

Para la componente continua tendremos

$$0 = R \cdot I_{DC} + U_A \qquad I_{DC} = \frac{-U_A}{R}$$

y para las demás componentes la determinaremos fasorialmente tomando

$$\begin{aligned} \underline{U}_h &= U_h \angle \varphi_h & \underline{U}_h &= R \underline{I}_h + j h \omega L \underline{I}_h = \underline{Z}_h \underline{I}_h \\ \underline{I}_h &= \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \angle \varphi_{Ih} & \underline{Z}_h &= R + j h \omega L = Z_h \angle \varphi_{Zh} \end{aligned}$$

La solución particular será, por tanto

$$i(t) = \frac{-U_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

3.3. Solución completa

La solución completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = k e^{-t/\tau} - \frac{U_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

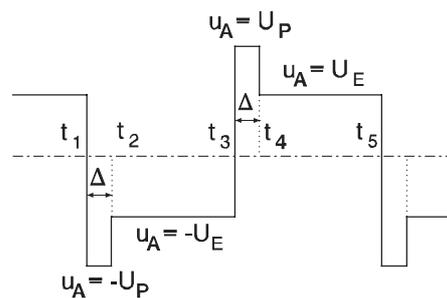
por tanto, para cada tramo será

$$t_1 - t_2 \qquad i_1(t) = K_1 e^{-t/\tau} + I_p + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

$$t_2 - t_3 \qquad i_2(t) = K_2 e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

$$t_3 - t_4 \quad i_3(t) = K_3 e^{-t/\tau} - I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$t_4 - t_5 \quad i_4(t) = K_4 e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$



con

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_0 = \frac{U_E}{R} \quad I_P = \frac{U_P}{R}$$

$$t_5 = t_1 + T \quad I_h = \frac{U_h}{Z_h} \quad Z_h = R + jh\omega L$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h \quad I_h = I_h \angle \varphi_{lh}$$

4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio serán

$$t_2 = t_1 + \Delta \quad t_4 = t_3 + \Delta$$

$$i_2(t_3) = 0 \quad i_4(t_1 + T) = 0$$

4.1. Sistema a resolver

De las condiciones de cambio expuestas, dos son inmediatas y, por tanto, el sistema no lineal a resolver estará formado sólo por las otras dos expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada.

$$f_1(t_3) = i_2(t_3) = 0$$

$$f_2(t_1) = i_4(t_1 + T) = 0$$

$$f_1(t_3) = K_2 e^{-t_3/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_3 + \varphi_{1h}) = 0$$

$$f_2(t_1) = K_4 e^{-(t_1+T)/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega (t_1 + T) + \varphi_{1h}) = 0$$

Simplificando la ecuación de f_2

$$f_2(t_1) = K_4 e^{-T/\tau} e^{-t_1/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{1h}) = 0$$

Las expresiones de f_1 y f_2 nos darán los valores de t_1 y t_3 , a partir de los cuales obtendremos t_2 y t_4 de

$$t_2 = t_1 + \Delta$$

$$t_4 = t_3 + \Delta$$

5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad serán

$$i_2(t_2) = i_1(t_2)$$

$$i_3(t_3) = i_2(t_3)$$

$$i_4(t_4) = i_3(t_4)$$

y la de periodicidad

$$i_1(t_1) = i_4(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad podemos simplificar dos de ellas pues obtenemos

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) \qquad i_3(t_3) = i_2(t_3) = 0$$

$$i_4(t_4) = i_3(t_4) \qquad i_1(t_1) = i_4(t_1 + T) = 0$$

5.1. Determinación de constantes

Las constantes K_1 a K_4 se determinarán, en función de t_1 a t_4 , despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$K_1 e^{-t_1/\tau} + I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{1h}) = 0$$

$$K_2 e^{-t_2/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{1h}) = K_1 e^{-t_2/\tau} + I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{1h})$$

$$K_3 e^{-t_3/\tau} - I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_3 + \varphi_{1h}) = 0$$

$$K_4 e^{-t_4/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_4 + \varphi_{1h}) = K_3 e^{-t_4/\tau} - I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_4 + \varphi_{1h})$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left[-I_P - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{1h}) \right]$$

$$K_2 = K_1 + (I_P - I_0) e^{t_2/\tau}$$

$$K_3 = e^{t_3/\tau} \left[I_P - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_3 + \varphi_{1h}) \right]$$

$$K_4 = K_3 + (I_0 - I_P) e^{t_4/\tau}$$

6. Elección del valor inicial

Dado que se trata de una lámpara de descarga partiremos de los mismos supuestos que en el caso anterior; por tanto

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{II} \right) \qquad t_2 = t_1 + \Delta$$

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2} \qquad t_4 = t_3 + \Delta$$

7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t))$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \cos(n \omega t) dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \sin(n \omega t) dt$$

Separando los tramos de la función

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \cos(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t) \cos(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_3}^{t_4} i_3(t) \cos(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t) \cos(n \omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \sin(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t) \sin(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_3}^{t_4} i_3(t) \sin(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t) \sin(n \omega t) dt$$

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_1(t) = K_1 e^{-t/\tau} + I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$i_2(t) = K_2 e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$i_3(t) = K_3 e^{-t/\tau} - I_P + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$i_4(t) = K_4 e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

por tanto podemos integrar por separado los dos primeros términos y las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{1nC} = \int I_P \cos(n \omega t) dt = \frac{I_P}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left(\frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left(\frac{t \cos \varphi_{ln}}{2} + \frac{\sin(2 n \omega t + \varphi_{ln})}{4 n \omega} \right) \quad h = n$$

$$A_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{2nC} = \int I_0 \cos(n \omega t) dt = \frac{I_0}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{2nP} = A_{1nP}$$

$$A_{3nH} = \int K_3 e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_3 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{3nC} = \int -I_P \cos(n \omega t) dt = -\frac{I_P}{n \omega} \sin n \omega t = -A_{1nC}$$

$$A_{3nP} = A_{1nP}$$

$$A_{4nH} = \int K_4 e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_4 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{4nC} = \int -I_0 \cos(n \omega t) dt = -\frac{I_0}{n \omega} \sin n \omega t = -A_{2nC}$$

$$A_{4nP} = A_{1nP}$$

$$B_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{1nC} = \int I_P \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_P}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$B_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \sin(n \omega t) dt$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left(\frac{-\cos(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\cos(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left(\frac{-\cos(2 n \omega t + \varphi_{ln})}{4 n \omega} - \frac{t \sin \varphi_{ln}}{2} \right) \quad h = n$$

$$B_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{2nC} = \int I_0 \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_0}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$B_{2nP} = B_{1nP}$$

$$B_{3nH} = \int K_3 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_3 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{3nC} = \int -I_P \sin(n \omega t) dt = \frac{I_P}{n \omega} \cos n \omega t = -B_{1nC}$$

$$B_{3nP} = B_{1nP}$$

$$B_{4nH} = \int K_4 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_4 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{4nC} = \int -I_0 \sin(n \omega t) dt = \frac{I_0}{n \omega} \cos n \omega t = -B_{2nC}$$

$$\mathbf{B}_{4nP} = \mathbf{B}_{1nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$\mathbf{a}_n = \frac{2}{T} \left[\sum_{q=1}^3 \left(\mathbf{A}_{qnH}(t_{q+1}) + \mathbf{A}_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{A}_{qnP}(t_{q+1}) \right) + \mathbf{A}_{4nH}(t_1 + T) + \mathbf{A}_{4nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{A}_{4nP}(t_1 + T) - \sum_{q=1}^4 \left(\mathbf{A}_{qnH}(t_q) + \mathbf{A}_{qnC}(t_q) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{A}_{qnP}(t_q) \right) \right]$$

$$\mathbf{b}_n = \frac{2}{T} \left[\sum_{q=1}^3 \left(\mathbf{B}_{qnH}(t_{q+1}) + \mathbf{B}_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{B}_{qnP}(t_{q+1}) \right) + \mathbf{B}_{4nH}(t_1 + T) + \mathbf{B}_{4nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{B}_{4nP}(t_1 + T) - \sum_{q=1}^4 \left(\mathbf{B}_{qnH}(t_q) + \mathbf{B}_{qnC}(t_q) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \mathbf{B}_{qnP}(t_q) \right) \right]$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_n - j \mathbf{b}_n)$$

8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica ya que las ondas de intensidad y de tensión de arco también presentan simetría. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos	2
Tramos sin ecuación diferencial	0
Tramos de primer orden	2
Tramos de segundo orden	0
Número de incógnitas	1

Número de ecuaciones de cambio (verdaderas)	1
Número de constantes	2
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad	2
Ecuaciones de continuidad	1
Ecuaciones de periodicidad	1

8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de dos tramos ($t_1 - t_2$ y $t_2 - t_3$) ya que las del otro semiperiodo podrán obtenerse a partir de éstas. Las expresiones correspondientes serán

$$t_1 - t_2 \quad i_1(t) = K_1 e^{-t/\tau} + I_P + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$t_2 - t_3 \quad i_2(t) = K_2 e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$t_3 - t_4 \quad i_3(t) = -i_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$t_4 - t_5 \quad i_4(t) = -i_2\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

con

$$u(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h) \quad I_0 = \frac{U_E}{R}$$

$$I_P = \frac{U_P}{R} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad Z_h = R + j h \omega L$$

$$\underline{U}_h = U_{h \angle \varphi_h} \qquad I_h = \frac{\underline{U}_h}{Z_h} \qquad I_h = I_{h \angle \varphi_{Ih}}$$

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2} \qquad t_4 = t_2 + \frac{T}{2} \qquad t_5 = t_1 + T$$

8.2. Sistema a resolver

El sistema a resolver estará formado por la siguiente ecuación

$$f(t_1) = K_2 e^{-(t_1 + (T/2))/\tau} + I_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos\left(h \omega \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

que nos dará el valor de t_1 , a partir del que obtendremos t_2 de

$$t_2 = t_1 + \Delta$$

Simplificando la ecuación de f

$$f(t_1) = K_2 e^{-T/2\tau} e^{-t_1/\tau} + I_0 - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ih}) = 0$$

8.3. Determinación de constantes

$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left[-I_P - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ih}) \right]$$

$$K_2 = K_1 + (I_P - I_0) e^{t_2/\tau}$$

8.4. Elección del valor inicial

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{H1} \right) \quad t_2 = t_1 + \Delta$$

8.5. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la onda de intensidad, dada la simetría, tendrá sólo armónicos impares.

$$A_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \cos(n\omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t \right)$$

$$A_{1nC} = \int I_P \cos(n\omega t) dt = \frac{I_P}{n\omega} \sin n\omega t$$

$$A_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h\omega t + \varphi_{Hh}) \cos(n\omega t) dt$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left(\frac{\sin(h\omega t + \varphi_{Hh} - n\omega t)}{2\omega(h-n)} + \frac{\sin(h\omega t + \varphi_{Hh} + n\omega t)}{2\omega(h+n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left(\frac{t \cos \varphi_{Hn}}{2} + \frac{\sin(2n\omega t + \varphi_{Hn})}{4n\omega} \right) \quad h = n$$

$$A_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \cos(n\omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-\frac{1}{\tau} \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t \right)$$

$$A_{2nC} = \int I_0 \cos(n\omega t) dt = \frac{I_0}{n\omega} \sin n\omega t$$

$$A_{2nP} = A_{1nP}$$

$$\mathbf{B}_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$\mathbf{B}_{1nC} = \int I_P \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_P}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$\mathbf{B}_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \sin(n \omega t) dt$$

$$\mathbf{B}_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left(\frac{-\cos(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\cos(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$\mathbf{B}_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left(\frac{-\cos(2 n \omega t + \varphi_{ln})}{4 n \omega} - \frac{t \sin \varphi_{ln}}{2} \right) \quad h = n$$

$$\mathbf{B}_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left(-n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$\mathbf{B}_{2nC} = \int I_0 \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_0}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$\mathbf{B}_{2nP} = \mathbf{B}_{1nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$\mathbf{a}_n = \frac{4}{T} \left[\mathbf{A}_{1nH}(t_2) + \mathbf{A}_{1nC}(t_2) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{A}_{1nP}(t_2) + \mathbf{A}_{2nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \mathbf{A}_{2nC}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i+1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{A}_{2nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) \right]$$

$$- \sum_{q=1}^2 \left(A_{qnH}(t_q) + A_{qnC}(t_q) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i+1}}^{(h_{\max}+1)/2} A_{qnP}(t_q) \right)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \left[\mathbf{B}_{1nH}(t_2) + \mathbf{B}_{1nC}(t_2) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{B}_{1nP}(t_2) + \mathbf{B}_{2nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \mathbf{B}_{2nC}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i+1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{B}_{2nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{q=1}^2 \left(\mathbf{B}_{qnH}(t_q) + \mathbf{B}_{qnC}(t_q) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i+1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{B}_{qnP}(t_q) \right) \right]$$

y, entonces,

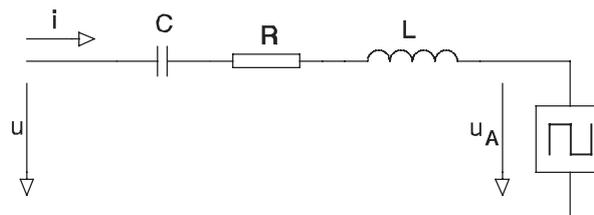
$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_n - j \mathbf{b}_n)$$

7. Fluorescente con condensador en serie

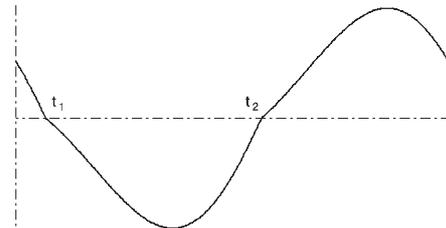
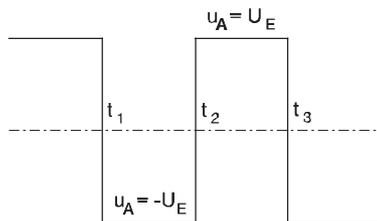
Se trata de la lámpara fluorescente (caso de la lámpara de descarga ya estudiada anteriormente) a la que se añade un condensador en serie, calculado de forma que al conectar este conjunto en paralelo con otra lámpara fluorescente sin condensador la intensidad total esté aproximadamente en fase con la tensión. Así pues el condensador conectado en serie con una de las dos lámparas compensa la energía reactiva de ambas. Además, dado que el condensador introduce un desfase en la intensidad, el paso por cero de la intensidad de una lámpara se produce cuando la otra tiene una corriente elevada; de esta forma se reduce el efecto estroboscópico, objetivo habitual de esta conexión.

1. Modelo físico

El modelo de la lámpara (arco eléctrico) será el mismo que en el caso del fluorescente, y debemos considerar el balasto y el condensador.



Continuaremos aproximando la tensión en bornes del tubo mediante una onda cuadrada, como se representa en la figura de la izquierda, en la que tenemos dos tramos y el cambio entre un tramo y otro se produce cuando la intensidad cambia de signo, por tanto, al paso por cero de ésta. En la figura de la derecha se presenta la forma de onda de la intensidad en este caso.



$$t_1 - t_2 \quad u_A = -U_E \quad i < 0$$

$$t_2 - t_3 \quad u_A = U_E \quad i > 0$$

Así pues podemos decir que la tensión valdrá

$$u_A = U_E \operatorname{Sgn}(i)$$

Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos		2
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	0	
Tramos de segundo orden (sólo caso oscilante)	2	
Número de incógnitas		2
Número de ecuaciones de cambio		2
Número de constantes		4
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad		4
Ecuaciones de continuidad	2	
Ecuaciones de periodicidad	2	

Los valores de R y L pueden obtenerse por medición sobre el balasto con un puente de medida de impedancias o por medidas de tensión e intensidad en corriente continua y en corriente alterna. Métodos parecidos pueden utilizarse para medir el condensador aunque puede tomarse directamente su capacidad nominal. Para hallar el valor de U_E debemos medir el valor medio de la tensión de arco, por ejemplo midiendo la tensión en bornes del tubo con un voltímetro de cuadro móvil con rectificador, cuya lectura deberá dividirse por 1.11 (corrección de factor de forma).

Puede obtenerse también una aproximación de dichos valores (R, L y U_E), a partir de los datos impresos en el balasto (P, U, f, I, $\operatorname{Cos}\varphi$), utilizando el procedimiento siguiente:

$$Z_T = \frac{U}{I}$$

$$X = Z_T \sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

$$L = \frac{X}{2 \pi f}$$

$$R_T = Z_T \operatorname{Cos} \varphi$$

$$R_A = \frac{P}{I^2}$$

$$R = R_T - R_A$$

$$U_E = \frac{P}{I}$$

2. Ecuaciones de los tramos

Las ecuaciones genéricas que representan todos los tramos serán

$$u(t) = u_C(t) + R i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A \qquad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

puesto que se trata de un circuito de segundo orden al tener dos elementos almacenadores de energía: inductancia y condensador. Además sabemos que:

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

3. Solución de las ecuaciones

Para hallar la solución completa de la ecuación de cada tramo debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

3.1. Solución de la homogénea

Las ecuaciones homogéneas serán

$$0 = u_C(t) + R i(t) + L \frac{di}{dt} \qquad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

que, despejando las derivadas, se convierten en

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} u_C(t) \qquad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

que podemos escribir en forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u_C \end{pmatrix}$$

y, para resolverla, debemos hallar las raíces del polinomio característico.

$$|\lambda I - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

cuya solución será

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{LC}}$$

el radicando será el discriminante (D)

$$D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{LC}$$

y llamamos

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} \quad \epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{|D|}$$

el tipo de solución dependerá del valor del discriminante, por lo que debemos analizarlo.

3.1.1. Análisis del discriminante

Para que el condensador compense la reactiva de las dos lámparas debe circular por él la misma intensidad eficaz que por una lámpara sin condensador pero desfasada en sentido contrario; por ello la reactancia total de la lámpara con condensador debe ser igual y de signo contrario a la de la lámpara sin condensador.

$$(X_L - X_C) = -(X_L) \quad X_C = 2 X_L$$

pero la inductancia y la capacidad tendrán unos valores de tolerancia que deberán considerarse, por tanto tomaremos

$$X_C = 2 \kappa X_L$$

donde κ es un valor próximo a la unidad.

$$\frac{1}{\omega C} = 2 \kappa \omega L \qquad C = \frac{1}{2 \kappa \omega^2 L}$$

sustituyendo en la expresión del discriminante

$$D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{L C} = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 8 \kappa \omega^2$$

por tanto el valor del discriminante depende sólo de la relación entre la resistencia y la reactancia de la bobina. Para que el discriminante sea negativo será necesario que

$$\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 < 8 \kappa \qquad \left(\frac{X_L}{R}\right)^2 > \frac{1}{8 \kappa}$$

llamando ψ al ángulo de la impedancia de la bobina tendremos

$$\text{Tg} \psi = \frac{X_L}{R} \qquad \text{Tg}^2 \psi > \frac{1}{8 \kappa}$$

y como

$$\text{Tg} \psi = \frac{\text{Sin} \psi}{\text{Cos} \psi} = \sqrt{\frac{1}{\text{Cos}^2 \psi} - 1}$$

será

$$\text{Cos} \psi < \sqrt{\frac{8 \kappa}{8 \kappa + 1}}$$

Dado que las reactancias convencionales para fluorescentes tienen factores de potencia del orden de 0.4 y que con valores normales de κ (e incluso menos normales como 1.2 o 0.8) se obtienen valores de la raíz cuadrada anterior cercanos a 0.9, podemos afirmar que el discriminante siempre será negativo y la solución siempre será oscilante.

3.1.2. Solución de la homogénea para el caso oscilante

La solución presentará el siguiente aspecto

$$u_C(t) = K_1 e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_2) \qquad i(t) = K_P K_1 e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_2 + \beta)$$

Descomponemos la segunda ecuación para hacer desaparecer el ángulo β .

$$i(t) = K_P K_1 e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_2) \cos(\beta) - K_P K_1 e^{\mu t} \sin(\epsilon t + K_2) \sin(\beta)$$

$$i(t) = K_1 e^{\mu t} [K_{Pr} \cos(\epsilon t + K_2) - K_{Pi} \sin(\epsilon t + K_2)]$$

con

$$K_{Pr} = K_P \cos \beta$$

$$K_{Pi} = K_P \sin \beta$$

donde las constantes de proporcionalidad K_{Pr} y K_{Pi} se deducen sustituyendo las expresiones de la solución en la ecuación

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

obteniéndose

$$K_{Pr} = \mu C$$

$$K_{Pi} = \epsilon C$$

3.2. Solución particular

El circuito tiene una componente continua que viene introducida por el valor U_E de la lámpara. Dado que en corriente continua (y régimen permanente) los condensadores se comportan como circuitos abiertos y las inductancias como cortocircuitos, esta componente aparecerá en bornes del condensador con signo contrario. Las demás componentes las determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{U}_h = \frac{1}{jh\omega C} I_h + R I_h + jh\omega L I_h \qquad \underline{U}_{Ch} = \frac{1}{jh\omega C} I_h = U_{Ch} \angle \varphi_{Ch}$$

$$I_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \angle \varphi_{Ih} \qquad \underline{Z}_h = R + j \left(h\omega L - \frac{1}{h\omega C} \right) = Z_h \angle \varphi_{Zh}$$

$$\underline{U}_{Ch} = X_h I_h \qquad X_h = -j \frac{1}{h\omega C} = X_h \angle -\pi/2$$

La solución particular será, por tanto

$$i(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h\omega t + \varphi_{Ih}) \qquad u_C(t) = -u_A + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h\omega t + \varphi_{Ch})$$

3.3. Solución completa

La solución completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = K_1 e^{\mu t} [K_{Pr} \cos(\epsilon t + K_2) - K_{Pi} \sin(\epsilon t + K_2)] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h\omega t + \varphi_{Ih})$$

$$u_C(t) = K_1 e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_2) - u_A + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h\omega t + \varphi_{Ch})$$

por tanto, para cada tramo será

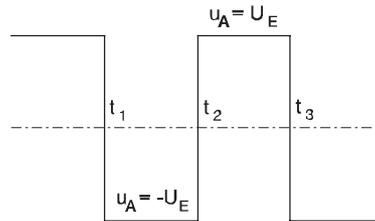
$$t_1 - t_2 \qquad i_1(t) = K_{11} e^{\mu t} [K_{Pr} \cos(\epsilon t + K_{12}) - K_{Pi} \sin(\epsilon t + K_{12})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h\omega t + \varphi_{Ih})$$

$$u_{C1}(t) = K_{11} e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_{12}) + U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h\omega t + \varphi_{Ch})$$

$t_2 - t_3$

$$i_2(t) = K_{21} e^{\mu t} [K_{Pr} \cos(\epsilon t + K_{22}) - K_{Pi} \sin(\epsilon t + K_{22})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

$$u_{C2}(t) = K_{21} e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_{22}) - U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t + \varphi_{Ch})$$



con

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{R}{L}$$

$$D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{LC}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{|D|}$$

$$K_{Pr} = \mu C$$

$$K_{Pi} = \epsilon C$$

$$t_3 = t_1 + T$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h}$$

$$\underline{Z}_h = R + j \left(h \omega L - \frac{1}{h \omega C} \right)$$

$$\underline{U}_{Ch} = \underline{X}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{X}_h = -j \frac{1}{h \omega C}$$

$$\underline{U}_{Ch} = U_{Ch} \angle \varphi_{Ch}$$

$$\underline{I}_h = I_h \angle \varphi_{Ih}$$

4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio, como ya se ha comentado antes, son

$$i_1(t_2) = 0 \qquad i_2(t_1 + T) = 0$$

4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las dos incógnitas, t_1 y t_2 .

$$f_1(t_2) = i_1(t_2) = 0 \qquad f_2(t_1) = i_2(t_1 + T) = 0$$

$$f_1(t_2) = K_{11} e^{\mu t_2} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_2 + K_{12}) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_2 + K_{12})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$f_2(t_1) = K_{21} e^{\mu(t_1+T)} [K_{Pr} \cos(\epsilon(t_1+T) + K_{22}) - K_{Pi} \sin(\epsilon(t_1+T) + K_{22})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega(t_1+T) + \varphi_{lh}) = 0$$

Simplificando la ecuación de f_2

$$f_2(t_1) = K_{21} e^{\mu T} e^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon(t_1+T) + K_{22}) - K_{Pi} \sin(\epsilon(t_1+T) + K_{22})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad serán

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) \qquad u_{C2}(t_2) = u_{C1}(t_2)$$

y las de periodicidad

$$i_1(t_1) = i_2(t_1 + T) \qquad u_{C1}(t_1) = u_{C2}(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad obtenemos

$$\begin{aligned} i_2(t_2) = i_1(t_2) = 0 & & u_{C2}(t_2) = u_{C1}(t_2) \\ i_1(t_1) = i_2(t_1 + T) = 0 & & u_{C1}(t_1) = u_{C2}(t_1 + T) \end{aligned}$$

5.1. Determinación de constantes

Las constantes K_{11} , K_{12} , K_{21} y K_{22} se determinarán, en función de t_1 y t_2 , despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$K_{21} e^{\mu t_2} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_2 + K_{22}) - K_{Pr} \sin(\epsilon t_2 + K_{22})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$K_{11} e^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1 + K_{12}) - K_{Pr} \sin(\epsilon t_1 + K_{12})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$\begin{aligned} K_{21} e^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2 + K_{22}) - U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t_2 + \varphi_{Ch}) = \\ = K_{11} e^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2 + K_{12}) + U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t_2 + \varphi_{Ch}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} e^{\mu t_1} \cos(\epsilon t_1 + K_{12}) + U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ch}) = \\ = K_{21} e^{\mu (t_1 + T)} \cos(\epsilon (t_1 + T) + K_{22}) - U_E + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ch}) \end{aligned}$$

Descomponiendo los términos oscilantes de pulsación ϵ , se observan términos con $K_{q1} \cos K_{q2}$ y con $K_{q1} \sin K_{q2}$ que pueden ser convertidos a números complejos para una más fácil implementación.

$$\underline{K}_q = K_{q1} \cdot K_{q2} = K_{q1} \cos K_{q2} + j K_{q1} \sin K_{q2} = K_{qr} + j K_{qi}$$

En las expresiones correspondientes a la tensión en el condensador (ecuaciones tercera y cuarta del sistema anterior) hay el mismo término de tipo sumatorio a ambos lados de la expresión, por lo que pueden ser eliminados. Entonces las expresiones se convierten en

$$K_{2r} \theta^{\mu t_2} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_2) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_2)] + K_{2i} \theta^{\mu t_2} [-K_{Pi} \cos(\epsilon t_2) - K_{Pr} \sin(\epsilon t_2)] + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$K_{1r} \theta^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_1)] + K_{1i} \theta^{\mu t_1} [-K_{Pi} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pr} \sin(\epsilon t_1)] + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$K_{2r} \theta^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2) - K_{2i} \theta^{\mu t_2} \sin(\epsilon t_2) - U_E = K_{1r} \theta^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2) - K_{1i} \theta^{\mu t_2} \sin(\epsilon t_2) + U_E$$

$$K_{1r} \theta^{\mu t_1} \cos(\epsilon t_1) - K_{1i} \theta^{\mu t_1} \sin(\epsilon t_1) + U_E = K_{2r} \theta^{\mu(t_1+T)} \cos(\epsilon(t_1+T)) - K_{2i} \theta^{\mu(t_1+T)} \sin(\epsilon(t_1+T)) - U_E$$

que puede escribirse en forma matricial para facilitar la resolución

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1r} \\ K_{1i} \\ K_{2r} \\ K_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \\ 2 U_E \\ -2 U_E \end{pmatrix}$$

con

$$A_{13} = \theta^{\mu t_2} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_2) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_2)]$$

$$A_{14} = -\theta^{\mu t_2} [K_{Pi} \cos(\epsilon t_2) + K_{Pr} \sin(\epsilon t_2)]$$

$$A_{21} = \theta^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_1)]$$

$$A_{22} = -\theta^{\mu t_1} [K_{Pi} \cos(\epsilon t_1) + K_{Pr} \sin(\epsilon t_1)]$$

$$A_{31} = -\theta^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2)$$

$$A_{32} = \theta^{\mu t_2} \sin(\epsilon t_2)$$

$$A_{33} = \theta^{\mu t_2} \cos(\epsilon t_2) = -A_{31}$$

$$A_{34} = -\theta^{\mu t_2} \sin(\epsilon t_2) = -A_{32}$$

$$A_{41} = e^{\mu t_1} \text{Cos}(e t_1)$$

$$A_{42} = -e^{\mu t_1} \text{Sin}(e t_1)$$

$$A_{43} = e^{\mu(t_1+T)} \text{Cos}(e(t_1+T))$$

$$A_{44} = -e^{\mu(t_1+T)} \text{Sin}(e(t_1+T))$$

$$S_2 = -\sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \text{Cos}(h \omega t_2 + \varphi_{Ih})$$

$$S_1 = -\sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \text{Cos}(h \omega t_1 + \varphi_{Ih})$$

Sistema de ecuaciones que deberá resolverse cada vez que se deseen encontrar las constantes en un nuevo punto $\{t_1, t_2\}$, y entonces sustituir en

$$K_{11|K_{12}} = K_{1r} + j K_{1i}$$

$$K_{21|K_{22}} = K_{2r} + j K_{2i}$$

6. Elección del valor inicial

Dado que se trata de una lámpara fluorescente, partiremos de los mismos supuestos que se utilizaron para la lámpara de descarga; por tanto

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{I1} \right)$$

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Cos}(n \omega t) + b_n \text{Sin}(n \omega t))$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \text{Cos}(n \omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \text{Sin}(n \omega t) dt$$