

## *Capítulo 2*

# El código de transporte **PRETOR**

El estudio del plasma en un dispositivo de fusión requiere conocer con el máximo detalle posible un gran número de magnitudes físicas. En este sentido los códigos de simulación son un complemento a la experimentación muy útiles. Estos códigos además permiten predecir las propiedades de futuros dispositivos aun por construir, en este sentido son capaces de determinar cuanta energía se perderá a través del plasma, que cantidad total de energía podrá confinar el plasma, etc.

Uno de los principales aspectos a analizar en un plasma de fusión es el balance de energía, por lo tanto la modelización de la difusión de la energía es básica en la investigación de la física del plasma.

## 2.1 DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO

PRETOR es un código de simulación de plasmas termonucleares confinados por campos magnéticos dentro de dispositivos de fusión [Bou92]. PRETOR permite simular la variación radial y temporal de las principales magnitudes físicas que caracterizan un plasma dada la geometría del dispositivo de fusión y sus condiciones de operación.

El núcleo principal de PRETOR lo constituye el módulo que resuelve el sistema de ecuaciones no-lineales acopladas correspondientes al transporte de la energía -de iones y electrones-, la difusión de iones, la carga media y a las distintas especies de neutros, y por último la ecuación de difusión de la corriente. Los coeficientes de transporte de energía y partículas que intervienen en estas ecuaciones se determinan mediante el modelo de Rebut-Llalia-Watkins [RLW89] implementado en el código.

Otros módulos de PRETOR permiten determinar la deposición de potencia auxiliar ya sea por inyección de haces de neutros, NBI, o per radiofrecuencia, ECRH o ICRH. PRETOR también puede determinar el inventario de partículas, incluyendo la introducción de combustible, su quemado y la producción de cenizas, así como simular ciertos efectos magnetohidrodinámicos como los dientes de sierra, el *balloning*, etc.

La topología magnética del plasma está descrita por una serie de superficies magnéticas anidadas, a través de las cuales se determina la difusión tanto de partículas como de energía.

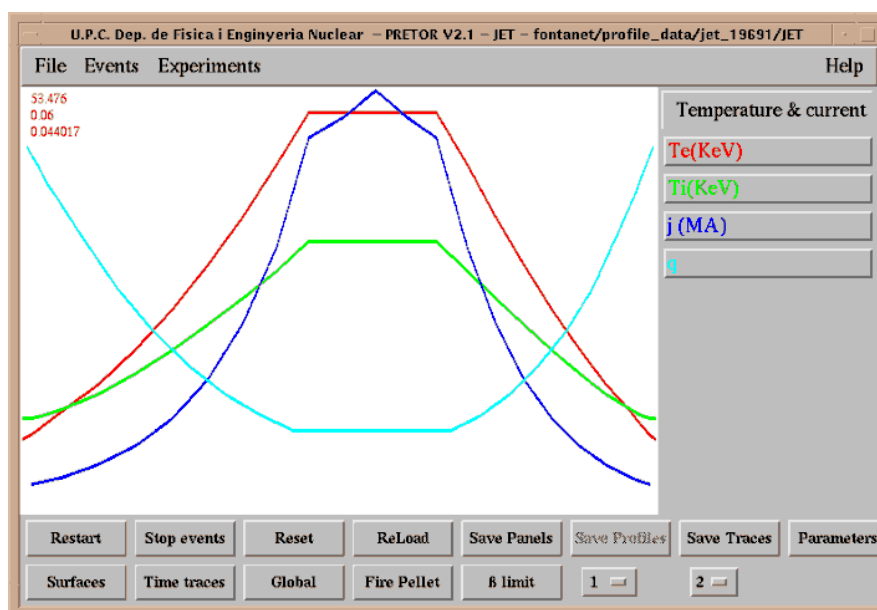
Para iniciar la simulación hay que introducir en el código una serie de datos que describen tanto el dispositivo de fusión como la descarga a simular. Estos datos hacen referencia a:

- **Geometría del dispositivo:** radio mayor y menor del toro, elongación y triangularidad del plasma, etc.
- **Descripción de la descarga:** densidad de partículas, campo magnético, corriente total del plasma, potencia adicional, etc.
- **Control del simulador:** tiempo total de la simulación, paso de tiempo, número de superficies magnéticas, etc.
- **Modelo de transporte:** parámetros correspondientes al modelo de transporte adecuados para cada descarga.

Estos datos pueden ser leídos desde un archivo o bien introducirse de forma interactiva en cualquier instante de la simulación gracias al menú incorporado en el código. Los métodos de introducción de datos se completan con la posibilidad de seguimiento de alguna de las magnitudes experimentales, como la corriente del plasma, la densidad electrónica, el número atómico efectivo, la densidad de potencia adicional por radiofrecuencia y por NBI.

La interfase gráfica de PRETOR permite visualizar los resultados de la simulación tanto de la evolución temporal de las magnitudes globales del plasma como de los perfiles en función del radio de las magnitudes locales (figura 2.1).

PRETOR ha sido desarrollado en el JET para simular descargas de grandes tokamaks y ha sido validado en un amplio rango de operación de JET y de otros dispositivos. También ha sido utilizado para simular el comportamiento del plasma en distintos escenarios de operación de ITER.



**Figura 2.1** Ventana de presentación de resultados de PRETOR en las que se representan la temperatura electrónica ( $T_e$ ), temperatura iónica ( $T_i$ ), densidad de corriente ( $j$ ) y factor de seguridad ( $q$ ) para la descarga #19691 de JET.

## 2.2 TRANSPORTE EN PLASMAS DE FUSIÓN

### 2.2.1 Introducción

La capacidad de confinamiento de un dispositivo de fusión determina principalmente la posibilidad de un futuro reactor de alcanzar la ignición. La energía producida por las reacciones de fusión debe mantenerse dentro del plasma durante un tiempo lo suficientemente largo como para conservar las condiciones en las que el quemado de combustible es autosostenido. Asimismo, también es muy importante que la energía introducida en el plasma por los diferentes métodos de calentamiento adicional permanezca dentro del mismo el máximo de tiempo posible.

La modelización del transporte de energía a través del plasma permite determinar la variación de la temperatura en una sección del plasma. Sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería de un dispositivo de fusión es más conveniente el uso de parámetros globales para caracterizar el transporte de calor. En este sentido el tiempo de confinamiento de la energía,  $\tau_E$ , es uno de los parámetros más representativos.

Históricamente el transporte en el plasma ha sido sucesivamente estudiado por la teoría clásica y neoclásica de colisiones, sin embargo los resultados experimentales muestran que la difusión de energía y partículas es mucho más grande de lo esperado, esto indica la existencia de un proceso de transporte desconocido, al que se le denomina transporte anómalo. Existen diversos modelos empíricos que caracterizan este transporte anómalo, entre ellos el de Rebut-Lallia-Watkins [RLW89] que está implementado en PRETOR y que se describirá en detalle en el apartado 2.3

### 2.2.2 Modelo de transporte local

Los modelos locales del transporte, como su propio nombre indica, determinan los coeficientes de difusión como una propiedad de un punto del plasma y permiten obtener una valiosa información sobre la distribución espacial de las magnitudes del plasma como la temperatura, la densidad de partículas, la corriente, etc. Esta información es muy útil para comprender fenómenos localizados. Las magnitudes globales también pueden ser estimadas aplicando modelos locales mediante la integración de los perfiles radiales correspondientes.

En un plasma confinado magnéticamente se distingue entre el coeficiente de transporte paralelo y el perpendicular al campo magnético. En general se cumple que la componente paralela es mucho mayor que la perpendicular, por lo tanto las propiedades de la configuración magnética vienen determinadas por los coeficientes perpendiculares, mientras que se puede considerar que las magnitudes físicas son uniformes sobre toda una superficie magnética.

Las colisiones entre partículas producen una deriva de estas y en consecuencia una difusión en la dirección radial tanto de partículas como de energía. Este transporte es el que determina la energía global del plasma y los tiempos de confinamiento de la energía y de las partículas.

El flujo de partículas,  $\Gamma$ , que atraviesa una superficie magnética del plasma se expresa en función de la densidad y de su gradiente por la siguiente expresión general (en unidades del sistema internacional)

$$\vec{\Gamma} = -D\vec{\nabla}n + n\vec{V}_p \quad (\text{Ec. 2.1})$$

El primer término de la expresión anterior es la contribución difusiva, dada por el gradiente de la densidad y caracterizada por el coeficiente de difusión,  $D$ . El segundo término corresponde a la parte convectiva del flujo y se debe al movimiento de las partículas con velocidad  $V_p$ , llamada velocidad de *pinch*.

Por otro lado el flujo de calor,  $\phi$ , viene dado por la siguiente expresión (también en unidades del SI)

$$\vec{\phi} = n\chi\vec{\nabla}kT + \frac{3}{2}(kT)\vec{\Gamma} \quad (\text{Ec. 2.2})$$

La ecuación de continuidad relaciona la variación temporal de la densidad con el flujo y con el término fuente de partículas,  $S$ . En un plasma con geometría toroidal la ecuación de continuidad en la coordenada radial se escribe como [ITE95]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{V'}\frac{\partial}{\partial \rho}(V'\Gamma) + S \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Análogamente, la ecuación de conservación de la energía [ITE95]

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(nkT) = -\frac{1}{V'}\frac{\partial}{\partial \rho}(V'\phi) + q_{add} + q_{\Omega} + q_{\alpha} - q_{rad} + q_{equi} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

permite obtener la evolución de la temperatura. El primer término a la derecha de la igualdad representa el transporte radial de calor, los demás términos corresponden a las diferentes fuentes o sumideros de potencia: adicional -ya sea por NBI, radiofrecuencia, etc-,  $q_{add}$ , calentamiento óhmico,  $q_{\Omega}$ , calentamiento debido a las partículas alfa de fusión,  $q_{\alpha}$ , potencia radiada,  $q_{rad}$ , y la potencia de equipartición entre electrones e iones,  $q_{equi}$ .

### 2.2.3 Teoría clásica

La forma más sencilla de abordar el cálculo de los coeficientes de difusión es considerar que el transporte es debido a las colisiones de una partícula con otras partículas del plasma, estas

colisiones desvían su trayectoria con un salto de magnitud  $\Delta r$ . Si este salto es aleatorio, en el sentido de que puede producirse en cualquier dirección con igual probabilidad, este proceso es conocido como *random walk*. En este caso el coeficiente de difusión viene dado por

$$D \approx \frac{(\Delta r)^2}{\Delta t} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

donde  $\Delta t$  es el tiempo entre dos colisiones consecutivas. En un plasma totalmente ionizado la interacción entre partículas es principalmente por la interacción coulombiana entre las cargas. En este caso  $\Delta t$  corresponde al inverso de la frecuencia de colisión coulombiana obtenida por la acumulación de dispersiones de ángulo pequeño. La frecuencia de colisión entre electrones e iones [GoR95]

$$\nu_{ei} = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v^3} \quad (\text{Ec. 2.6})$$

depende de la velocidad relativa de los electrones con los iones,  $v$ . Promediando este valor sobre una distribución maxwelliana de la velocidad se obtiene

$$\langle \nu_{ei} \rangle = \frac{\sqrt{2} n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (kT_e)^{3/2}} \quad (\text{Ec. 2.7})$$

Los electrones también colisionan con otros electrones y los iones con otros iones con las siguientes frecuencias [GoR95]

$$\langle \nu_{ee} \rangle \approx \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{\epsilon_0^2 m_e^{1/2} (kT_e)^{3/2}} \approx \frac{\langle \nu_{ei} \rangle}{n_i Z^2 / n_e} \quad (\text{Ec. 2.8})$$

$$\langle \nu_{ii} \rangle = \frac{n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_i^{1/2} (kT_i)^{3/2}} = 2^{-1/2} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \langle \nu_{ei} \rangle \quad (\text{Ec. 2.9})$$

En las expresiones anteriores  $\ln \Lambda$  es el llamado logaritmo coulombiano que aparece debido a que en un plasma el alcance del campo eléctrico de una carga no es infinito sino que el apantallamiento de Debye suprime el campo a largas distancia. De esta forma el máximo parámetro de impacto es el radio de Debye,  $\lambda_D$ ,

$$\lambda_D = (\epsilon_0 kT / ne^2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

y en consecuencia el logaritmo coulombiano viene dado por la expresión

$$\Lambda = \frac{12\pi n}{Z} \lambda_D^3 \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Volviendo al formalismo del *random walk*, para  $\Delta r$  se toma el radio de Larmor  $\rho_L$

$$\rho_L = \frac{\sqrt{2mkT}}{eB} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

La difusión perpendicular al campo magnético se debe únicamente a las colisiones entre electrones e iones, las colisiones entre partículas iguales, es decir electrón-electrón e ion-ion, no contribuyen a la difusión hasta términos de primer orden del gradiente de la densidad. Debido a la conservación de la cantidad de movimiento las colisiones entre partículas iguales producen un desplazamiento de los centros de giro de ambas partículas igual pero en sentido contrario. El efecto de múltiples colisiones implica que no se produce un movimiento neto de los iones o de los electrones.

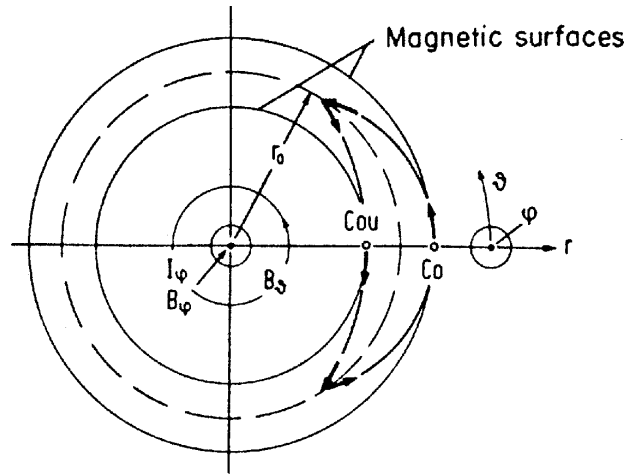
Otra consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento es que la difusión en el plasma es intrínsecamente ambipolar. Si dos partículas de igual carga pero de signo contrario girando en un campo magnético colisionan deben experimentar un desplazamiento de sus centros de giro de igual magnitud y en la misma dirección.

## 2.2.4 Teoría neoclásica

La teoría clásica considera un plasma con geometría cilíndrica y campo magnético uniforme, por lo tanto no tiene en cuenta los efectos de la geometría toroidal. Este es el objetivo de la teoría neoclásica. Una de las principales implicaciones de la geometría toroidal es que el campo magnético no es uniforme sino que es más intenso en la parte interior del toro, de forma que las partículas que se mueven a lo largo de una línea de campo ven un campo más intenso cuando pasan por la parte más interna del toro. Este hecho provoca que aquellas partículas que no tienen una velocidad paralela al eje suficientemente grande pueden quedar atrapadas en este pozo de potencial que actúa como un espejo magnético. Estas partículas atrapadas hay que distinguirlas de las partículas no-atrapada o pasantes que no son reflejadas por el campo magnético.

La proporción de partículas atrapadas viene dado por  $n_t/n = \sqrt{2\varepsilon}$ , donde  $\varepsilon = a/R$  es el inverso de la razón de aspecto. La proyección sobre un plano poloidal de la trayectoria de las partículas atrapadas presenta una forma de banana (ver figura 2.2), por lo que estas órbitas reciben el nombre de órbitas banana. El ancho de las órbitas banana está dado en función del radio de Larmor,  $\rho_L$ , y del factor de seguridad,  $q$ , por [Do180]

$$r_b \approx \frac{\rho_L q}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (\text{Ec. 2.13})$$



**Figura 2.2** Proyección sobre la sección transversal del plasma de la trayectoria de las partículas atrapadas en un plasma toroidal [Rae86].

La existencia de las partículas atrapadas lleva a la definición de la frecuencia de colisión efectiva,

$$\nu_{eff} \approx \frac{\nu_{ei}}{\epsilon} \quad (\text{Ec. 2.14})$$

donde  $\nu_{ei}$  es la frecuencia de colisión descrita en la ecuación 2.7.

Finalmente, se define la relación entre frecuencias,  $\nu^* = \nu_{eff} / \nu_t$ , donde  $\nu_t$  es la frecuencia de tránsito de las órbitas banana dado por el número de órbitas completadas por una partícula en la unidad de tiempo,

$$\nu_t \approx \frac{B_p \epsilon^{1/2}}{a B_t} \left( \frac{\mu_m B_t}{m} \right)^{1/2} \approx \frac{\nu_{th}}{qR} \epsilon^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Según sea el valor de  $\nu^*$ , es decir según sea la relación entre la frecuencia efectiva y la frecuencia de tránsito el transporte se clasificará en los siguientes regímenes [Zoh95]:

**Régimen Pfirsch-Schüter.** Cuando la frecuencia de colisión es mayor que la frecuencia de tránsito de las órbitas banana las partículas son dispersadas antes de completar una órbita completa. Este caso es válido para  $\nu^* > \epsilon^{-3/2}$ . El coeficiente de difusión viene caracterizado por el radio de Larmor y por la frecuencia de colisión según la siguiente expresión

$$D_{PS} = q^2 \rho_L^2 \nu_{ei} = q^2 D_{clas} \quad (\text{Ec. 2.16})$$



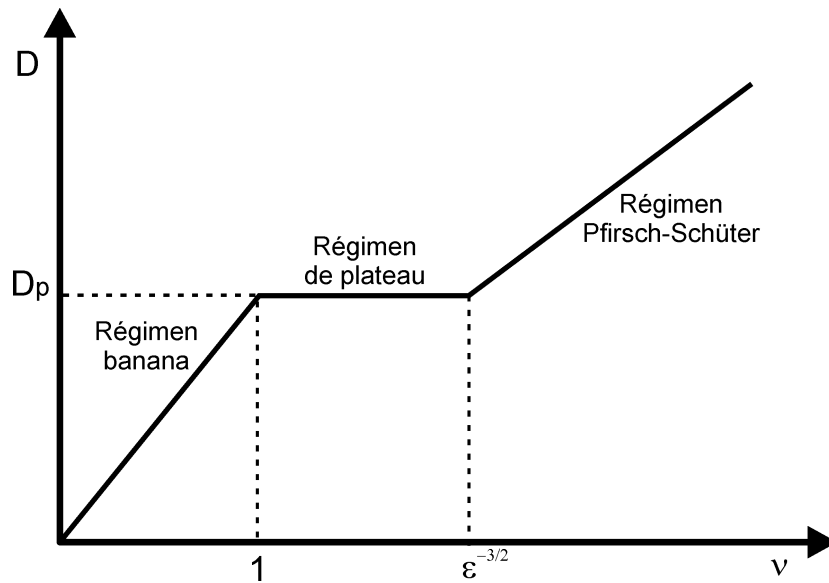
**Régimen banana.** En el caso contrario, cuando la frecuencia efectiva de colisión es muy baja ( $\nu^* < 1$ ), las partículas recorren varias veces la órbita antes de ser dispersadas. El coeficiente de difusión se determina aplicando los argumentos de *random walk* para las  $\sqrt{2\varepsilon}$  partículas atrapadas con un salto característico dado por el ancho de las órbitas banana,  $r_b$ , y con un tiempo típico de  $1/\nu_{eff}$ .

$$D_B \propto \sqrt{2\varepsilon} r_b^2 \nu_{eff} \propto \varepsilon^{-3/2} \rho_L^2 q^2 \nu_{ei} = \varepsilon^{-3/2} q^2 D_{clas} \quad (\text{Ec. 2.17})$$

**Régimen de plateau.** Entre los dos regímenes anteriores existe esta zona de transición que se da en el rango  $1 < \nu^* < \varepsilon^{-3/2}$ . Para estos valores el ritmo de colisiones arranca un elevado número de partículas atrapadas pero las partículas no-atrapadas pueden efectuar varias órbitas antes de colisionar. En este régimen el valor de  $D$  es independiente de la frecuencia de colisión y viene dada por la expresión:

$$D_p \approx \rho_L^2 \frac{\nu_{th} q}{R} \quad (\text{Ec. 2.18})$$

Estos tres regímenes se muestran en la figura 2.3, donde se representa la difusividad  $D$  en función de la frecuencia de colisión.



**Figura 2.3** Variación del coeficiente de difusión neoclásico con la razón entre la frecuencia de colisión efectiva y la frecuencia de tránsito de las órbitas atrapadas. Se muestran los tres regímenes deducidos de la teoría neoclásica. Adaptada de [Che74]

Debido a los efectos neoclásicos el transporte se incrementa hasta dos ordenes de magnitud respecto de los valores obtenidos de la teoría clásica.

## 2.2.5 Transporte anómalo

Para ajustar los valores experimentales de los dispositivos de fusión actuales, la difusividad de partículas y la conducción de calor (especialmente de los electrones) debe ser aún unos dos ordenes de magnitud superiores que los valores predichos por la teoría neoclásica. Esto muestra la existencia de un transporte, llamado anómalo, que no puede ser explicado por teorías colisionales.

El origen del transporte anómalo se encuentra en la generación de turbulencias en el plasma que modifican la configuración magnética del mismo. Debido a la complejidad de este fenómeno, la forma más fácil de tratar el transporte anómalo es mediante parámetros globales obtenidos a partir de los datos experimentales, como por ejemplo el tiempo de confinamiento de la energía. Sin embargo, ciertos modelos locales del transporte, como el de Rebut-Lallia-Watkins (RLW) utilizan expresiones semi-empíricas para determinar los coeficientes de difusión anómalos.

## 2.3 MODELO DE TRANSPORTE DE REBUT-LALLIA-WATKINS

PRETOR utiliza, para ciertas magnitudes, unidades y múltiplos que no pertenecen al sistema internacional pero que son más convenientes para representar los valores típicos de los plasmas de fusión por confinamiento magnético. Las principales unidades usadas en PRETOR se muestran en la tabla 1. En el apéndice I se presenta un listado de las magnitudes que aparecen a lo largo de la presente tesis junto con su significado y unidades. En los casos en que no se utilicen estas unidades se indica explícitamente.

<i>Magnitud</i>	<i>Unidad</i>
Densidad	$10^{19} \text{ m}^{-3}$
Temperatura	keV
Corriente	MA
Densidad de corriente	$\text{MA m}^{-2}$
Campo magnético	T
Potencia	MW

*Tabla 2.1 Principales unidades utilizadas en PRETOR.*

### 2.3.1 Gradiente crítico de temperatura

El modelo de transporte propuesto por Rebut-Lallia-Watkins (RLW) supone que el transporte anómalo es debido a las turbulencias del campo magnético [RLW89]. Las expresiones del

flujo de calor para electrones e iones se han obtenido con argumentos adimensionales y heurísticos.

La principal suposición del modelo RLW es que cuando el gradiente de la temperatura de los electrones sobrepasa un valor límite se originan turbulencias magnéticas que hacen aumentar el transporte. Este fenómeno es similar a la transición entre el flujo laminar y flujo turbulento que se observa en la mecánica de fluidos cuando el número de Reynolds sobrepasa un valor crítico.

La existencia de este valor crítico del gradiente de temperatura tiene importantes consecuencias en el transporte:

- El flujo de calor es fuertemente no-lineal respecto de  $n_e \nabla T_e$
- Para descargas con perfiles planos de temperatura se espera el transporte neoclásico.
- El transporte es diferente si se calientan electrones o iones.

El valor crítico del gradiente de la temperatura de electrones viene dado por la siguiente expresión:

$$\nabla T_{e,crit} = C_{\nabla T_e,crit} \frac{I}{q} \left( \frac{\eta_s j B_t^3}{n_e T_e^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.19})$$

donde  $C_{\nabla T_e,crit}$  es una constante,  $\eta_s$  es una expresión simplificada de la resistividad de Spitzer sin correcciones neoclásicas

$$\eta_s = 0.028 \frac{Z_{eff}}{T_e^{1/2}} \quad (\text{Ec. 2.20})$$

### 2.3.2 Transporte de energía

El valor de la conductividad térmica de los electrones,  $\chi_e$ , viene dada por la suma de las contribuciones neoclásica,  $\chi_{e,neo}$ , y anómala,  $\chi_{e,an}$

$$\chi_e = \chi_{e,neo} + \chi_{e,an} \quad (\text{Ec. 2.21})$$

Para la conductividad neoclásica se tiene

$$\chi_{e,neo} \equiv C_{\chi_{e,neo}} \langle (\nabla \rho)^2 \rangle \frac{0.272}{2 R_0} \frac{T_e^{3/2} q}{B_t^2} v_e^* \quad (\text{Ec. 2.22})$$

donde

$$v_e^* = \begin{cases} 3.37 \longrightarrow si & v_e > 3.37 \\ v_e \longrightarrow si & v_e \leq 3.37 \end{cases} \quad \text{siendo } v_e = 1.178 \times 10^{-3} \frac{Z_{eff} R_0 q n_e}{\epsilon^{3/2} T_e^2} \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Para la difusión térmica anómala de los electrones se tiene

$$\chi_{e,an} = \chi_{e,RLW} \left( 1 - \frac{\nabla T_{e,crit}}{|\nabla T_e|} \right) H(|\nabla T_e| - \nabla T_{e,crit}) H(S - S_{crit}) H(S_{max} - S) \quad (\text{Ec. 2.24})$$

Siendo  $H$  la función de Heaviside y  $S$  el *shear*

$$S = \frac{1}{q^2} \frac{\partial q}{\partial \rho} \quad (\text{Ec. 2.25})$$

$S_{crit}$  es un valor crítico del *shear* por debajo del cual no se produce transporte anómalo y  $S_{max}=100$  es un valor máximo del *shear* por encima del cual tampoco se tiene transporte anómalo. Para  $\chi_{e,RLW}$  se tiene la siguiente expresión:

$$\chi_{e,RLW} = C_{\chi_{e,RLW}} (1 - \epsilon^{1/2}) \left( \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \rho} + 2 \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial \rho} \right) \left( \left| \frac{\partial q}{q^2 \partial \rho} \right| + 0.01 \right)^{-1} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \frac{(1 + Z_{eff})^{1/2}}{B_t R_0^{1/2}} \quad (\text{Ec. 2.26})$$

Para los iones, de forma análoga que en el caso de los electrones, se consideran la contribución neoclásica y la anómala

$$\chi_i = \chi_{i,neo} + \chi_{i,an} \quad (\text{Ec. 2.27})$$

Para calcular la difusividad térmica neoclásica se introduce

$$v_g = 8.331 \times 10^{-4} R_0 Z_i^4 \frac{n_i q}{T_i^2 \epsilon^{3/2}} \quad (\text{Ec. 2.28})$$

$$v_i = \frac{\alpha}{(1 + 0.36 \alpha v_g) \epsilon^{3/2}} ; \alpha = 1 + \frac{3}{2} \frac{n_{imp} Z_{imp}^2}{n_i Z_i^2} \quad (\text{Ec. 2.29})$$

La difusividad de los iones principales del plasma,  $\chi_{g,neo}$ , y de la primera impureza,  $\chi_{imp,neo}$ , son

$$\chi_{g,neo} = C_{\chi_{i,neo}} 0.003654 M_i^{1/2} Z_i^2 \frac{q^2 n_i}{T_i^{1/2} B_t^2} v_i \quad (\text{Ec. 2.30})$$

$$\chi_{imp,neo} = -C_{\chi_{i,neo}} 0.01218 M_{imp}^{1/2} Z_{imp}^2 \frac{q^2 n_{imp}}{T_i^{1/2} B_t^2} \quad (\text{Ec. 2.31})$$

siendo  $C_{\chi_{i,neo}}$  una constante. Finalmente se tiene

$$\chi_{i,neo} = \left\langle (\nabla \rho)^2 \right\rangle \frac{n_i \chi_{g,neo} + n_{imp} \chi_{imp,neo}}{n_{ion}} \quad (\text{Ec. 2.32})$$

$n_{ion} = n_i + n_{imp} + n_3$  es la densidad total de iones del plasma.  $n_3$  es la densidad de la segunda especie de impureza de número atómico  $Z_3$ . Esta densidad se toma como una fracción constante de la densidad de iones del plasma,  $n_3 = c_3 n_i$ .

La conductividad anómala de los iones está relacionada con la de los electrones según la expresión

$$\frac{\chi_{i,an}}{\chi_{e,an}} = C_{\chi_{i,e}} \frac{2T_e}{T_e + T_i} \frac{Z_i}{(1 + Z_{eff})^{1/2}} \frac{n_e - Z_{fast} n_{fast}}{n_{ion}} \quad (\text{Ec. 2.33})$$

donde  $C_{\chi_{i,e}}$  es una constante,  $Z_{fast}$  es el número atómico de los neutros inyectados por NBI y

$$Z_{eff} = \frac{1}{n_e} (n_i Z_i^2 + n_{imp} Z_{imp}^2 + n_3 Z_3^2 + n_{fast} Z_{fast}^2) \quad (\text{Ec. 2.34})$$

La densidad total de electrones,  $n_e$ , cumple la condición de casi-neutralidad

$$n_e = n_i Z_i + n_{imp} Z_{imp} + n_3 Z_3 + n_{fast} Z_{fast} \quad (\text{Ec. 2.35})$$

### 2.3.3 Transporte de partículas.

Para el cálculo del flujo de partículas también se considera que los coeficientes de difusión están determinados por los términos neoclásico y anómalo

$$D_i = D_{i,neo} + D_{i,an} \quad (\text{Ec. 2.36})$$

$$D_{imp} = D_{imp,neo} + D_{imp,an} \quad (\text{Ec. 2.37})$$

Para los coeficientes neoclásicos se tiene

$$D_{i,neo} = D_{e,neo} + 2C_{\chi_{i,neo}} \times 0.0038065 M_i^{1/2} \frac{q^2}{T_i^{1/2} B_t^2} Z_{imp}^2 n_{imp} \quad (\text{Ec. 2.38})$$

$$D_{imp,neo} = D_{e,neo} + 2C_{\chi_{i,neo}} \times 0.0038065 M_i^{1/2} \frac{q^2}{T_i^{1/2} B_t^2} (Z_i^2 n_i + Z_3^2 n_3) \quad (\text{Ec. 2.39})$$

donde  $C_{\chi_{i,neo}}$  es una constante y

$$D_{e,neo} = 0.6192 C_{\chi_{e,neo}} \frac{0.272}{2R_0} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{q T_e^{3/2}}{B_t^2} v_e^{**} \quad (\text{Ec. 2.40})$$

tomando

$$v_e^{**} = \begin{cases} 0.79 & \text{si } v_e > 0.79 \\ v_e & \text{si } v_e \leq 0.79 \end{cases} \quad (\text{Ec. 2.41})$$

siendo  $v_e$  la colisionalidad dada en la ecuación 2.23

Para los coeficientes anómalos de la difusión de iones e impureza principal se impone

$$D_{i,an} = D_{imp,an} = D_{e,an} \quad (\text{Ec. 2.42})$$

siendo

$$D_{i,an} = C_{D_{i,an}} \chi_{e,an}^* \quad (\text{Ec. 2.43})$$

$$\chi_{e,an}^* = \chi_e - \chi_{e,neo} \quad (\text{Ec. 2.44})$$

$\chi_{e,neo}$  viene dado por la expresión 2.22. Análogamente a los coeficientes de difusión, para las velocidades de *pinch* tenemos

$$V_{p_i} = V_{p_{i,neo}} + V_{p_{i,an}} \quad (\text{Ec. 2.45})$$

$$V_{p_{imp}} = V_{p_{imp,neo}} + V_{p_{imp,an}} \quad (\text{Ec. 2.46})$$

Los términos anómalos de la velocidad de *pinch* dependen del perfil del factor de seguridad

[Bou92b] según las siguientes expresiones

$$\frac{V_{p_{i,an}}}{\chi_{e,an}^*} = -C_{V_p} \frac{(n_e + \sum n_j) Z_i}{\frac{T_i}{T_e} n_e + \sum (n_j Z_j^2)} \frac{\partial q}{q a \partial \rho} H \left( \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) \quad (\text{Ec. 2.47})$$

$$\frac{V_{p_{imp,an}}}{\chi_{e,an}^*} = -C_{V_p} \frac{(n_e + \sum n_j) Z_{imp}}{\frac{T_i}{T_e} n_e + (\sum n_j Z_j^2)} \frac{\partial q}{q a \partial \rho} H \left( \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) \quad (\text{Ec. 2.48})$$

en las expresiones anteriores, el sumatorio sobre  $j$  abarca todo los tipos de iones, plasma e impurezas.

Los términos neoclásicos vienen dado por

$$V_{p_{i,neo}} = V_{pW} - \langle (\nabla \rho)^2 \rangle C_{\chi_{i,neo}} 0.0038065 M_i^{1/2} \frac{q^2}{T_i^{3/2} B_t^2} \times \left( 2Z_i Z_{imp} \frac{\partial (n_{imp} T_i)}{a \partial \rho} + Z_{imp}^2 n_{imp} \frac{\partial T_i}{a \partial \rho} \right) \quad (\text{Ec. 2.49})$$

$$V_{p_{imp,neo}} = V_{pW} - \langle (\nabla \rho)^2 \rangle C_{\chi_{i,neo}} 0.0038065 M_i^{1/2} \frac{q^2}{T_i^{3/2} B_t^2} \times \left( 2Z_i Z_{imp} \frac{\partial (n_i T_i)}{a \partial \rho} - (Z_i + c_3 Z_3) (2Z_i + 3Z_{imp}) n_i \frac{\partial T_i}{a \partial \rho} \right) \quad (\text{Ec. 2.50})$$

siendo

$$V_{pW} = - \langle (\nabla \rho)^2 \rangle \frac{(2.44 - 1.44 \epsilon^{1/2}) \epsilon^{1/2} E}{B_{pol} (1 + 0.928 v_e \epsilon^{3/2}) (1 + 1.02 \epsilon^{1/2} + 0.539 v_e)} \quad (\text{Ec. 2.51})$$

El flujo de electrones  $\Gamma_e$  se deduce de la condición de ambipolaridad

$$\Gamma_e = \sum_j Z_j \Gamma_j = Z_i \Gamma_i + Z_{imp} \Gamma_{imp} + Z_3 \Gamma_3 \quad (\text{Ec. 2.52})$$

Siendo  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_{imp}$ ,  $\Gamma_3$  los flujos de los iones, la impureza principal y la segunda impureza.

En las ecuaciones anteriores  $C_{\nabla T_{e,crit}}$ ,  $C_{\chi_{e,neo}}$ ,  $C_{\chi_{e,RLW}}$ ,  $C_{\chi_{i,neo}}$ ,  $C_{\chi_{i,e}}$ ,  $C_{D_{i,an}}$ ,  $C_{V_p}$  son constantes a determinar para cada reactor. En el caso del JET y ITER-EDA son generalmente aceptados los siguientes valores para estas constantes:

	<i>JET</i>	<i>ITER</i>
$C_{\nabla T_e, crit}$	6	6
$C_{\chi_{e, neo}}$	1	1
$C_{\chi_{e, RLW}}$	2	2
$C_{\chi_{i, neo}}$	1	1
$C_{\chi_{i, e}}$	2	2
$C_{D_{i, an}}$	0.5	1
$C_{V_p}$	0.3	0.3

**Tabla 2.2** Valores de los parámetros de transporte utilizados en la simulación de JET [Bou92] e ITER-EDA [Vil97].

## 2.4 BALANCE ENERGÉTICO

### 2.4.1 Fuentes de energía

En un reactor de fusión son diversas las fuentes de energía que calientan el plasma. El término más importante es la propia energía liberada en las reacciones de fusión,  $p_{fus}$ . Otras fuentes provienen del calentamiento óhmico y la inyección de potencia adicional.

En el caso de un reactor en ignición la potencia de fusión será la única fuente de energía, a excepción de la menospreciable aportación del calentamiento óhmico. En un plasma de D-T (Ec. 1.1) únicamente la energía que llevan las partículas alfa queda confinada en el plasma mientras que el neutrón, al carecer de carga, no es afectado por el campo magnético y sale del plasma sin apenas ceder su energía. Así la densidad de potencia de fusión corresponde únicamente a la energía de las partículas alfa,  $E_\alpha = 5.67 \cdot 10^{-13}$  J.

$$p_\alpha = n_D n_T E_\alpha \langle \sigma_{fus} v \rangle \quad (\text{Ec. 2.53})$$

La potencia óhmica es debida al efecto Joule. El plasma es un conductor por el que circula una corriente que en los tokamaks puede llegar a ser muy intensa, la resistividad del plasma produce la disipación de potencia y el calentamiento del mismo. La densidad de potencia óhmica viene dada por

$$p_\Omega = \eta j^2 \propto Z_{eff} T_e^{-3/2} j^2 \quad (\text{Ec. 2.54})$$

Donde  $\eta$  es la resistividad del plasma, que es proporcional a la carga efectiva y al inverso de  $T_e^{3/2}$ . Como la resistividad del plasma disminuye con la temperatura, cuanto más elevada sea ésta menos eficaz será el calentamiento óhmico y como consecuencia la temperatura que se



puede alcanzar está limitada a unos pocos keV. Las condiciones necesarias en un reactor en ignición no se pueden alcanzar únicamente con este tipo de calentamiento y en consecuencia se requiere suministrar potencia adicional desde el exterior. En los stellarators la densidad que circula por el plasma es insignificante, por lo tanto el calentamiento óhmico es despreciable.

Los sistemas de calentamiento adicional pueden ser por inyección de microondas con una frecuencias en resonancia con la frecuencia ciclotrónica de los electrones (ECRH) o de los iones (ICRH), también es posible calentar el plasma a una frecuencia intermedia entre las dos, la frecuencia híbrida inferior (LHRH). Otro sistema de calentamiento es la inyección de haces de átomos neutros de gran energía que ceden su energía al plasma por ionización e intercambio de carga.

En PRETOR el perfil de potencia por radiofrecuencia esta implementado con una forma de gaussiana ajustada al valor total impuesto en la descripción de la descarga.

$$p_{RF}(\rho) = \frac{P_{RF}^{TOT}}{\int_{-1}^1 \exp\left[-\left(\frac{\rho-\rho_0}{\Delta\rho_{RF}}\right)^2\right] dV} \exp\left[-\left(\frac{\rho-\rho_0}{\Delta\rho_{RF}}\right)^2\right] \quad (\text{Ec. 2.55})$$

donde  $\rho_0$ ,  $\Delta\rho_{RF}$  son datos del código que representa la posición de la resonancia y el ancho de la gaussiana respectivamente.  $P_{RF}^{TOT}$  es la potencia total inyectada.

La proporción de potencia depositada en los iones y electrones viene dada por el parámetro  $f_{RF}$

$$p_{RF}^{(i)}(\rho) = f_{RF} p_{RF}(\rho) \quad (\text{Ec. 2.56})$$

$$p_{RF}^{(e)}(\rho) = (1 - f_{RF}) p_{RF}(\rho) \quad (\text{Ec. 2.57})$$

En la deposición de potencia por inyección de haces neutros intervienen dos procesos, en el primero los neutros pasan a iones rápidos por ionización o por intercambio de carga con los iones térmicos, después estos iones son moderados y pierden parte de su energía en el plasma. El perfil de la densidad de potencia depositada viene dado por

$$p_{NBI}(\rho) = 1.6 \times 10^{-3} S_{nb}(\rho) E_b - \frac{acc}{\Delta t} \quad (\text{Ec. 2.58})$$

$$S_{nb} = \frac{n_e \sigma_i l S_0}{V} \quad (\text{Ec. 2.59})$$

$$acc = (\tau P_{NBI} - 1.6 \times 10^{-3} n_{fast} E_b)(1 - e^{-dt/\tau}) \quad (\text{Ec. 2.60})$$

donde  $S_{nb}$  es el ritmo de ionización,  $E_b$  es la energía de los átomos inyectados,  $\Delta t$  es el paso de tiempo considerado y  $\tau$  es el tiempo de moderación de los neutros

$$\tau = \frac{0.06 M_b T_e^{3/2}}{1 + C_{nbi} n_e (1 + k)} \quad (\text{Ec. 2.61})$$

$$k = 2 \left( 14.8 \frac{T_e M_b}{E_b} \right)^{3/2} \frac{1}{M_i} \quad (\text{Ec. 2.62})$$

siendo  $C_{nbi}$  una constante.

## 2.4.2 Pérdidas de energía

La energía se puede escapar del plasma por diversos mecanismos de radiación y convección.

### a) Potencia radiada

Cuando un electrón es acelerado en presencia de un campo de iones emite radiación de *Bremsstrahlung*, también conocida como radiación de frenado. Esta radiación crece con la temperatura y el número atómico efectivo según la expresión

$$p_B = C_B Z_{eff} n_e^2 T_e^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.63})$$

$C_B = 5.35 \cdot 10^{-5}$  es una constante.

Cuando un electrón es acelerado en presencia de un campo magnético como el que confina el plasma emite la radiación ciclotrón. La densidad de potencia radiada viene dada por

$$p_{cyc} = 6.2 \times 10^{-4} B_t \frac{\theta_{cyc}}{1 + \theta_{cyc}} \quad ; \quad \theta_{cyc} = C_2 \left[ \left( 1 + \frac{C_1}{T_e^{1/2}} \right) \frac{T_e^3 B_t}{n_e} \right]^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.64})$$

Siendo  $C_1$  y  $C_2$  constantes que dependen de la geometría y de la fracción de energía reflejada en la primera pared

$$C_1 = 18 \frac{a}{R_0} \quad ; \quad C_2 = 2.15 \times 10^{-4} \left( \frac{1 - R_{wall}}{a} \right)^{1/2} \quad (\text{Ec. 2.65})$$

A diferencia de la radiación de *bremsstrahlung* la radiación ciclotrón sólo es apreciable a temperaturas del plasma elevadas como las necesarias en un reactor en ignición.

Además se contemplan otras dos fuentes de radiación: los neutros, antes de ser ionizados completamente, pueden radiar por series de excitación-desexcitación y los electrones emiten parte de su energía al pasar de un nivel de energía a otro inferior. Estos dos términos dependen de dos parámetros,  $C_{ion}$  y  $C_{line}$ , según las expresiones siguientes:

$$p_{ion} = C_{ion} 1.6 \times 10^{-6} E_i 20 (n_{0,i} + n_{0,imp}) n_e \sigma_{ion} \quad (\text{Ec. 2.66})$$

$$\sigma_{ion} = \frac{10^8 \sqrt{u} \exp(-1/u)}{E_i^{3/2} (6+u)} \quad ; \quad u = \frac{10^3 T_e}{E_i} \quad (\text{Ec. 2.67})$$

$$p_{line} = C_{line} n_e n_{imp} Z_{imp}^{1/2} \frac{T_e'^2}{1+T_e'^4} \quad ; \quad \text{con } T_e' = \frac{T_e}{10^{-4} Z_{imp}^2} \quad (\text{Ec. 2.68})$$

### b) Fugas por conducción-convección

Debido a la difusión de las partículas a través de las superficies magnéticas, la energía que llevan las partículas se escapa del plasma a través de la separatriz. Estas pérdidas tienen una contribución debido a la conducción y otra debido al propio flujo de partículas a través de la separatriz.

$$p_{con} = 1.6 \times 10^{-3} \frac{S_{sep}}{V} \left[ n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} + \frac{3}{2} T_e \Gamma_e \right] \quad (\text{Ec. 2.69})$$

Para los iones se tiene una expresión análoga a la anterior.

Así pues, incluyendo los anteriores términos en el balance de energía tenemos la siguiente relación

$$p_{\alpha} + p_{\Omega} + p_{RF} + p_{NBI} = p_B + p_{cyc} + p_{ion} + p_{line} + p_{con} \quad (\text{Ec. 2.70})$$

## 2.5 BALANCE DE PARTÍCULAS

La fuente de iones en el plasma proviene de la inyección de haces de neutros (NBI) y de la ionización de los neutros que se encuentran en el plasma. Por otro lado las reacciones de fusión actúan como un sumidero de iones y como una fuente de helio.

El término fuente de iones se escribe como

$$S_i = \delta_{nb} S_{nb} + \delta_{He} S_{He} + n_e n_{neut} \langle \sigma_{ion} v \rangle \quad (\text{Ec. 2.71})$$

$S_{nb}$  es la fuente proveniente de la inyección de neutros, que viene determinada por la ecuación 2.59.  $\delta_{nb} = 1$  para haces de deuterio y  $\delta_{nb} = 0$  en el caso que se inyecten impurezas.  $S_{He}$  es la

fuelle de helio debido a las reacciones de fusión y  $\delta_{He} = -2$  ya que cada reacción de fusión implica la desaparición de dos iones.  $S_{He}$  depende de la reactividad del plasma,  $\langle \sigma_{fus} v \rangle$  y por la densidad de deuterio y de tritio

$$S_{He} = n_D n_T \langle \sigma_{fus} v \rangle \quad (\text{Ec. 2.72})$$

Finalmente, el último término de la ecuación 2.71 corresponde a la ionización de los neutros presentes en el plasma con una densidad  $n_{neut}$  y cuya sección eficaz de ionización es  $\sigma_{ion}$ .

Para el término fuente de las impurezas se utiliza la misma expresión de la ecuación 2.71 pero en este caso se usan los siguientes valores:

$\delta_{nb} = 0$  para haces de deuterio y  $\delta_{nb} = 1$  para haces de impurezas.

$\delta_{He} = 1$

## 2.6 OTROS MODELOS

### 2.6.1 Tiempo de confinamiento

El tiempo de confinamiento de la energía viene determinado a partir del contenido energético del plasma,  $W_{tot}$ , y de la potencia aportada al mismo,  $P_{in}$ ,

$$\tau_E = \frac{W_{tot}}{P_{in}} \quad (\text{Ec. 2.73})$$

Debido a la complejidad en la modelización del transporte en un plasma, uno de los medios más fiables en la predicción del comportamiento de futuros reactores, en especial de ITER, es el uso de leyes de escala para el tiempo de confinamiento. El método empírico se basa en la suposición que el tiempo de confinamiento está gobernado por ciertos parámetros adimensionales. Los exponentes de las potencias de la expresión de  $\tau_E$  se determinan por regresión multilínea con los datos obtenidos de múltiples tokamaks.

Así en PRETOR están implementadas tres leyes de escala: Goldston, ITER89P y ITER89-02P según las siguientes expresiones

$$\tau_E = 0.037 I P^{-0.5} R_0^{1.75} a^{-0.37} \kappa^{0.5} \left(\frac{2}{3} M_i\right)^{0.5} \quad (\text{Ec. 2.74})$$

$$\tau_E = 0.048 I^{0.85} P^{-0.5} R_0^{1.2} a^{0.3} \kappa^{0.5} M_i^{0.5} \langle n_{e,20} \rangle_V^{0.1} B_t^{0.2} \quad (\text{Ec. 2.75})$$

$$\tau_E = 0.064 M_i^{0.2} I^{0.8} R_0^{1.6} a^{0.6} \kappa^{0.5} \langle n_{e,20} \rangle_V^{0.6} B_t^{0.35} P^{-1} + 0.04 M_i^{0.5} I^{0.5} R_0^{0.3} a^{0.8} \kappa^{0.6} \quad (\text{Ec. 2.76})$$

## 2.6.2 Corriente no inductiva

En un tokamak se necesita generar una corriente en el plasma para conseguir la configuración magnética necesaria para mantener el plasma confinado. Esta corriente se induce aplicando el efecto transformador en el que el plasma actúa de circuito secundario y el solenoide central de primario. Pero existen otros procedimientos que generan corriente en el interior del plasma por medios no inductivos, es decir sin utilizar el efecto transformador del tokamak. Esto es de gran importancia ya que si se aumenta al máximo la generación de corriente por medios no inductivos se puede disminuir la corriente inducida y por lo tanto se requeriría menor flujo en el solenoide central. De esta manera se pueden conseguir pulsos de mayor duración. En el caso ideal toda la corriente estaría generada por medios no inductivos y el tokamak funcionaría en continuo. En cambio en un stellarator, al no necesitar corriente en el plasma la generación de corriente no inductiva puede modificar de forma no deseable la configuración magnética, por este motivo estos dispositivos se diseñan de forma que la contribución neta de estas corrientes sea lo más pequeña posible.

Son diversos los medios para generar corriente, entre los que destaca la corriente de *bootstrap* o autogenerada que es inherente al propio confinamiento del plasma en una geometría toroidal. Esta corriente se origina debido al hecho que la densidad en el eje del toro es mayor que en el borde unido a la fuerza de fricción existente entre partículas atrapadas y no-atrapadas. La corriente de *bootstrap* está modelada como

$$j_{boot} = 1.6 \times 10^{-3} \frac{(1 - 0.8 R_0^3) \frac{q}{a}}{\sqrt{B_t^2 + B_{pol}^2} \epsilon^{1/2} (1 + \mu^*)} \left[ n_e \left( 0.69 \frac{\partial T_e}{\partial \rho} - 0.42 \frac{\partial T_i}{\partial \rho} \right) + 2.44 (T_e + T_i) \frac{\partial n_e}{\partial \rho} \right] \quad (\text{Ec. 2.77})$$

$$\mu^* = 8.4 \times 10^{-4} \frac{R_0 Z_{eff} n_e q}{\epsilon^{3/2} T_e^2} \quad (\text{Ec. 2.78})$$

La inyección de potencia adicional por radiofrecuencia también puede generar corriente al alterar la distribución de velocidades de los electrones e iones. Es la llamada *current-drive*, que esta modelada según

$$j_{CD} = 2\pi 10 \frac{C_{CD} p_{RF}}{n_e} \quad (\text{Ec. 2.79})$$

donde  $C_{CD}$  es una constante, y  $p_{RF}$  es la potencia por radiofrecuencia.

Por último la inyección de haces de neutros también genera corriente, en este caso según la expresión

$$j_{nb} = C_{nb} \frac{P_{NBI}^{(e)} + \frac{1}{2} P_{NBI}^{(i)}}{P_{NBI}} n_{fast} v_{fast} \quad (\text{Ec. 2.80})$$

$$C_{nb} = 1.6 \cdot 10^{-6} Z_b \left( 1 - Z_b \frac{(1-G)}{Z_{eff}} \right) \quad (\text{Ec. 2.81})$$

$$G = \left( 1.55 + \frac{0.85}{Z_{eff}} \right) \epsilon^{1/2} - \left( 0.2 + \frac{1.55}{Z_{eff}} \right) \epsilon \quad (\text{Ec. 2.82})$$

### 2.6.3 Topología magnética

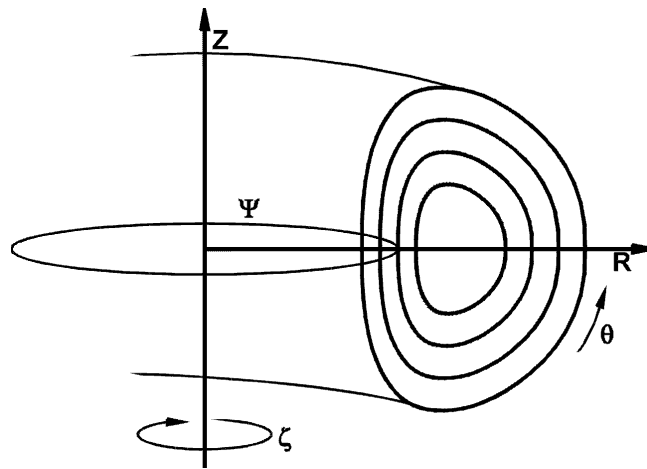
El equilibrio de un plasma confinado magnéticamente y en estado estacionario está descrito por las leyes de Maxwell para el campo magnético

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 2.83})$$

y por el balance de fuerzas

$$\nabla P = \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{Ec. 2.84})$$

que establece que una corriente que fluye perpendicular a un campo magnético ejerce una fuerza en el plasma perpendicular a ambos, en el equilibrio esta fuerza compensa la presión cinética del plasma. Las ecuaciones 2.83 y 2.84, escritas en unidades del SI, se conocen como las ecuaciones del equilibrio magnetohidrodinámico (MHD).



**Figura 2.4** Esquema de las coordenadas de un plasma toroidal. Adaptada de [Bou92]

De la ecuación 2.84 se deduce que las líneas de campo y de la corriente discurren sobre superficies de presión constante. En consecuencia, el equilibrio magnético está caracterizado por estas superficies de presión constante también conocidas, debido a esta propiedad, como superficies magnéticas.

Tomando el sistema de coordenadas cilíndricas  $(R, Z, \zeta)$  (figura 2.4) y para un plasma con simetría axial propio de los tokamaks, donde ninguna magnitud varía en la dirección toroidal se puede aplicar la simplificación que  $\partial/\partial\zeta \equiv 0$

A partir de las ecuaciones de Maxwell (Ec. 2.83) y de la ecuación del balance de fuerzas (Ec. 2.84) se llega a la ecuación de Grad-Shafranov (en unidades del SI) [Rae86]

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 (2\pi R)^2 \frac{\partial P}{\partial \Psi} - 4\pi R^2 B_t \frac{\partial B_t}{\partial \Psi} \quad (\text{Ec. 2.85})$$

donde  $\psi$  es el flujo magnético poloidal,  $P(\psi)$  y  $B_t(\psi)$  son respectivamente la presión en la superficie magnética y la componente toroidal del campo magnético.