¿ Qué habremos de pensar de la pregunta : es verdadera la geometría euclidiana ? Carece de sentido. Lo mismo sucedería al preguntar si son verdaderas las coordenadas cartesianas y falsas las polares. Una geometría no puede ser más verdadera que otra; sólo mas conveniente.

H. POINCARE (1854-1912)

ANEJO A3

FORMULACION BASICA DE LA APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS ESTATICOS Y LINEALES DE CALCULO ESTRUCTURAL EN TENSION PLANA, DEFORMACION PLANA, SIMETRIA DE REVOLUCION Y ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

A3.1 ECUACIONES DE ESTADO

MODELO ANALÍTICO

Ecuaciones de Equilibrio

$$\iiint_V \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma}\, dV = \iiint_v \delta \bar{u}^T \bar{b}\, dV + \iint_\Gamma \delta \bar{u}^T \bar{t}\, d\Omega +$$

$$+ \iint_C \delta \bar{u}^T \bar{q}\, dl + \sum \delta \bar{u}^T \bar{P}$$

Ecuaciones Constitutivas

$$\bar{\sigma} = \underset{\sim}{D} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_o) + \bar{\sigma}_o$$

Ecuaciones de Compatibilidad

$$\bar{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}\, \bar{u}$$

MODELO NUMÉRICO

Interpolación Funcional y Geométrica

$\bar{u} = \underset{\sim}{N} \bar{a}$ (interpolación de desplazamientos)

$\bar{r} = \underset{\sim}{N} \bar{r}_n$ (interpolación de geometría)

Planteamiento Numérico Global

$$\bar{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{N}\, \bar{a} = \underset{\sim}{B}\, \bar{a}$$

$$\bar{\sigma} = \underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{B}\, \bar{a} - \bar{\varepsilon}_o) + \bar{\sigma}_o$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{K} \bar{a} = \bar{f} + \bar{R} \\ \bar{a}_v = \bar{p} \end{array}}$$

siendo

$$\underset{\sim}{K} = \iiint_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dV$$

$$\bar{f} = \iiint_V \underset{\sim}{B}^T (\underset{\sim}{D}\, \bar{\varepsilon}_o - \bar{\sigma}_o) dV$$

$$+ \iiint_V \underset{\sim}{N}^T\, \bar{b}\, dV + \iint_\Gamma \underset{\sim}{N}^T\, \bar{t}\, d\Omega +$$

$$+ \int_C \underset{\sim}{N}^T\, \bar{q}\, dl + \sum \underset{\sim}{N}^T\, \bar{P} \qquad (*)$$

(*) Se utiliza la notación clásica de Zienkiewicz, siendo en particular:

$\bar{b}$ = vector de fuerzas volumétricas
$\bar{t}$ = vector de fuerzas de superficie
$\bar{q}$ = vector de fuerzas a lo largo de una linea
$\bar{P}$ = vector de fuerzas puntuales
$\bar{r}_n$ = vector de coordenadas nodales

A3.2 ANALISIS BIDIMENSIONAL

A3.2.1 Definiciones

$$\bar{u} = \underset{\sim}{N}\,\bar{a} \qquad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \end{Bmatrix}$$ (desplazamientos)

$$\bar{r} = \underset{\sim}{N}\,\bar{r}_n \qquad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \cdots \end{Bmatrix}$$ (geometría)

$$\underset{\sim}{N} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} N_1(\bar{\zeta}) & 0 & N_2(\bar{\zeta}) & 0 & \\ & & & & \cdots \\ 0 & N_1(\bar{\zeta}) & 0 & N_2(\bar{\zeta}) & \end{array}\right]$$ (funciones de forma)

$$\bar{\zeta} = \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix}$$ (coordenadas isoparamétricas)

$$J = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{\zeta}}\,\bar{r}_n$$ (matriz Jacobiana)

Tensión plana

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\upsilon)}{2} \end{bmatrix} \qquad \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_o = \alpha \, \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$; si hay esfuerzos térmicos

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Deformación plana

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\upsilon)}{2} \end{bmatrix} \; ; \; \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \; ; \; \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_o = \alpha \, \Delta T \, (1+\upsilon) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$; si hay esfuerzos térmicos

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Simetría de Revolución

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \quad ; \; \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \; ; \; \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_o = \alpha \, \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$; si hay esfuerzos térmicos

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}$$

x = distancia al eje de simetría

A3.2.2 Planteamiento Numérico Bidimensional

Escribiremos las ecuaciones generales en el caso bidimensional

$$\underset{\sim}{K} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \, h \, d\Omega$$

$$\bar{f} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T (\underset{\sim}{D} \bar{\varepsilon}_o - \bar{\sigma}_o) h \, d\Omega + \iint_{\Omega} N^T \bar{b} \, h \, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma} \underset{\sim}{N}^T \bar{t} \, h \, dl + \sum \underset{\sim}{N}^T \bar{P} \, h$$

siendo **h** el espesor de integración que escribiremos como

$$h = \sum_i h_i N_i (\bar{\zeta})$$

con

h_i = espesor en el nodo i (Tensión plana)
h_i = 1 (deformación plana)
h_i = $2 \pi x_i$; x_i = distancia al eje de simetría del nodo i (simetría de revolución)

integrando elemento a elemento se obtiene

$$\underset{\sim}{K} = \sum_e \underset{\sim}{K}_e$$

$$\bar{f} = \sum_e \bar{f}_{\Omega_e} + \sum_e \bar{f}_{\Gamma_e} + \sum \bar{f}_P$$

con

$$\underset{\sim}{K}_e = \iint_{\Omega_e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \, h \, d\Omega$$

$$\bar{f}_{\Omega_e} = \iint_{\Omega_e} \left[\underset{\sim}{B}^T (\underset{\sim}{D} \bar{\varepsilon}_o - \bar{\sigma}_o) + \underset{\sim}{N}^T \bar{b} \right] h \, d\Omega$$

$$\bar{f}_{\Gamma_e} = \int_{\Gamma_e} \underset{\sim}{N}^T \bar{t} \, h \, dl$$

$$\bar{f}_P = \underset{\sim}{N}^T \bar{P} \, h$$

donde los elementos de la matriz $\underset{\sim}{B}$ se obtienen a partir de los de

$$\frac{\partial \underset{\approx}{N}}{\partial \bar{\bar{r}}} = \frac{\partial \underset{\approx}{N}}{\partial \bar{\bar{\zeta}}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\bar{r}}} = \frac{\partial \underset{\approx}{N}}{\partial \bar{\bar{\zeta}}} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\bar{\zeta}}} \right)^{-1} = \frac{\partial \underset{\approx}{N}}{\partial \bar{\bar{\zeta}}} \underset{\sim}{J}^{-1}$$

y además, en simetría de revolución, los de

$$\frac{1}{x} \underset{\sim}{N}$$

A3.3 ANALISIS TRIDIMENSIONAL

A3.3.1 Definiciones

$$\bar{u} = \underset{\sim}{N}\,\bar{a} \qquad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \cdots \end{Bmatrix}$$ (desplazamientos)

$$\bar{r} = \underset{\sim}{N}\,\bar{r}_n \qquad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \cdots \end{Bmatrix}$$ (geometría)

$$\underset{\sim}{N} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} N_1(\bar{\zeta}) & 0 & 0 & N_2(\bar{\zeta}) & 0 & 0 & \\ 0 & N_1(\bar{\zeta}) & 0 & 0 & N_2(\bar{\zeta}) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1(\bar{\zeta}) & 0 & 0 & N_2(\bar{\zeta}) & \end{array}\right]$$ (func. de forma)

$$\bar{\zeta} = \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}$$ (coordenadas isoparamétricas)

$$\underset{\sim}{J} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{\zeta}}\bar{r}_n$$ (matriz Jacobiana)

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & (1-\upsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_o = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$; si hay esfuerzos térmicos

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A3.3.2 Planteamiento Numérico Tridimensional

Escribiremos los términos de las ecuaciones generales en el caso tridimensional integrando elemento a elemento en la forma:

$$\underset{\sim}{K} = \sum_e \underset{\sim}{K}_e$$

$$\bar{f} = \sum_e \bar{f}_{V_e} + \sum_e \bar{f}_{\Gamma_e} + \sum_e \bar{f}_{C_e} + \sum \bar{f}_P$$

con

$$\underset{\sim}{K}_e = \iiint_{V_e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dV$$

$$\bar{f}_{V_e} = \iiint_{V_e} \left[\underset{\sim}{B}^T (\underset{\sim}{D}\, \bar{\varepsilon}_o - \bar{\sigma}_o) + \underset{\sim}{N}^T \bar{b} \right] dV$$

$$\bar{f}_{\Gamma_e} = \iint_{\Gamma_e} \underset{\sim}{N}^T \bar{t}\, d\Omega$$

$$\bar{f}_{C_e} = \int_{C_e} \underset{\sim}{N}^T \bar{q}\, dl$$

$$\bar{f}_P = \underset{\sim}{N}^T \bar{P}$$

donde los elementos de la matriz $\underset{\sim}{B}$ se obtienen a partir de los de

$$\frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{-1} = \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \bar{\zeta}} \underset{\sim}{J}^{-1}$$