto. El cuerpo deformable está confinado a una región cerrada del espacio denominada cámara de compactación. Por otro lado, la geometría y la evolución de la cámara de compactación depende de los elementos mecánicos que integran el molde como los punzones, el noyo o la matriz y de sus respectivos movimientos. Cada uno de estos elementos definen un conjunto $\mathbf{M}_i \subset \mathbb{R}^{\dim}$ que representan la región del espacio ocupada por el i -ésimo elemento del molde en el instante $t \in [0, T]$ (ver figura 4.1). El molde \mathbf{M} se define como la unión de cada uno de estos elementos $\mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{M}_i$, mientras que la frontera del conjunto \mathbf{M} representa

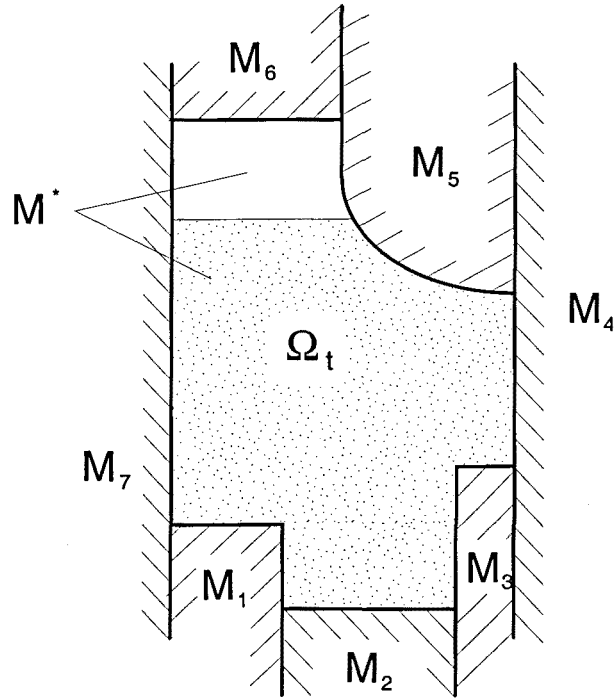


Figura 4.1: Delimitación de la cámara de compactación y dominio del cuerpo deformable. a las paredes del molde ∂M que delimitan la cámara de compactación. Una vez en este punto, se define la función indicador $g : \mathbb{R}^{\text{dim}} \rightarrow \mathbb{R}$ como [117][102]:

$$g(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M \quad (4.21a)$$

$$g(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial M \quad (4.21b)$$

$$g(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin M \quad (4.21c)$$

La característica principal de esta función es que permite determinar si un punto del espacio $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\text{dim}}$ pertenece a la cámara de compactación ($g(\mathbf{x}) \leq 0$) o no ($g(\mathbf{x}) > 0$). De aquí que la cámara de compactación M^* se defina como:

$$M^* = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\text{dim}} \mid g(\mathbf{x}) \leq 0 \} \quad (4.22)$$

La región del espacio ocupada por el cuerpo deformable se caracteriza por estar recluida en la cámara de compactación $\Omega_t \subseteq M^*$.

En particular, simular las etapas de transferencia y prensado implica subdividir el contorno del cuerpo deformable en dos categorías. Por un lado, la porción de contorno que está en contacto con las paredes del molde $\partial\Omega_0|_M \subset \partial\Omega_0$ y, por otro, la porción de contorno integrada por las partículas de la superficie del cuerpo que

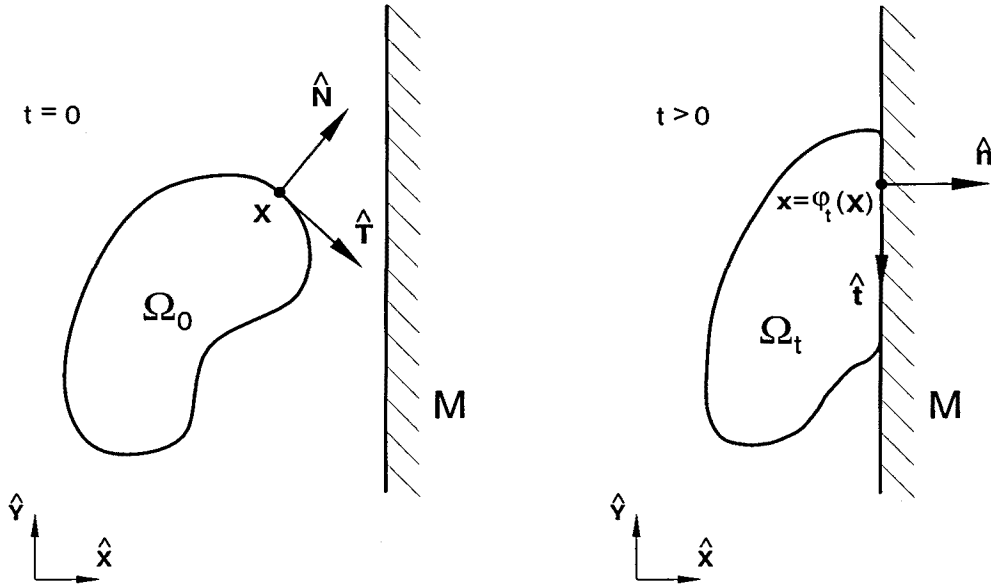


Figura 4.2: Contacto entre una partícula de la frontera del cuerpo deformable $\mathbf{X} \in \partial\Omega_0$ y el contorno rígido en el instante $t \in [0, T]$.

no están en contacto con las paredes del molde $\partial\Omega_0|_L \subset \partial\Omega_0$. A esta última se la denomina superficie libre. En el instante t , estas porciones de contorno se definen como:

$$\partial\Omega_0|_M = \{\mathbf{X} \in \partial\Omega_0 \mid g(\varphi_t(\mathbf{X})) = 0\} \quad (4.23a)$$

$$\partial\Omega_0|_L = \{\mathbf{X} \in \partial\Omega_0 \mid g(\varphi_t(\mathbf{X})) < 0\} \quad (4.23b)$$

A partir de estas definiciones se comprueba fácilmente que $\partial\Omega_0|_M \cap \partial\Omega_0|_L = \emptyset$ y que $\overline{\partial\Omega_0|_M \cup \partial\Omega_0|_L} = \overline{\partial\Omega_0}$. Como se aprecia en la figura 4.2, un punto del contorno del cuerpo deformable $\mathbf{X} \in \partial\Omega_0$ puede pertenecer en un instante al contorno $\partial\Omega_0|_L$ y en otro instante pertenecer al contorno $\partial\Omega_0|_M$, y viceversa.

La condición de contorno de la superficie libre corresponde a la condición de Neumann $\partial\Omega_0|_L \subset \partial_\tau\Omega_0$. En concreto, no se ejercen esfuerzos sobre la superficie libre, lo que implica que el vector de tensiones $\bar{\mathbf{t}}$ se considera nulo. De aquí que para la superficie libre, el término correspondiente a las fuerzas de contacto está dado por:

$$\int_{\partial\Omega_0|_L} N_p \bar{\mathbf{t}}(\varphi^h) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

Evidentemente, en este caso no tiene sentido hablar de fuerzas de fricción.

Por otro lado, las paredes del molde ∂M se consideran rígidas. Por lo que los puntos del contorno del cuerpo en contacto con la pared $\partial\Omega_0|_M$ tienen impedido el

desplazamiento en la dirección normal. En realidad solo tienen impedido uno de los sentidos, puesto que se impide que dichos puntos penetren en el molde pero se les permiten que se despeguen, en cuyo caso, la fuerza normal de contacto se considera nula $\bar{t}_N = 0$ y por ende, la fuerza de fricción es nula $\bar{t}_T = 0$.

El modelo de fricción se desarrollará para los puntos del contorno en contacto con las paredes del molde que no intentan despegarse de la pared ($\mathbf{X} \in \partial\Omega_0|_{M_t}$ para $t \in [t_1, t_2]$). Este caso equivale a considerar el problema en que se impide todo movimiento relativo con respecto a la pared del molde en la dirección normal, es decir, equivale a considerar la condición de contacto activa ($g(\mathbf{x}) = 0$).

Siguiendo la metodología empleada por Cante [15] para la fase de prensado, el cálculo de la fuerza normal se lleva a cabo por imposición del desplazamiento relativo entre el contorno y la pared en la dirección normal. Para ello, se realiza la hipótesis que la fuerza externa normal que actúa sobre un nodo del contorno es igual a la fuerza interna normal que actúa sobre dicho nodo. Bajo esta hipótesis, haciendo uso de las ecuaciones (4.17) y (4.20) y multiplicando por el vector unitario normal de sentido saliente $\hat{\mathbf{n}}_p$ en el instante t (ver figura 4.2), se llega a la expresión:

$$\mathbf{F}_{N_p}^{cont}(\varphi^h) = \left(\int_{\partial\Omega_0|_M} N_p \bar{\mathbf{t}}(\varphi^h) d\Gamma \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p(\varphi^h) = \left(\mathbf{F}_p^{int}(\varphi^h) - \int_{\Omega_0} N_p \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p(\varphi^h) \quad (4.25)$$

Por otro lado, el desplazamiento en la dirección tangencial es desconocido. En este caso, la fuerza tangencial se evalúa a partir de la fuerza normal haciendo uso de un modelo de fricción [26]. Una aproximación posible para el cálculo de la fuerza de fricción sobre el nodo del contorno p se obtiene aplicando el modelo de fricción dinámica del tipo Northon-Hoff (3.125) a nivel nodal [22]:

$$\mathbf{F}_{T_p}^{cont} = -\mu_d(\eta_p) \text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel} \right|^\alpha < \mathbf{F}_{N_p}^{cont} > \quad (4.26)$$

En este caso, la velocidad relativa evaluada en el nodo p se obtiene fácilmente derivando la ecuación de movimiento (4.12) respecto al tiempo:

$$\hat{\mathbf{V}}_{p,n+1}^{rel} = \left. \frac{\partial \hat{\varphi}_p^h(t)}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} - \mathbf{V}_{n+1}^{pared} \approx \frac{\hat{\varphi}_{p,n+1}^h - \hat{\varphi}_{p,n}^h}{\Delta t_{n+1}} - \mathbf{V}_{n+1}^{pared} \quad (4.27)$$

mientras que la fuerza normal se obtiene directamente de la ecuación (4.25). Sin embargo, la dependencia del coeficiente de fricción dinámica μ_d respecto a la densidad [107] implica que esta deba ser evaluada en los nodos. Puesto que la densidad se evalúa en los puntos de integración, esta metodología depende del tipo de integración numérica. Con frecuencia, se utiliza la cuadratura de Gauss para integrar numéricamente [48], por lo que se debe realizar una extrapolación de la densidad

desde los puntos de integración a los nodos. Una opción posible para solventar este problema es realizar un suavizado y tomar el valor de la densidad suavizada en el nodo p . No obstante, la dependencia de la densidad respecto de la ecuación de movimiento añade un término adicional a la matriz de rigidez que se hace difícil de evaluar siguiendo esta metodología debido a la extrapolación.

El cálculo de la fuerza normal utilizando la ecuación (4.25) conlleva a realizar una integración que en general se efectuará numéricamente, lo que significa evaluar el integrando en los puntos de integración. Puesto que la densidad se conoce en estos puntos y a efectos de calcular el producto entre la fuerza de contacto normal y el coeficiente de fricción, en este trabajo se propone introducir el coeficiente de fricción en el integrando de la ecuación (4.25). Evidentemente, esto solo tiene sentido físico en el contorno $\partial\Omega_0|_M$, por lo que su evaluación únicamente debe llevarse a cabo para los nodos del contorno $\partial\Omega_0|_M$. De esta forma el producto entre el coeficiente de fricción y la fuerza normal se puede evaluar directamente en el nodo a través de la expresión:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont}(\varphi^h) = \left(\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h) - \tilde{\mathbf{F}}_p^{vol}(\varphi^h) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p(\varphi^h) \quad (4.28)$$

en el que el vector $\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}$ se formula a partir de la fuerza interna y $\tilde{\mathbf{F}}_p^{vol}$ a partir de las de fuerzas volumétricas. En particular, a partir de la ecuación (4.18) se obtiene una expresión del vector $\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}$ en términos de las variables espaciales:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\varphi^h)) \boldsymbol{\tau}(\varphi^h) \cdot \nabla N_p d\Omega \quad (4.29)$$

De forma análoga, a partir de la ecuación (4.19) se obtiene una expresión equivalente en términos de las variables materiales:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\varphi^h)) \mathbf{F}(\varphi^h) \cdot \mathbf{S}(\varphi^h) : \text{GRAD}(N_p) d\Omega \quad (4.30)$$

Por otro lado, el vector $\tilde{\mathbf{F}}_p^{vol}$ se evalúa modificando la componente de las fuerzas volumétricas de la forma:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{vol} = \int_{\Omega_0} N_p \mu_d(\eta(\varphi^h)) \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \quad (4.31)$$

Usando el modelo de fricción del tipo Northon-Hoff (3.125) y teniendo en cuenta que el término $\tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont}$ contiene a la fuerza normal de contacto multiplicada por el coeficiente de fricción dinámica, la fuerza de fricción se evalúa en el nodo p como:

$$\mathbf{F}_{T_p}^{cont} = -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel} \right|^\alpha < \tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont} > \quad (4.32)$$

Por otro lado, las integrales de la ecuación (4.28) se evalúan de una forma muy sencilla. Para ello, basta con ponderar en los puntos de integración el vector de fuerzas internas \mathbf{F}_p^{int} y el vector de fuerzas volumétricas \mathbf{F}_p^{vol} por el coeficiente de fricción. Adicionalmente, esta metodología tiene la ventaja que no depende del tipo de integración numérica empleada, permitiendo obtener una expresión cerrada de la matriz tangente.

4.2 Formulación mixta.

En el capítulo 3 se propuso una superficie de fluencia múltiple formada por una superficie de Drucker-Prager y un elipsoide. En particular, en el caso de la superficie de Drucker-Prager se consideraba un flujo plástico puramente desviador, mientras que para el elipsoide se consideraba flujo asociado, el cual conducía a un flujo puramente desviador cuando el elipsoide degeneraba en la superficie de Von Mises. Por otro lado, el hecho que las deformaciones elásticas se consideren despreciables frente a las deformaciones plásticas, hace que el material sea incompresible o casi incompresible cuando el flujo plástico es puramente desviador, como se desprende de la ecuación (3.47) en el capítulo 3. Esto puede ocasionar problemas numéricos debidos a la incompresibilidad que presentan ciertos procesos.

Por ejemplo, en muchos casos, el llenado del molde se lleva a cabo durante la fase de transporte de cámaras, cuyo objetivo es redistribuir el polvo hasta ocupar toda la cámara sin que exista una compactación significativa. En este caso, la superficie de Drucker-Prager (con una regla de flujo puramente desviadora) rige el comportamiento del polvo lo que puede producir localmente procesos incompresibles. Otro ejemplo de incompresibilidad causado por una regla flujo puramente desviadora es cuando el polvo está totalmente compactado, en cuyo caso el elipsoide ha degenerado en un cilindro de Von Mises [7].

4.2.1 Formulación mixta continua.

La incompresibilidad provoca inestabilidades numéricas en la resolución del problema por el método de los elementos finitos utilizando la formulación convencional de Galerkin, en especial para elementos de bajo orden [48]. Una formulación equivalente se obtiene imponiendo la incompresibilidad de forma débil. Para ello, se introducen dos nuevas incógnitas: la deformación volumétrica \bar{J} y la presión media de las tensiones de Kirchhoff π .

En primer lugar, dada la ecuación de movimiento φ , se realiza una corrección

sobre el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} :

$$\bar{\mathbf{F}} = \left(\frac{\bar{J}}{J} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\varphi) \quad (4.33)$$

donde J representa al determinante del tensor gradiente de deformaciones sin corregir $J = \det(\text{GRAD}(\varphi))$.

La formulación débil de las ecuaciones (4.1a-c) y (4.2a-c) se pueden obtener a partir del funcional lagrangiano de tres campos de Hu-Washizu [100][104]:

$$\Pi(\varphi, \vartheta, \pi) = \int_{\Omega_0} \{ \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}(\varphi, \vartheta), \bar{\mathbf{C}}^p(\varphi, \vartheta)) + \pi [\ln(J(\varphi)) - \vartheta] \} d\Omega - \Pi_{ext}(\varphi) \quad (4.34)$$

donde ϑ es una función de las deformaciones volumétricas definida como $\vartheta = \ln(\bar{J})$, π representa a la presión, $\bar{\mathbf{C}}$ y $\bar{\mathbf{C}}^p$ son el tensor derecho de Cauchy-Green y su componente plástica obtenidas a partir del tensor gradiente de deformaciones corregido. Por otro lado, el término Π_{ext} representa la energía potencial de las fuerzas externas:

$$\Pi_{ext}(\varphi) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{B} \cdot \varphi d\Omega + \int_{\partial\tau\Omega_0} \bar{\mathbf{t}} \cdot \varphi d\Gamma \quad (4.35)$$

Observación 4.1 *El cálculo de la deformación volumétrica \bar{J} se realiza a través de la variable ϑ . La razón de ello es garantizar la condición $\bar{J} > 0$, la cual se satisface de forma automática a partir de la definición de ϑ sin que esta última esté sujeta a ninguna restricción.*

El cálculo de las ecuaciones de Euler asociadas al funcional (4.34) conducen a la formulación débil:

$$D_\varphi \Pi(\varphi, \vartheta, \pi; \boldsymbol{\eta}) = G^{int}(\varphi, \vartheta, \pi, \boldsymbol{\eta}) - G^{ext}(\varphi, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (4.36a)$$

$$D_\pi \Pi(\varphi, \vartheta, \pi; \bar{q}) = \int_{\Omega_0} \bar{q} (\ln(J(\varphi)) - \vartheta) d\Omega = 0 \quad \forall \bar{q} \in L_2(\Omega_0) \quad (4.36b)$$

$$D_\vartheta \Pi(\varphi, \vartheta, \pi; v) = \int_{\Omega_0} v (\bar{p}(\varphi, \vartheta) - \pi) d\Omega = 0 \quad \forall v \in L_2(\Omega_0) \quad (4.36c)$$

El término G^{ext} representa el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas. Este término es idéntico al que se definió en la ecuación (4.6) del apartado 4.1.1. Por otro lado, el término G^{int} representa el trabajo realizado por las fuerzas internas:

$$G^{int}(\varphi, \vartheta, \pi, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\tau}}(\varphi, \vartheta, \pi) : \nabla(\boldsymbol{\eta}) d\Omega \quad (4.37)$$

donde el tensor de tensiones de Kirchhoff corregido $\bar{\tau}$ y la presión \bar{p} se definen como:

$$\bar{\tau} = \pi \mathbf{g}^{-1} + \text{dev} \left[\bar{\mathbf{F}} \cdot 2 \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T \right] \quad (4.38a)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{n_{\text{dim}}} \text{tr} \left[\bar{\mathbf{F}} \cdot 2 \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T \right] \quad (4.38b)$$

En el capítulo 3 se describió como calcular el tensor de tensiones de Kirchhoff a partir de la energía libre de Helmholtz. El cálculo del tensor de tensiones de Kirchhoff sin corregir ($\tau = \bar{\mathbf{F}} \cdot 2 \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$) se obtiene de forma similar pero con la diferencia de utilizar el tensor gradiente de deformaciones corregido (4.33) en lugar de utilizar el tensor obtenido directamente de la ecuación de movimiento [100].

Alternativamente, es posible obtener una formulación equivalente del término G^{int} en función de las variables materiales haciendo uso de las ecuaciones (4.9) y (4.33), y teniendo en cuenta que el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{S}}$ se calcula a través del operador *pull-back* corregido $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\phi}^*(\bar{\tau}) = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-T}$:

$$G^{\text{int}}(\varphi, \vartheta, \pi, \eta) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\bar{J}}{\bar{J}} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}(\varphi, \vartheta) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\varphi, \vartheta, \pi) : \text{GRAD}(\eta) d\Omega \quad (4.39)$$

en el que aplicando el operador *pull-back* corregido $\bar{\phi}^*(\cdot)$ en la expresión (4.38a) y teniendo en cuenta que la presión \bar{p} es independiente de la configuración, se obtienen las correspondientes expresiones materiales de las ecuaciones (4.38a-b):

$$\bar{\mathbf{S}} = \pi \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \text{DEV} \left[2 \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \quad (4.40a)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left[2 \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] : \bar{\mathbf{C}} \quad (4.40b)$$

donde el término $\text{DEV}(\bar{\mathbf{S}})$ se calcula como $\text{DEV}(\bar{\mathbf{S}}) = \bar{\mathbf{S}} - \bar{p} \bar{\mathbf{C}}^{-1}$.

Al igual que sucedía con la formulación de Galerkin, el objetivo es encontrar la ecuación de movimiento $\varphi_t \in \mathcal{C}$ que satisfaga las ecuaciones (4.36a-c). Del mismo modo, el problema se puede plantear en función de las variables espaciales haciendo uso de la ecuación (4.37), o bien, plantearlo en términos de las variables materiales haciendo uso de la ecuación (4.39). Sin embargo, al contrario de lo que sucedía para la formulación de Galerkin, existe diferencias considerables entre ambas alternativas, las cuales se hacen más notables durante la formulación de la matriz de rigidez. En particular, es preferible plantear el problema en términos de variables espaciales puesto que su implementación es más sencilla y reduce el número de operaciones a realizar (y en consecuencia el coste computacional).

4.2.2 Discretización del modelo mixto.

Sea $\Omega_0^h = \cup_{e=1}^{n_e} \Omega_0^{(e)}$ una discretización del cuerpo deformable en la configuración de referencia. A partir de la aproximación del campo de desplazamientos (4.12), descrita en la sección 4.1.2, se deduce la ecuación de movimiento sobre un elemento típico $\Omega_0^{(e)}$ en el instante t_{n+1} :

$$\varphi(\mathbf{X}) \approx \varphi_{(e)}^h(\mathbf{X}) = \sum_{p=1}^{n_p^{(e)}} N_p(\mathbf{X}) \hat{\varphi}_p^h \quad \mathbf{X} \in \Omega_0^{(e)} \quad (4.41)$$

Se considera además una aproximación discontinua del campo de deformaciones volumétricas \bar{J} y del campo de presiones π [100][106]. Concretamente, la aproximación de las variables ϑ y π se lleva a cabo en el espacio $\mathcal{P}^h \subset L_2(\Omega_0)$:

$$\mathcal{P}^h = \left\{ \Theta^h \in L_2(\Omega_0) \mid \Theta_{(e)}^h = \sum_{p=1}^{\bar{n}_p^{(e)}} \bar{N}_p(\mathbf{X}) \cdot \hat{\Theta}_{p(e)}^h \right\} \quad (4.42)$$

donde Θ representa la variable a discretizar, $\hat{\Theta}_{p(e)}^h$ son las variables nodales definidas sobre el elemento $\Omega_0^{(e)}$ y \bar{N}_p representa a las funciones de forma descritas sobre el elemento $\Omega_0^{(e)}$. En principio, las funciones de forma utilizadas en la definición del espacio \mathcal{P}^h difieren de las funciones de forma utilizadas para la aproximación de la ecuación de movimiento φ^h , de aquí que el número de nodos definido sobre el elemento $\Omega_0^{(e)}$ también sea distinto $n_p^{(e)} \neq \bar{n}_p^{(e)}$.

Por otro lado, el espacio \mathcal{P}^h solo será continuo a tramos, siendo discontinuo en la frontera de los elementos. Esto permite calcular explícitamente la deformación volumétrica y la presión en función de la ecuación de movimiento φ^h . Sustituyendo la ecuación (4.41) en las ecuaciones (4.36b-c) y teniendo en cuenta que la aproximación de la variable $\vartheta_{(e)}^h$ y de la presión $\pi_{(e)}^h$ son elementos del espacio \mathcal{P}^h , se llega a las expresiones:

$$\vartheta(\varphi_{(e)}^h) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \ln(J(\varphi_{(e)}^h)) d\Omega \quad (4.43a)$$

$$\pi(\varphi_{(e)}^h, \vartheta(\varphi_{(e)}^h)) = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{p}(\varphi_{(e)}^h, \vartheta(\varphi_{(e)}^h)) d\Omega \quad (4.43b)$$

donde $\mathbf{H}_{(e)}$ es una matriz de dimensión $\bar{n}_p^{(e)} \times \bar{n}_p^{(e)}$ definida sobre el elemento $\Omega_0^{(e)}$ como:

$$\mathbf{H}_{(e)} = \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \otimes \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) d\Omega \quad (4.44)$$

Una vez evaluada la expresión (4.43a), la deformación volumétrica $\bar{J}_{(e)}^h$ se calcula a partir de la variable $\vartheta_{(e)}^h$ haciendo uso de la relación $\vartheta_{(e)}^h = \ln(\bar{J}_{(e)}^h)$.

Las ecuaciones (4.43a-b) representan una aproximación de la deformación volumétrica y de la presión calculada a nivel elemental. Es decir, en estas ecuaciones únicamente interviene un solo elemento, lo que presenta importantes ventajas. Por un lado, no se incrementa el número de ecuaciones del sistema, puesto que estas variables pueden ser calculadas explícitamente a partir de la ecuación de movimiento φ^h . Por otro, dada la similitud entre las ecuaciones (4.5) y (4.36a), la resolución del problema se puede obtener utilizando el método de Galerkin y modificando la ecuación constitutiva.

Teniendo en cuenta la observación 4.2, la discretización de la ecuación (4.36a) se lleva a cabo de la misma forma a como se procedería con el método de Galerkin. En este caso, la diferencia con la formulación descrita en el apartado 4.1.2 radica en la evaluación del estado tensional, cuyo cálculo se describe en el cuadro 4.1.²

Siguiendo la metodología del apartado 4.1.2, los elementos del espacio de funciones de prueba \mathcal{V}^h se representan a través de la ecuación (4.13). Por tanto, sustituyendo las ecuaciones (4.13) y (4.15) en la ecuación (4.36a) y teniendo en cuenta que esta ecuación se debe verificar para todo elemento del espacio de funciones de prueba $\forall \eta^h \in \mathcal{V}^h$, se llega a la expresión:

$$\mathbf{F}^{res}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) - \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = 0 \quad (4.45)$$

El término de fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} se definió en la ecuación (4.17), mientras que el vector correspondiente a las fuerzas internas \mathbf{F}^{int} se evalúa en el nodo p como:

$$\mathbf{F}_p^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\tau}}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) \cdot \nabla N_p \, d\Omega \quad (4.46)$$

²Usar el gradiente de deformaciones corregido $\bar{\mathbf{F}}$ en lugar del gradiente de deformaciones sin corregir \mathbf{F} para calcular el tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}$, induce a definir la densidad en el instante t_{n+1} como $\rho_{n+1} = \frac{\rho_0}{J_{n+1}^h}$. Sin embargo, expresar la ecuación de continuidad de esta forma implica realizar una aproximación de la ley de conservación de la masa:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \left(\frac{J_{n+1}^h}{J_{n+1}^h} \right) \rho_{n+1} \, d\Omega_{t_{n+1}} \approx \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \rho_{n+1} \, d\Omega_{t_{n+1}}$$

No obstante, en virtud de las ecuaciones (4.36b) y (4.43a), esta aproximación converge hacia la solución exacta a medida que se reduce el tamaño del elemento h (esto es $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_{n+1}^h}{J_{n+1}^h} = 1$).

- Campo de deformaciones en el elemento $\Omega_0^{(e)} \subset \Omega_0$.

$$\varphi_{(e)}^h = \sum_{p=1}^{n_p^{(e)}} N_p \widehat{\varphi}_p^h$$

- Cálculo del tensor gradiente de deformaciones y de la deformación volumétrica en $\Omega_0^{(e)}$.

$$\mathbf{F}_{(e)}^h = \text{GRAD}(\varphi_{(e)}^h) = \sum_{p=1}^{n_p^{(e)}} \text{GRAD}(N_p) \widehat{\varphi}_p^h$$

$$J_{(e)}^h = \det \left(\text{GRAD}(\varphi_{(e)}^h) \right)$$

- Corrección de la deformación volumétrica y de la presión media en $\Omega_0^{(e)}$.

$$\bar{J}_{(e)}^h = \exp \left(\sum_{p,q=1}^{\bar{n}_p^{(e)}} \bar{N}_p \cdot \left[\mathbf{H}_{(e)}^{-1} \right]_{pq} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{N}_q \ln(J_{(e)}^h) d\Omega \right)$$

$$\pi_{(e)}^h = \sum_{p,q=1}^{\bar{n}_p^{(e)}} \bar{N}_p \cdot \left[\mathbf{H}_{(e)}^{-1} \right]_{pq} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{N}_q \bar{p}_{(e)}^h d\Omega$$

$$\text{donde } \left[\mathbf{H}_{(e)} \right]_{pq} = \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{N}_p \bar{N}_q d\Omega$$

- Corrección del gradiente de deformaciones y del tensor derecho de Cauchy-Green en $\Omega_0^{(e)}$.

$$\bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h = \left(\frac{\bar{J}_{(e)}^h}{J_{(e)}^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \text{GRAD}(\varphi_{(e)}^h)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{(e)}^h = \bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h{}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h$$

- Cálculo del tensor de tensiones en $\Omega_0^{(e)}$.

$$\boldsymbol{\tau}_{(e)}^h = 2\bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h \cdot \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{C}}_{(e)}^h, \bar{\mathbf{C}}_{(e)}^h{}^p)}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{(e)}^h} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{(e)}^h{}^T \quad (\text{ver cuadro 3.1})$$

- Corrección del tensor de tensiones en $\Omega_0^{(e)}$.

$$\bar{p}_{(e)}^h = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_{(e)}^h)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{(e)}^h = \boldsymbol{\tau}_{(e)}^h + \left(\pi_{(e)}^h - \bar{p}_{(e)}^h \right) \mathbf{g}^{-1}$$

Cuadro 4.1: Cálculo del estado tensional para la formulación mixta.

Formulación de Galerkin.

- Fuerza en términos de las variables espaciales:

$$\mathbf{F}_p^{int} = \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla N_p \, d\Omega$$
- Fuerza en términos de las variables materiales:

$$\mathbf{F}_p^{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} : \text{GRAD}(N_p) \, d\Omega$$

Formulación mixta.

- Fuerza en términos de las variables espaciales:

$$\mathbf{F}_p^{int} = \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla N_p \, d\Omega$$
- Fuerza en términos de las variables materiales:

$$\mathbf{F}_p^{int} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\bar{J}}{J} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(N_p) \, d\Omega$$

Cuadro 4.2: Formulación de las fuerzas internas.

donde el tensor de tensiones de Kirchhoff corregido $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ se determina siguiendo el procedimiento descrito en el cuadro 4.1.

No obstante, al igual que sucedía en el apartado 4.1.2 para la formulación de Galerkin, puede obtenerse una expresión equivalente del vector de fuerzas internas en términos de las variables materiales. Para ello, aplicando el operador *push-forward* sobre el tensor de tensiones $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\phi}_*(\bar{\mathbf{S}}) = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$ y haciendo uso de las ecuaciones (4.9) y (4.33), el vector de fuerzas internas \mathbf{F}_p^{int} evaluado en el nodo p se reescribe como:

$$\mathbf{F}_p^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\vartheta}^h, \boldsymbol{\pi}^h) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\bar{J}(\boldsymbol{\vartheta}^h)}{J(\boldsymbol{\varphi}^h)} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\vartheta}^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\vartheta}^h, \boldsymbol{\pi}^h) : \text{GRAD}(N_p) \, d\Omega \quad (4.47)$$

En el cuadro 4.2 se hace un resumen de las expresiones desarrolladas para el evaluación de las fuerzas internas. En el caso de usar variables espaciales no se aprecian diferencias entre la formulación de Galerkin y la formulación mixta (salvo en la evaluación del tensor de tensiones). Sin embargo, esto no sucede en el caso de utilizar variables materiales, por lo que a pesar de no presentar diferencias significativas si obliga a realizar una distinción entre la formulación de Galerkin y la formulación mixta durante la implementación del vector de fuerzas internas \mathbf{F}_p^{int} .

4.2.3 Modelo de fricción.

Al igual que se hizo en el apartado 4.1.3, el modelo de fricción se desarrollará para los puntos del contorno $\partial\Omega_t$ en contacto con las paredes del molde $\partial\mathbf{M}$ en el caso en que $t_N > 0$ (puesto que en cualquier otro caso $t_N = t_T = 0$). Sobre estos puntos se impone el desplazamiento del cuerpo en la dirección normal y se acepta la hipótesis que la fuerza normal que ejerce el nodo sobre la pared es igual y de sentido contrario a la fuerza que ejerce la pared sobre el nodo. De esta hipótesis, haciendo uso de las expresiones (4.17) y (4.45), se deduce la expresión:

$$\mathbf{F}_{N_p}^{cont}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \left(\mathbf{F}_p^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) - \int_{\Omega_0} N_p \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p(\varphi^h) \quad (4.48)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_p$ es el vector unitario normal de sentido saliente al cuerpo deformable Ω_t .

El cálculo de la fuerza de tangencial implica multiplicar el coeficiente de fricción μ_d por la fuerza normal. Sin embargo, dada la dependencia del coeficiente de fricción con la densidad ($\eta(\vartheta^h) = \frac{\eta_0}{J^h} = \frac{\eta_0}{\exp(\vartheta^h)}$), su evaluación resulta sencilla en los puntos de integración. Por esta razón, continuando con la metodología seguida en el apartado 4.1.3, el producto entre la fuerza normal y el coeficiente de fricción se evalúa introduciendo a este último en el integrando de la ecuación (4.48):

$$\tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \left(\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) - \tilde{\mathbf{F}}_p^{vol}(\vartheta^h) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p(\varphi^h) \quad (4.49)$$

donde el vector $\tilde{\mathbf{F}}_p^{vol}$ se definió en la ecuación (4.31), mientras que el término correspondiente a las fuerzas internas $\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}$ se evalúa a partir de la ecuación (4.46) como:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\vartheta^h)) \bar{\boldsymbol{\tau}}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) \cdot \nabla N_p d\Omega \quad (4.50)$$

Una expresión equivalente evaluada en términos de las variables materiales se obtiene a partir de la ecuación (4.47):

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) = \int_{\Omega_0} \mu_d(\eta(\vartheta^h)) \left(\frac{\bar{J}(\vartheta^h)}{J(\varphi^h)} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}(\varphi^h, \vartheta^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \text{GRAD}(N_p) d\Omega \quad (4.51)$$

La fuerza tangencial se obtiene a partir del modelo de fricción dinámica de Northon-Hoff (3.125). En particular, teniendo en cuenta que el término $\tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont}$ definido en la ecuación (4.49) representa la fuerza normal de contacto en el nodo p multiplicada por el coeficiente de fricción dinámico μ_d , la fuerza tangencial se evalúa como:

$$\mathbf{F}_{T_p}^{cont} = -\text{sign}(\hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel}) \left| \hat{\mathbf{V}}_{T_p}^{rel} \right|^\alpha < \tilde{\mathbf{F}}_{N_p}^{cont} > \quad (4.52)$$

donde la velocidad relativa del nodo p se obtiene a partir de la ecuación (4.27).

Tanto en la formulación de Galerkin como en la formulación mixta, la evaluación de las fuerzas de contacto está íntimamente relacionada con la evaluación de las fuerzas internas. Por esta razón, la dificultad para evaluar, implementar e incluso linealizar las fuerzas de contacto dependerá obstensiblemente de la dificultad que entrañe para las fuerzas internas.

4.3 Discretización e implementación de la matriz tangente.

Una vez planteada la ecuación constitutiva del material se establece la forma débil de la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno, llegando a una ecuación de la forma:

$$G(\varphi_t, \boldsymbol{\eta}) = G^{int}(\varphi_t, \boldsymbol{\eta}) - G^{ext}(\varphi_t, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_t \quad (4.53)$$

El problema se reduce a encontrar la ecuación de movimiento $\varphi_t \in \mathcal{C}_t$ que verifique la ecuación (4.53). A partir de aquí, se procede a resolver el problema de forma incremental. Por lo que dado el intervalo de tiempo de interés, se discretiza en subintervalos no solapables $[0, T] = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$. Adicionalmente, se realiza una discretización espacial del cuerpo deformable, y con ello, se realiza una aproximación del espacio \mathcal{C}_t a un espacio de dimensión finita $\mathcal{C}_t^h \subset \mathcal{C}_t$. Suponiendo conocida la solución de la ecuación (4.53) en el instante t_n de un intervalo típico $[t_n, t_{n+1}]$, el objetivo es llegar a una solución aproximada de la ecuación de movimiento $\varphi_{n+1}^h \in \mathcal{C}_{n+1}^h$ en el instante t_{n+1} . Sin embargo, dada la no linealidad del problema, su resolución numérica se lleva a cabo de forma iterativa, lo que implica solucionar reiteradamente una secuencia de problemas linealizados de la forma [74][8]:

$$G(\varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h) + D_\varphi G(\varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \varphi_{n+1}^{h(k)}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_{n+1}^h \quad (4.54)$$

donde $D_\varphi G(\varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \varphi_{n+1}^{h(k)})$ es la derivada de Gateaux del término $G(\varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h)$ en la dirección del incremento de los desplazamientos $\Delta \varphi_{n+1}^{h(k)}$. La derivada de Gateaux de este término se puede expresar como [101][43]:

$$D_\varphi G(\varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \varphi_{n+1}^{h(k)}) = \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} G(\varphi_{n+1}^{h(k)} + \zeta \Delta \varphi_{n+1}^{h(k)}, \boldsymbol{\eta}^h) \right|_{\zeta=0} \quad (4.55)$$

En los apartados 4.1 y 4.2 se presentaron dos formas distintas de la expresión (4.53) que en el caso discreto se reescribieron como:

$$\mathbf{F}^{res}(\varphi_{n+1}^h) = \mathbf{F}^{int}(\varphi_{n+1}^h) - \mathbf{F}^{ext}(\varphi_{n+1}^h) = 0 \quad (4.56)$$

y cuya linealización conduce a una expresión de la forma [101]:

$$\mathbf{F}^{res}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{h(k)}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{h(k)}) : \Delta \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}^{h(k)} = 0 \quad (4.57)$$

En este apartado se presentan dos formas distintas de la matriz de rigidez \mathbf{K} correspondientes a la formulación de Galerkin y a la formulación mixta.

4.3.1 Linealización de la formulación de Galerkin.

La expresión (4.5) del apartado 4.1 representa la forma débil de la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno para la formulación de Galerkin. Por tanto, la linealización del funcional $G(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h)$ en el instante t_{n+1} se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta \boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (4.5), esto es:

$$D_{\boldsymbol{\varphi}} G(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) = D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) - D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{ext}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h \quad (4.58)$$

donde el primer término de la derecha $D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h)$ corresponde a la derivada del trabajo virtual realizado por las fuerzas internas, mientras que el segundo término $D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{ext}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h)$ corresponde a la derivada del trabajo virtual realizado por las fuerzas externas.

Linealización de las fuerzas internas.

La linealización del término correspondiente a las fuerzas internas se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta \boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la expresión (4.8):

$$D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^h + \zeta \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^h + \zeta \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \Big|_{\zeta=0} \quad (4.59)$$

El desarrollo de esta ecuación permite descomponer la derivada correspondiente a las fuerzas internas en dos términos de naturaleza diferente [100]:

$$D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) = B^{geo}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h, \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) + B^{mat}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h, \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) \quad (4.60)$$

donde a B^{geo} se le conoce como el término geométrico y a B^{mat} como el término material. Ambos están definidos en el cuadro 4.3.

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\eta}^h$ y $\Delta \boldsymbol{\varphi}^h$ son elementos del espacio de funciones de prueba \mathcal{V}^h , la contribución de las fuerzas internas a la matriz de rigidez tangente se obtiene sustituyendo la ecuación (4.14) en (4.60), llegando a la expresión:

$$D_{\boldsymbol{\varphi}} G^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) = \widehat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\varphi}^h; \Delta \boldsymbol{\varphi}^h) \quad (4.61)$$

El término $D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h)$ corresponde a la derivada del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} definido en las ecuaciones (4.18) y (4.19), mientras $\hat{\boldsymbol{\eta}}^h$ representa el vector de funciones de prueba correspondientes a los nodos. La derivada del vector de fuerzas internas se obtiene combinando las ecuaciones (4.13), (4.15), (4.60) y (4.61):

$$D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = (\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) + \mathbf{K}^{mat}(\varphi^h)) : \Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}^h \quad (4.62)$$

donde $\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}^h$ representa el incremento del campo de desplazamientos nodales en cuya dirección se realiza la derivación del vector de fuerzas internas.

A la matriz \mathbf{K}^{geo} se la conoce como la matriz de rigidez geométrica mientras que a \mathbf{K}^{mat} se la conoce como matriz de rigidez material. La definición de ambas matrices se describe en el cuadro 4.3.

Linealización de las fuerzas externas.

La linealización del término correspondiente a las fuerzas externas se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la expresión (4.6). Sin embargo, el término correspondiente a las fuerzas volumétricas no depende de la ecuación de movimiento φ^h , por lo que su derivada es nula. Por tanto, derivar la ecuación (4.6) equivale a derivar el término correspondiente a las fuerzas de contacto:

$$D_\varphi G^{ext}(\varphi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{\partial_r \Omega_0} \bar{\mathbf{t}}(\varphi^h + \zeta \Delta\varphi^h) \cdot \boldsymbol{\eta}^h d\Gamma \Big|_{\zeta=0} \quad (4.63)$$

En esta ecuación solo debe considerarse los puntos del contorno en contacto con las paredes del molde $\mathbf{X} \in \partial\Omega_0|_M$. En particular, solo se considera el caso en que $\Delta\varphi^h \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Delta\varphi_N^h = 0$ (desplazamiento impuesto en la dirección normal), pues en caso contrario las fuerzas de contacto se consideran nulas en cualquier dirección admisible $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ que verifique $\Delta\varphi^h \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Delta\varphi_N^h < 0$.

Por otro lado, una vez discretizado el cuerpo deformable Ω_0 y definida la ecuación de movimiento (4.12), en el apartado 4.1.3 se describió como evaluar las fuerzas de contacto a partir del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} , lo que motiva a evaluar la ecuación (4.63) en términos del vector de fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} . Sustituyendo las ecuaciones (4.13) y (4.17) en (4.63), esta última se puede poner como:

$$D_\varphi G^{ext}(\varphi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (4.64)$$

No obstante, su evaluación solo es necesaria en los nodos del contorno $\hat{\mathbf{X}} \in \partial\Omega_0|_M$ cuyo desplazamiento está contenido sobre las paredes del molde $\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_N^h = 0$, puesto que en los demás casos la contribución de las fuerzas externas a la matriz de rigidez se considera nula. Sobre estos nodos, si la discretización reprodujese perfectamente

el contorno del cuerpo deformable³, los vectores normal y tangencial al contorno del cuerpo deformable coinciden con los vectores normal y tangencial a las paredes del molde. Estos vectores definen un sistema de coordenadas local (ver figura 4.2) que por simplicidad se determinará a partir de las paredes del molde.

La derivada del vector de fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre el vector de fuerzas externas escrito en coordenadas locales:

$$D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}_N^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \hat{\mathbf{n}} + D_\varphi \mathbf{F}_T^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \hat{\mathbf{t}} + \\ + \mathbf{F}_N^{cont} D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) + \mathbf{F}_T^{cont} D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (4.65)$$

Los dos primeros términos de la derecha corresponden respectivamente a la derivada de la componente normal y tangencial de las fuerzas de contacto. Ambos se calculan a partir de la derivada del vector de fuerzas internas y del vector de fuerzas volumétricas. Los dos últimos términos corresponden a la derivada de los vectores unitarios normal y tangencial, cuya determinación depende única y exclusivamente de la curvatura del contorno k , evaluada sobre los puntos ocupados por los nodos⁴:

$$D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = -k \hat{\mathbf{t}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\hat{\varphi}^h \quad (4.66a)$$

$$D_\varphi \hat{\mathbf{t}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = k \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\hat{\varphi}^h \quad (4.66b)$$

La derivada de la fuerza normal \mathbf{F}_N^{cont} se obtiene derivando la expresión (4.25), donde teniendo en cuenta que la derivada del vector de fuerzas volumétricas \mathbf{F}^{vol} es nula, se llega a la expresión:

$$D_\varphi \mathbf{F}_N^{cont}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{vol}) \cdot D_\varphi \hat{\mathbf{n}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) \quad (4.67)$$

El resultado lo componen dos términos, uno corresponde a la derivada del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} y otro a la derivada del vector normal $\hat{\mathbf{n}}$. La evaluación del primero se obtiene a partir de la expresión (4.62), la cual fue descrita en el apartado anterior. Mientras que el segundo se evalúa a partir de la ecuación (4.66a).

Por otro lado, la derivada de la componente tangencial \mathbf{F}_T^{cont} se obtiene derivando la expresión (4.32). Sin embargo, se debe tener presente que la derivada del término $\tilde{\mathbf{F}}_N^{cont}$ difiere del correspondiente a la componente normal \mathbf{F}_N^{cont} por el simple hecho de incorporar el coeficiente de fricción dinámica en el integrando. En líneas generales,

³Sobre los nodos del contorno se pueden formar irregularidades (esquinas) como consecuencia de la discretización que indeterminan las componentes normal y tangencial al contorno.

⁴El código informático desarrollado aproxima la geometría de la cámara de compactación mediante segmentos rectos. El método de desplazamientos impuestos bajo esta aproximación hace que la derivada de los vectores $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ sean nulos (ya que la curvatura del contorno es nula $k = 0$).

la derivada de la ecuación (4.32) conduce a una expresión de la forma⁵:

$$D_\varphi \mathbf{F}_T^{cont} = -\text{sign}(\widehat{\mathbf{V}}_T^{rel}) \left| \widehat{\mathbf{V}}_T^{rel} \right|^\alpha \left[\left(D_\varphi \widetilde{\mathbf{F}}^{int} - D_\varphi \widetilde{\mathbf{F}}^{vol} \right) \cdot \widehat{\mathbf{n}} + \left(\widetilde{\mathbf{F}}^{int} - \widetilde{\mathbf{F}}^{vol} \right) \cdot D_\varphi \widehat{\mathbf{n}} \right] - \alpha \left| \widehat{\mathbf{V}}_T^{rel} \right|^{\alpha-1} \left[D_\varphi \widehat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot \widehat{\mathbf{t}} + \widehat{\mathbf{V}}^{rel} \cdot D_\varphi \widehat{\mathbf{t}} \right] \widetilde{\mathbf{F}}_N^{cont} \quad (4.68)$$

donde $\widehat{\mathbf{V}}^{rel}$ corresponde a la velocidad respecto las paredes del molde evaluada en los nodos, mientras que los vectores $\widetilde{\mathbf{F}}^{int}$ y $\widetilde{\mathbf{F}}^{vol}$ se definieron en las ecuaciones (4.29), (4.30) y (4.31) respectivamente. El primer término se obtiene de forma similar a la derivada del vector de fuerzas internas salvo en la derivación del coeficiente de fricción dinámica. De hecho, este último es el responsable que la derivada correspondiente a las fuerzas volumétricas no sea nula. Por otro lado, la derivada de los vectores normal $\widehat{\mathbf{n}}$ y tangencial $\widehat{\mathbf{t}}$ se evalúan fácilmente a partir de las ecuaciones (4.66a-b). Mientras que la derivada de la velocidad relativa en los nodos se aproxima como $D_\varphi \widehat{\mathbf{V}}^{rel} \approx \frac{\Delta \widehat{\varphi}^h}{\Delta t_{n+1}}$.

A partir de aquí, aplicando la derivada de Gateaux sobre las ecuaciones (4.18) o (4.19), (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32), y combinando las ecuaciones (4.65), (4.66a-b), (4.67) y (4.68) se llega a una expresión de la forma:

$$D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta \varphi^h) = \mathbf{K}^{cont}(\varphi^h) : \Delta \widehat{\varphi}^h \quad (4.69)$$

donde \mathbf{K}^{cont} representa la contribución de las fuerzas de contacto a la matriz de rigidez. En el anexo B1 se llevará a cabo una descripción detallada de la obtención de la matriz \mathbf{K}^{cont} . No obstante, el resultado se resume en el cuadro 4.4.

Observación 4.3 *La linealización de las fuerzas de contacto solo se lleva a cabo en aquellos nodos del contorno $\widehat{\mathbf{X}} \in \partial\Omega_0|_M$ que verifican la condición $\Delta \widehat{\varphi}_{N_m}^h = 0$, lo que implica que la ecuación (4.64) debe verificarse para todo $\boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h$ tal que $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{N_m}^h = 0$. Por esta razón, no es necesario evaluar las componentes $\mathbf{K}_{N_m T_p}^{cont}$ y $\mathbf{K}_{N_m N_p}^{cont}$ (ver cuadro 4.4), puesto que el producto $\widehat{\boldsymbol{\eta}}^h : \mathbf{K}^{cont} : \Delta \widehat{\varphi}^h$ es independiente de estas componentes por ser $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_N^h = 0$ en estos nodos.*

4.3.2 Linealización de la formulación mixta.

El equivalente de la expresión (4.53) para el caso de la formulación mixta está dada por la ecuación (4.36a) del apartado 4.2. Al igual que en el apartado anterior, la

⁵Por motivos de claridad se simplifica la notación de la derivada de Gateaux eliminando el argumento $(\varphi^h; \Delta \varphi^h)$.

linealización del funcional G en el instante t_{n+1} se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (4.36a):

$$D_\varphi G(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) - D_\varphi G^{ext}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) \quad (4.70)$$

la cual se debe verificar para todo $\boldsymbol{\eta}^h$ del espacio \mathcal{V}^h . Sin embargo, las variables ϑ^h y π^h dependen de la ecuación de movimiento ($\vartheta^h = \vartheta^h(\varphi^h)$ y $\pi^h = \pi^h(\varphi^h)$), por lo que derivar la ecuación (4.36a) implica derivar también las ecuaciones (4.36b-c).

Linealización de las fuerzas internas.

Siguiendo un procedimiento análogo al del apartado 4.3.1, la linealización del término correspondiente a las fuerzas internas se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la expresión (4.39):

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\bar{\mathcal{J}}^h}{J^h(\mathbf{W}^h)} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{W}^h, \vartheta^h) \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{W}^h, \vartheta^h, \pi) : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \right|_{\zeta=0} \quad (4.71)$$

donde $\mathbf{W}^h = \varphi^h + \zeta \Delta\varphi^h$. Sin embargo, se debe tener en cuenta que además de la ecuación de movimiento φ^h , las fuerzas internas dependen de la deformación volumétrica $\bar{\mathcal{J}}^h$ (bien sea directamente o bien a través de la variable ϑ^h) y de la presión π^h , las cuales también dependen de la ecuación de movimiento φ^h por medio de las ecuaciones (4.43a-b). Por esta razón, deben derivarse previamente la deformación volumétrica $\bar{\mathcal{J}}^h$ y la presión π^h .

Teniendo en cuenta la discontinuidad de la variable ϑ^h , la derivada de la deformación volumétrica $\bar{\mathcal{J}}^h$ en el elemento e se obtiene derivando la expresión (4.43a), llegando al resultado:

$$D_\varphi \bar{\mathcal{J}}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \bar{\mathcal{J}}(\varphi^h) \overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) \quad (4.72)$$

donde el operador $\overline{\text{div}}(\cdot)$ se define como una media del operador $\text{div}(\cdot)$ en el elemento e :

$$\overline{\text{div}}(\cdot)|_{(e)} = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \text{div}(\cdot) d\Omega \quad (4.73)$$

De forma similar, dada la discontinuidad de la presión π^h , su derivada en el elemento e se obtiene a partir de la expresión (4.43b):

$$D_\varphi \pi^h(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h)|_{(e)} = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) D_\varphi \bar{p}^h(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) d\Omega \quad (4.74)$$

Sin embargo, como se detalla en el anexo B1, esta ecuación carece de interés propio durante la obtención de la matriz de rigidez. En su lugar, en la linealización de la ecuación (4.36a) es preferible utilizar la igualdad (ver lema B1.3 en el anexo B1):

$$\int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \pi^h(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h); \Delta \varphi^h) \operatorname{div}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0^{(e)}} D_\varphi \bar{p}^h(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h); \Delta \varphi^h) \bar{\operatorname{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega \quad (4.75)$$

donde el operador $\bar{\operatorname{div}}(\cdot)$ se definió en la ecuación (4.73). La derivada de Gateaux de la presión \bar{p}^h se obtiene a partir de la derivada del tensor de tensiones sin corregir. Sin embargo, a pesar que la derivada de este último se describió detalladamente en el capítulo 3, debe desarrollarse de nuevo en el caso de la formulación mixta puesto que ha tenerse en cuenta la corrección realizada sobre el tensor gradiente de deformaciones (4.33).

En el anexo B1 se realizará un desarrollo detallado de la derivación del término G^{int} . En líneas generales, a partir de las expresiones (4.33), (4.72), (4.73) y (4.75), el desarrollo de la ecuación (4.71) conduce a una expresión de la forma:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h), \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \varphi^h) = \sum_{k=1}^7 B_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h, \Delta \varphi^h) \quad (4.76)$$

donde los siete términos B_k se resumen en el cuadro 4.5.

Observación 4.4 *Los dos primeros términos que componen la derivada de G^{int} corresponden al término geométrico B^{geo} y al término material B^{mat} definidos para la formulación de Galerkin. De hecho, tienen exactamente la misma forma si se escriben en función de las variables espaciales. Los restantes dependen bien del factor $(\bar{\operatorname{div}}(\cdot) - \operatorname{div}(\cdot))$ o bien del factor $(\bar{p}^h - \pi^h)$, por lo que estos términos tienden a anularse a medida que el tamaño del elemento en la malla se reduce ($\lim_{h \rightarrow 0} B_k = 0$).*

Observación 4.5 *El cálculo del tensor elastoplástico tangente consistente $\bar{\mathbf{c}}^{ep}$ se realiza utilizando el tensor de tensiones sin corregir $\bar{\mathbf{c}}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\mathbf{e}}}$. La corrección de la presión se tiene en cuenta posteriormente en la matriz de rigidez.*

Al igual que para la formulación de Galerkin, la contribución de las fuerzas internas a la matriz de rigidez tangente se obtiene sustituyendo la ecuación (4.14) en (4.76), reescribiendo a esta última como:

$$D_\varphi G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h), \boldsymbol{\eta}^h; \Delta \varphi^h) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^h : D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta \varphi^h) \quad (4.77)$$

El término $D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h; \Delta\varphi^h)$ corresponde a la derivada del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} definido en las ecuaciones (4.46) y (4.47). Este término se obtiene aplicando la derivada de Gateaux en la dirección $\Delta\varphi^h \in \mathcal{V}^h$ sobre la ecuación (4.47):

$$D_\varphi \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h) : \Delta\hat{\varphi}^h \quad (4.78)$$

En la práctica, las matrices \mathbf{K}_k se obtienen sustituyendo las ecuaciones (4.14) y (4.15) en (4.76). La definición de estas matrices se resume en el cuadro 4.6.

Observación 4.6 *Una inspección rápida de los cuadros 4.2, 4.3, 4.5 y 4.6 muestra que es preferible formular el problema en términos de las variables espaciales. Motivo de ello es que el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez se expresan de una forma más sencilla, lo que facilita la implementación y reduce el coste computacional al realizar un menor número de operaciones. Estas ventajas se acentúan en el caso de la formulación mixta. Además, el vector de fuerzas internas, la matriz de rigidez geométrica y la matriz de rigidez material tienen la misma forma en la formulación de Galerkin y en la formulación mixta, cosa que no sucede si el problema se formula en términos de las variables materiales.*

Linealización de las fuerzas externas.

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al descrito en el apartado 4.3.1 para la formulación de Galerkin, la linealización del término correspondiente a las fuerzas externas se reduce a evaluar las expresiones (4.64) y (4.65) en los nodos del contorno $\hat{\mathbf{X}} \in \partial\Omega_0|_M$ cuyo desplazamiento está contenido sobre las paredes del molde $\Delta\hat{\varphi}_N^h = 0$. La diferencia con la formulación de Galerkin surge en la evaluación de las ecuaciones (4.67) y (4.68), las cuales en el caso de la formulación mixta se desarrollan a partir de las expresiones (4.31), (4.48), (4.49) y (4.51).

Un desarrollo detallado de la expresión (4.65) se realizará en el anexo B1. En líneas generales, derivando las expresiones (4.48) y (4.49) y combinando el resultado con las ecuaciones (4.66a-b), (4.67), (4.68), (4.72) y (4.74), la derivada de las fuerzas externas se puede escribir de la forma:

$$D_\varphi \mathbf{F}^{ext}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = \overline{\mathbf{K}}^{cont}(\varphi^h) : \Delta\hat{\varphi}^h \quad (4.79)$$

en el que $\overline{\mathbf{K}}^{cont}$ representa la contribución de las fuerzas de contacto a la matriz de rigidez y cuya composición se describe en los cuadros 4.7 y 4.8.⁶

⁶La observación 4.3 también es válida para la formulación mixta.

$$D_{\varphi} G^{int}(\varphi^h, \eta^h; \Delta\varphi^h) = B^{geo}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h) + B^{mat}(\varphi^h, \eta^h, \Delta\varphi^h)$$

- Linealización en términos de variables espaciales:

$$B^{geo} = \int_{\Omega_0} \nabla(\eta^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \tau \, d\Omega$$

$$B^{mat} = \int_{\Omega_0} \nabla(\eta^h) : \mathbf{c}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) \, d\Omega$$

- Linealización en términos de variables materiales:

$$B^{geo} = \int_{\Omega_0} \text{GRAD}(\eta^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega$$

$$B^{mat} = \int_{\Omega_0} \text{GRAD}(\eta^h) : \mathbf{F} \cdot \Xi^{ep} : \mathbf{F}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \, d\Omega$$

$$D_{\varphi} \mathbf{F}^{int}(\varphi^h; \Delta\varphi^h) = (\mathbf{K}^{geo}(\varphi^h) + \mathbf{K}^{mat}(\varphi^h)) : \Delta\hat{\varphi}^h$$

- Linealización en términos de variables espaciales:

$$K_{imlp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} \, d\Omega$$

$$K_{imlp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \, d\Omega$$

- Linealización en términos de variables materiales:

$$K_{imlp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} S_{jk} \, d\Omega$$

$$K_{imlp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} F_{ir} \Xi_{rj sk}^{ep} F_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \, d\Omega$$

Cuadro 4.3: Linealización de las fuerzas internas para la formulación de Galerkin.

$$\mathbf{K}_{LOC(m)(p)}^{cont} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{TmTp}^{cont} & \mathbf{K}_{TmNp}^{cont} \\ \mathbf{K}_{NmTp}^{cont} & \mathbf{K}_{NmNp}^{cont} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{K}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{TmTp}^{cont} &= -\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{M}_{(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ &\quad - \delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + k \left(\mathbf{F}_{Nm}^* - \text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Tm}^* \right) \right] \\ \mathbf{K}_{TmNp}^{cont} &= -\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \mathbf{M}_{(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \mathbf{K}_{NmTp}^{cont} &= \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{geo} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - k \delta_{mp} \left[-\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + \mathbf{F}_{Tm}^* \right] \\ \mathbf{K}_{NmNp}^{cont} &= \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{K}_{(m)(p)}^{geo} + \mathbf{K}_{(m)(p)}^{mat} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{aligned}$$

- Términos en función de las variables espaciales:

$$\mathbf{F}_m^* = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla N_m d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_m^* = \int_{\Omega_0} \mu_d \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla N_m d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \mu_d \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{K}}^{geo} + \tilde{\mathbf{K}}^{mat} + \mathbf{K}^{fric}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{imlp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} d\Omega$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{imlp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{imlp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\tau_{ij} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} - \rho_0 B_i N_m \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_i} d\Omega$$

- Términos en función de las variables materiales:

$$\mathbf{F}_m^* = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \text{GRAD}(N_m) d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_m^* = \int_{\Omega_0} \mu_d \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \text{GRAD}(N_m) d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \mu_d \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{K}}^{geo} + \tilde{\mathbf{K}}^{mat} + \mathbf{K}^{fric}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{imlp}^{geo} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} S_{jk} d\Omega$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{imlp}^{mat} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial X_j} F_{ir} \Xi_{rjsk}^{ep} F_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{imlp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(F_{ij} S_{jk} \frac{\partial N_m}{\partial X_k} - \rho_0 B_i N_m \right) F_{rl}^{-1} \frac{\partial N_p}{\partial X_r} d\Omega$$

Cuadro 4.4: Linealización de las fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} para la formulación de Galerkin (representación en coordenadas locales).

$$D_{\varphi} G^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h), \boldsymbol{\eta}^h; \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 B_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h, \boldsymbol{\eta}^h, \Delta\varphi^h)$$

- Linealización en términos de las variables espaciales:

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) : \nabla(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} d\Omega$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} [(\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h))\nabla(\boldsymbol{\eta}^h) + (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h))\nabla(\Delta\varphi^h)] : \bar{\boldsymbol{\tau}}^h d\Omega$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h))(\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \left(\frac{1}{n_{dim}^2} \bar{\mathbf{g}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{ep} : \mathbf{g} + \frac{2\bar{p}^h}{n_{dim}} \right) d\Omega$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) \mathbf{g} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{ep} : \nabla(\Delta\varphi^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{ep} : \mathbf{g} d\Omega$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{div}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)) \text{div}(\Delta\varphi^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{div}}(\Delta\varphi^h) - \text{div}(\Delta\varphi^h)) \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

$$B_7 = \int_{\Omega_0} (\bar{p}^h - \pi^h) (\nabla(\Delta\varphi^h) + \nabla^T(\Delta\varphi^h)) : \nabla(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

- Linealización en términos de las variables materiales:

$$B_1 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{S}} d\Omega$$

$$B_2 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) : \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega$$

$$B_3 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} : \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega$$

$$B_4 = \int_{\Omega_0} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \left(\frac{1}{n_{dim}^2} \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + \frac{2\bar{p}^h}{n_{dim}} \right) d\Omega$$

$$B_5 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} : \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) : \bar{\boldsymbol{\Xi}}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} d\Omega$$

$$B_6 = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\boldsymbol{\eta}^h) - \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h)) \text{DIV}(\Delta\varphi^h) d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) (\overline{\text{DIV}}(\Delta\varphi^h) - \text{DIV}(\Delta\varphi^h)) \text{DIV}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

$$B_7 = \int_{\Omega_0} 2(\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \text{SIM}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h)) \cdot \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \text{GRAD}(\boldsymbol{\eta}^h) d\Omega$$

$$\text{donde } \text{SIM}(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h)) = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \text{GRAD}(\Delta\varphi^h) + \text{GRAD}^T(\Delta\varphi^h) \cdot \bar{\mathbf{F}} \right)$$

Cuadro 4.5: Linealización del trabajo virtual realizado por las fuerzas internas G^{int} para la formulación mixta.

$$D_{\varphi} \mathbf{F}^{int}(\varphi^h, \vartheta^h(\varphi^h), \pi^h(\varphi^h); \Delta\varphi^h) = \sum_{k=1}^7 \mathbf{K}_k(\varphi^h, \vartheta^h, \pi^h)$$

- Linealización en términos de las variables espaciales:

$$[\mathbf{K}_1]_{impl} = \int_{\Omega_0} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \bar{\tau}_{kj} d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_2]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \bar{c}_{ijkl}^{ep} d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_3]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} \left[\left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \bar{\tau}_{lj} \right] d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_4]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}^2} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) (\mathbf{g} : \bar{c}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{dim} \bar{p}^h) d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_5]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} \left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ablj}^{ep} + \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ijab}^{ep} \right] d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_6]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} + \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right] d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_7]_{impl} = \int_{\Omega_0} (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{il} + \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) d\Omega$$

- Linealización en términos de las variables materiales:

$$[\mathbf{K}_1]_{impl} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \bar{S}_{jk} d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_2]_{impl} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{F}_{ir} \bar{\Xi}_{rjks}^{ep} \bar{F}_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_3]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \left(\bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{F}_{ik} + \bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_j} \bar{F}_{lk} \right) \bar{S}_{kj} d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_4]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}^2} \bar{D}_{im} \bar{D}_{lp} (\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{ep} : \bar{\mathbf{C}} + 2 n_{dim} \bar{p}^h) d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_5]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \left(\bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_d} \bar{C}_{ab} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{F}_{lc} + \bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_b} \bar{F}_{ia} \bar{\Xi}_{abcd}^{ep} \bar{C}_{cd} \right) d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_6]_{impl} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \left(\bar{D}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_s} \bar{F}_{sl}^{-1} + \bar{D}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \bar{F}_{ri}^{-1} \right) d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_7]_{impl} = \int_{\Omega_0} (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{dim}}} \bar{F}_{ia} \bar{C}_{ab}^{-1} \left(\bar{F}_{lb} \frac{\partial N_p}{\partial X_c} + \bar{F}_{lc} \frac{\partial N_p}{\partial X_b} \right) \bar{C}_{cd}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_d} d\Omega$$

$$\text{donde } \bar{D}_{im} = \left(\left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{F}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \right) - \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{dim}}} \bar{F}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r}$$

$$\bar{(\cdot)} \Big|_{(e)} = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{(\cdot)} d\Omega$$

Cuadro 4.6: Linealización del vector de fuerzas internas \mathbf{F}^{int} para la formulación mixta.

$$\bar{\mathbf{K}}_{LOC(m)(p)}^{cont} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{TmTp}^{cont} & \bar{\mathbf{K}}_{TmNp}^{cont} \\ \bar{\mathbf{K}}_{NmTp}^{cont} & \bar{\mathbf{K}}_{NmNp}^{cont} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{t}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} & \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{(m)(p)}^{cont} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{TmTp}^{cont} &= -\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - \\ &\quad - \delta_{mp} \left[\frac{\alpha}{\Delta t_{n+1}} \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + k \left(\mathbf{F}_{Nm}^* - \text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Tm}^* \right) \right] \\ \bar{\mathbf{K}}_{TmNp}^{cont} &= -\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{(m)(p)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \\ \bar{\mathbf{K}}_{NmTp}^{cont} &= \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(m)} - k \delta_{mp} \left[\text{sign}(\hat{V}_{Tm}^{rel}) \left| \hat{V}_{Tm}^{rel} \right|^\alpha \tilde{\mathbf{F}}_{Nm}^* + \mathbf{F}_{Tm}^* \right] \\ \bar{\mathbf{K}}_{NmNp}^{cont} &= \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \cdot \left(\sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_{k(m)(p)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(m)} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{F}_m^* = \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla N_m d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_m^* = \int_{\Omega_0} \mu_d \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla N_m d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \mu_d \rho_0 \mathbf{B} d\Omega$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_k + \bar{\mathbf{K}}^{fric}$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_1 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} \tau_{jk} d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_2 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_j} c_{ijkl}^{ep} \frac{\partial N_p}{\partial x_k} d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_3 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} \left[\mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} + \left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \bar{\tau}_{lj} \right] d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_4 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}^2} \left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right) (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{c}}^{ep} : \mathbf{g} + 2 n_{dim} \bar{p}^h) d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_5 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{dim}} \left[\left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ablj}^{ep} + \mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{ab} \bar{c}_{ijab}^{ep} \right] d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_6 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{dim}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left[\left(\mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_i} - \mu_d \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} + \mu_d \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_l} - \frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right] d\Omega$$

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_7 \right]_{imlp} = \int_{\Omega_0} \mu_d (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{\partial N_p}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta_{il} + \frac{\partial N_p}{\partial x_l} \frac{\partial N_m}{\partial x_l} \right) d\Omega$$

$$\left[\bar{\mathbf{K}} \right]_{imlp}^{fric} = - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\bar{\tau}_{ij} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} - \rho_0 B_i N_m \right) \frac{\partial N_p}{\partial x_l} d\Omega$$

$$\left(\bar{\cdot} \right)_{(e)} = \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{\cdot} d\Omega$$

Cuadro 4.7: Linealización de las fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} para la formulación mixta (representación en coordenadas locales utilizando variables espaciales).

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_m^* &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{GRAD}(N_m) d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \\
\tilde{\mathbf{F}}_m^* &= \int_{\Omega_0} \mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{GRAD}(N_m) d\Omega - \int_{\Omega_0} N_m \mu_d \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \\
\bar{\mathbf{M}} &= \sum_{k=1}^7 \tilde{\mathbf{K}}_k + \bar{\mathbf{K}}^{fric} \\
[\mathbf{K}_1]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{\text{dim}}}} \delta_{il} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \bar{\mathbf{S}}_{jk} d\Omega \\
[\mathbf{K}_2]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{\text{dim}}}} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{ir} \bar{\Xi}_{rjks}^{\text{ep}} \bar{\mathbf{F}}_{ls} \frac{\partial N_p}{\partial X_k} d\Omega \\
[\mathbf{K}_3]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \left(\mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{ik} + \tilde{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_j} \bar{\mathbf{F}}_{lk} \right) \bar{\mathbf{S}}_{kj} d\Omega \\
[\mathbf{K}_4]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}^2} \tilde{\mathbf{D}}_{im} \bar{\mathbf{D}}_{lp} (\bar{\mathbf{C}} : \bar{\Xi}^{\text{ep}} : \bar{\mathbf{C}} + 2 n_{\text{dim}} \bar{p}^h) d\Omega \\
[\mathbf{K}_5]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{n_{\text{dim}}} \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_d} \bar{\mathbf{C}}_{ab} \bar{\Xi}_{abcd}^{\text{ep}} \bar{\mathbf{F}}_{lc} + \mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_b} \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\Xi}_{abcd}^{\text{ep}} \bar{\mathbf{C}}_{cd} \right) d\Omega \\
[\mathbf{K}_6]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \frac{2}{n_{\text{dim}}} (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{im} \frac{\partial N_p}{\partial X_s} \bar{\mathbf{F}}_{sl}^{-1} + \mu_d \bar{\mathbf{D}}_{lp} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \right) d\Omega \\
[\mathbf{K}_7]_{imlp} &= \int_{\Omega_0} \mu_d (\bar{p}^h - \pi^h) \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{2}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ia} \bar{\mathbf{C}}_{ab}^{-1} \left(\bar{\mathbf{F}}_{lb} \frac{\partial N_p}{\partial X_c} + \bar{\mathbf{F}}_{lc} \frac{\partial N_p}{\partial X_b} \right) \bar{\mathbf{C}}_{cd}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_d} d\Omega \\
\mathbf{K}_{imlp}^{fric} &= - \int_{\Omega_0} \eta \frac{d\mu_d}{d\eta} \left(\left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ij} \bar{\mathbf{S}}_{jk} \frac{\partial N_m}{\partial X_k} - \rho_0 \mathbf{B}_i N_m \right) \overline{\left(\left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{rl}^{-1} \frac{\partial N_p}{\partial X_r} \right)} d\Omega \\
\text{donde } \bar{\mathbf{D}}_{im} &= \overline{\left(\left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \right)} - \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \\
\tilde{\mathbf{D}}_{im} &= \overline{\left(\mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \right)} - \mu_d \left(\frac{J^h}{J^h} \right)^{\frac{1}{n_{\text{dim}}}} \bar{\mathbf{F}}_{ri}^{-1} \frac{\partial N_m}{\partial X_r} \\
\bar{(\cdot)} \Big|_{(e)} &= \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{H}_{(e)}^{-1} \cdot \int_{\Omega_0^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) \bar{(\cdot)} d\Omega
\end{aligned}$$

Cuadro 4.8: Linealización de las fuerzas externas \mathbf{F}^{ext} para la formulación mixta (descripción en coordenadas locales utilizando variables materiales).