Contribució a l'estudi geomètric de subespais invariants respecte a transformacions i sistemes lineals

Albert Compta

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Contribució a l'estudi geomètric de subespais invariants respecte a transformacions i sistemes lineals

Albert Compta i Creus

2001

Memòria presentada per optar al títol de Doctor en Ciències Matemàtiques, dirigida per:

Josep Ferrer Llop

A la Mercè i als meus pares

Agraïments

En presentar aquesta tesi, vull expressar el meu agraïment a totes les persones que amb la seva ajuda han fet possible aquest treball.

A la meva família, especialment a la meva dona, filles i padrí per soportar-me i, espero que, per perdonar-me les hores que no els hi he dedicat.

Als meus amics, perquè sempre m'han donat més del que els he demanat i són, també, part de la meva família.

Als meus companys de departament, tant personal acadèmic com administratiu i especialment a la M. Rosa Cuevas pel seu mestratge en el Tex.

Al meu director de tesi, el professor Josep Ferrer Llop, pel seu recolzament, tant acadèmic com anímic.

Al professor Ferran Puerta Sales com a director del nostre grup d'investigació i que sempre ha estat disposat a ajudar-me.

Finalment, vull mencionar especialment el meu agraïment al professor Ferran Hurtado Díaz que em va convencer de tornar a la universitat quan feia temps que estava a l'ensenyament secundari.

Continguts

Introducció

En aquest treball estudiem, mitjançant tècniques i enfocaments geomètrics, diversos problemes relatius als subespais invariants respecte a transformacions i sistemes lineals.

Concretament, podem distingir les qüestions següents:

(i) Estudi (caracterització, classificació, famílies diferenciables...) d'una classe destacada de subespais invariants, els anomenats *marcats*.

(ii) Existència i construcció de solucions de l'anomenat problema de Carlson.

(iii) Pertorbacions de matrius que conserven un subespai invariant.

En aquest estudi considerem tant el cas de transformacions lineals, representades per matrius quadrades A, com el de sistemes lineals, representats per parelles horitzontals de matrius (A, B). Per dualitat, en el darrer cas és equivalent considerar parelles verticals $\binom{A}{C}$, habitualment escrites (C, A), les quals són més còmodes per a les tècniques geomètriques. En efecte, el punt de partida és treballar amb aplicacions lineals en lloc de amb matrius: endomorfismes $f : E \longrightarrow E$, en el cas de matrius quadrades; aplicacions lineals definides mòdul un subespai, $f : X \longrightarrow X/Z$, en el de parelles horitzontals; aplicacions lineals definides en un subespai, $f : Y \longrightarrow X$, $Y \subset X$, en el cas de parelles verticals.

(1) Recordem algunes definicions per poder precisar els problemes enunciats i els resultats obtinguts. Ho farem primer per a endomorfismes. Un subespai $W \subset E$ es diu A-invariant (o f-invariant) si $A(W) \subset W$ (o $f(W) \subset W$), o equivalentment, si la matriu de f en una base adaptada a $W \subset E$ és de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Dos subespais W i W' invariants per f i f' respectivament es diuen equivalents si existeix $\varphi \in Aut(E)$ amb $\varphi(W) = W'$ tal que $f = \varphi^{-1} \circ f' \circ \varphi$. Això equival a l'existència d'una matriu de canvi S tal que:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad A' = S^{-1}AS.$$

Aquesta classificació és un dels anomenats problemes *wild*, i no es coneix una família completa d'elements característics. Per exemple, una família parcial (no completa) són les reduïdes de Jordan de la restricció $\hat{f} : W \longrightarrow W$ i del quocient $\tilde{f} : E/W \longrightarrow E/W$.

(2) I. Gohberg, P. Lancaster i L. Rodman [20] defineixen una classe de subespais A-invariants especialment important, els marcats, com els que admeten una base de Jordan relativa a la restricció que sigui extensible a una base de Jordan de l'espai total relativa a l'aplicació donada. La seva caracterització i classificació són contribucions al problema general de la classificació de subespais f-invariants.

J. Ferrer, F. Puerta i X. Puerta [14] caracteritzen els subespais A-marcats en termes geomètrics i els classifiquen. X. Puerta [26] dóna condicions suficients per a l'existència d'una base global per a una família diferenciable de subespais A-marcats.

Aquí, en el segon capítol caracteritzem els subespais A-marcats de dues formes diferents.

La primera utilitza la filtració doble de Jordan $\{Ker f^h \cap Im f^d\}_{h,d}$.

Teorema 2.2.9 *Sigui f un endomorfisme nilpotent de l'espai E i W un subespai f-invariant. Les següents condicions són equivalents:*

(1) W *és* f*-marcat.*

(2) Qualsevol base de W *adaptada a la filtració* $\{W \cap f^d(K_{d+h})\}_{h,d}$ *es pot estendre a una base de* E *adaptada a la filtració triple composta per la de Jordan i* $E \supset W$.

(3) $W \cap f^d(K_{d+h}) \cap (f^d(K_{d+h-1}) + f^{d+1}(K_{d+h+1})) =$
$= W \cap f^d(K_{d+h-1}) + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1})$.

(4) $W \cap (f^d(K_{d+h-1}) + f^{d+1}(K_{d+h+1})) = W \cap f^d(K_{d+h-1}) + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1})$.

(5) $W \cap (K_{h-1} + f^{d+1}(K_{d+h+1})) = W \cap K_{h-1} + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1})$.

(6) $W \cap (K_{h-1} + I^{d+1}) = W \cap K_{h-1} + W \cap I^{d+1}$.

Sent $K_h = Ker f^h$ *i* $I^d = Im f^d$

i, en particular, retroba el resultat de [14] abans referit.

La segona caracterització és en termes de la filtració triple
$\{E_h^{d,\delta}\}_{h,d,\delta} = \{Ker f^h \cap Im f^d \cap Im \hat{f}^\delta\}_{h,d,\delta}$, on $\hat{f}$ és la restricció de f a W.

Teorema 2.2.15 *Si* W *és un subespai de* E *invariant per* f*, les següents condicions són equivalents:*

(a) W *és marcat*

(b) f *indueix isomorfismes*

$$\mathcal{E}_{h+\delta}^{d-\delta,0} \to \cdots \to \mathcal{E}_{h+1}^{d-1,\delta-1} \to \mathcal{E}_h^{d,\delta} \to \cdots \to \mathcal{E}_1^{d+h-1,\delta+h-1}$$

(c) $\dim \mathcal{E}_h^{d,\delta} = \dim \mathcal{E}_{h-1}^{d+1,\delta+1}$*, per a qualsevol* $h \geqslant 1$*,* $d \geqslant 0$*,* $\delta \geqslant 0$.

on

$$\mathcal{E}_h^{d,\delta} = \frac{E_h^{d,\delta}}{E_{h-1}^{d,\delta} + E_h^{d+1,\delta} + E_h^{d,\delta+1}}$$

Aquesta caracterització permet generalitzar el teorema de classificació de [14]:

Teorema 2.3.4 *Sigui (E, W, f) un subespai marcat i (E', W', f') un subespai invariant. Són equivalents si, i solament si,*

(i) f *i* f' *són equivalents.*

(ii) $b_h^{d,\delta} = b'^{d,\delta}_h$

ja que el fet que un dels subespais sigui marcat ja ens garanteix que ho sigui l'altre.

(3) En relació amb la segona qüestió, recordem que el problema de Carlson consisteix a preguntar-se per l'existència d'una matriu Z tal que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

tingui una forma de Jordan determinada, essent, també, predeterminats els blocs A_1 i A_2. És fàcil veure que podem suposar que A_1 i A_2 són matrius nilpotents i expressades en la forma de Jordan, és a dir, que les dades prescrites són les característiques de Segre de A_1, A_2 i A, o les seves particions conjugades γ, β i α respectivament.

Una matriu A d'aquest tipus es diu que és una realització de la terna (α, β, γ) o de la parella (β, γ) si no precisem α. Una terna de particions (α, β, γ) que admeti una realització direm que és Carlson compatible.

T. Klein [23] relaciona la descomposició de p-mòduls amb l'existència de les anomenades successions de Littlewood-Richardson (LR-successions). Per altra banda, [19] prova l'equivalència entre el problema de Carlson i el dels factors invariants del producte de matrius polinomials, que al seu torn és relacionat a [28] amb la descomposició de p-mòduls. En resum, tenim el conegut resultat següent.

Teorema 3.2.1 *Siguin tres particions α, γ, β amb $|\alpha| = n$, $|\gamma| = d$, $|\beta| = n - d$ i α^*, γ^*, β^* les seves conjugades. Les següents condicions són equivalents:*

(I) *Donades dues matrius nilpotents $A_1 \in M_d(\mathbb{C})$ i $A_2 \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ amb característica de Segre γ^* i β^* respectivament, existeix una matriu $Z \in M_{d,n-d}(\mathbb{C})$ tal que la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ té característica de Segre } \alpha^*.$$

(II) *Existeix una successió finita de particions $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^s$ ($s = \ell(\beta)$) tal que $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^s = \alpha$, i per a qualsevol $i, j \geq 1$:*

(a) $|\gamma^j| - |\gamma^{j-1}| = \beta_j$

(b) $\gamma_i^j \geq \gamma_i^{j-1} \geq \gamma_{i+1}^j$

(c) $\sum_{\ell \leq i}(\gamma_\ell^{j+1} - \gamma_\ell^j) \leq \sum_{\ell \leq i-1}(\gamma_\ell^j - \gamma_\ell^{j-1})$

prenent $\gamma_0^{j-1} = 0$, $\forall\, j$.

Aquest teorema redueix el problema de Carlson a l'existència de les LR-successions. Recentment, els treballs a [24] i [25] han donat solucions definitives al problema clàssic de Carlson: vegeu [15] i l'article resum [16].

No obstant això, que nosaltres sapiguem, no hi ha algorismes per construir solucions explícites Z. Aquí presentem una demostració geomètrica i constructiva del teorema (3.2.1), abans referit, que permet un algorisme per a la construcció de solucions, a partir d'una terna de particions Carlson compatible (proposició 3.3.9).

L'aplicació d'aquest algorisme ens permet, en particular, mostrar l'existència de solucions no equivalents per a una terna donada (exemple (3.3.3)), i fins i tot per a diferents LR-successions que la realitzin (exemple (3.3.2)).

Les solucions que obtenim mitjançant el nostre algorisme són condensades i reduïdes, on condensada vol dir que les úniques entrades no nul·les de Z estan en les files corresponents a les files nul·les de A_1 i reduïda, si, a més, en la submatriu de Z corresponent a les columnes nul·les de A_2 i a les files nul·les de A_1, les úniques entrades no nul·les tenen valor 1 i estan en columnes i files diferents (definició (3.3.4)).

En el text es detalla l'algorisme (proposició (3.3.9)), i la seva aplicació a l'exemple següent:

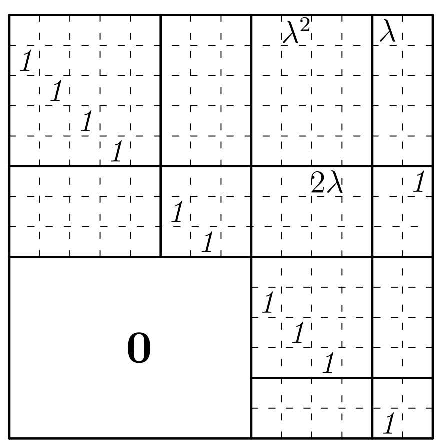
Exemple 3.3.10 *Per a*

$$\begin{aligned} \gamma &= (2,2,2,1,1) \\ \beta &= (2,2,1,1) \\ \alpha &= (3,3,2,2,2,1,1) \end{aligned}$$

considerem la LR-successió

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= (3,2,2,2,1) \\ \gamma^2 &= (3,3,2,2,1,1) \\ \gamma^3 &= (3,3,2,2,2,1,1) \end{aligned}$$

i obtenim la realització ($\lambda \neq 0$)



Com una aplicació important, obtenim a (3.3.11) que, fixades β i γ, totes les particions compatibles α tenen alguna realització en qualsevol entorn de les més simples que anomenem *marcades* (corresponen a què el subespai invariant sigui marcat): els seus blocs de Jordan s'obtenen "ajuntant" els de β i γ (per a més precisió, vegeu 3.3.6). Resulta, doncs, que totes les solucions al problema de Carlson apareixen pertorbant les solucions marcades elementals.

(4) Això motiva que en l'última part d'aquest treball estudiem les deformacions d'una matriu que deixa invariant un subespai. Més concretament, donada una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

apliquem les tècniques usades per V.I. Arnold [1] per a matrius quadrades i la seva generalització al cas de parelles de matrius feta per J. Ferrer, M.I. García i F. Puerta [11], per estudiar les matrius del mateix tipus que li són properes; o el que és el mateix geomètricament, estudiem els possibles endomorfismes pròxims al considerat d'entre els que tenen com a invariant el subespai considerat. En concret, se'n computa una deformació miniversal.

Recordem que una deformació es diu miniversal si amb el menor nombre de paràmetres conté representants de totes les classes d'equivalència properes a la matriu donada. Podem aplicar les tècniques d'Arnold perquè les classes d'equivalència són les òrbites per l'acció del grup dels endomorfismes que deixen invariant el subespai considerat i, per tant, són subvarietats diferenciables. Aleshores, la generalització a [22] del teorema d'Arnold [1] diu que una deformació és miniversal si , i solament si, és minitransversal a l'òrbita, és a dir, si la imatge de l'espai tangent a la varietat de paràmetres per l'aplicació tangent de la deformació és un suplementari de l'espai tangent a l'òrbita (4.2.8).

Aplicant aquest últim teorema obtenim l'expressió implícita d'una deformació miniversal d'una matriu del tipus esmentat anteriorment en el teorema 4.2.11. I en la secció (4.3) apliquem aquest teorema per obtenir explícitament una primera deformació miniversal d'una matriu marcada (teorema 4.3.13) i la millorem en el teorema (4.3.18), així obtenim una segona deformació miniversal que evita la repetició de paràmetres.

Per donar una idea d'on apareixen els paràmetres en la nostra segona deformació miniversal posem el següent exemple:

Exemple 4.3.19 *Si la matriu marcada considerada és la formada pels* 1 *indicats i la resta d'entrades nul·les, els paràmetres són les entrades indicades per* $\ast$

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc|c|ccc|c|cc|cccc|c|ccc|cc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & 1 & & & & \ast & & & & \ast & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & \ast & \ast & \ast & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & \ast & & \ast & \ast & & & \ast & \ast & & & & & & & 1 & & & \ast & & \ast \\
\hline
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & \ast & & \ast & \ast & & & \ast & \ast & & & & & & & & & & \ast & & \ast \\
\hline
 & & & & & & & & & & \ast & \ast & & & \ast & \ast & \ast & & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & & \ast & & & & \ast & \ast & & & \ast & & \ast \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & \ast & \ast & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & \ast & \ast & & & \ast & \ast & \ast & & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 &
\end{array}\right]
$$

En particular, per restringir-nos a les deformacions que deixen invariant la parella de particions (β, γ) o, el que és el mateix, el quocient B i la restricció A, n'hi ha prou en anul·lar tots els paràmetres excepte els del bloc superior dret. S'observa, segons (3.3.11), que entre les que deformen la terna Carlson compatible $(\beta+\gamma, \beta, \gamma)$ (sent la partició suma la que s'obté sumant els termes ordenadament), obtenim realitzacions matricials de totes les LR-successions possibles amb (β, γ) (teorema 4.4.4).

(5) Com ja hem dit, els dos primers problemes els tractem també per al cas de parelles de matrius. Els conceptes fonamentals es generalitzen de forma natural.

Donades dues aplicacions definides en un subespai es defineix la relació d'equivalència natural entre aplicacions, l'anomenada equivalència per blocs. És ben conegut que donada una parella de matrius (o una aplicació definida en un subespai), existeix una parella equivalent reduïda, coneguda com la forma de Brunovsky; una base en què la parella té aquesta expressió s'anomena una base de Brunovsky (1.6.8) (aquí usem la construcció geomètrica feta a J. Ferrer i F. Puerta [13]).

I. Gohberg, P. Lancaster i L. Rodman [20] estenen la definició de subespai invariant a una parella horitzontal de matrius (A, B), sent $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, en què els subespais (A, B)-invariants es defineixen per la condició $A(W) + ImB \subset W$. O bé, per dualitat, parelles verticals (C, A), sent $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ i subespais (C, A)-invariants, definits per la condició $A(W \bigcap KerC) \subset W$. Els subespais (C, A)-invariants també reben el nom de subespais invariants condicionats.

Des del punt de vista geomètric d'aplicacions definides en subespais, resulta que un subespai $W \subset Y$ és (C, A)-invariant o f-invariant si $f(W) \cap Y \subset W$. O també, si la matriu de f en una base adaptada a $W \subset Y \subset X$ és de la forma

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_2 \end{array}\right).$$

Donat un espai vectorial X, un parell de subespais Y i Y', i dues aplicacions lineals $f : Y \longrightarrow X$ i $f' : Y' \longrightarrow X$, es diu que dos subespais W i W' invariants per f i f' respectivament són equivalents si existeix $\varphi \in Aut(X)$, amb $\varphi(Y) = Y'$ i $\varphi(W) = W'$, tal que $f = \varphi^{-1} \circ f' \circ \varphi_{/Y}$. Això equival a l'existència d'una matriu de canvi tal que

$$\left(\begin{array}{cc|c} P & R & S \\ 0 & Q & T \\ \hline 0 & 0 & L \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \\ \hline C'_1 & C'_2 \end{array}\right).$$

Assenyalem I. Baragaña i I. Zaballa [2] com un dels primers estudis sobre subespais (A, B)-invariants, on troben condicions de compatibilitat entre els elements característics d'aquests subespais i els de l'espai total, usant mètodes matricials. Aquí, partim de les següents condicions equivalents a la invariància:

Proposició 1.8.6 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai i $W \subset Y$ un subespai. Llavors, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) W *és* f*-invariant.*

(ii) $\hat{f}^{-1}(W) = W \cap f^{-1}(Y)$.

(iii) $\hat{f}^{-i}(W) = \hat{f}^{-i+1}(W) \cap f^{-i}(Y) = W \cap f^{-i}(Y)$, *per a qualsevol* $i > 0$.

Tenint en compte que els índexs de Brunovsky formen la partició conjugada de la formada per $r_i = \dim f^{-i+1}(Y) - \dim f^{-i}(Y)$, retrobem el resultat citat a [2]:

Proposició 1.8.7 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai amb índexs de Brunovsky $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ i factors invariants $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_t$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant amb $(\widehat{k}_1, \widehat{k}_2, \ldots, \widehat{k}_q)$ i $\widehat{\alpha}_1 \mid \widehat{\alpha}_2 \mid \ldots \mid \widehat{\alpha}_\ell$ els de $\widehat{f} : W \longrightarrow X$. Llavors, tenim:*

(i) $\ell \leq t$ *i* $\alpha_i \,|\widehat{\alpha}_i|\, \alpha_{i+t-\ell}$ *per a* $i = 1, 2, \ldots, \ell$

(ii) $q \leq r$ *i* $\widehat{k}_i \leq k_i$ *per a* $i = 1, 2, \ldots, q$.

Recíprocament, donats $(\widehat{k}_1, \ldots, \widehat{k}_q)$ *i* $\widehat{\alpha}_1 \,|\, \widehat{\alpha}_1 \,|\, \ldots \,|\, \widehat{\alpha}_\ell$ *que verifiquen (i) i (ii), existeix un subespai* f*-invariant* $W \subset Y$ *que els té com a invariants relatius a* $\widehat{f} : W \longrightarrow X$.

També, en la secció 1.9 donem una descomposició associada a un subespai (C, A)-invariant que en permet simplificar l'expressió matricial si escollim bases adequades (teorema 1.9.8 i corol·lari 1.9.9). Concretament:

Corol·lari 1.9.9 *Sigui* $f : Y \longrightarrow X$ *una aplicació lineal definida en un subespai* $Y \subset X$, *i* $W \subset Y$ *un subespai* f*-invariant. La matriu de* f *en bases adequades serà:*

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} J_1 & 0 & Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & Z_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \hline 0 & E_1 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{array}\right]$$

on les J_i *indiquen matrius de Jordan i les parelles* (E_i, N_i) *són de Brunovsky observables.*

Aquesta descomposició consta de les fases següents: en primer lloc descomponem el subespai en suma directa de la seva intersecció amb la part inobservable de l'aplicació i un suplementari que és invariant i sobre el qual l'aplicació és observable. En segon lloc veiem que si l'aplicació quocient es pot considerar un endomorfisme, l'expressió matricial és més senzilla i estudiem en quines condicions ho és. En tercer lloc estudiem el cas més general i, finalment, quan el quocient no és endomorfisme, estudiem la possible descomposició en suma directa de l'aplicació donada de manera que obtenim més zeros en l'expressió matricial.

(6) El concepte de subespai marcat també s'estén sense dificultat en el cas de parelles de matrius. Un subespai $W \subset Y$ f-invariant és marcat si existeix una base de Brunovsky relativa a la restricció de f a W extensible a una base de Brunovsky del total relativa a f.

Aquí, obtenim una caracterització geomètrica dels subespais (C, A)-marcats (teorema 2.4.10) i la descripció d'una família completa d'invariants numèrics que els classifiquen (teorema 2.5.4).

La caracterització següent generalitza l'obtinguda a (2.2.9) per als A-marcats:

Teorema 2.4.10 *Si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. Llavors, W és f-marcat si, i solament si,*

(i) $W \cap f^{-\infty}(Y)$ *és marcat per l'endomorfisme restricció a la part inobservable* $f^{-\infty}(Y)$.

(ii) $W \cap (f^d(f^{-d-i-1}(Y)) + f^{d+1}(f^{-d-i-1}(Y))) =$
$= W \cap f^d(f^{-d-i-1}(Y)) + W \cap f^{d+1}(f^{-d-i-1}(Y))$
per a qualsevol $0 \leq d, i < k$, *sent* $f^{-k}(Y) = f^{-\infty}(Y)$

.

La demostració d'aquest teorema inclou la construcció d'una base de Brunovsky de W, i la seva extensió a una base de Brunovsky de $f : Y \longrightarrow X$, sempre que les condicions anteriors es compleixin. Aquesta construcció explícita suggereix les condicions necessàries per garantir l'existència d'una bijecció entre aquests tipus de bases per a dos subespais f-marcats diferents. Així, s'obté la següent classificació de subespais (C, A)-marcats.

Teorema 2.5.4 *Dos subespais marcats* (Y, X, W, f) *i* (Y', X', W', f') *són equivalents si, i solament si:*

(i) f *i* f' *són equivalents per blocs,*

(ii) $(f^{-\infty}(Y), W \cap f^{-\infty}(Y), f_\infty)$ *i* $(f^{-\infty}(Y'), W' \cap f^{-\infty}(Y'), f'_\infty)$ *són equivalents,*

(iii) $r_{i,j} = r'_{i,j}$ *per a* $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j < k$,

sent f_∞ *l'endomorfisme restricció a la part inobservable* $f^{-\infty}(Y)$ *i*
$r_{i,j} = \dim(W \cap f^j(f^{-i-j+1}(Y))) - \dim(W \cap f^j(f^{-i-j}(Y)))$.

Igualment, el fet que la demostració del teorema de caracterització d'un subespai (C, A)-marcat és constructiva ens permet enunciar i demostrar el teorema (2.6.15), que dóna condicions suficients per a l'existència d'una base global de Brunovsky per a una família diferenciable de subespais (C, A)-marcats.

(7) El problema de Carlson també es generalitza de forma natural a parelles de matrius. Considerem

$$P = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{array}\right),$$

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 \equiv \begin{pmatrix} A_2 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

on A_1 i A_2 són matrius quadrades. Ens preguntem sobre l'existència, obtenció, etc., de matrius Z quan P_1, P_2 i C_3, així com la classe d'equivalència respecte de l'equivalència per blocs de P estan preestablerts. Òbviament, el problema de Carlson clàssic resulta de suposar que $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, i $C_3 = 0$, és a dir, que P, P_1 i P_2 són endomorfismes.

En teoria de sistemes, aquest problema es presenta de forma natural, per exemple, quan dos sistemes estan relacionats en *simple cascade* (vegeu [20] o [2]).

Aquí demostrem un teorema anàleg al teorema 3.2.1 quan la parella P és observable (i, per tant, també ho és P_1) amb índexs de Brunovsky preescrits i P_2 és un endomorfisme amb un sol valor propi λ:

Teorema 3.4.1 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), \qquad & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), \qquad & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), \qquad & |b| &= n - d \end{aligned}$$

Les condicions següents són equivalents:

(I) *Donat un parell observable $P_1 \in M_n(\mathbb{C}) \times M_{r_1,d}(\mathbb{C})$ amb BK-índexs r^*, una matriu quadrada $A_2 \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ amb un sol valor propi λ i característica de Segre b^*, i una matriu $C_3 \in M_{r_1,n-d}(\mathbb{C})$, existeix una matriu $Z \in M_{d,n-d}(\mathbb{C})$ de forma que el parell*

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \end{pmatrix}$$

és observable amb BK-índexs R^*.

(II) *Existeix una successió finita de particions $r^0, r^1, \dots, r^s$ $(s = \ell(b))$ tal que $r^0 = r$, $r^s = R$, i per a qualssevol $i, j \geq 1$:*

(a) $|r^j| - |r^{j-1}| = b_j$

(b) $r_1^j = r_1^{j-1}$, $r_i^{j-1} \geq r_{i+1}^j \geq r_{i+1}^{j-1}$

(c) $\sum_{\ell \geq i+1} (r_\ell^{j+1} - r_\ell^j) \leq \sum_{\ell \geq i} (r_\ell^j - r_\ell^{j-1})$

(III) *[4]* $b_1 \leq r_1 = R_1$, $(R^*)_\nu \geq (r^*)_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ *i* $R^* - r^* \prec b^*$.

En aquest cas és remarcable que la relació directa (III) entre les particions que caracteritzen els blocs de les matrius no només és necessària com en el cas quadrat, sinó que també és suficient per garantir l'existència de solucions. Aquest últim problema també ha estat resolt per I. Baragaña i I. Zaballa [4] usant mètodes matricials.

A la secció (3.5) fem un estudi anàleg al que s'ha fet a la secció (3.3) per al cas quadrat, per obtenir un algorisme que doni solucions explícites al problema. A través d'alguns exemples ressaltem les analogies i diferències amb el cas quadrat. Finalment, demostrem el lema de condensació (3.5.4).

(8) Ja hem dit que en tot el treball s'empren fonamentalment tècniques geomètriques, com ara el tractament de les matrius com a aplicacions lineals, o les d'Arnold per a l'estudi de pertorbacions.

Destaquem, a més, que aquí es fa un ús sistemàtic de les filtracions dobles i triples de subespais, associades als elements de Jordan i Brunovsky, i després a subespais invariants. Com a aplicacions immediates resulten construccions de bases de Jordan (1.4.8) i Brunovsky (1.7.3). Com ja hem detallat, aquestes tècniques de filtracions són punts clau en la descomposició de subespais invariants condicionats, la caracterització de subespais marcats, i l'existència i la construcció de solucions al problema de Carlson, tant per a matrius quadrades com per a parelles de matrius.

(9) El treball està estructurat en quatre capítols.

En el primer capítol estudiem propietats generals de les filtracions, i especialment l'existència de bases adaptades. En particular, introduïm les filtracions de Jordan i Brunovsky que després utilitzem. Per altra banda, estudiem algunes propietats generals dels subespais invariants, primer per al cas quadrat i després per al cas de parelles, tal com hem indicat en les seccions (1) i (5).

Els altres tres capítols estan destinats, respectivament, als temes (i), (ii) i (iii) referits al començament, tal com hem detallat a les seccions (2) a (4) per la cas quadrat, i (6) i (7) per al cas de parelles.

Capítol 1

Subespais invariants: formulació geomètrica

1.1 Introducció

En aquest capítol estudiarem els subespais invariants des d'un punt de vista geomètric.

A la secció 1.2 recordem les definicions de partició, partició conjugada i diferència de particions, i establim una relació d'ordre entre particions de la mateixa longitud.

A la secció 1.3 definim què entendrem per filtracions simples, dobles i triples. Donem condicions perquè una base s'adapti a una filtració i veiem que una filtració doble sempre admet una base adaptada (proposició 1.3.8), mentre que en el cas d'una filtració triple calen hipòtesis addicionals (teorema 1.3.9).

A la secció 1.4 recordem els conceptes de cadenes i bases de Jordan d'un endomorfisme i el de la partició anomenada característica de Segre. Donat un endomorfisme nilpotent li associem una filtració doble formada per les interseccions dels nuclis i imatges successius i redemostrem l'existència de bases de Jordan com a bases adaptades a la filtració doble formades per imatges successives de vectors.

A la secció 1.5 donem la definició de filtració triple relativa a un subespai invariant com la formada per les interseccions de la filtració de Jordan amb les imatges successives de l'endomorfisme restricció.

A la secció 1.6 relacionem l'estudi de les parelles de matrius amb el de les aplicacions lineals definides en subespais. Donem la relació d'equivalència entre parelles de matrius, els invariants de Brunovsky d'un parell i la construcció de bases de Brunovsky en termes geomètrics.

A la secció 1.7, a una aplicació definida en un subespai li associem una filtració doble, que definim com a filtració de Brunovsky, formada per les imatges successives de les antiimatges successives del subespai, i veiem que una base de Brunovsky és una base adaptada a aquesta filtració, formada per imatges successives de vectors.

A la secció 1.8 definim subespai (C, A)-invariant, en termes geomètrics, com a subespai invariant per una aplicació lineal definida en un subespai. Donem condicions equivalents a la invariància (proposicions 1.8.5 i 1.8.6) i demostrem (proposició 1.8.7), amb els nostres mètodes, un teorema ja demostrat a [2], que dóna les relacions entre els invariants de Brunovsky de l'aplicació i de la seva restricció al subespai invariant.

Finalment, a la secció 1.9 donem una descomposició associada a un subespai (C, A)-invariant que permet simplificar la seva expressió matricial escollint bases adequades (teorema 1.9.8 i corol·lari 1.9.9). Aquesta descomposició consta de les fases següents: en primer lloc, descomponem el subespai en suma directa de la seva intersecció amb la part inobservable de l'aplicació i un suplementari que és invariant i sobre el qual l'aplicació és observable. En segon lloc, veiem que si l'aplicació quocient es pot considerar un endomorfisme, l'expressió matricial és més senzilla i estudiem en quines condicions ho és. En tercer lloc, estudiem el cas més general i, finalment, quan el quocient no és endomorfisme, estudiem la possible descomposició en suma directa de l'aplicació donada de manera que obtenim més zeros en l'expressió matricial.

1.2 Particions

Definició 1.2.1 *Una* partició

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\ell(\alpha)}, 0, \dots)$$

és una successió finita no creixent d'enters no negatius

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{\ell(\alpha)} > 0$$

on $\ell(\alpha)$ rep el nom de longitud de la partició*. Notem*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell(\alpha)}$$

que rep el nom de pes de la partició*.*

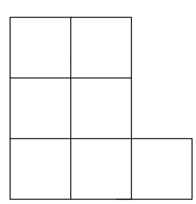
Definició 1.2.2 *La* partició conjugada $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots)$ *d'una partició α és definida per*

$$\alpha_j^* = \#\{1 \leq i \leq \ell(\alpha) :\, \alpha_i \geq j\}$$

Noteu que $\alpha_1^* = \ell(\alpha)$, $\ell(\alpha^*) = \alpha_1$, $|\alpha^*| = |\alpha|$, $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Els *diagrames de Young* permeten esquematitzar la relació entre α i α^*: si l'una està formada pel nombre de blocs agrupats per columnes, l'altra està formada pels mateixos blocs comptats per files.

Per exemple, si $\alpha = (3, 3, 1)$, el diagrama de Young serà, llegint per columnes:



i $\alpha^* = (3, 2, 2)$, llegint per files.

Definició 1.2.3 *Donades dues particions α i β definim la* partició suma $\alpha + \beta$ *com la formada per $\alpha_i + \beta_i$.*

Definició 1.2.4 *Donades dues particions α i β amb $\alpha_i \geq \beta_i$ per a qualsevol i, definim la* partició diferència $\alpha - \beta$ *com la que resulta de reordenar en forma decreixent les diferències $\alpha_i - \beta_i$.*

Definició 1.2.5 *Donades dues particions α i β, diem que α és una* partició dominada *per β i s'escriu $\alpha \prec \beta$ si*

$$\begin{cases} |\alpha| = |\beta| \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \leq \beta_1 + \cdots + \beta_i \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

1.3 Filtracions

Definició 1.3.1 *Diem que una* base $\mathcal{B}$ *de E és* adaptada *a una família $\{E_i\}_{i \in I}$ de subespais de E si $\mathcal{B} \bigcap E_i$ és una base de E_i per a cada $i \in I$.*

Diem que un conjunt de vectors linealment independents $\mathcal{F}$ és adaptat a la família si existeix una base $\mathcal{B}$ de E adaptada a la família tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.

Definició 1.3.2 *Una* filtració simple *d'un espai vectorial E és una família de subespais totalment ordenada per la relació d'inclusió que conté els subespais $\{0\}$ i E.*

Definició 1.3.3 *Donades dues filtracions simples d'un espai vectorial E, hi associarem la* filtració doble *formada per les interseccions.*

Una de les filtracions l'ordenarem de forma creixent

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{h-1} \subset K_h \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n = E$$

l'altra de forma decreixent

$$E = I^0 \supset I^1 \supset \cdots \subset I^d \supset I^{d+1} \supset \cdots \supset I^n = \{0\}$$

i indicarem els elements de la filtració doble per $E_h^d = K_h \cap I^d$.

En fem una creixent i l'altra decreixent perquè la notació que en resulta s'adiu amb el que trobarem en les filtracions de Jordan. Indiquem les dues filtracions simples amb el mateix nombre d'elements que la dimensió de l'espai considerat, encara que no sigui necessari, perquè les que considerarem en aquest treball són estacionàries i no excedeixen mai d'aquest nombre.

$$\begin{array}{ccccccccc}
I^{n-1} & \subset \cdots \subset & I^{d+1} & \subset & I^{d} & \subset \cdots \subset & I^{0} & = & E \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
E_n^{n-1} & \subset \cdots \subset & E_n^{d+1} & \subset & E_n^{d} & \subset \cdots \subset & E_n^{0} & = & K_n \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_h^{n-1} & \subset \cdots \subset & E_h^{d+1} & \subset & E_h^{d} & \subset \cdots \subset & E_h^{0} & = & K_h \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_{h-1}^{n-1} & \subset \cdots \subset & E_{h-1}^{d+1} & \subset & E_{h-1}^{d} & \subset \cdots \subset & E_{h-1}^{0} & = & K_{h-1} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_1^{n-1} & \subset \cdots \subset & E_1^{d+1} & \subset & E_1^{d} & \subset \cdots \subset & E_1^{0} & = & K_1
\end{array}$$

Igualment, si considerem una tercera filtració simple ordenada en forma decreixent

$$E = W^{-1} \supset W = W^0 \supset \cdots \subset W^{\delta} \supset W^{\delta+1} \supset \cdots \supset W^n = \{0\},$$

hi podem associar una filtració triple formada per les interseccions

$$E_h^{d,\delta} = K_h \cap I^d \cap W^{\delta}.$$

Vegem que les filtracions dobles admeten bases adaptades mentre que, en general, no és així per a les triples.

Definició 1.3.4 *Donada una filtració doble de E, si $x \in E$, $x \neq 0$, direm que h és* l'altura *de x (en la filtració), i escriurem $h = ht(x)$, si és el mínim natural tal que $x \in K_h$.*

Definició 1.3.5 *Donada una filtració doble de E, si $x \in E$, $x \neq 0$,direm que d és la* profunditat *de x (en la filtració), i escriurem $d = dp(x)$, si és el natural més gran tal que $x \in I^d$.*

Si $\mathcal{F}$ és un conjunt de vectors linealment independents, notarem

$$\mathcal{F}_h = \{x \in \mathcal{F} : ht(x) = h\}$$

$$\mathcal{F}^d = \{x \in \mathcal{F} : dp(x) = d\}$$

$$\mathcal{F}_h^d = \{x \in \mathcal{F} : ht(x) = h, dp(x) = d\}$$

o, el que és el mateix en terminologia de conjunts,

$$\mathcal{F}_h = (\mathcal{F} \cap E^0_h) \backslash E^0_{h-1}$$
$$\mathcal{F}^d = (\mathcal{F} \cap E^d_\alpha) \backslash E^{d+1}_\alpha$$
$$\mathcal{F}^d_h = (\mathcal{F} \cap E^d_h) \backslash (E^d_{h-1} \cup E^{d+1}_h)$$

Definició 1.3.6 *Donada una filtració triple de E, si $x \in W$, $x \neq 0$, direm que δ és la* profunditat *de $x \in W$ relativa a W, i escriurem $\delta = \delta p(x)$ si és el natural més gran tal que $x \in W^\delta$.*

Si $\mathcal{F}$ és un conjunt de vectors linealment independents, notarem

$$\mathcal{F}^{d,\delta}_h = \{x \in \mathcal{F} : ht(x) = h, dp(x) = d, \delta p(x) = \delta\}.$$

Lema 1.3.7 *Una base $\mathcal{B}$ és adaptada a la filtració doble $\{E^d_h\}_{h,d}$ si, i solament si,*

$$[\mathcal{B}^d_h] \oplus (E^d_{h-1} + E^{d+1}_h) = E^d_h$$

per tant, també podem posar que un conjunt de vectors linealment independents $\mathcal{F}$ és adaptat a la filtració doble $\{E^d_h\}_{h,d}$ si, i solament si,

$$[\mathcal{F}^d_h] \cap (E^d_{h-1} + E^{d+1}_h) = \{0\}$$

Demostració. És evident perquè $\mathcal{B}$ és adaptada a la filtració $\{E^d_h\}_{h,d}$ si, i solament si,

$$E^d_h = \oplus_{l \leq h, t \geq d} [\mathcal{B}^t_l]$$

d'on resulta òbvia la proposició. ■

Proposició 1.3.8 *Donada una filtració doble $\{E^d_h\}_{h,d}$ sempre existeix una base adaptada.*

Demostració. En el conjunt d'índexs definim l'ordenació següent:

$$(h', d') \prec (h, d) \Longleftrightarrow (h' < h \quad o \quad d' > d \text{ } si \text{ } h' = h)$$

i construïm una base adaptada a la filtració doble $\{E^d_h\}_{h,d}$ per inducció. En efecte, escollim una base qualsevol de E^{n-1}_1 i suposem que la podem estendre a una base de $E_{h'}^{d'}$ adaptada a la filtració doble si $(h', d') \prec (h, d)$; en prenem una de E_{h-1}^{d+1} i l'estenem arbitràriament a E_{h-1}^{d} i E_{h}^{d+1}, així obtenim una base de $E_{h-1}^{d} + E_{h}^{d+1}$ adaptada a la filtració doble que podem estendre a E_{h}^{d}. ■

Vegem que per a l'existència de bases adaptades a una filtració triple calen hipòtesis addicionals. Considerarem simplement el cas en què la tercera filtració només té dos membres.

Teorema 1.3.9 *Donada una filtració doble $\{E_h^d\}_{h,d}$ i un subespai W, considerem la filtració triple que resulta d'afegir la filtració $E \supset W$.*

Les següents condicions són equivalents:

(1) Qualsevol base de W adaptada a la filtració $\{W \cap E_h^d\}_{h,d}$ es pot estendre a una base de E adaptada a la filtració triple.

(2) $W \cap E_h^d \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1}) = W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1} \qquad \forall h, d$

(3) $W \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1}) = W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1} \qquad \forall h, d$

(4) $W \cap (K_{h-1} + E_h^{d+1}) = W \cap K_{h-1} + W \cap E_h^{d+1} \qquad \forall h, d$

(5) $W \cap (K_{h-1} + I^{d+1}) = W \cap K_{h-1} + W \cap I^{d+1} \qquad \forall h, d$

Demostració.

(2) $\Rightarrow$ (1). Gràcies al lema anterior, podem suposar que tenim una base del subespai W adaptada a la filtració doble $\{W \cap E_h^d\}_{h,d}$. Novament apliquem inducció, com en el lema, per ampliar-la a una de E adaptada a la filtració triple. En efecte, estenem arbitràriament la base de $W \cap E_1^{n-1}$ a E_1^{n-1} i suposem que la podem estendre a una base de $E_{h'}^{d'}$ adaptada a la filtració triple si $(h', d') \prec (h, d)$; en prenem una de E_{h-1}^{d+1} i l'estenem arbitràriament a E_{h-1}^{d} i E_h^{d+1}, així obtenim una base de $E_{h-1}^d + E_h^{d+1}$ adaptada a la filtració triple; per altra banda, tenim una base de $W \cap E_h^d$ adaptada a la filtració doble i, com que $W \cap E_h^d \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1}) = W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1}$, la unió de les dues bases ens dóna una base de $E_{h-1}^d + E_h^{d+1} + W \cap E_h^d$ adaptada a la filtració triple, que podem estendre arbitràriament a E_h^d.

(3) $\Rightarrow$ (2). És suficient observar que $W \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1}) = W \cap E_h^d \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1})$

(4) $\Rightarrow$ (3).

$$\begin{aligned} W\cap(E^d_{h-1}+E^{d+1}_h) &= W\cap E^d_h\cap(E^d_{h-1}+E^{d+1}_h)\\ &\subset W\cap E^d_h\cap(E^0_{h-1}+E^{d+1}_h)\\ &= W\cap E^d_h\cap W\cap E^0_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h\\ &= W\cap E^d_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h \end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (4).

$$\begin{aligned} W\cap(E^0_{h-1}+E^{d+1}_h) &= W\cap E^0_h\cap(E^0_{h-1}+E^{d+1}_h)\\ &= W\cap E^0_h\cap(E^0_{h-1}+E^{d+1}_n)\\ &= W\cap E^0_h\cap(W\cap E^0_{h-1}+W\cap E^{d+1}_n)\\ &= W\cap E^0_h\cap(W\cap E^0_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h)\\ &= W\cap E^0_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (5).

Si $W\cap(K_{h-1}+I^{d+1})\not\subseteq W\cap K_{h-1}+W\cap I^{d+1}$, hi hauria una combinació lineal de vectors externs a W de la base adaptada a la filtració triple que seria de W, i això contradiu l'adaptació de la base a W. ■

En termes dels graduats associats a les filtracions dobles, la condició (2) anterior equival a que sigui injectiva l'aplicació

$$\frac{W\cap E^d_h}{W\cap E^d_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h}\longrightarrow\frac{E^d_h}{E^d_{h-1}+E^{d+1}_h}$$

induïda per la inclusió $W\cap E^d_h\subset E^d_h$.

En definitiva, és equivalent a què la successió

$$(2')\quad 0\longrightarrow\oplus_{h,d}\frac{W\cap E^d_h}{W\cap E^d_{h-1}+W\cap E^{d+1}_h}\longrightarrow\oplus_{h,d}\frac{E^d_h}{E^d_{h-1}+E^{d+1}_h}\longrightarrow\oplus_{h,d}\frac{E^d_h}{E^d_{h-1}+E^{d+1}_h+W\cap E^d_h}\longrightarrow 0$$

formada per les inclusions i pas a quocients sigui exacta (ho és sumand a sumand), ja que l'única condició que, en general, no és certa és la injectivitat de la segona aplicació, que és equivalent a la condició (2).

Tenim que $E \cong \oplus_{h,d} \frac{E_h^d}{E_{h-1}^d + E_h^{d+1}}$ i $W \cong \oplus_{h,d} \frac{W \cap E_h^d}{W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1}}$, com que en aquest cas la successió és exacta, resulta que

$$\frac{E}{W} \cong \oplus_{h,d} \frac{E_h^d}{E_{h-1}^d + E_h^{d+1} + W \cap E_h^d}$$

i podem enunciar el següent corol·lari:

Corol·lari 1.3.10 *Qualsevol de les condicions del teorema 1.3.9 és equivalent a dir que*

$$\frac{E}{W} \cong \oplus_{h,d} \frac{E_h^d}{E_{h-1}^d + E_h^{d+1} + W \cap E_h^d}$$

i aquest isomorfisme ens permet obtenir una base del quocient prenent un representant de cada un dels sumands.

Aquest corol·lari es generalitza sense dificultat en el cas d'una filtració triple qualsevol:

Proposició 1.3.11 *Existeix una base adaptada a una filtració triple*

$$\{E_h^{d,\delta}\}_{h,d,\delta} = \{K_h \cap I^d \cap W^\delta\}_{h,d,\delta}$$

si, i solament si, per a qualsevol δ

$$\frac{W^\delta}{W^{\delta+1}} \cong \oplus_{h,d} \frac{E_h^{d,\delta}}{E_{h-1}^{d,\delta} + E_h^{d+1,\delta} + E_h^{d,\delta+1}}$$

1.4 La filtració doble de Jordan

És ben conegut el següent:

Proposició 1.4.1 *Donat un endomorfisme f de E, E admet una descomposició única en suma directa de subespais no nuls de la forma*

$$E = \oplus_{i=1}^k Ker(f - \lambda_i I)^{n_i}$$

on els nombres λ_i reben el nom de valors propis de f.

Definició 1.4.2 *Per* cadena de vectors*, relativa a un endomorfisme f, entenem el conjunt de vectors format per un vector i totes les seves imatges successives per f, és a dir, els conjunts del tipus $\{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$, amb $x \in E$.*

Definició 1.4.3 *Per* cadena de Jordan *relativa a un valor propi λ d'un endomorfisme f, entenem una cadena maximal de vectors corresponent a l'endomorfisme $f - \lambda I$.*

Definició 1.4.4 *Una* base de Jordan *de E, relativa a f, està formada per cadenes de Jordan.*

Definició 1.4.5 *La* característica de Segre *relativa a un valor propi λ d'una matriu quadrada és la partició formada per les longituds de les seves cadenes de Jordan. És la partició conjugada de la partició $(dim(Ker(f - \lambda I), Ker(f - \lambda I)^2, \dots))$.*

Podem aplicar la tècnica de les filtracions per demostrar l'existència de bases de Jordan relatives a un endomorfisme f i obtenir-ne.

Tenint en compte la descomposició en suma directa de nuclis, indicada a la proposició 1.4.1, per demostrar l'existència de bases de Jordan, no és cap restricció suposar que l'endomorfisme és nilpotent. Concretament, definim el següent:

Definició 1.4.6 *Donat un endomorfisme nilpotent f, donem el nom de* filtració de Jordan *relativa a f a la filtració doble generada per la intersecció de les filtracions simples formades pels subespais $K_h = Ker f^h$ i $I^d = Im f^d$, de manera que*

$$E_h^d = f^d(K_{d+h})$$

L'esquema general de la filtració doble, si α és la potència de l'anul·lador, queda reduït a:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Im\ f^{\alpha-1} & \subset\cdots\subset & Im\ f^{d+1} & \subset & Im\ f^{d} & \subset\cdots\subset & Im\ f^{0} & = & E \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
E_{\alpha}^{\alpha-1} & \subset\cdots\subset & E_{\alpha}^{d+1} & \subset & E_{\alpha}^{d} & \subset\cdots\subset & E_{\alpha}^{0} & = & Ker\ f^{\alpha} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_{h}^{\alpha-1} & \subset\cdots\subset & E_{h}^{d+1} & \subset & E_{h}^{d} & \subset\cdots\subset & E_{h}^{0} & = & Ker\ f^{h} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_{h-1}^{\alpha-1} & \subset\cdots\subset & E_{h-1}^{d+1} & \subset & E_{h-1}^{d} & \subset\cdots\subset & E_{h-1}^{0} & = & Ker\ f^{h-1} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
E_{1}^{\alpha-1} & \subset\cdots\subset & E_{1}^{d+1} & \subset & E_{1}^{d} & \subset\cdots\subset & E_{1}^{0} & = & Ker\ f
\end{array}
$$

perquè $Imf^d = 0$ si $d \geq \alpha$ i $Kerf^h = E$ si $h \geq \alpha$.

Indicant els graduats corresponents per

$$\mathcal{E}_h^d = \frac{E_h^d}{E_{h-1}^d + E_h^{d+1}}$$

on

$$E \cong \oplus_{0 \leq d, 1 \leq h} \mathcal{E}_h^d$$

tenim el lema següent:

Proposició 1.4.7 *L'endomorfisme nilpotent f indueix isomorfismes*

$$\mathcal{E}_{h+d}^0 \to \cdots \to \mathcal{E}_h^d \to \cdots \to \mathcal{E}_1^{h+d-1} = E_1^{h+d-1}/E_1^{h+d}$$

Demostració. $f(E_{h+1}^{d-1}) = E_h^d$ i, si $f(x) \in E_{h-1}^d + E_h^{d+1}$, resulta per l'última igualtat que $f(x) \in f(E_h^{d-1} + E_{h+1}^d)$, i en conseqüència, $x \in E_h^{d-1} + E_{h+1}^d + E_1^{d-1} = E_h^{d-1} + E_{h+1}^d$

$$
\begin{array}{ccc}
E_{h+1}^d & \subset & E_{h+1}^{d-1} \\
\cup & \swarrow & \cup \\
E_h^d & \subset & E_h^{d-1}
\end{array}
$$

■

Observació 1.4.8 *La proposició anterior demostra constructivament l'existència de bases de Jordan. Per exemple, una base de Jordan d'un endomorfisme nilpotent* f *es pot construir considerant una base de* $Ker f$ *adaptada a la filtració* $E_1^{\alpha-1} \subset \cdots \subset E_1^{d+1} \subset E_1^d \subset \cdots \subset E_1^0 = Ker f$ *i completar-la amb les seves antiimatges successives per* f*, o bé, prendre representants de bases de* $\mathcal{E}_{h+d}^0$ *i les seves imatges successives per* f*.*

1.5 Filtració triple relativa a un subespai invariant

Recordem prèviament la definició de subespai invariant.

Definició 1.5.1 *Direm que un* subespai $W \subset E$ *és* invariant *per un endomorfisme* f *de l'espai* E *si* $f(W) \subset W$.

En termes matricials vol dir que en una base de E *adaptada a* W *la matriu* A *de l'endomorfisme* f *és*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

en què A_1 *és la matriu de la restricció de* f *a* W.

Definició 1.5.2 *Si* W *és un subespai de* E *invariant per* f*. La* filtració triple *relativa a* W *és la formada pels subespais* $E_h^{d,\delta}$ *de* W *definits per*

$$E_h^{d,\delta} = \mathrm{Ker}\ f^h \cap \mathrm{Im}\ f^d \cap \mathrm{Im}\ \hat{f}^\delta$$

Els graduats corresponents els designarem per $\mathcal{E}_h^{d,\delta}$

$$\mathcal{E}_h^{d,\delta} = \frac{E_h^{d,\delta}}{E_{h-1}^{d,\delta} + E_h^{d+1,\delta} + E_h^{d,\delta+1}}$$

i les seves dimensions per $b_h^{d,\delta}$

$$b_h^{d,\delta} = \dim \mathcal{E}_h^{d,\delta}$$

És obvi que $b_h^{d,\delta} = 0$ si $d < \delta$ o $h + d > \alpha$ o $h + \delta > \beta$, en què α i β són les potències dels anul·ladors de f i $\hat{f}$ respectivament.

1.6 Aplicacions definides en un subespai

Des d'un punt de vista geomètric, l'estudi de les parelles de matrius de la forma (A, B) o $\binom{A}{C}$ correspon al de les aplicacions lineals definides mòdul un subespai o en un subespai respectivament. Per exemple, si X és un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió $n+m$, $Y \subset X$ un subespai n-dimensional, i $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida sobre aquest subespai, en una base de X adaptada a $Y \subset X$, la matriu de f és un parell

$\binom{A}{C}$ on $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Observació 1.6.1 *No és cap restricció suposar que $Y + f(Y) = X$, i a partir d'ara ho farem així. Equival a dir que $rank(C)$ és màxim, és a dir, $rank(C) = m \leq n$.*

L'equivalència per blocs entre parells de matrius es trasllada de la manera següent a les aplicacions definides en un subespai:

Definició 1.6.2 *Diem que dues aplicacions lineals definides en un subespai $f : Y \longrightarrow X$ i $f' : Y' \longrightarrow X'$ són* equivalents per blocs *si existeix un isomorfisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ tal que $\varphi(Y) = Y'$, $\varphi \circ f = f' \circ \widehat{\varphi}$, on $\widehat{\varphi}$ és la restricció de φ a Y.*

Proposició 1.6.3 *Dues aplicacions lineals definides en un subespai $f : Y \longrightarrow X$ i $f' : Y' \longrightarrow X'$ són equivalents per blocs si les seves respectives matrius en bases adaptades, $\binom{A}{C}$ i $\binom{A'}{C'}$ són equivalents per blocs.*

Demostració. L'equivalència per blocs de les aplicacions, matricialment vol dir que existeixen $Q \in M_n^*(\mathbb{C})$,$T \in M_m^*(\mathbb{C})$ i $S \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, tals que

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} Q$$

o equivalentment

$$A' = Q(A + FC)Q^{-1}, \quad C' = TCQ^{-1}$$

on $F = Q^{-1}S$

i aquesta és la definició d'equivalència per blocs de les matrius. ∎

Per obtenir geomètricament una família completa d'invariants i bases de Brunovsky a [13] s'introdueix la següent filtració simple:

Definició 1.6.4 *Considerarem la cadena estacionària de subespais i aplicacions lineals definida de la manera següent:*

$$\begin{aligned} Y_0 &\equiv Y; \quad Y_i = f^{-1}(Y_{i-1}), \quad i > 0 \\ \dots &= Y_{k+1} = Y_k \subset Y_{k-1} \subset \dots \subset Y_1 \subset Y \subset X \\ f_i : & \quad Y_i \longrightarrow Y_{i-1}, \quad i > 0 \end{aligned}$$

on f_i és la restricció de f al subespai corresponent. Notarem f_i simplement per f quan no hi hagi confusió possible. El subespai Y_k que estabilitza la cadena també l'indicarem per Y_∞ i l'endomorfisme f_{k+1} per f_∞.

Siguin els nombres

$$r_i = \dim Y_{i-1} - \dim Y_i, \quad i = 1, \dots, k = k_1 \,.$$

que formen una partició $\mathfrak{r} = (r_1, \dots, r_k)$ i definim com a índexs de Brunovsky-Kronecker o BK-índexs *els nombres k_i que formen la partició conjugada de l'anterior $\mathfrak{r}^* = (k_1, \dots, k_r)$.*

També a [13] es demostra que si $\binom{A}{C}$ és la matriu de f en una base adaptada, aleshores $Y_i = Ker(C, CA, \dots, CA^{i-1})^t$.

Com que un parell (C, A) es diu observable si $rank(C, CA, \dots, CA^{n-1})^t = n$, en terminologia geomètrica definim el següent.

Definició 1.6.5 *Una aplicació definida en un subespai $f : Y \longrightarrow X$ és* observable *si $Y_\infty = \{0\}$.*

Proposició 1.6.6 *Una aplicació $f : Y \longrightarrow X$ definida en un subespai $Y \subset X$ defineix de forma natural un morfisme de successions exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \frac{X}{Y_\infty} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f_\infty & & \uparrow f & & \uparrow \tilde{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_\infty} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on l'aplicació $\tilde{f}$ és observable.

Demostració. Hem de tenir en compte que

$$\tilde{f}^{-i}(\frac{Y}{Y_\infty}) = \frac{Y_i + Y_\infty}{Y_\infty}$$

i, per tant, $\tilde{f}^{-k}(\frac{Y}{Y_\infty}) = 0$ ■

Proposició 1.6.7 *[13] Una família completa d'invariants de l'equivalència per blocs és la següent:*

(i) La partició $\mathfrak{r}$ o la seva conjugada $\mathfrak{r}^* = (k_1, \dots, k_r)$, formada pels BK-índexs.

(ii) Els invariants de Jordan de l'endomorfisme

$$f_\infty : Y_\infty \longrightarrow Y_\infty$$

o, equivalentment, els seus factors invariants $\alpha_1 \,|\, \alpha_2 \,|\, \dots \,|\alpha_t$.

Definició 1.6.8 *Una* base de Brunovsky *o BK-base relativa a $f : Y \longrightarrow X$ està formada per una base de Jordan relativa a $f_\infty : Y_\infty \longrightarrow Y_\infty$ juntament amb r cadenes de vectors anomenades* cadenes de Brunovsky*.*

$$x_j, f(x_j), \dots, f^{k_j}(x_j) \notin Y\,, \quad 1 \le j \le r$$

de manera que $f^{k_1}(x_1), \dots, f^{k_r}(x_r)$ són linealment independents (i una base qualsevol d'un subespai suplementari de $Y + f(Y)$ a X, si no consideréssim $Y + f(Y) = X$).

Per matriu de Brunovsky *entenem la que correspon a l'aplicació expressada en una base de Brunovsky.*

Es pot obtenir prenent una base de Jordan de Y_∞ relativa a f_∞ i ampliar-la successivament en la cadena de subespais $\dots \subset Y_i \subset \dots$ "prenent imatges i ampliant graó a graó" mitjançant els subespais suplementaris $\overline{Y}_i$ $(i = k, \dots, 1, 0)$, tals que:

$$\begin{aligned}
Y_{k-1} &= Y_k \oplus \overline{Y}_k \\
Y_{k-2} &= Y_{k-1} \oplus \overline{Y}_{k-1}, \quad \overline{Y}_{k-1} \supset f(\overline{Y}_k) \\
\dots & \\
Y &= Y_1 \oplus \overline{Y}_1, \quad \overline{Y}_1 \supset f(\overline{Y}_2) \\
X &= Y \oplus \overline{Y}, \quad \overline{Y} \supset f(\overline{Y}_1), \quad \overline{Y}_0 = \overline{Y}
\end{aligned}$$

1.7 La filtració doble de Brunovsky

D'una manera similar al cas d'endomorfismes, podem aplicar la tècnica de les filtracions dobles per obtenir bases de Brunovsky en el cas d'aplicacions lineals definides en un subespai. Farem primer el cas observable i després el completarem amb la part de Jordan relativa a f_∞ ja resolta a la secció 1.4.

Definició 1.7.1 *Sigui* $f : Y \longrightarrow X$ *observable, amb* $Y_k = 0$*, sobre el subespai* $E = Y + f(Y)$*, que també notarem per* Y_{-1}*; definim la* filtració doble de Brunovsky *com la formada per les dues filtracions simples donades pels subespais* K_h *i* I^d *següents:*

$$\begin{array}{ll} K_h = f^{h-n}(E) & -1 \leq h \leq k \\ I^d = f^d(f^{-d}(E)) & 0 \leq d \leq k+1 \end{array}$$

És obvi que, amb aquesta definició, tenim

$$K_h = Y_{k-h-1}$$

$$I^d = f^d(Y_{d-1})$$

$$E_h^d = K_h \cap I^d = f^d(Y_{k+d-h-1})$$

Per simplificar, considerem el nou índex

$$i = k - h - 1 \quad -1 \leq i \leq k$$

aleshores,

$$E_h^d = f^d(Y_{d+i})$$

i si $Y_k = Y_\infty = \{0\}$, l'esquema general de la filtració doble queda

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \subset & f^k(Y_{k-1}) & \subset & \cdots & \subset & f^{d+1}(Y_d) & \subset & \cdots & \subset & f(Y) & \subset & Y+f(Y) \\
 & & \cup & & & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
 & & 0 & \subset & \cdots & \subset & f^{d+1}(Y_{d+1}) & \subset & \cdots & \subset & f(Y_1) & \subset & Y \\
 & & & & & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & \cdots & \subset & f^{d+1}(Y_{d+2}) & \subset & \cdots & \subset & f(Y_2) & \subset & Y_1 \\
 & & & & & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & \cdots & \subset & f(Y_{i+1}) & \subset & Y_i \\
 & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & 0 & \subset & Y_{k-1} \\
 & & & & & & & & & & & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}$$

on és evident que $f(E_h^d) = E_{h+1}^{d+1}$ si $h < k$, i l'aplicació f va com en el gràfic:

$$\begin{array}{ccc}
f^{d+1}(Y_{d+i+1}) & \subset & f^d(Y_{d+i}) \\
\cup & \nwarrow & \cup \\
f^{d+1}(Y_{d+i+2}) & \subset & f^d(Y_{d+i+1})
\end{array}$$

(compareu amb el cas Jordan a la secció 1.4).

També en aquest cas resulta fàcilment la proposició següent.

Proposició 1.7.2 *Els morfismes induïts entre els graduats corresponents*

$$\frac{Y_i}{Y_{i+1} + f(Y_{i+1})} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{f^j(Y_i)}{f^j(Y_{i+1}) + f^{j+1}(Y_{i+1})} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{f^{i+1}(Y_i)}{f^{i+1}(Y_{i+1}) + f^{i+2}(Y_{i+1})}$$

són isomorfismes.

Observació 1.7.3 *Gràcies a aquests isomorfismes podem construir una base adaptada a la filtració doble si prenem vectors representants de les classes que formen una base de* $\frac{Y_i}{Y_{i+1}+f(Y_{i+1})}$ *per a* $0 \leq i < k$*, les seves* i *imatges successives (amb les quals formaran una base de* Y*) i les seves imatges per* f^{i+1} *(amb què completaran una base de* $E = Y + f(Y)$*). I una base així és una base de Brunovsky.*

En el cas general, una base de Brunovsky està formada per una base de Jordan relativa a l'endomorfisme f_∞ *i les cadenes de vectors obtingudes a partir de representants dels orígens de les cadenes de Brunovsky de l'aplicació observable* $\tilde{f}$*.*

1.8 Subespais (C, A)-invariants

Tal com hem justificat a la introducció, la noció de subespai invariant en el cas de parelles de matrius es tradueix en la definició següent:

Definició 1.8.1 *Si* $f : Y \longrightarrow X$ *és una aplicació lineal definida en un subespai, i* $W \subset Y$ *és un subespai, diem que* W *és* f-invariant *si*

$$f(W) \cap Y \subset W\,.$$

Exemple 1.8.2 Si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai i $y, f(y), \dots, f^h(y)$ és una cadena de Brunovsky completa, els subespais generats per subcadenes del tipus $f^d(y), f^{d+1}(y), \dots, f^{h-1}(y)$ són f-invariants. En el capítol següent veurem que aquests subespais són, a més, f-marcats.

Definició 1.8.3 *Si* $f : Y \longrightarrow X$ *és una aplicació lineal definida en un subespai* $Y \subset X$*, i* $W \subset Y$ *un subespai* f*-invariant, defineixen de forma natural un morfisme de successions exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & W + f(W) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \frac{X}{W+f(W)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \hat{f} & & \uparrow f & & \uparrow \ddot{f} & & \\
0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{W} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Observació 1.8.4 *És evident que $\widehat{f}$ és una aplicació lineal definida en un subespai. A més, si W és f-invariant, $\ddot{f}$ també es pot considerar d'aquest tipus mitjançant la següent identificació:*

$$\begin{aligned}\frac{Y}{W} &= \frac{Y}{W+(f(W)\cap Y)} \cong \frac{Y+f(W)}{W+f(W)} \subset \\ &\subset \frac{Y+f(Y)}{W+f(W)} \subseteq \frac{X}{W+f(W)}\end{aligned}$$

Vegem, ara, la caracterització en forma matricial.

Proposició 1.8.5 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai $Y \subset X$, i $W \subset Y$ un subespai.*

(1) W és f-invariant si, i solament si, la matriu de f en una base adaptada a $W \subset Y \subset Y + f(W) \subset X$ té la forma

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{array}\right)$$

on $\begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ és la matriu de $\widehat{f}$ en la mateixa base.

(2) En les condicions de (1), la parella $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ és la matriu de $\ddot{f}$ en la base induïda de forma natural per la considerada a X.

Demostració.

(1) Evidentment, la definició 1.8.1 equival a dir que existeix un subespai $U \subset f(W)$ tal que:

$$U \cap Y = \{0\}, \qquad (f(W) \cap Y) \oplus U = f(W)\,.$$

Llavors, en una base de X adaptada a les filtracions $W \subset Y, U \subset X$ i $\overline{Y} \subset X$ (observeu que $Y \oplus U = Y + f(W)$), la matriu de f té la forma desitjada. El recíproc és obvi.

(2) És immediat.

■

Per a la restricció $\widehat{f}$ de f a W, tal com hem fet per a $f: Y \longrightarrow X$ a la secció anterior, considerarem la cadena de subespais i aplicacions lineals

$$\begin{array}{ll} W_0 & \equiv W, \quad W_i = \widehat{f}^{-1}(W_{i-1}), \quad i > 0 \\ \dots & = W_{\hat{k}+1} = W_{\hat{k}} \subset W_{\hat{k}-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset W \subset X \\ \widehat{f}_i : & W_i \longrightarrow W_{i-1}, \quad i > 0 \end{array}$$

Evidentment, tenim

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \dots & \subset & Y_i & \subset & Y_{i-1} & \subset & \dots & \subset & Y_1 & \subset & Y & \subset & X \\ & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\ \dots & \subset & W_i & \subset & W_{i-1} & \subset & \dots & \subset & W_1 & \subset & W & \subset & X \end{array}$$

I podem enunciar la caracterització següent, segons la qual es tracta realment d'una filtració doble de les definides a 1.3.

Proposició 1.8.6 *[7] Sigui $f: Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai i $W \subset Y$ un subespai. Llavors, amb la notació anterior, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) W és f-invariant.

(ii) $W_1 = W \cap Y_1$.

(iii) $W_i = W_{i-1} \cap Y_i = W \cap Y_i$, per a qualsevol $i > 0$.

Demostració. L'equivalència (i) ⇔ (ii) és evident. I (iii) es pot provar fàcilment per inducció:

$$\begin{aligned} W_{i+1} &= \widehat{f}^{-1}(W_i) = \widehat{f}^{-1}(W \cap Y_i) = f^{-1}(W \cap Y_i) \cap W = \\ &= f^{-1}(W) \cap Y_{i+1} \cap W = \widehat{f}^{-1}(W) \cap Y_{i+1} = W_1 \cap Y_{i+1} = \\ &= W \cap Y_1 \cap Y_{i+1} = W \cap Y_{i+1} \end{aligned}$$

■

Aquesta aproximació geomètrica ens permet una demostració alternativa de la relació obtinguda a [2] entre els BK-invariants de $f : Y \longrightarrow X$ i els de $\widehat{f} : W \longrightarrow X$.

Proposició 1.8.7 *[7] Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai amb BK-índexs $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ i factors invariants $\alpha_1 \,|\, \alpha_2 \,|\, \ldots \,|\, \alpha_t$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant amb $(\widehat{k}_1, \widehat{k}_2, \ldots, \widehat{k}_q)$ i $\widehat{\alpha}_1 \,|\, \widehat{\alpha}_2 \,|\, \ldots \,|\, \widehat{\alpha}_\ell$ els de $\widehat{f} : W \longrightarrow X$. Llavors, tenim*

(i) $\ell \leq t$ *i* $\alpha_i \,|\widehat{\alpha}_i|\, \alpha_{i+t-\ell}$ *per a* $i = 1, 2, \ldots, \ell$

(ii) $q \leq r$ *i* $\widehat{k}_i \leq k_i$ *per a* $i = 1, 2, \ldots, q$.

Recíprocament, donats $(\widehat{k}_1, \ldots, \widehat{k}_q)$ i $\widehat{\alpha}_1 \,|\, \widehat{\alpha}_1 \,|\, \ldots \,|\, \widehat{\alpha}_\ell$ verificant (i) i (ii), existeix un subespai f-invariant $W \subset Y$ que els té com a BK-invariants relatius a $\widehat{f} : W \longrightarrow X$.

Demostració. Evidentment $k \geq \hat{k}$ (recordem que $k = k_1, \hat{k} = \hat{k}_1$), i el subespai $W_{\hat{k}} = W_k \subset Y_k$ és invariant respecte de l'endomorfisme $f_{k+1} : Y_k \longrightarrow Y_k$. Llavors, (i) és conegut que es verifica ([5], p. 149). Per provar (ii), considerem les particions conjugades $(r_1, \ldots, r_k)$ i $(\widehat{r}_1, \ldots, \widehat{r}_h)$ de $(k_1, \ldots, k_r)$ i $(\widehat{k}_1, \ldots, \widehat{k}_q)$ respectivament (vegeu la secció 1.6), on

$$\begin{aligned} r_i &= \dim Y_{i-1} - \dim Y_i \\ \widehat{r}_i &= \dim W_{i-1} - \dim W_i \end{aligned}$$

De la condició (iii) de la proposició 1.8.6 obtenim $r_i \geq \widehat{r}_i$, que evidentment implica $k_i \geq \widehat{k}_i$ i $r \geq q$. Per demostrar el recíproc, només cal definir W com el subespai generat per un conjunt de subcadenes de Brunovsky amb la longitud desitjada (vegeu l'exemple 1.8.2). ■

1.9 Descomposició associada a un subespai (C, A)-invariant

Simplifiquem l'expressió matricial associada a un subespai invariant que hem vist a la proposició 1.8.5.

1) Les dues proposicions que hi ha a continuació demostren que un subespai f-invariant es pot descompondre en suma directa d'un subespai invariant per un endomorfisme i d'un altre invariant per una aplicació observable.

Seguint amb l'esquema de 1.6.6 tenim:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \frac{X}{Y_\infty} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f_\infty & & \uparrow f & & \uparrow \tilde{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_\infty} & \longrightarrow & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & W_\infty & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \frac{W}{W_\infty} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proposició 1.9.1 *Si $W \subset Y$ és f-invariant, aleshores $W_\infty = W \cap Y_\infty$ i $\frac{W+Y\infty}{Y\infty} \simeq \frac{W}{W_\infty}$ són f_∞-invariant i $\tilde{f}$-invariant respectivament*

Demostració.

$$f(W_\infty) = f(W \cap Y_\infty) \subset f(W) \cap Y_\infty \subset W \cap Y_\infty = W_\infty$$
$$\tilde{f}(\frac{W+Y_\infty}{Y_\infty}) \cap \frac{Y}{Y_\infty} = \frac{(f(W)+Y_\infty) \cap Y}{Y_\infty} \subset \frac{W+Y_\infty}{Y_\infty}$$

■

Proposició 1.9.2 *Si $W \subset Y$ és f-invariant, existeixen subespais $W(W_\infty)$, $Y(Y_\infty)$ i $X(Y_\infty)$ que realitzen l'esquema anterior:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & X & \longleftrightarrow & X(Y_\infty) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f_\infty & & \uparrow f & & \uparrow f_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_\infty & \longrightarrow & Y & \longleftrightarrow & Y(Y_\infty) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & W_\infty & \longrightarrow & W & \longleftrightarrow & W(W_\infty) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

és a dir:

(i) $W(W_\infty) \subset Y(Y_\infty)$

(ii) $W = W_\infty \oplus W(W_\infty), \quad Y = Y_\infty \oplus Y(Y_\infty), \quad X = Y_\infty \oplus X(Y_\infty)$

(iii) $W(W_\infty)$ *i* $Y(Y_\infty)$ *són* f*-invariants.*

(iv) $f = f_\infty \oplus f_0$ *on* $f_0 = f_{/Y(Y_\infty)}$ *és observable.*

Demostració. Sigui $Y_k = Y_\infty$.

Definim $\overline{W}_{k+1} = 0$ i, per recurrència, considerem subespais $\overline{W}_i$, $i = k, \ldots, 1$ tals que $W_i \oplus \overline{W}_i = W_{i-1}$ i $f(\overline{W}_{i+1}) \subset \overline{W}_i$ (és possible perquè $f(\overline{W}_{i+1}) \cap W_i = 0$ en ser $W_{i+1} = f^{-1}(W_i)$).

Anàlogament, definim $\overline{Y}_{k+1} = 0$ i, per recurrència, prenem subespais $\overline{Y}_i$, $i = k, \ldots, 1$ tals que $\overline{Y}_i \supset \overline{W}_i + f(\overline{Y}_{i+1})$, $Y_i \oplus \overline{Y}_i = Y_{i-1}$.

Definim

$$W(W_\infty) = \oplus_{i=1}^{k} \overline{W}_i \qquad Y(Y_\infty) = \oplus_{i=1}^{k} \overline{Y}_i$$

que per construcció és obvi que són f-invariants.

Definim $X(Y_\infty)$ com un suplementari de Y_∞ a X contenint $Y(Y_\infty) + f(Y(Y_\infty))$ (existeix ja que $Y(Y_\infty)$ és f-invariant).

De l'equivalència per blocs entre $\tilde{f}$ i f_0 donada per la projecció natural π

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{Y}{Y_\infty} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \frac{X}{Y_\infty} & \\ \pi & \uparrow & & \uparrow & \pi \\ & Y(Y_\infty) & \xrightarrow{f_0} & X(Y_\infty) & \end{array}$$

resulta que f_0 és observable. ■

Corol·lari 1.9.3 *Sigui* $f : Y \longrightarrow X$ *una aplicació lineal definida en un subespai* $Y \subset X$*, i* $W \subset Y$ *un subespai* f*-invariant. Tenim que, en bases adequades, la* *matriu de f és*

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} J_1 & 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & A_{32} \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \\ \hline 0 & E_1 & 0 & C_{31} \\ 0 & 0 & 0 & C_{21} \end{array}\right]$$

on les J indiquen matrius de Jordan, les N nilpotents i les E matrius de zeros i uns amb un 1 com a màxim en cada fila o columna.

Cada una de les files i/o columnes corresponen a les ampliacions

$$W_\infty \subset W_\infty \oplus W(W_\infty) = W \subset W \oplus Y_\infty(W_\infty) = W + Y_\infty \subset Y \subset X$$

2) Vegem que en el cas en què l'aplicació $\ddot{f} : \frac{Y}{W} \longrightarrow \frac{X}{W+f(W)}$ definida a 1.8.3 sigui un endomorfisme (tenint en compte l'isomorfisme $\frac{Y}{W} \simeq \frac{Y+f(W)}{W+f(W)}$) el bloc inferior dret es pot reduir a zero.

Proposició 1.9.4 *Si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai $Y \subset X$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant, les condicions següents són equivalents:*

(i) $\ddot{f}$ *és un endomorfisme*

(ii) $f(Y) \subset Y + f(W)$

(iii) $Y = Y_1 + W$

(iv) Existeix un subespai V tal que $Y = V \oplus W$, $\quad Y_1 = V \oplus W_1$.

(v) $\dim Y - \dim W = \dim Y_1 - \dim W_1$.

Demostració. Tenint en compte l'observació 1.8.4 resulta evident l'equivalència entre (i) i (ii). L'equivalència entre (ii) i (iii) resulta òbvia perquè (iii) resulta de (ii) prenent antiimatges. Per veure que (iii) és equivalent a (iv) n'hi ha prou a observar que podem prendre V com un suplementari de W_1 a Y_1. Finalment, (iv) i (v) són manifestament equivalents. ■

Vegem, ara, la caracterització matricial:

Proposició 1.9.5 *$\ddot{f}$ és un endomorfisme si, i solament si, existeix una base de X adaptada a $W \subset Y \subset X$ tal que la matriu de f té la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostració. La proposició 1.9.4 ens diu que $\ddot{f}$ és un endomorfisme si, i solament si, $f(Y) \subset Y + f(W)$. És obvi que aquesta relació la verifiquen les matrius de la forma considerada. Recíprocament, considerant el subespai V de (iv) de la proposició 1.9.4, prenem una base adaptada a la família $\{W, V, Y, X\}$ i la matriu de f té la forma desitjada. ■

3) En general, a la segona columna tindrem una part corresponent a un endomorfisme i una part corresponent a una aplicació observable.

Les proposicions que hi ha a continuació demostren que, donat un subespai f-invariant $W \subset Y$, es pot descompondre l'aplicació f en tres aplicacions: un endomorfisme respecte del qual és invariant la part no observable de W, una aplicació observable respecte de la qual és invariant la part observable de W, de manera que l'aplicació quocient és un endomorfisme, i una aplicació observable.

Proposició 1.9.6 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai $Y \subset X$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. Considerem la cadena decreixent i estacionària de subespais*

$$\begin{aligned} &Y = Y^0 \supset Y^1 \supset \cdots \supset Y^h = Y^{h+1} \equiv Y^W \; (\supset W) \\ &Y^j = f^{-1}(Y^{j-1}) + W \end{aligned}$$

Llavors,

1) *El subespai Y^W és f-invariant.*

2) *L'aplicació $f^{\ddot{W}} : \frac{Y^W}{W} \longrightarrow \frac{Y^W + f(Y^W)}{W + f(W)}$ induïda per la restricció $f^W = f_{/Y^W}$ és un endomorfisme.*

3) L'aplicació $\varphi : \frac{Y}{Y^W} \longrightarrow \frac{X}{Y^W + f(Y^W)}$, induïda per $f : Y \longrightarrow X$, és observable.

Demostració.

1) $f(Y^W) \cap Y = f(f^{-1}(Y^W) + W) \cap Y \subset (Y^W + f(W)) \cap Y = Y^W$

2) Com que $Y^W = f^{-1}(Y^W) + W$, prenent imatges resulta

$$f(Y^W) \subset Y^W + f(W).$$

3) Per simplificar la notació, posem

$$Z = \frac{Y}{Y^W} \simeq \frac{Y + f(Y^W)}{Y^W + f(Y^W)} = \frac{Y + f(W)}{Y^W + f(W)}$$

i s'entén que indiquem per Z qualsevol d'aquests espais i serà l'un o l'altre segons on ens trobem. Vegem que $Z_\infty = 0$ si demostrem per inducció que $Z_j = \frac{Y^j}{Y^W}$.

Efectivament, el cas $j = 0$ és obvi, i si suposem demostrat fins a $j-1$, tenim:

$$\begin{aligned} Z_j = \varphi^{-1}(Z_{j-1}) = \varphi^{-1}\left(\frac{Y^{j-1} + f(W)}{Y^W + f(W)}\right) = \\ = \frac{f^{-1}(Y^{j-1} + f(W)) + Y^W}{Y^W} = \frac{f^{-1}(Y^{j-1}) + W + Y^W)}{Y^W} = \\ = \frac{f^{-1}(Y^{j-1}) + W}{Y^W} = \frac{Y^j}{Y^W} \end{aligned}$$

■

Corol·lari 1.9.7 *Si $W \subset G \subset Y$ és f-invariant i l'aplicació $\frac{G}{W} \longrightarrow \frac{G+f(G)}{W+f(W)}$, induïda per f, és endomorfisme, llavors $G \subset Y^W$.*

Donada una aplicació definida en un subespai $f : Y \longrightarrow X$ i un subespai f-invariant $W \subset Y$ apliquem la proposició 1.9.2 per separar la part no observable $f_\infty : Y_\infty \longrightarrow Y_\infty$, $W_\infty \subset Y_\infty$, i apliquem la proposició 1.9.14 a la part observable $f_0 : Y(Y_\infty) \longrightarrow X(Y_\infty)$, amb $W(W_\infty) \subset Y(Y_\infty)$, i resultarà el teorema següent:

Teorema 1.9.8 *Donada una aplicació definida en un subespai $f : Y \longrightarrow X$ i un subespai f-invariant $W \subset Y$, l'espai Y admet una descomposició*

$$Y = Y_\infty \oplus U \oplus V$$

sent

(1) $f_\infty : Y_\infty \longrightarrow Y_\infty$ *un endomorfisme i* $W_\infty \subset Y_\infty$ *un subespai invariant.*

(2) $f_{/U}$ *observable,* $W(W_\infty) \subset U$ *invariant, i compleix que* $\ddot{f}_{/U} : \frac{U}{W(W_\infty)} \longrightarrow \frac{U+f(U)}{W(W_\infty)+f(W(W_\infty))}$ *és un endomorfisme.*

(3) $V \xrightarrow{f_{/V}} V + f(V) \longrightarrow \frac{V+f(V)}{(V+f(V))\cap f(W)}$ *és observable.*

Demostració. Prenem $U = [Y(Y_\infty)]^{W(W_\infty)}$ i apliquem la proposició 1.9.6 a la restricció de f al subespai $Y(Y_\infty)$ i V un suplementari de U a $Y(Y_\infty)$. ■

Corol·lari 1.9.9 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai $Y \subset X$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. La matriu de f en bases adequades serà:*

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} J_1 & 0 & Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & Z_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \hline 0 & E_1 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{array}\right]$$

on les J_i indiquen matrius de Jordan i les parelles (E_i, N_i) són de Brunovsky observables.

Cada una de les files i/o columnes correspon a les ampliacions

$$W_\infty \subset W_\infty \oplus W(W_\infty) = W \subset Y_\infty \oplus W(W_\infty) \subset U \subset Y \subset Y + f(W) \subset X.$$

La proposició següent serveix per estudiar els vectors propis corresponents a l'aplicació $\ddot{f}$. Ens restringim al cas observable perquè amb la descomposició feta sempre ho podem suposar.

Definició 1.9.10 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ observable i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. Definim la cadena estacionària de subespais:*

$$W = W^0 \subset W^1 \subset \ldots \subset W^s = W^{s+1} = \ldots = W^\infty$$
$$W^j = f^{-1}(W^{j-1} + f(W)) = f^{-1}(W^{j-1}) + W$$

Proposició 1.9.11 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ observable i $W \subset Y$ un subespai f-invariant amb $\ddot{f} : \frac{Y}{W} \longrightarrow \frac{X}{W+f(W)}$ un endomorfisme. Es compleix:*

(1) Ker $\ddot{f}^j = \dfrac{W^j}{W}$, per a qualsevol $j \geq 0$, i, per tant, l'aplicació $\ddot{f}_{/\frac{W^\infty}{W}}$ és un endomorfisme nilpotent.

(2) Els subespais W^j són f-invariants. De fet, compleixen $f(W^j) \cap Y \subset W^{j-1}$, per a qualsevol $j \geq 1$.

Demostració.

(1) Procedim per inducció, usant la identificació de la remarca 1.8.4.

És obvi si $j = 0$. Suposem que

$$\text{Ker } \ddot{f}^j = \frac{W^j}{W} \cong \frac{W^j + f(W)}{W + f(W)} \subset \frac{X}{W + f(W)}$$

Llavors:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \ddot{f}^{j+1} &= \ddot{f}^{-1}(\text{Ker } \ddot{f}^j) = \\ &= \frac{f^{-1}(W^j + f(W)) + W}{W} = \frac{W^{j+1}}{W} \end{aligned}$$

(2) També per inducció. Si $j = 1$, tenim:

$$\begin{aligned} f(W^1) \cap Y &= f(f^{-1}(W) + W) \cap Y \subset \\ &\subset (W + f(W)) \cap Y \subset W \end{aligned}$$

Si la propietat es verifica per a W^j, tenim

$$\begin{aligned} f(W^{j+1}) \cap Y &= f(f^{-1}(W^j) + W) \cap Y \subset \\ &\subset (W^j + f(W)) \cap Y \subset \\ &\subset (W^j + f(W^j)) \cap Y \subset W^j + W^{j-1} = W^j \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Repetint el mateix per a cada valor propi λ de l'endomorfisme $\ddot{f}$ tenim quins són els nuclis de la primera descomposició i podem escriure, en el cas en què $\ddot{f}$ sigui un endomorfisme,

$$\frac{Y}{W} = \oplus_\lambda \frac{W_\lambda^\infty}{W}$$

on W_λ^∞ és el mateix que W^∞ però referit a $\ddot{f} - \lambda I$

Exemple 1.9.12 Sigui $Y = [e_1, e_2, v_1, v_2, v_3]$, $X = Y \oplus [e_3, v_4]$ amb $\dim(Y) = 5$ i $\dim(X) = 7$, l'aplicació observable f definida per $f(e_i) = e_{i+1}$, $f(v_i) = v_{i+1}$ i el subespai f-invariant $W = [e_1 + \lambda v_1, e_2 + \lambda v_2, e_2 + v_3]$.

Tenim que

$$Y^1 = Y^W = Y \qquad W^1 = W \oplus [e_1 + v_2] = W^2 = W^\infty \qquad W^{\infty_\lambda} = W \oplus [v_2].$$

$\ddot{f} : \frac{Y}{W} \longrightarrow \frac{X}{W + f(W)}$ és un endomorfisme i $\ddot{f}(\widetilde{e_1 + v_2}) = \tilde{0} \quad \ddot{f}(\tilde{v_2}) = \lambda \tilde{v_2}$.

La matriu de f en la base $\{e_1 + \lambda v_1, e_2 + \lambda v_2, e_2 + v_3, e_1 + v_2, v_2, e_3 + \lambda v_3, e_3 + v_4\}$ adaptada a $W \subset Y \subset X$ és:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4) Encara que, en general, $Z_3 \neq 0$, donem condicions perquè sigui zero.

L'exemple que hi ha a continuació ens demostra que, en general, no existeix un subespai f-invariant $Y(Y^W)$ suplementari de Y^W a Y, de manera que $f_{/Y(Y^W)}$ sigui observable i $f = f_{/Y^W} \oplus f_{/Y(Y^W)}$.

Exemple 1.9.13 Sigui $Y = [e_1, e_2, v_1, v_2, v_3]$, $X = Y \oplus [e_3, v_4]$ amb $\dim(Y) = 5$ i $\dim(X) = 7$, l'aplicació observable f definida per $f(e_i) = e_{i+1}$, $f(v_i) = v_{i+1}$ i el subespai f-invariant $W = [v_1 + e_2]$.

Tenim que $Y^1 = [e_1, e_2, v_1, v_2]$, $Y^2 = [e_1, e_2, v_1]$, $Y^3 = [e_1, v_1 + e_2]$, $Y^4 = Y^W = W$

La matriu en la base $\{v_1 + e_2, e_1, e_2, -v_2, -v_3, v_2 + e_3, -v_4\}$ adaptada a $W \subset Y \subset X$ és

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

i no és possible la descomposició en suma directa indicada anteriorment.

La proposició següent ens indica quan és possible aquesta descomposició en suma directa.

Proposició 1.9.14 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai $Y \subset X$, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant.*

Existeix un subespai $Y^W \supset W$ i un suplementari $Y(Y^W)$ de Y^W a Y tal que

(1) $f_{/Y(Y^W)}$ és observable.

(2) $f^{\ddot{W}} : \frac{Y^W}{W} \longrightarrow \frac{Y^W + f(Y^W)}{W + f(W)}$ és un endomorfisme.

i que realitza l'esquema següent:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y^W + f(W) & \longrightarrow & X & \longleftrightarrow & Y(Y^W) + f(Y(Y^W)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow f^W & & \uparrow f & & \uparrow f_{/Y(Y^W)} & & \\
0 & \longrightarrow & Y^W & \longrightarrow & Y & \longleftrightarrow & Y(Y^W) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

o, el que és el mateix, que $f = f^W \oplus f_{/Y(Y^W)}$ *si, i solament si,*

$$Y^j = Y_j + Y^W \qquad \forall j$$

Demostració. És obvi que la condició de suma directa es complirà si, i solament si,

$$\dim(Y_j) = \dim(Y_j \cap Y^W) + \dim(Z_j) \qquad \forall j$$

que podem expressar com

$$\dim(Y^j) = \dim(Y_j + Y^W) \qquad \forall j$$

i com que $Y_j + Y^W \subset Y^j$ resulta la proposició. ■

Capítol 2

Subespais marcats

2.1 Introducció

En aquest capítol estudiem els subespais marcats, els caracteritzem i els classifiquem i, en l'última secció, donem condicions suficients per a l'existència de bases de Brunovsky globals per a una família parametritzada de parelles de matrius i subespais invariants.

A les dues primeres seccions estudiem els subespais marcats per un endomorfisme. A la secció 2.2 definim els subespais marcats i en donem una caracterització geomètrica en termes de la filtració formada per la de Jordan intersecada amb el subespai (teorema 2.2.9) i una segona caracterització basada en la filtració triple relativa al subespai invariant (teorema 2.2.15).

A la secció 2.3 donem dos teoremes de classificació dels subespais marcats, el primer en termes de la primera filtració (teorema 2.3.2) i el segon en termes de la segona (teorema 2.3.4).

A la secció 2.4 definim els subespais marcats per una aplicació lineal definida en un subespai o, el que és el mateix, els subespais (C, A)-marcats (definició 2.4.1). Demostrem que un subespai és marcat si, i solament si, ho són les seves parts inobservable i observable (proposició 2.4.6). Caracteritzem els subespais marcats per una aplicació observable (teorema 2.4.8) i acabem amb la caracterització d'un subespai marcat en el cas general (teorema 2.4.10).

A la secció 2.5 classifiquem els subespais (C, A)-marcats en el teorema 2.5.4 i ho apliquem per determinar el nombre de classes de subespais marcats no equivalents si l'aplicació és observable (teorema 2.5.6).

Finalment, a la secció 2.6 comencem recordant els conceptes i resultats coneguts que ens serviran per enunciar el teorema 2.6.15, que dóna condicions suficients per a l'existència d'una base global de Brunovsky per a una família diferenciable de subespais marcats.

2.2 Subespais A-marcats: caracteritzacions geomètriques

Si W és un subespai de E invariant per f (o f-invariant), és a dir, $f(W) \subset W$, notarem per $\hat{f}$ la restricció de f sobre W.

Definició 2.2.1 *[20] Diem que un subespai f-invariant W és* marcat *(o f-marcat) si existeix una base de Jordan de W relativa a $\hat{f}$, que es pot estendre a una base de Jordan de E relativa a f.*

Exemple 2.2.2 Un subespai generat per cadenes de Jordan és un subespai marcat. Si f té valor propi λ, els subespais $Ker(f - \lambda I)^k$ també són marcats, perquè són formats per cadenes de Jordan.

Exemple 2.2.3 Donat l'espai vectorial $E = [e_1, e_2, e_3, e_4]$ i l'endomorfisme definit per $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = f(e_4) = 0$, el subespai $W = [e_2 + e_4, e_3]$ no és marcat perquè les bases de Jordan de W són totes de la forma $\{a(e_2+e_4)+be_3, ae_3\}$, amb a, b escalars i $a \neq 0$, i no es poden estendre a una cadena de 3 vectors.

És immediata la següent caracterització matricial:

Proposició 2.2.4 *Un subespai $W \subset E$ és f-marcat si, i solament si, existeix una base de E, adaptada a W, tal que la matriu A de f en aquesta base té la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

sent $A_1 \in M_s(\mathbb{C})$,$s = \dim W$ *i, a més,*

(i) A_1 *és una matriu de Jordan.*

(ii) A *és una matriu de Jordan, llevat de permutacions, és a dir, existeix una permutació* $P \in Gl(n,\mathbb{C})$ *tal que* P^tAP *és una matriu de Jordan.*

Exemple 2.2.5 Donat l'espai vectorial $E = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$, l'endomorfisme definit per $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 0, f(e_4) = e_5, f(e_5) = 0$ i el subespai $W = [e_2 + 2e_5, e_3]$, la matriu de f en la base de Jordan $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ és

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en la base $\{e_2 + 2e_5, e_3, e_1, e_4, e_5\}$ adaptada a W és

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i en la base $\{e_2 + 2e_5, e_3, e_1 + 2e_4, e_4, e_5\}$ adaptada a W és

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que és una matriu de Jordan llevat de permutacions. En resum, W és marcat.

Definició 2.2.6 *Una matriu*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

que compleixi

(i) A_1 *és una matriu de Jordan.*

(ii) Existeix una permutació $P \in Gl(n, \mathbb{C})$ *tal que* $P^t AP$ *és una matriu de Jordan.*

diem que és una matriu marcada.

Amb la definició donada de subespai marcat, podem enunciar la següent proposició, que no necessita demostració:

Proposició 2.2.7 *Un subespai invariant* W *és marcat si, i solament si, existeix una base de Jordan de* E *adaptada a* W*.*

Si $E = \oplus_{i=1}^k Ker(f - \lambda_i I)^{n_i}$, és evident la següent proposició:

Proposició 2.2.8 *Un subespai invariant* W *és marcat si, i solament si,* $W \bigcap Ker(f - \lambda_i I)^{n_i}$ *és marcat per a cada* $i = 1, 2, \ldots, k$*.*

Aquesta proposició ens permet reduir el nostre estudi a endomorfismes nilpotents.

Si f és un endomorfisme nilpotent i W és un subespai f-invariant, considerem la filtració induïda a W per la filtració de Jordan $\{W \cap E_h^d\}_{h,d}$; aleshores tenim:

$$W \cap E_h^0 = W \cap Ker f^h = Ker \hat{f}^h$$

$$W \cap E_\alpha^d = W \cap Im f^d \supset Im \hat{f}$$

$$W \cap E_h^d = Ker \hat{f}^h \cap Im f^d = W \cap f^d(K_{h+d}) \supset f^d(W \cap K_{h+d})$$

És obvi que una base de Jordan adaptada a W serà, també, adaptada a les filtracions $\{E_h^d\}_{h,d}$ i $\{W \cap E_h^d\}_{h,d}$. El teorema 1.3.9 ens dóna condicions per al recíproc.

Teorema 2.2.9 (Primera caracterització dels subespais A-marcats) *Sigui f un endomorfisme nilpotent de l'espai E i W un subespai f-invariant W és f-marcat si, i solament si, es compleix qualsevol de les condicions del teorema 1.3.9 per a filtració triple composta per la filtració de Jordan i $E \supset W$. És a dir, les següents condicions són equivalents:*

(1) W *és* f*-marcat.*

(2) Qualsevol base de W *adaptada a la filtració* $\{W \cap f^d(K_{d+h})\}_{h,d}$ *es pot estendre a una base de* E *adaptada a la filtració triple.*

(3) $W \cap f^d(K_{d+h}) \cap (f^d(K_{d+h-1}) + f^{d+1}(K_{d+h+1})) = W \cap f^d(K_{d+h-1}) + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1}) \quad \forall h, d$

(4) $W \cap (f^d(K_{d+h-1}) + f^{d+1}(K_{d+h+1})) = W \cap f^d(K_{d+h-1}) + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1}) \quad \forall h, d$

(5) $W \cap (K_{h-1} + f^{d+1}(K_{d+h+1})) = W \cap K_{h-1} + W \cap f^{d+1}(K_{d+h+1}) \quad \forall h, d$

(6) $W \cap (K_{h-1} + I^{d+1}) = W \cap K_{h-1} + W \cap I^{d+1} \quad \forall h, d$

on $K_h = Ker f^h$ *i* $I^d = Im f^d$

Demostració. Solament hem de demostrar que (1) és equivalent al conjunt de les altres condicions. Tal com hem dit abans, (1) implica (2) ja que la base de Jordan adaptada a W és adaptada a la filtració triple.

Per demostrar que (2)implica (1), notem

$$\mathcal{W}_h^d = \frac{W \cap E_h^d}{W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1}}$$

La condició (4) expressada en termes dels E_h^d s'escriu

$$W \cap (E_{h-1}^d + E_h^{d+1}) = W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1}.$$

i ens garanteix que la cadena d'isomorfismes de la proposició 1.4.7 donada per l'endomorfisme f dóna una cadena de morfismes injectius

$$\mathcal{W}_{h+d}^0 \to \cdots \to \mathcal{W}_h^d \to \cdots \to \mathcal{W}_1^{h+d-1} = W \cap E_1^{h+d-1} / W \cap E_1^{h+d}$$

Això ens permet prendre una base de W adaptada a la filtració induïda $\{W \cap E_h^d\}_{h,d}$ formada per cadenes de vectors.

Completem les cadenes existents a W fins a aconseguir cadenes maximals a E i afegim cadenes maximals sense intersecció amb W usant els isomorfismes entre graduats de la proposició 1.4.7, i així obtenim una base de Jordan adaptada a W. ■

Corol·lari 2.2.10 *Una base de Jordan de l'endomorfisme $\tilde{f} : \frac{E}{W} \longrightarrow \frac{E}{W}$, induït de forma natural per f, ve donada per les classes dels vectors que han estès la base de W a una base de E. Evidentment, està formada per cadenes maximals relatives a $\tilde{f}$.*

Per obtenir una caracterització alternativa, vegem quan una base donada de W pot estendre's a una base de Jordan de E. És obvi que l'existència d'una base d'aquesta mena garantirà la condició de marcat.

Per a això necessitem una definició prèvia, relacionada amb el concepte de profunditat d'un element en una filtració doble definit a 1.3.5.

Definició 2.2.11 *[6] Diem que $x \in E$ té la* propietat de la constància (CP) *si $x \in Ker f$ o $dp(f(x)) = dp(x) + 1$. Diem que un conjunt té la propietat CP si tots els elements del conjunt la tenen.*

Exemple 2.2.12 El vector e_2 de l'exemple 2.2.3 té CP perquè

$$dp(f(e_2)) = dp(e_3) = dp(e_2) + 1.$$

En canvi, $e_2 + e_4$ no la té perquè

$$dp(f(e_2 + e_4)) = dp(e_3) = 2 > dp(e_2 + e_4) + 1 = 1.$$

Amb totes aquestes definicions i consideracions, podem enunciar el lema següent, ja demostrat a [14].

Lema 2.2.13 *Sigui W un subespai de E invariant per f, $\hat{f}$ la restricció de f a W, i $\hat{\mathcal{B}}$ una base de Jordan relativa a $\hat{f}$. Llavors són equivalents:*

1. *$\hat{\mathcal{B}}$ es pot estendre a una base de Jordan relativa a f.*
2. *$\hat{\mathcal{B}}$ compleix CP i $\hat{\mathcal{B}}_1$ és adaptada a la filtració $\{E_1^d\}_d$.*
3. *$\hat{\mathcal{B}}$ és adaptada a la filtració doble $\{E_h^d\}_{h,d}$.*

Lema 2.2.14 *Si W és un subespai de E invariant per f, i $\hat{f}$ la restricció de f a W, existeix una base de Jordan $\hat{\mathcal{B}}$ relativa a $\hat{f}$ amb el conjunt dels seus vectors propis $\hat{\mathcal{B}}_1$ adaptat a la filtració doble $\{E_1^{d,\delta}\}_{d,\delta}$.*

Demostració. Gràcies a la proposició 1.3.8 podem considerar una base $\hat{\mathcal{B}}_1$ de Ker $\hat{f}$ adaptada a la filtració doble $\{E_1^{d,\delta}\}_{d,\delta}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\dots & \subset & E_1^d & \subset & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \subset & E_1^0 & = & \mathrm{Ker}\, f \\
 & & \cup & & & & & & & & \cup & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
\dots & \subset & E_1^{d,0} & \subset & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \subset & E_1^{0,0} & = & \mathrm{Ker}\, f \cap W \\
 & & \cup & & & & & & & & \cup & & \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & \cup & & & & & & & & \cup & & \\
\dots & \subset & E_1^{d,\delta} & \subset & \dots & \subset & E_1^{\delta,\delta} & & = & \dots & = & E_1^{0,\delta} & = & \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, \hat{f}^\delta \\
 & & \cup & & & & & & & & \cup & & \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Aquesta base també serà adaptada a les filtracions simples $\{E_1^d\}_d$ i $\{\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, \hat{f}^\delta\}_\delta$. Adaptada a aquesta última filtració, podem estendre-la a una base de Jordan relativa a $\hat{f}$ prenent antiimatges successives dels vectors propis. Evidentment, aquest procés no modifica els vectors propis, i la base de Jordan obtinguda $\hat{\mathcal{B}}$ té el conjunt dels seus vectors propis $\hat{\mathcal{B}}_1$ adaptat a la filtració simple $\{E_1^d\}_d$. ■

Ja podem abordar una nova caracterització dels subespais marcats:

Teorema 2.2.15 (Segona caracterització dels subespais A-marcats) *Si W és un subespai de E invariant per f, i $\hat{f}$ és la restricció de f a W, les següents condicions són equivalents:*

(a) W és marcat.

(b) f indueix isomorfismes

$$\mathcal{E}_{h+\delta}^{d-\delta,0} \to \cdots \to \mathcal{E}_{h+1}^{d-1,\delta-1} \to \mathcal{E}_{h}^{d,\delta} \to \cdots \to \mathcal{E}_{1}^{d+h-1,\delta+h-1}.$$

(c) $b_h^{d,\delta} = b_{h-1}^{d+1,\delta+1}$, per a qualsevol $h \geqslant 1$, $d \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$.

Demostració. Si es verifica (a), sigui W marcat i $\mathcal{B}$ una base de Jordan relativa a f adaptada a W, és immediat que també és adaptada a la filtració triple $\{(E_h^{d,\delta})\}_{h,d,\delta}$. Aquest fet i que $\mathcal{B}$ estigui formada per cadenes de vectors, implica (b). És obvi que (b) implica (c).

Si (b) es verifica, demostrem que existeix una base de W que verifica la condició (b) del lema 2.2.13.

Sigui $v_1, \ldots, v_r$ una base de Ker $\hat{f}$ adaptada a la filtració $\{E_1^{d,\delta}\}_{d,\delta}$, com al lema 2.2.14. Si $d_i = dp(v_i)$ i $\delta_i = \delta p(v_i)$, la hipòtesi (b) assegura l'existència de $u_i \in E_{1+\delta_i}^{d_i-\delta_i,0}$ tal que $f^{\delta_i}(u_i) = v_i$. Llavors, demostrem que les cadenes

$$u_i\,,\;\; f(u_i)\,, \ldots\,,\;\; f^{\delta_i}(u_i) = v_i$$

formen la base $\hat{\mathcal{B}}$ desitjada: primer, és clar que és una base de Jordan relativa a $\hat{f}$; segon, s'ha obtingut seguint el lema 2.2.14 i compleix que $\hat{\mathcal{B}}_1$ és adaptada a la filtració $\{E_1^d\}_d$; i finalment, per construcció $dp(u_i) = d_i - \delta_i$, és a dir, compleix CP.

Finalment, provem que (c) implica (b). Demostrem que els morfismes $\mathcal{E}_{h+1}^{d-1,\delta-1} \to \mathcal{E}_h^{d,\delta}$ són injectius i que $f(E_{h+1}^{d-1,\delta-1}) = E_h^{d,\delta}$, per inducció sobre el conjunt d'índexs amb l'ordenació següent:

$$(h,d,\delta) \prec (h',d',\delta') \Leftrightarrow \begin{cases} h < h' \\ h = h' \quad d > d' \\ h = h' \quad d = d' \quad \delta > \delta' \end{cases}$$

El primer índex és $(1, \alpha-1, \beta-1)$ i el morfisme entre quocients que li correspon és

$$\frac{E_2^{\alpha-2,\beta-2}}{E_1^{\alpha-2,\beta-2}} \to E_1^{\alpha-1,\beta-1}.$$

L'injectivitat és evident i, per la igualtat de dimensions garantida per la condició (c), resulta que és bijectiu i, per tant, $f(E_2^{\alpha-2,\beta-2}) = E_1^{\alpha-1,\beta-1}$.

Considerem el morfisme $\mathcal{E}_{h+1}^{d-1,\delta-1} \to \mathcal{E}_h^{d,\delta}$. Sigui $x \in E_{h+1}^{d-1,\delta-1}$ tal que

$$f(x) \in E_{h-1}^{d,\delta} + E_h^{d+1,\delta} + E_h^{d,\delta+1}.$$

Per la hipòtesi d'inducció, existeixen $x_1 \in E_h^{d-1,\delta-1}$, $x_2 \in E_{h+1}^{d,\delta-1}$ i $x_3 \in E_{h+1}^{d-1,\delta}$ tals que $f(x) = f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$. Llavors, $x-x_1-x_2-x_3 \in E_1^{d-1,\delta-1} \subset E_h^{d-1,\delta-1}$. En conseqüència, $x \in E_h^{d-1,\delta-1}+E_{h+1}^{d,\delta-1}+E_{h+1}^{d-1,\delta}$, i el morfisme considerat és injectiu. Per la igualtat de dimensions també és exhaustiu, i donat $y \in E_h^{d,\delta}$, existeix $x \in E_{h+1}^{d-1,\delta-1}$ tal que $y - f(x) \in E_{h-1}^{d,\delta} + E_h^{d+1,\delta} + E_h^{d,\delta+1}$, i repetint el raonament anterior resulta que $y \in f(E_{h+1}^{d-1,\delta-1})$ i, per tant, $f(E_{h+1}^{d-1,\delta-1}) = E_h^{d,\delta}$. ∎

Exemple 2.2.16 Sigui f amb base de Jordan

$$\begin{aligned} &e_1\,, \quad e_2 = f(e_1)\,, \quad e_3 = f^2(e_1)\,, \quad e_4 = f^3(e_1) \\ &e_5\,, \quad e_6 = f(e_5) \end{aligned}$$

i sigui $W = [e_2+e_5, e_3, e_6, e_4]$. És fàcil comprovar que

$$\begin{aligned} b_1^{3,2} &= \dim \mathcal{E}_1^{3,2} = \dim([e_4]) = 1 \\ b_2^{2,1} &= \dim \mathcal{E}_2^{2,1} = \dim\big([e_4]/[e_4]+[e_4]\big) = 0 \end{aligned}$$

En conseqüència, W no és marcat.

Observació 2.2.17 *En general, donat un subespai invariant W no marcat, els morfismes $\mathcal{E}_{h+1}^{d-1,\delta-1} \to \mathcal{E}_h^{d,\delta}$ no són ni injectius ni exhaustius.*

En l'exemple 2.2.3, $\dim \mathcal{E}_2^{0,0} = 1$, $\dim \mathcal{E}_1^{1,1} = 0$, *i el morfisme corresponent no pot ser injectiu.*

En l'exemple 2.2.16, $\dim \mathcal{E}_2^{2,1} = 0$, $\dim \mathcal{E}_1^{3,2} = 0$, *i el morfisme corresponent no pot ser exhaustiu.*

2.3 Subespais A-marcats: classificació

Quan sigui convenient, indicarem un subespai invariant per la terna (E, W, f), on E és l'espai vectorial, f l'endomorfisme i W el subespai f-invariant.

Recordem la definició d'equivalència de subespais invariants:

Definició 2.3.1 *Dos subespais invariants (E, W, f) i (E', W', f') són equivalents si existeix un isomorfisme $\varphi : E \to E'$ tal que $\varphi \circ f = f' \circ \varphi$ i $\varphi(W) = W'$.*

En particular, f i $\hat{f}$ han de ser equivalents a f' i $\hat{f}'$ respectivament. És obvi que és necessari que $\dim E = \dim E' = n$ i $\dim W = \dim W' = s$.

En termes matricials, si expressem f i f' en la forma indicada a 1.5.1, aquesta equivalència vol dir que existeixen matrius $P \in M_s^*(\mathbb{C})$, $Q \in M_{n-s}^*(\mathbb{C})$ i $R \in M_{s,n-s}(\mathbb{C})$ tal que:

$$\begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$$

A [14] es demostra el següent teorema de classificació:

Teorema 2.3.2 *Dos subespais marcats (E, W, f) i (E', W', f'), sent f i f' nilpotents, són equivalents si, i solament si,*

(i) f i f' són equivalents

(ii) $w_h^d = {w'}_h^d$ per a qualsevol $h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$

sent $w_h^d = \dim(\mathcal{W}_h^d) = \dim\left(\frac{W \cap E_h^d}{W \cap E_{h-1}^d + W \cap E_h^{d+1}}\right)$

Però, com els mateixos autors assenyalaven en l'exemple que hi ha a continuació, és necessari saber que els dos subespais són marcats per poder garantir que siguin equivalents si es compleixen (i) i (ii).

Exemple 2.3.3 Sigui $E = E' = \mathbb{C}^6$, $f = f'$ definida sobre la base $\{e_i\}$ per $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 0$, $f(e_4) = e_5$, $f(e_5) = 0$, $f(e_6) = 0$ i

$$W = [e_3, e_4, e_5], \qquad W' = [e_2 + e_6, e_3, e_5]$$

És obvi que les restriccions són equivalents i que la condició (ii) del teorema 2.3.2 es compleix:

$$\begin{array}{ll} w_0^2 = {w'}_0^2 & w_1^1 = {w'}_1^1 \\ w_0^1 = {w'}_0^1 & w_1^0 = {w'}_1^0 \\ w_0^0 = {w'}_0^0 & \end{array}$$

Però els subespais no poden ser equivalents perquè W és marcat i W' no ho és.

El següent teorema de classificació, que és una conseqüència immediata del segon teorema de caracterització 2.2.15, ens permet millorar el teorema anterior perquè el fet que un dels subespais sigui marcat ja ens garanteix que ho sigui l'altre, si compleix la condició (ii) del teorema seǵuent.

Teorema 2.3.4 *[8] Sigui (E, W, f) un subespai marcat i (E', W', f') un subespai invariant. Són equivalents si, i solament si,*

(i) f i f' són equivalents

(ii) $b_h^{d,\delta} = {b'}_h^{d,\delta}$

2.4 Subespais (C, A)-marcats: caracterització geomètrica

En tota la secció, suposem que $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai, $W \subset Y$ un subespai f-invariant, i $\widehat{f} : W \longrightarrow X$ la restricció de f.

Definició 2.4.1 *Diem que W és f-*marcat *si existeix una base de Brunovsky relativa a $\widehat{f} : W \longrightarrow X$ extensible a una base de Brunovsky relativa a $f : Y \longrightarrow X$. O, equivalentment, si existeix una base de Brunovsky relativa a $f : Y \longrightarrow X$ adaptada a la filtració $W \subset Y \subset X$.*

Exemple 2.4.2 Tal com es va indicar a l'exemple 1.8.2 de subespai f-marcat, si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai i $y, f(y), \ldots, f^h(y)$ és una cadena de Brunovsky completa, els subespais generats per subcadenes del tipus $f^d(y), f^{d+1}(y), \dots, f^{h-1}(y)$ són f-marcats.

Exemple 2.4.3 Siguin $X = \mathbb{C}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base, $Y = [e_1, e_2, e_3]$ i $f : Y \longrightarrow X$ definida per

$$f(e_1) = 0, \qquad f(e_2) = e_1 + e_3, \qquad f(e_3) = e_4\,.$$

Llavors, $W = [e_3]$ és f-invariant, però no és f-marcat.

Anàlogament a la proposició 1.8.5, és immediata la següent caracterització matricial:

Proposició 2.4.4 *Amb la notació anterior, W és f-marcat si, i solament si, existeix una base de X adaptada a la filtració $W \subset Y \subset X$ tal que la matriu $\left(\begin{smallmatrix} A \\ C \end{smallmatrix}\right)$ de f en aquesta base té la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

sent $A_1 \in M_s(\mathbb{C})$, $s = \dim W$, i a més:

(i) $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ C_1 \end{smallmatrix}\right)$ és una matriu de Brunovsky.

(ii) $\left(\begin{smallmatrix} A \\ C \end{smallmatrix}\right)$ és una matriu de Brunovsky, llevat de permutacions; és a dir, existeix una matriu de permutacions $P \in Gl(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{pmatrix} P^t & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} P$$

és una matriu de Brunovsky .

Exemple 2.4.5 Siguin $X = \mathbb{C}^5$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base, $Y = [e_1, e_2, e_3]$ i $f : Y \longrightarrow X$ definida per

$$f(e_1) = e_2, \qquad f(e_2) = e_4, \qquad f(e_3) = e_5\,.$$

Llavors, $W = [e_1 + e_3]$ és f-invariant, la matriu en la base $\{e_1 + e_3, e_1, e_2, e_2 + e_5, e_4\}$, adaptada al subespai W, és

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que manifestament és una matriu de Brunovsky llevat d'una permutació, que consisteix a posar la base en l'ordre $\{e_1, e_2, e_1 + e_3, e_4, e_2 + e_5\}$.

Podem enunciar la següent proposició que no necessita demostració i que ens permet descompondre l'estudi dels subespais f-marcats als casos particulars de subespais marcats per un endomorfisme i per una aplicació observable:

Proposició 2.4.6 *W f-invariant és marcat si, i solament si, existeixen subespais $\overline{W}_\infty$ i $\overline{Y}_\infty$ que compleixin les condicions de la proposició 1.9.2, de manera que W_∞ i $\overline{W}_\infty$ siguin marcats.*

Observació 2.4.7 *De fet, si hi ha una parella $\overline{W}_\infty$ i $\overline{Y}_\infty$ que compleix les condicions de la proposició 1.9.2 de tal manera que W_∞ i $\overline{W}_\infty$ són marcats, qualsevol parella en les mateixes condicions també ho verifica.*

Com que el cas particular de subespais marcats per un endomorfisme ja s'ha estudiat a la secció 2.2, ara veurem el cas observable. Novament ens remetem al teorema 1.3.9.

Si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal observable definida en un subespai, amb $Y_k = Y_\infty = 0$ i W és un subespai f-invariant, considerem la filtració $\{W \cap f^d(Y_{d+i})\}_{0 \leq d \leq k, 0 \leq i \leq k}$ induïda a W per la filtració de Brunovsky; aleshores tenim

$$W \cap Y_i = W_i$$

$$W \cap f^{d+1}(Y_d) \supset f^{d+1}(W_d)$$

$$W \cap f^d(Y_{d+i}) \supset f^d(W_{d+i})$$

i podem enunciar el següent teorema de caracterització:

Teorema 2.4.8 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal observable definida en un subespai, i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. Llavors, W és f-marcat si, i solament si, es compleix qualsevol de les condicions del teorema 1.3.9 per a la família composta per la filtració de Brunovsky i la induïda a W. És a dir, les següents condicions són equivalents:*

(1) W *és* f*-marcat.*

(2) Qualsevol base de W *adaptada a la filtració* $\{W \cap f^d(Y_{d+i})\}_{d,i}$ *es pot estendre a una base de* $Y + f(Y)$ *adaptada a la família.*

(3) $W \cap f^d(Y_{d+i}) \cap (f^d(Y_{d+i+1}) + f^{d+1}(Y_{d+i+1})) = W \cap f^d(Y_{d+i+1}) + W \cap f^{d+1}(Y_{d+i+1})$

(4) $W \cap (f^d(Y_{d+i+1}) + f^{d+1}(Y_{d+i+1})) = W \cap f^d(Y_{d+i+1}) + W \cap f^{d+1}(Y_{d+i+1})$

(5) $W \cap (Y_{i+1} + f^{d+1}(Y_{d+i+1})) = W_{i+1} + W \cap f^{d+1}(Y_{d+i+1})$

(6) $W \cap (Y_{i+1} + f^{d+1}(Y_{d+1})) = W_{i+1} + W \cap f^{d+1}(Y_{d+1})$

Demostració. La necessitat és òbvia ja que la base de Brunovsky adaptada a W és adaptada a la família formada per les dues filtracions dobles.

Per demostrar la suficiència prenem una base de W adaptada a la filtració induïda $\{W \cap f^d(Y_{d+i})\}_{d,i}$ formada per cadenes de vectors; això és factible perquè la condició (2') del teorema 1.3.9, juntament amb les cadenes d'isomorfismes de la secció 1.7, implica la injectivitat de

$$\mathcal{W}^0_{d+i} \to \cdots \to \mathcal{W}^d_i \to \cdots \to \mathcal{W}^{d+i}_0$$

sent

$$\mathcal{W}^d_i = \frac{W \cap f^d(Y_{d+i})}{W \cap f^d(Y_{d+i+1}) + W \cap f^{d+1}(Y_{d+i+1})}.$$

Completem les cadenes existents a W fins a aconseguir cadenes maximals a Y i afegim cadenes maximals sense intersecció amb W usant els isomorfismes entre graduats ja demostrats a la secció 1.7, i així obtenim una base de Brunovsky adaptada a W. ∎

Ja podem reunir els dos casos particulars per donar una caracterització global. Per generalitzar la proposició anterior al cas d'una aplicació lineal definida en un subespai no necessàriament observable usarem el següent lema:

Lema 2.4.9 *Si A, B, C i D són subespais vectorials d'un cert espai vectorial es compleixen les següents propietats:*

(i) $(A + B) \cap (C + D) = 0 \Longrightarrow (A \oplus C) \cap (B \oplus D) = (A \cap B) \oplus (C \cap D)$

(ii) Si $(A + B) \cap C = 0$*, llavors* $A = B \Longleftrightarrow A \oplus C = B \oplus C$

Teorema 2.4.10 (Caracterització dels subespais (C, A)-marcats) *[7] Si $f : Y \longrightarrow X$ és una aplicació lineal definida en un subespai i $W \subset Y$ un subespai f-invariant. Llavors, W és f-marcat si, i solament si,*

(i) W_∞ *és* f_∞*-marcat,*

(ii) $W \cap (f^d(Y_{d+i+1}) + f^{d+1}(Y_{d+i+1})) = W \cap f^d(Y_{d+i+1}) + W \cap f^{d+1}(Y_{d+i+1})$

per a qualsevol $0 \leq d, i < k$*, sent* $W_k = W_\infty$*.*

Demostració. Prenem la descomposició del subespai invariant W donada a la proposició 1.9.2. Ja sabem per la proposició 2.4.6 que W és f-marcat si, i solament si, W_∞ és f_∞-marcat i $\overline{W}_\infty$ és f_0-marcat; per altra banda, la condició (ii), usant les descomposicions $W = W_\infty \oplus \overline{W}_\infty$ i $Y_i = Y_\infty \oplus \overline{Y}_{\infty,i}$, la invariància de $\overline{W}_\infty$ i $\overline{Y}_\infty$, i 2.4.9 (i), és

$$(W_\infty \cap f^d(Y_\infty)) \oplus \overline{W}_\infty \cap (f^d(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}) + f^{d+1}(\overline{Y}_{\infty,d+i+1})) =$$
$$= (W_\infty \cap f^d(Y_\infty)) \oplus (\overline{W}_\infty \cap f^d(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}) + \overline{W}_\infty \cap f^{d+1}(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}))$$

que usant 2.4.9 (ii) veiem que és equivalent a

$$\overline{W}_\infty \cap (f^d(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}) + f^{d+1}(\overline{Y}_{\infty,d+i+1})) = \overline{W}_\infty \cap f^d(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}) + \overline{W}_\infty \cap f^{d+1}(\overline{Y}_{\infty,d+i+1}).$$

Això últim equival, segons el teorema 2.4.8, a què $\overline{W}_\infty$ sigui f_0-marcat. ∎

2.5 Subespais (C, A)-marcats: classificació

La caracterització feta al teorema 2.4.10 ens suggereix que considerem els invariants següents:

Definició 2.5.1 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal definida en un subespai, i $W \subset Y$ un subespai f-marcat. Definim els invariants numèrics següents:*

$$r_{i,j} = \dim(W \cap f^j(Y_{i+j-1})) - \dim(W \cap f^j(Y_{i+j}))$$

per a $1 \leq i$, $0 \leq j$.

Observeu que $r_{i,j} = 0$ si $i + j > k$, i també que $r_{i,0} = \hat{r}_i$ per a qualsevol i.

Observació 2.5.2 *És immediat que, usant el lema 2.4.9 de la mateixa manera que a la demostració de la proposició 2.4.10, els invariants $r_{i,j}$ relatius a la filtració $\{W \cap f^d(Y_{d+i})\}_{d,i}$ són iguals als de la filtració $\{\overline{W}_\infty \cap f^d(Y_{d+i})\}_{d,i}$. En conseqüència, les dimensions dels graduats de les dues filtracions seran les diferències $r_{i,j} - r_{i,j+1}$.*

Podríem haver pres com a invariants les dimensions dels graduats com en el cas d'endomorfismes (vegeu teorema 2.3.2), però en el cas de parelles hem pres aquests perquè és més habitual donar els invariants en termes de particions.

Quan sigui necessari indicarem un subespai f-invariant per la quaterna (Y, X, W, f).

Recordem que la relació d'equivalència que es defineix entre subespais f-invariants és la següent:

Definició 2.5.3 *Direm que dos subespais invariants (Y, X, W, f) i (Y', X', W', f') són* equivalents *si existeix un isomorfisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ tal que*

$$\varphi(Y) = Y', \qquad \varphi(W) = W'$$
$$\varphi \circ f = f' \circ \widehat{\varphi}$$

on $\widehat{\varphi}$ és la restricció de φ a Y.

En particular, f i $\widehat{f}$ han de ser equivalents per blocs a f' i $\widehat{f'}$ respectivament. És obvi que és necessari que $\dim X = \dim X'$, $\dim Y = \dim Y'$ i $\dim W = \dim W'$.

En termes matricials, si expressem f i f' en la forma indicada a la proposició 1.8.5, aquesta equivalència vol dir que existeixen matrius $P \in M_s^*(\mathbb{C})$, $Q \in M_{n-s}^*(\mathbb{C})$, $L \in M_m^*(\mathbb{C})$, $R \in M_{s,n-s}(\mathbb{C})$, $S \in M_{s,m}(\mathbb{C})$, $T \in M_{n-s,m}(\mathbb{C})$ tal que

$$\left(\begin{array}{cc|c} P & R & S \\ 0 & Q & T \\ \hline 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & L_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \\ \hline C'_1 & C'_3 \\ 0 & C'_2 \end{array}\right)$$

sent $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$.

Llavors, tenim el següent teorema de classificació:

Teorema 2.5.4 *[7]*

Dos subespais marcats (Y, X, W, f) i (Y', X', W', f') són equivalents si, i solament si:

(i) f *i* f' *són equivalents per blocs.*

(ii) $(Y_\infty, W_\infty, f_\infty)$ *i* $(Y'_\infty, W'_\infty, f'_\infty)$ *són equivalents.*

(iii) $r_{i,j} = {r'}_{i,j}$*, per a* $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j < k$.

Demostració. És obvi que les tres condicions són necessàries. Per veure la suficiència, construïm bases de Brunovsky de les parts observables $\overline{Y}_\infty$ i $\overline{Y'}_\infty$ adaptades a $\overline{W}_\infty$ i $\overline{W'}_\infty$ respectivament, com en la demostració del teorema 2.4.10, i podem establir una bijecció de forma natural entre elles gràcies a les igualtats de les dimensions dels graduats i estendre-la per linealitat. Gràcies a la condició (ii), és immediata la bijecció entre les bases de Jordan de Y_∞ i Y'_∞. ■

Recordem que el teorema 2.3.2 dóna condicions perquè la propietat (ii) del teorema anterior es verifiqui.

Com a aplicació del teorema de classificació anterior, podem determinar el nombre de classes de subespais f-marcats no equivalents si f és observable.

Lema 2.5.5 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal observable definida en un subespai, amb BK-índexs donats per la partició $(k_1, \ldots, k_r)$ i r-índexs donats per la partició conjugada $(r_1, \ldots, r_k)$.*

Llavors, el nombre de classes d'equivalència de subespais f-marcats $W \subset Y$ és el de les famílies de particions $(r_{1,j}, \ldots, r_{k,j})$ amb $0 \leq j \leq k-1$ que verifiquen les condicions següents:

(i) $r_{i,j} = 0$ *si* $i + j > k$.

(ii) $r_i \geq r_{i,j} \geq r_{i,j+1}$.

(iii) $r_{i+1,j-1} - r_{i+1,j} \leq r_{i,j} - r_{i,j+1}$.

Demostració. És obvi que els nombres enters $r_{i,j}$ compleixen les condicions anteriors perquè $(r_{1,j}, \ldots, r_{k,j})$ és la partició que dóna els r-índexs del subespai f-marcat $W \cap f^j(Y_j)$, en particular $(r_{1,0}, \ldots, r_{k,0}) = (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k)$, les condicions (i), (ii) són immediates i la condició (iii) és conseqüència de les injectivitats entre els graduats (vegeu el teorema 2.4.8). ■

Teorema 2.5.6 *Sigui $f : Y \longrightarrow X$ una aplicació lineal observable definida en un subespai, amb BK-índexs donats per la partició $(k_1, \ldots, k_r)$ i r-índexs donats per la partició conjugada $(r_1, \ldots, r_k)$.*

Llavors, el nombre de classes d'equivalència de subespais f-marcats $W \subset Y$ és el de les col·leccions d'enters $(m_1, \ldots, m_r)$ que verifiquen les condicions següents:

(i) $k_i \geq m_i \geq 0$.

(ii) $m_i \geq m_{i+1}$ *per als índexs* $1 \leq i \leq r$ *tals que* $k_i = k_{i+1}$.

En particular, donats $\widehat{k}_1 \geq \cdots \geq \widehat{k}_r$, *amb* $\widehat{k}_i \leq k_i$ $(1 \leq i \leq r)$, *hi ha tantes classes d'equivalència de subespais* f*-marcats* $W \subset Y$ *amb BK-índexs* $(\widehat{k}_1, \ldots, \widehat{k}_r)$ *com permutacions* $(m_1, \ldots, m_r)$ *dels índexs que verifiquen (i) i (ii).*

Demostració. Donat W f-marcat, definim $(m_{r_{i+1}+1}, \ldots, m_{r_i})$ com la partició conjugada de $(r_{1,i-1} - r_{1,i}, \ldots, r_{i,0} - r_{i,1})$, completant amb zeros si és necessari. És immediat que compleixen les condicions de l'enunciat.

Recíprocament, si tenim els enters $(m_1, \ldots, m_r)$ complint les condicions de l'enunciat, definim un subespai f-marcat de manera òbvia. ■

2.6 Bases globals de Brunovsky adaptades a una família parametritzada de subespais marcats

En aquesta secció donem condicions suficients per a l'existència de bases de Brunovsky globals per a una família parametritzada de parelles de matrius $\left(\begin{smallmatrix} A(t) \\ C(t) \end{smallmatrix}\right)$ adaptades a una família de subespais marcats, generalitzant l'estudi que en fa X. Puerta a [26] en el cas de bases de Jordan globals, per a una família parametritzada de matrius quadrades, adaptades a una família de subespais marcats.

Observació 2.6.1 *En aquesta secció les lletres* f *i* W *designaran aplicacions definides sobre d'una varietat diferenciable i les imatges* $f(t)$ *i* $W(t)$ *seran aplicacions lineals i subespais respectivament.*

Més concretament:

Definició 2.6.2 *Donats un parell d'espais vectorials* Y, X *de dimensions* n *i* q *respectivament, una* família diferenciable d'aplicacions lineals *és una aplicació* f *definida sobre una varietat diferenciable* M *de classe* C^p $(0 \leq p \leq \infty)$*, de manera que, per a qualsevol* $t \in M$, $f(t) \in \mathcal{L}(Y, X)$ *i, fixades bases en els dos espais, l'aplicació* $A : M \longrightarrow M_{q,n}(\mathbb{C})$*, tal que* $A(t)$ *és la matriu de* $f(t)$*, és* $A \in C^p(M, M_{q,n}(\mathbb{C}))$.

Per simplificar, notem $f \in C^p(M, M_{n+m,n}(\mathbb{C}))$ *o* $\{f(t)\}_{t\in M}$, *segons convingui, per indicar una família d'aquest tipus.*

Definició 2.6.3 *Donat un espai vectorial* Y *de dimensió* n, *una* família diferenciable de subespais *és una aplicació* W *definida sobre una varietat diferenciable* M *de classe* C^p $(0 \leq p \leq \infty)$, *de manera que, per a qualsevol* $t \in M$, $W(t) \subset Y$ *és un subespai de dimensió* s *i, fixada una base qualsevol, l'aplicació, que seguirem notant igual,* $W : M \longrightarrow Gr_s(\mathbb{C}^n)$, *és de classe* C^p.

Notarem simplement $W \in C^p(M, Gr_s(\mathbb{C}^n))$ *o* $\{W(t)\}_{t\in M}$, *segons convingui, per indicar una família d'aquest tipus.*

Definició 2.6.4 *Donats un parell d'espais vectorials* $Y \subset X$ *de dimensions* n *i* $n+m$ *respectivament, una* família diferenciable de subespais marcats *és un parell d'aplicacions* f *i* W *definides sobre una varietat diferenciable* M *de classe* C^p $(0 \leq p \leq \infty)$ *de manera que, per a qualsevol* $t \in M$:

(1) $f \in C^p(M, M_{n+m,n}(\mathbb{C}))$.

(2) $W \in C^p(M, Gr_s(\mathbb{C}^n))$.

(3) $W(t)$ *és un subespai* $f(t)$*-marcat.*

En el cas particular en què $m = 0$, *les aplicacions seran endomorfismes. Si* $m > 0$, *els subespais són condicionalment marcats, però solament ho farem notar quan pugui portar a confusió.*

Usem els resultats coneguts següents:

Proposició 2.6.5 *[12] Sigui* $\{f(t)\}_{t\in M} \subset \mathcal{L}(Y, X)$ *una família diferenciable d'aplicacions lineals de rang constant. Aleshores:*

(1) Les famílies de subespais $\{Ker f(t)\}_{t\in M}$ *i* $\{Im f(t)\}_{t\in M}$ *són diferenciables.*

(2) En particular, si totes les aplicacions $f(t)$ *són injectives, una família de vectors* $\{v(t)\}_{t\in M} \subset Y$ *és diferenciable si, i solament si, la família* $\{f(t)(v(t))\}_{t\in M} \subset X$ *és diferenciable.*

Proposició 2.6.6 *[12] Siguin $\{E(t)\}_{t\in M}$ i $\{F(t)\}_{t\in M}$ dues famílies diferenciables de subespais de X.*

(1) Si $\dim(E(t)+F(t))$ és constant, les famílies de subespais $\{E(t)+F(t)\}_{t\in M}$ i $\{E(t)\cap F(t)\}_{t\in M}$ també són diferenciables.

(2) Si $E(t)\subset F(t)$ per a qualsevol $t\in M$, existeix una família diferenciable de subespais $\{\bar{E}(t)\}_{t\in M}$ tal que $E(t)\oplus \bar{E}(t)=F(t)$ per a qualsevol $t\in M$.

Definició 2.6.7 *Diem que una família diferenciable d'endomorfismes $\{f(t)\}_{t\in M}$ té* tipus de Jordan constant *si el nombre de valors propis distints i les dimensions dels seus blocs de Jordan no depenen de t.*

Proposició 2.6.8 *[12] Sigui M una varietat diferenciable contràctil i $f\in C^p(M, M_n(\mathbb{C}))$ amb tipus de Jordan constant. Aleshores:*

(1) Existeixen $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_q\in C^p(M,\mathbb{C})$tals que $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_q(t)$ són els valors propis distints de $f(t)$, per a cada $t\in M$.

(2) $\dim E_h^d(\lambda_i(t))$, on $E_h^d(\lambda_i(t)) = Ker(f-\lambda_i)^h(t)\cap Im(f-\lambda_i)^d(t)$, és constant per a cada $t\in M$.

Definició 2.6.9 *Donada una família diferenciable d'endomorfismes $f\in C^p(M, M_n(\mathbb{C}))$, una família d'aplicacions $v_1,v_2,\dots,v_n\in C^p(M,\mathbb{C}^n)$ diem que és una* base de Jordan global *si $(v_1(t),v_2(t),\dots,v_n(t))$ és una base de Jordan relativa a $f(t)$ per a cada $t\in M$.*

Teorema 2.6.10 *[26] Sigui M una varietat diferenciable contràctil i (f,W) una família diferenciable de subespais marcats tal que:*

(1) $\{f(t)\}_{t\in M}$ té tipus de Jordan constant,

(2) $f(t)$ és nilpotent per a qualsevol $t\in M$,

(3) $\dim(W(t)\cap E_h^d(t))$ és constant per a cada $t\in M$.

Aleshores, existeix una base de Jordan global.

Generalitzem aquest resultat a endomorfismes no necessàriament nilpotents.

Teorema 2.6.11 *Sigui M una varietat diferenciable contràctil i (f,W) una família diferenciable de subespais marcats tal que:*

(1) f té tipus de Jordan constant,

(2) les famílies diferenciables d'aplicacions lineals formades per les restriccions $\hat{f}(t) : W(t) \longrightarrow W(t)$ i els quocients $\tilde{f}(t) : \frac{\mathbb{C}^n}{W(t)} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^n}{W(t)}$ tenen tipus de Jordan constant.

Aleshores, existeix una base de Jordan global.

Demostració.

Si la família diferenciable d'endomorfismes no és nilpotent, la descomposició d'un subespai f-invariant $W = \oplus_i W \bigcap Ker(f-\lambda_i I)^n$ on W és f-marcat si, i solament si, ho són cada un del sumands, ens permet combinar la proposició 2.6.8 i el teorema 2.6.10 de forma que en resulta aquest. ∎

Observació 2.6.12 *Que $\hat{f}$ i $\tilde{f}$ tinguin tipus de Jordan constant és el mateix que dir que, per a cada valor propi $\lambda_i \in C^p(M,\mathbb{C})$, $\dim(W(t)\cap E_h^d(\lambda_i(t)))$ és constant per a cada $t \in M$.*

Generalitzem el teorema anterior al cas d'aplicacions definides en un subespai.

Definició 2.6.13 *Donada una família diferenciable d'aplicacions lineals $f \in C^p(M, M_{n+m,n}(\mathbb{C}))$, una família d'aplicacions $v_1, v_2, \ldots, v_{n+m} \in C^p(M, \mathbb{C}^{n+m})$ diem que és una* base de Brunovsky global *si $(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n+m}(t))$ és una base de Brunovsky relativa a $f(t)$ per a cada $t \in M$.*

Definició 2.6.14 *Una família diferenciable d'aplicacions lineals* $f \in C^p(M, M_{n+m,n}(\mathbb{C}))$, *direm que té* tipus de Brunovsky constant *si els BK-índexs de* $f(t)$ *no depenen de* t *i la família diferenciable*

$$f_\infty(t) : Y_\infty(t) \longrightarrow Y_\infty(t)\,, \quad t \in M$$

té tipus de Jordan constant.

Teorema 2.6.15 *Sigui* M *una varietat diferenciable contràctil i* (f, W) *una família diferenciable de subespais condicionalment marcats tal que:*

(i) f *té tipus de Brunovsky constant.*

(ii) Les famílies diferenciables d'aplicacions lineals formades per les restriccions $\hat{f}_\infty(t) : W_\infty(t) \longrightarrow W_\infty(t)$ *i els quocients* $\tilde{f}_\infty(t) : \frac{Y_\infty(t)}{W_\infty(t)} \longrightarrow \frac{Y_\infty(t)}{W_\infty(t)}$ *tenen tipus de Jordan constant.*

(iii) $\dim W(t) \cap f^{j-i}(t)(Y_{j-1}(t))$ *és constant per a cada* $t \in M$ *si* $1 \leq i \leq j \leq k$.

Aleshores existeix una base de Brunovsky global.

Demostració.

1. La família de subespais $Y_i(t)$ és diferenciable perquè

$$Y_i(t) = Ker(C(t), C(t)A(t), \ldots, C(t)A^{i-1}(t))^t\,,$$

la hipòtesi ii) ens assegura que la dimensió no depèn de t i la proposició 2.6.5 fa la resta. La família de subespais $W_i(t)$ és diferenciable perquè ho són les famílies $W(t)$ (per la hipòtesi (i)) i $Y_i(t)$; la dimensió de la família de les interseccions $W_i(t)$ és constant gràcies a la hipòtesi (iii) i la proposició 2.6.6 fa la resta.

2. El teorema 2.6.11 garanteix l'existència d'una família diferenciable de bases de Jordan de $Y_\infty(t)$ adaptades a $W_\infty(t)$ gràcies a l'hipòtesi (ii).

3. Podem construir famílies diferenciables de subespais $\overline{W}_\infty(t)$ i $\overline{Y}_\infty(t)$ tals que:

   (i) $\overline{W}_\infty(t) \subset \overline{Y}_\infty(t)$.

   (ii) $W(t) = W_\infty(t) \oplus \overline{W}_\infty(t), \quad Y = Y_\infty(t) \oplus \overline{Y}_\infty(t)$.

   (iii) $\overline{W}_\infty(t)$ i $\overline{Y}_\infty(t)$ són $f(t)$-invariants.

   (iv) $f_0(t) = f(t)/\overline{Y}_\infty(t)$ és observable.

   N'hi ha prou a observar que la construcció de la proposició 1.9.2 es pot fer de manera que les famílies de subespais obtingudes siguin diferenciables gràcies a la proposició 2.6.6.

   Gràcies a aquesta descomposició, com que la part de Jordan ja la tenim resolta, podem suposar d'ara en endavant que les aplicacions $f(t)$ són observables.

4. Les famílies de subespais

$$f^\ell(t)(Y_j(t))$$
$$W(t) \cap f^\ell(t)(Y_j(t))$$
$$W(t) \cap f^{j-i+1}(t)(Y_j(t)) + W(t) \cap f^{j-i}(t)(Y_{j-1}(t))$$

   són diferenciables gràcies a les hipòtesis, que ens garanteixen la constància de les dimensions, a la injectivitat de les $f(t)$ (en ser observables) i a les proposicions 2.6.5 i 2.6.6.

5. Finalment, gràcies a les mateixes proposicions és immediat que la construcció d'una família diferenciable de bases de Brunovsky adaptades a la família de subespais $f(t)$-marcats $W(t)$ és possible amb el procediment seguit en el teorema 2.4.8.

■

Observació 2.6.16 *La condició (iii) del teorema 2.6.15 és equivalent a dir que*

$$r_{i,j}(t) = \dim(W(t) \cap f^j(t)(Y(t)_{i+j-1})) - \dim(W(t) \cap f^j(t)(Y(t)_{i+j}))$$

és constant per a $0 \le j < k$, $1 \le i \le k$.

Capítol 3

Problema de Carlson

3.1 Introducció

En aquest capítol estudiem el problema de Carlson clàssic i la seva generalització al cas de parelles de matrius.

En la secció 3.2 comencem amb l'enunciat del teorema, ja citat en la introducció, (teorema 3.2.1) que relaciona la solució del problema de Carlson amb les LR-successions que aquí demostrem directament reformulant l'enunciat geomètricament (lema 3.2.3) i usant les tècniques presentades en el primer capítol.

En la demostració de la suficiència construïm efectivament una matriu que soluciona el problema i això ens permet, cosa que fem en la secció 3.3 següent, donar un algorisme per a la construcció de solucions al problema de Carlson (Proposició 3.3.9). En aquesta secció, prèviament, fem un estudi sobre l'existència de solucions no equivalents d'una mateixa terna. Donem les definicions de realitzacions condensades, reduïdes i marcades (3.3.4 i 3.3.6) i acabem demostrant que donada una terna (α, β, γ) Carlson compatible, hi ha una realització matricial d'aquesta terna tant propera com vulguem d'una certa realització marcada de la parella (β, γ) (corol·lari 3.3.11).

En la secció 3.4 formulem el problema de Carlson per a una parella de matrius observable i quocient endomorfisme amb un sol valor propi, enunciant l'equivalència de tres condicions en el teorema 3.4.1 i demostrant la seva equivalència en les subseccions 3.4.2, 3.4.3 i 3.4.4.

En la secció 3.5 veiem que es pot repetir un algorisme semblant al del cas quadrat estudiat en la secció 3.3, fem alguns exemples en els que ressaltem les analogies i diferències amb el cas quadrat i demostrem el lema de condensació (3.5.4).

3.2 Cas de matrius quadrades

Comencem amb el teorema de Klein, ja citat anteriorment, que ens relaciona l'existència de solucions al problema de Carlson amb la de les successions de Littlewood-Richardson, relació que demostrarem directament.

Teorema 3.2.1 *Siguin tres particions α, γ, β amb $|\alpha| = n$, $|\gamma| = d$, $|\beta| = n-d$ i α^*, γ^*, β^* les seves conjugades. Les següents condicions són equivalents:*

(I) *Donades dues matrius nilpotents $A_1 \in M_d(\mathbb{C})$ i $A_2 \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ amb característica de Segre γ^* i β^* respectivament, existeix una matriu $Z \in M_{d,n-d}(\mathbb{C})$ tal que la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ té característica de Segre } \alpha^*.$$

(II) *Existeix una successió finita de particions $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^s$ $(s = \ell(\beta))$ tal que $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^s = \alpha$, i per a qualsevol $i, j \geq 1$:*

(a) $|\gamma^j| - |\gamma^{j-1}| = \beta_j$

(b) $\gamma_i^j \geq \gamma_i^{j-1} \geq \gamma_{i+1}^j$

(c) $\sum_{\ell \leq i}(\gamma_\ell^{j+1} - \gamma_\ell^j) \leq \sum_{\ell \leq i-1}(\gamma_\ell^j - \gamma_\ell^{j-1})$

prenent $\gamma_0^{j-1} = 0$, $\forall\, j$.

Observació 3.2.2 *(b) i (c) de* **(II)** *impliquen que $\gamma_1^j = \gamma_1^1$ si $j \geq 1$.*

Abans de demostrar el teorema, enunciem i demostrem un lema que ens permet expressar la condició (I) en forma geomètrica:

Lema 3.2.3 *La condició* (I) *del teorema 3.2.1 és equivalent a la condició següent:*

(I') *Donat un* $\mathbb{C}$*-espai vectorial* X *amb* $\dim X = n$, *un subespai* $W \subset X$ *amb* $\dim W = d$ *i dues aplicacions lineals nilpotents* $\hat{f} : W \longrightarrow W$, $\tilde{f} : \frac{X}{W} \longrightarrow \frac{X}{W}$, *amb característiques de Segre* γ^* *i* β^* *respectivament, existeix un endomorfisme* $f : X \longrightarrow X$ *amb característica de Segre* α^* *tal que* $\hat{f}$ *i* $\tilde{f}$ *són les aplicacions induïdes per* f*, de forma natural, sobre* W *i* $\frac{X}{W}$ *respectivament.*

Demostració. Si es compleix la condició (I'), considerem el subespai $W = \mathbb{C}^d \times 0 \subset \mathbb{C}^n = X$, $\hat{f}$ l'endomorfisme de W amb matriu A_1 en la base natural de $\mathbb{C}^d$ i $\tilde{f} : \frac{X}{W} \longrightarrow \frac{X}{W}$ l'aplicació lineal amb matriu A_2 en la base natural de $\mathbb{C}^{n-d}$. La matriu de l'endomorfisme f, que existeix per la condició (I'), en la base natural de $\mathbb{C}^n$ serà de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

i Z és la matriu buscada.

Recíprocament, si es compleix (I), donades les aplicacions lineals $\hat{f}$ i $\tilde{f}$, considerem les seves matrius en bases respectives de W i $\frac{X}{W}$, A_1 i A_2. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

ens dóna l'endomorfisme f desitjat. ■

Ara provem el teorema 3.2.1.

Demostració. Fem una aproximació geomètrica, amb una demostració constructiva, de manera que donada una LR-successió podem trobar solucions explícites per a Z.

1) Prova de la necessitat (**(I')**$\Longrightarrow$**(II)**)

Si la condició (I') es verifica, considerem els subespais W_i^j definits per

$$W_i^j \doteq \mathrm{Ker}\ f^i \cap f^{-j}(W)\,, \quad i, j \geq 0$$

que podem organitzar en el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccccccccc}
W & \subset & f^{-1}(W) & \subset & f^{-2}(W) & \subset\cdots\subset & f^{-s}(W) & = & X \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\mathrm{Ker}\widehat{f^m} & \subset & W_m^1 & \subset & W_m^2 & \subset\cdots\subset & W_m^s & = & \mathrm{Ker} f^m \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\mathrm{Ker}\widehat{f^i} & \subset & W_i^1 & \subset & W_i^2 & \subset\cdots\subset & W_i^s & = & \mathrm{Ker} f^i \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\mathrm{Ker}\widehat{f} & \subset & W_1^1 & \subset & W_1^2 & \subset\cdots\subset & W_1^s & = & \mathrm{Ker} f \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

on $m = \ell(\alpha)$.

Noteu que

$$\alpha_i = \dim \mathrm{Ker} f^i - \dim \mathrm{Ker} f^{i-1}$$
$$\gamma_i = \dim \mathrm{Ker} \widehat{f^i} - \dim \mathrm{Ker} \widehat{f^{i-1}}$$
$$\beta_j = \dim f^{-j}(W) - \dim f^{-j+1}(W)$$

i definint

$$\gamma_i^j \doteq \dim W_i^j - \dim W_{i-1}^j$$

és obvi que $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^s = \alpha$.

La igualtat $|\gamma^j| = \dim f^{-j}(W)$ prova (a).

La inclusió

$$\frac{W_i^j}{W_{i-1}^j} \supset \frac{W_i^{j-1}}{W_{i-1}^j \cap W_i^{j-1}} = \frac{W_i^{j-1}}{W_{i-1}^{j-1}}$$

implica la primera desigualtat de (b).

La igualtat $f^{-1}(W_{i-1}^{j-1}) = W_i^j$ implica la injectivitat de les aplicacions lineals

$$\frac{W_{i+1}^j}{W_i^j} \longrightarrow \frac{W_i^{j-1}}{W_{i-1}^{j-1}}, \qquad \frac{W_i^{j+1}}{W_i^j} \longrightarrow \frac{W_{i-1}^j}{W_{i-1}^{j-1}}$$

induïdes per f de forma natural.

La primera injectivitat implica

$$\dim\left(\frac{W_i^{j-1}}{W_{i-1}^{j-1}}\right) \geq \dim\left(\frac{W_{i+1}^j}{W_i^j}\right),$$

que equival a $\gamma^{j-1} \geq \gamma_{i+1}^j$, que és la segona desigualtat de (b), que queda provat.

La segona injectivitat implica que

$$\dim\left(\frac{W_i^{j+1}}{W_i^j}\right) \leq \dim\left(\frac{W_{i-1}^j}{W_{i-1}^{j-1}}\right),$$

que és equivalent a

$$\sum_{\ell\leq i}\left(\gamma_\ell^{j+1} - \gamma_\ell^j\right) \leq \sum_{\ell\leq i-1}\left(\gamma_\ell^j - \gamma_\ell^{j-1}\right)$$

perquè $\dim W_i^j = \sum_{\ell\leq i}\dim\left(\frac{W_\ell^j}{W_{\ell-1}^j}\right) = \sum_{\ell\leq i}\gamma_\ell^j$, i això prova (c).

2) Prova de la suficiència ((**II**) $\Longrightarrow$ (**I'**))

Hem de construir un endomorfisme nilpotent $f : X \longrightarrow X$ $(X = \mathbb{C}^n)$ amb característica de Segre α^* i un subespai invariant $W \approx \mathbb{C}^d$ tal que $\widehat{f} : W \longrightarrow W$ i $\tilde{f} : \frac{X}{W} \longrightarrow \frac{X}{W}$ tinguin γ^* i β^* com a característica de Segre respectivament.

Per fer-ho, definim subespais W_i^j amb les condicions

$$W_i^j = W_{i+1}^j \cap W_i^{j+1}$$

$$\dim W_i^j - \dim W_{i-1}^j = \gamma_i^j$$

i podem construir el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccccccccc}
W & = & W^0 & \subset & W^1 & \subset & \ldots\ldots & \subset & X \\
 & & \| & & \| & & & & \| \\
W_m & = & W_m^0 & \subset & W_m^1 & \subset & \ldots\ldots & \subset & W_m^s \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
W_1 & = & W_1^0 & \subset & W_1^1 & = & \ldots\ldots & = & W_1^s \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
 & & W_0^0 & = & W_0^1 & = & \ldots\ldots & = & W_0^s \\
 & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0
\end{array}$$

Aquests subespais són possibles tal com demostrem si els construïm per recurrència, començant per la primera columna. Usem únicament $\gamma_i \geq 0$ per fabricar els subespais W_i de la primera columna i llavors

$$\dim W = |\gamma| = d\,.$$

Suposant que W_ℓ^h, si $h < j$, i W_ℓ^j, si $\ell < i$, són construïts, usem solament que $\dim(W_i^{j-1} + W_{i-1}^j) \leq \dim W_i^j$ per construir W_i^j.

L'última desigualtat equival a

$$\dim W_i^{j-1} - \dim(W_i^{j-1} \cap W_{i-1}^j) \leq \dim W_i^j - \dim W_{i-1}^j$$

que usant les condicions del diagrama és equivalent a $\gamma_i^{j-1} \leq \gamma_i^j$. Aquesta és la primera desigualtat de la condició (b) i, per tant, és possible un subespai W_i^j com el del diagrama.

A causa de la construcció i de la condició (a) és obvi que

$$\begin{aligned}
&\dim W^j = |\gamma^j| \\
&\dim W^j - \dim W^{j-1} = \beta_j \\
&\dim X = |\gamma^s| = n\,.
\end{aligned}$$

Formem una base $\mathcal{B} = \{e^j_{i,k}\}_{0\leq j\leq s, 1\leq i\leq \ell(\gamma^j), 1\leq k\leq \gamma^j_i-\gamma^{j-1}_i}$ de X (prenem per conveni que $\gamma_i^{-1}=0$, $\forall i$) adaptada a la filtració doble W^j_i, és a dir,

$$W^j_i = (W^{j-1}_i + W^j_{i-1}) \oplus [\mathcal{B}^j_i]$$

on $[\mathcal{B}^j_i]$ és el subespai generat per $\mathcal{B}^j_i = \{e^j_{i,k}\}_{1\leq k\leq \gamma^j_i-\gamma^{j-1}_i}$.

Noteu que

$$W^j_i = \oplus_{\substack{0\leq h\leq j\\ 1\leq \ell\leq i}} [\mathcal{B}^h_\ell]\,.$$

Definim una aplicació lineal $\widehat{f}: W \longrightarrow W$ mitjançant

$$\begin{aligned} &\widehat{f}(W_1) = \{0\} \\ &\widehat{f}(e^0_{i+1,k}) = e^0_{i,k}\,, \qquad i\geq 1 \end{aligned}$$

i és immediat que γ^* és la seva característica de Segre.

Ara definim dues extensions $f_*, f^*: X \longrightarrow X$ de $\widehat{f}$ complint les condicions següents:

(i) $f_*(e^{j+1}_{i+1,k}) \in \cup_{0\leq h\leq j}\mathcal{B}^h_i$, Ker $f_* = W^1_1$.

(ii) $f^*(e^{j+1}_{i+1,k}) \in \cup_{1\leq \ell\leq i}\mathcal{B}^j_\ell$, Ker $f^* = W^1_1$.

(iii) $f_*(e^{j+1}_{i+1,k}) = f^*(e^{j+1}_{i+1,k}) = e^j_{i,k}$ si $k\leq \min(\gamma^{j+1}_{i+1}-\gamma^j_{i+1}, \gamma^j_i-\gamma^{j-1}_i)$, $0\leq j\leq s-1$, $1\leq i\leq \ell(\gamma^j)-1$.

Observeu que $f(e^1_{i+1,k}) = f_*(e^1_{i+1,k}) = f^*(e^1_{i+1,k}) = e^0_{i,k+\gamma_{i+1}}$, per a qualsevol $k\geq 1$, perquè $\gamma^1_{i+1}-\gamma^0_{i+1}\leq \gamma^0_i$ per la condició (II)(b) de l'enunciat.

La condició (i) és possible si

$$\#\left(\cup_{0\leq h\leq j}\mathcal{B}^h_i\right) \geq \#\left(\cup_{0\leq h\leq j+1}\mathcal{B}^h_{i+1}\right)\ ,$$

però $\#\left(\cup_{0\leq h\leq j}\mathcal{B}^h_i\right) = \dim W^j_i - \dim W^j_{i-1} = \gamma^j_i$, i, per tant, la desigualtat és certa gràcies a la segona desigualtat de la condició (b).

La condició ii) és possible si

$$\#\left(\cup_{1\leq \ell\leq i}\mathcal{B}^j_\ell\right) \geq \#\left(\cup_{1\leq \ell\leq i+1}\mathcal{B}^{j+1}_\ell\right)\ ,$$

però $\#\left(\cup_{1\leq\ell\leq i}\mathcal{B}_\ell^j\right) = \dim W_i^j - \dim W_i^{j-1} = \sum_{\ell\leq i}(\gamma_\ell^j - \gamma_\ell^{j+1})$, Per tant, la desigualtat es compleix gràcies a (c).

Observeu que

$$e_{i,k}^j \in f_*(\mathcal{B}) \cap f^*(\mathcal{B})$$

si, i solament si,

$$e_{i,k}^j = f_*(e_{i+1,k}^{j+1}) = f^*(e_{i+1,k}^{j+1}) \quad \text{amb} \quad k \leq \min(\gamma_{i+1}^{j+1} - \gamma_{i+1}^j, \gamma_i^j - \gamma_i^{j-1})$$

o existeixen $h, \ell > 1$ únics, tals que $e_{i,k}^j \in f_*(\mathcal{B}_{i+1}^{j+h}) \cap f^*(\mathcal{B}_{i+\ell}^{j+1})$.

Finalment, definim $f \doteq \frac{1}{2}(f_* + f^*)$. És obvi que és una extensió de $\widehat{f}$ i la suficiència restarà provada si

$$\begin{cases} \text{Ker } f^i = W_i^s \\ f^{-j}(W) = W^j \end{cases}$$

És immediat que $W_i^s \subset \text{Ker } f^i$. Provem per inducció l'altra inclusió:

Si $i = 0$, Ker $f^0 = W_0^s = \{0\}$.

Si $x \notin W_i^s$,

$x = x_0 + \sum_{\substack{i<\ell\leq i_0 \\ 0\leq j\leq s}} \lambda_{\ell,k}^j e_{\ell,k}^j$, amb $x_0 \in W_i^s$ i $\lambda_{i_0,k_0}^{j_0} \neq 0$ per algun parell (j_0, k_0).

Llavors $\lambda_{i_0,k_0}^{j_0} f_*(e_{i_0,k_0}^{j_0}) \notin W_{i-1}^s$ i no pot ser anul·lat per cap imatge per f de les altres components de x (vegeu l'observació precedent sobre les interseccions de les imatges per f_* i f^* dels vectors de la base $\mathcal{B}$) i, per tant, $f(x) \notin W_{i-1}^s$.

D'aquí, per la hipòtesi d'inducció, $f(x) \notin$ Ker f^{i-1}, i podem concloure que $x \notin$ Ker f^i. Amb això, hem provat que Ker $f^i = W_i^s$.

Anàlogament, és obvi que $W^j \subset f^{-j}(W)$, i provarem per inducció la contenció contrària.

És cert si $j = 0$. Sigui $x \in f^{-j}(W)$; si $x \notin W^j$ llavors

$x = x_0 + \sum_{\substack{j<h\leq j_0 \\ 1\leq i}} \lambda_{i,k}^h e_{i,k}^h$, amb $x_0 \in W^j$ i $\lambda_{i_0,k_0}^{j_0} \neq 0$ per algun parell (i_0, k_0).

Aleshores $\lambda_{i_0,k_0}^{j_0} f^*(e_{i_0,k_0}^{j_0}) \notin W^{j-1}$ i no pot ser anul·lat per cap imatge per f de les altres components de x (vegeu l'observació precedent sobre les interseccions de les imatges per f_* i f^* dels vectors de la base $\mathcal{B}$). Per aquesta raó, $f(x) \notin W^{j-1}$, i això seria absurd. ∎

3.3 Realitzacions matricials de les solucions

Recentment, els treballs a [24] i [25] han donat solucions definitives al problema clàssic de Carlson: vegeu [15] i l'article resum [16].

No obstant això, que nosaltres sapiguem, no hi ha algorismes per construir solucions explícites de Z. Aquí presentem una construcció basada en la demostració geomètrica del teorema 3.2.1.

Com a conseqüència immediata d'aquesta construcció, obtenim a la definició 3.3.11 que totes les característiques de Segre possibles apareixen en un entorn de les solucions més simples, que anomenem *marcades* (vegeu la definició 3.3.6). Amb això volem dir que apareixen pertorbant les solucions marcades elementals.

Abans de passar a l'algorisme, donarem una definició i comentarem alguns exemples.

Definició 3.3.1 *Si tres particions α, β, γ verifiquen les condicions del teorema 3.2.1, direm que α és* Carlson compatible *amb el parell (β, γ) o que la terna (α, β, γ) és Carlson compatible.*

En l'exemple que hi ha a continuació veiem que donada una terna de particions Carlson compatible, hi pot haver diferents LR-successions i que, per tant, donen lloc a solucions no equivalents.

Exemple 3.3.2 Donades les particions

$$\alpha = (3,3,2,1), \quad \gamma = (3,2,1), \quad \beta = (2,1)$$

són possibles les dues LR-successions

$$(3,3,2), \quad (3,3,2,1)$$

$$(3,3,1,1), \quad (3,3,2,1)$$

que d'acord amb la construcció feta a la secció 3.2, donen lloc respectivament a les solucions no equivalents següents

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{cccccc|ccc}
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{array}\right]$$

En l'exemple que hi ha a continuació veiem que dues solucions poden tenir les mateixes LR-successions i no ser equivalents.

Exemple 3.3.3 Donades les particions

$$\alpha = (3,3,2,1), \quad \gamma = (3,2,1), \quad \beta = (2,1)$$

els endomorfismes f_λ definits sobre una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ del subespai W per

$$f_\lambda(e_1) = e_2, \quad f_\lambda(e_2) = e_3, \quad f_\lambda(e_3) = 0, \quad f_\lambda(e_4) = e_5, \quad f_\lambda(e_5) = 0, \quad f_\lambda(e_6) = 0$$

i sobre una base $\{e_7, e_8, e_9\}$ d'un suplementari per

$$f_\lambda(e_7) = e_4, \quad f_\lambda(e_8) = e_6, \quad f_\lambda(e_9) = \lambda e_7 + e_1 + e_8$$

tenen l'expressió matricial

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]$$

i són solucions del problema amb la mateixa LR-successió $(3,3,2),(3,3,2,1)$, però no són totes equivalents perquè

$$Imf_\lambda = f_\lambda(W_4^2) \subset W_2^1 + W_3 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8] \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0$$

Introduïm algunes definicions i notacions abans de construir les solucions explícites.

Definició 3.3.4 *Anomenem* realització matricial *d'una terna Carlson compatible* (α, β, γ) *a una matriu de la forma*

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\begin{array}{c|c} J(\gamma^*) & Z \\ \hline 0 & J(\beta^*) \end{array}\right)$$

on

$$\begin{aligned} J(\gamma^*) &= \operatorname{diag}\,(J(\gamma_1^*),\, J(\gamma_2^*),\, \dots) \\ J(\beta^*) &= \operatorname{diag}\,(J(\beta_1^*),\, J(\beta_2^*),\, \dots) \end{aligned}$$

són matrius nilpotents de Jordan amb característica de Segre γ^* *i* β^* *respectivament, de manera que* $M(\alpha, \beta, \gamma)$ *tingui característica de Segre* α^**.*

Diem que és condensada *si, i solament si, les úniques entrades no nul·les de* Z *són a les files corresponents a les files nul·les de* $J(\gamma^*)$*. A més, diem que és* reduïda *si a la submatriu de* Z *corresponent a les columnes nul·les de* $J(\beta^*)$ *i a les files nul·les de* $J(\gamma^*)$*, les úniques entrades no nul·les tenen valor* 1 *i estan en columnes i files diferents.*

És ben conegut que si existeix una realització, n'existeix una condensada i reduïda:

Lema 3.3.5 *Si la partició* α *és Carlson compatible amb* β*,* γ*, existeixen realitzacions condensades i reduïdes* $M(\alpha, \beta, \gamma)$*.*

Demostració. Les realitzacions que demostrem que hi ha a la prova de la suficiència del teorema 3.2.1 són d'aquest tipus. ∎

En aquesta secció construïm explícitament una d'aquestes realitzacions $M(\alpha, \beta, \gamma)$ que, a més, es pot veure com una pertorbació local d'una matriu marcada (vegeu la definició 2.2.6). En el nostre cas, això significa que els blocs de Jordan relatius a la partició α s'obtenen ajuntant els de β i γ, com precisem a la definició següent.

Definició 3.3.6 *Donades dues particions β i γ s'obtenen exemples trivials de particions Carlson compatibles amb elles, que formen ternes que definim com a* ternes marcades de particions, *fent que cada α_1^*, α_2^*, … sigui o un element de β^* o un element de γ^*, o la suma d'un de cada. Més concretament, si σ i τ són permutacions de $\{1, 2, \ldots, \ell(\alpha^*)\}$, llavors*

$$\alpha_i^* = \beta_{\sigma(i)}^* + \gamma_{\tau(i)}^*$$

on $\beta_{\sigma(i)}^* = 0$ si $\sigma(i) > \ell(\beta^*)$ i $\gamma_{\tau(i)}^* = 0$ si $\tau(i) > \ell(\gamma^*)$.

Resulta òbvia la següent proposició.

Proposició 3.3.7 *Una realització matricial condensada i reduïda s'obté prenent Z amb les úniques entrades no nul·les corresponents als índexs $1 \leq i \leq \ell(\alpha^*)$ tals que $\beta_{\sigma(i)}^*, \gamma_{\tau(i)}^* \neq 0$, de la manera següent: per a cada i d'aquest tipus, posem un 1 en el lloc que està a la columna corresponent a la columna nul·la de $J(\beta_{\sigma(i)}^*)$ i a la fila corresponent a la fila nul·la de $J(\gamma_{\tau(i)}^*)$. És obvi que aquesta realització és una matriu marcada.*

Exemple 3.3.8 Donades $\beta^* = (3, 1)$ i $\gamma^* = (4, 2)$ una partició Carlson compatible marcada és $\alpha^* = (5, 4, 1)$. Una realització matricial és

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|ccc|c}
0&0&0&0& & & & & & \\
1&0&0&0& & & & & & \\
0&1&0&0& & & & & & \\
0&0&1&0& & & & & & \\
\hline
 & & & &0&0& & &1& \\
 & & & &1&0& & & & \\
\hline
 & & & & & &0&0&0& \\
 & &\mathbf{0}& & & &1&0&0& \\
 & & & & & &0&1&0& \\
\hline
 & & & & & & & & &0
\end{array}\right]$$

Com que en la nostra demostració de la suficiència al teorema 3.2.1 hem construït explícitament un endomorfisme f verificant (I') del lema 3.2.3, la seva matriu en una base convenient serà una realització matricial de la partició Carlson compatible associada. Organitzem l'algorisme en tres passos.

Pas 1. Per aclarir la construcció i treure'n més conclusions, modifiquem lleugerament l'extensió f de $\widehat{f}$ (és immediat que la demostració continua sent vàlida). Per a qualssevol $1 \leq j \leq s-1$, $1 \leq i \leq \ell(\gamma^j) - 1$, mantenim les condicions següents:

(i') $f(e^1_{1,k}) = 0$, per a qualsevol $k \geq 1$.

(ii') $f(e^1_{i+1,k}) = f_*(e^1_{i+1,k}) = f^*(e^1_{i+1,k}) = e^0_{i,k+\gamma_{i+1}}$, per a qualsevol $k \geq 1$.

(iii') $f(e^{j+1}_{i+1,k}) = f_*(e^{j+1}_{i+1,k}) = f^*(e^{j+1}_{i+1,k}) = e^j_{i,k}$, si $k \leq \min(\delta^{j+1}_{i+1}, \delta^j_i)$.

Però, per a k complint $\delta^j_i < k \leq \delta^{j+1}_{i+1}$, en lloc de $\dfrac{1}{2}(f_* + f^*)$ definim el següent

(iv') $f(e^{j+1}_{i+1,k}) = \lambda f_*(e^{j+1}_{i+1,k}) + f^*(e^{j+1}_{i+1,k})$, on $\lambda \neq 0$.

(Observació: $\delta^j_i = \gamma^j_i - \gamma^{j-1}_i$)

Pas 2. Momentàniament, considerem la base de X, adaptada a $W \subset X$, formada pels vectors

$$\{e^j_{i,k}\,,\ 0 \leq j \leq s\,,\ 1 \leq j \leq \ell(\gamma^j)\,,\ 1 \leq k \leq \delta^j_i\}$$

ordenats de la manera següent: primerament, la base de W formada pels vectors amb $j = 0$, ordenats com en una base de Jordan de $\widehat{f}$; seguidament, la resta de vectors ($1 \leq j \leq s$), ordenats de manera que les seves classes a X/W formin una base de Jordan de $\widetilde{f}^* : X/W \longrightarrow X/W$.

És ben fàcil veure que la matriu de f^*, en aquesta base, és una matriu marcada Carlson compatible amb β, γ. Aleshores, la matriu de f s'obté afegint entrades λ corresponents a la condició *(iv')* de la definició de f (vegeu el pas 1). En conseqüència, la matriu de f resulta d'una matriu marcada

$$\left(\begin{array}{c|c} J(\gamma^*) & Z^* \\ \hline 0 & J(\beta^*) \end{array}\right)$$

en què se li afegeixen algunes entrades λ situades en columnes corresponents a les no nul·les de $J(\beta^*)$, i en files no corresponents a les no nul·les de $J(\gamma^*)$.

Pas 3. Finalment, usant transformacions elementals reduïm a $J(\beta^*)$ el bloc inferior dret de la matriu de f obtinguda en el pas (2). En aquest procés, entrades no nul·les que depenen de λ resulten afegides en el bloc superior dret, en columnes corresponents a les no nul·les de $J(\beta^*)$ i en files corresponents a les nul·les de $J(\gamma^*)$. Resumint:

Proposició 3.3.9 *Donada una terna de particions (α, β, γ) Carlson compatible i una LR-successió com a* **(II)** *del teorema 3.2.1, una realització matricial condensada i reduïda*

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\begin{array}{c|c} J(\gamma^*) & Z \\ \hline 0 & J(\beta^*) \end{array} \right)$$

s'obté mitjançant els passos 1, 2 i 3 indicats anteriorment.

Exemple 3.3.10 Per a

$$\begin{aligned} \gamma &= (2,2,2,1,1) \\ \beta &= (2,2,1,1) \\ \alpha &= (3,3,2,2,2,2,1,1) \end{aligned}$$

considerem la LR-successió

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= (3,2,2,2,1) \\ \gamma^2 &= (3,3,2,2,1,1) \\ \gamma^3 &= (3,3,2,2,2,1,1) \end{aligned}$$

llavors $\delta_i^j = 0$ excepte per a

$$\delta_2^1 = \delta_4^1 = \delta_2^2 = \delta_6^2 = \delta_5^3 = \delta_7^4 = 1\,.$$

Considerem les cadenes de Jordan per a $\widehat{f}$

$$\begin{aligned} &e_{5,1}^0 \to e_{4,1}^0 \to e_{3,1}^0 \to e_{2,1}^0 \to e_{1,1}^0 \to 0 \\ &e_{3,2}^0 \to e_{2,2}^0 \to e_{1,2}^0 \to 0 \end{aligned}$$

En el pas 1 definim l'extensió f mitjançant:

(i') $f(e_1^1) = 0$.

(ii') $f(e_4^1) = e_{3,2}^0$.

(iii') $f(e_2^2) = e_1^1$.

(iv') $f(e_6^2) = \lambda e_{5,1}^0 + e_4^1$.

$$f(e_5^3) = \lambda e_4^1 + e_2^2.$$

$$f(e_7^4) = \lambda e_6^2 + e_5^3.$$

on hem escrit simplement e_i^j en lloc de $e_{i,1}^j$.

En el pas 2, considerem la base

$$\begin{array}{l}
e_{5,1}^0\,,\ e_{4,1}^0\,,\ e_{3,1}^0\,,\ e_{2,1}^0\,,\ e_{1,1}^0 \\
e_{3,2}^0\,,\ e_{2,2}^0\,,\ e_{1,2}^0 \\
e_7^4\,,\ e_5^3\,,\ e_2^2\,,\ e_1^1 \\
e_6^2\,,\ e_4^1
\end{array}$$

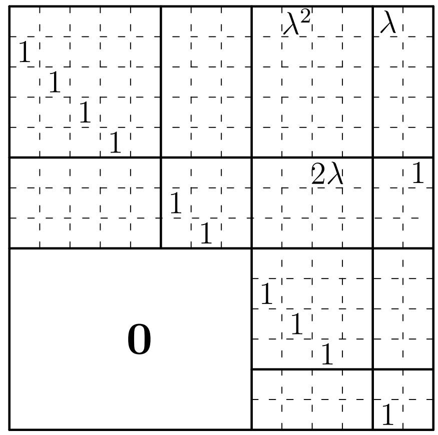
La matriu de f en aquesta base és

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|cccc|cc}
 & & & & & & & & & & & & \lambda & \\
1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \mathbf{0} & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & & & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda & & & 1 &
\end{array}\right]$$

En el pas 3, amb el canvi de base

$$\overline{e}_5^3 = e_5^3 + \lambda e_6^2\,, \quad \overline{e}_2^2 = e_2^2 + 2\lambda e_4^1$$

obtenim la matriu



Com una aplicació, remarquem que si $\lambda \to 0$ obtenim una realització marcada de les particions β, γ. Per tant, podem enunciar el següent:

Corol·lari 3.3.11 *Donada una terna (α, β, γ) Carlson compatible, hi ha una realització matricial d'aquesta terna tant propera com vulguem d'una certa realització marcada de la parella (β, γ).*

En altres paraules, en els entorns de les realitzacions marcades d'una parella (β, γ) es troben representants de totes les realitzacions possibles d'aquesta parella.

Per tant, si considerem totes les realitzacions marcades d'una parella (β, γ) i les pertorbem, obtindrem realitzacions de totes les ternes Carlson compatibles del tipus (α, β, γ). Això és el que farem en el capítol següent.

3.4 Cas de parelles de matrius

3.4.1 Enunciat del teorema

Concretant el que hem indicat a la introducció, resoldrem el problema de Carlson per a parelles de matrius quan el parell P és observable (i, per tant, també ho és P_1) amb índexs d'observabilitat (o BK-índexs) preescrits , i P_2 és un endomorfisme (és a dir, $C_2 = 0$; vegeu (3) de la proposició 1.8.5) amb un sol valor propi λ.

De fet, podem suposar que P_1 és una BK-matriu, $C_3 = 0$ i A_2 és una matriu nilpotent en forma de Jordan. Aquesta remarca i els resultats més importants d'aquesta secció es resumeixen en el teorema següent.

Teorema 3.4.1 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), & |b| &= n-d \end{aligned}$$

Les condicions següents són equivalents:

(I) *Donat un parell observable $P_1 \in M_n(\mathbb{C}) \times M_{r_1,d}(\mathbb{C})$ amb BK-índexs r^*, una matriu quadrada $A_2 \in M_{n-d}(\mathbb{C})$ amb un sol valor propi λ i característica de Segre b^*, i una matriu $C_3 \in M_{r_1,n-d}(\mathbb{C})$, existeix una matriu $Z \in M_{d,n-d}(\mathbb{C})$ de manera que el parell*

$$P = \left(\begin{array}{cc} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \end{array} \right)$$

és observable amb BK-índexs R^*.

(II) *Existeix una successió finita de particions $r^0, r^1, \dots, r^s$ $(s = \ell(b))$ tal que $r^0 = r$, $r^s = R$, i per a qualssevol $i, j \geq 1$:*

(a) $|r^j| - |r^{j-1}| = b_j$

(b) $r_1^j = r_1^{j-1}$, $r_i^{j-1} \geq r_{i+1}^j \geq r_{i+1}^{j-1}$

(c) $\sum_{\ell \geq i+1}(r_\ell^{j+1} - r_\ell^j) \leq \sum_{\ell \geq i}(r_\ell^j - r_\ell^{j-1})$

(III) *[4] $b_1 \leq r_1 = R_1$, $(R^*)_\nu \geq (r^*)_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ i $R^* - r^* \prec b^*$*

Observació 3.4.2 *Noteu que les condicions* (II) *són similars a les de Littlewood-Richardson que apareixen en el problema clàssic de Carlson (vegeu el teorema 3.2.1). De fet, (a) i (b) són gairebé iguals, mentre que (c) és d'alguna manera "oposada". Aquesta diferència és la causa que la condició equivalent a* (III) *(sense $b_1 \leq r_1 = R_1$, que, en el cas quadrat, també és certa si, i solament si,* Ker $f \subset W$*) en el cas de matrius quadrades sigui necessària però no suficient (vegeu l'exemple 3.4.8).*

Observació 3.4.3 *La condició* (III) *s'ens va suggerir a [4], on s'utilitzen mètodes totalment diferents.*

Observació 3.4.4 *Quan* (III) *es compleix, podem obtenir solucions explícites de Z mitjançant* (II)*, que són solucions no equivalents per diferents successions $r^0, r^1, \dots, r^s$ (vegeu la secció 3.5).*

La demostració del teorema la fem per parts, i introduïm altres condicions equivalents a les que hi figuren. Primer expressem (II) d'una altra manera (II')i demostrem l'equivalència entre (II') i (III) usant únicament propietats de les particions; després simplifiquem la condició (I) mitjançant (I') i la formulem geomètricament (I"), i acabm la demostració amb l'equivalència entre (I") i (II).

3.4.2 (II) $\Longrightarrow$ (III)

La proposició següent ens serà útil per entendre millor la condició (II):

Proposició 3.4.5 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), & |b| &= n-d \end{aligned}$$

Les condicions següents són equivalents:

(II) *del teorema 3.4.1.*

(II') *Existeix una successió finita de particions $c^0, c^1, \dots, c^s$ ($s = \ell(b)$) tal que $c^0 = r^*$, $c^s = R^*$, i per a qualssevol $\nu, j, i \geq 1$:*

(a) $|c^j| - |c^{j-1}| = b_j$

(b) $\ell(c^j) = r_1$, $c_\nu^{j-1} \leq c_\nu^j \leq c_\nu^{j-1} + 1$

(c) $\sum_{\eta \in I(i+1,j+1)} (c_\eta^{j+1} - c_\eta^j) \leq \sum_{\eta \in I(i,j)} (c_\eta^j - c_\eta^{j-1})$ *sent* $I(i,j) = \{\eta :\, c_\eta^j \geq i\}$

Demostració. Les condicions (II)-(II') es poden esquematitzar mitjançant els diagrames en que usualment es representen les particions, d'una manera similar a les successions de Littlewood-Richardson.

Per fer-ho, prenem $c^j = (r^j)^*$ i les representem per un diagrama D^j format per r_1^j $(= r_1)$ columnes amb altures $c_1^j, c_2^j, \ldots$, o equivalentment amb longituds $r_1^j, r_2^j, \ldots$ a cada pis. Llavors, D^j s'obté afegint b_j blocs a D^{j-1} (condicions (a)), de manera que les condicions (b) i (c) es respectin.

La condició (II.b) indica que la longitud del pis $(i+1)$ de D^j no pot superar la del pis i de D^{j-1}. És a dir, cada torre pot créixer un bloc com a màxim en passar de D^{j-1} a D^j (condició (II'.b)). Quant a les condicions (c), representem la partició b mitjançant un diagrama anàleg, i etiquetem els blocs del pis j com els b_j blocs. Recordem que les condicions (b) diuen que, per obtenir D^j, els blocs etiquetats amb "j" s'han d'assignar a columnes diferents de D^{j-1}. Llavors, les condicions (c) diuen que el nombre de blocs $(j+1)$ situats a un nivell més gran o igual que $(i+1)$ és menor o igual que el nombre de blocs j a un nivell més gran o igual que i (per a qualsevol i). ■

Per exemple, si $b = (3,2)$ i $r = (4,3,2,1)$, les successions

$$\begin{array}[b]{cccc} 1 & 2 & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & 2 \\ * & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}[b]{cccc} 2 & & & \\ 1 & & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & 2 \\ * & * & * & * \end{array}$$

són possibles, mentre que

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \end{array}$$

no ho és.

Per veure l'equivalència entre (II') i (III) necessitem el lema següent:

Lema 3.4.6 *Siguin α, δ particions tals que*

$$\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \prec \delta \equiv (\delta_1, \dots, \delta_\ell)$$

Si existeix una partició β tal que

$$\begin{aligned} &(\beta_1, \beta_2, \dots) \prec (\delta_1 - 1, \dots, \delta_\ell - 1) \\ &|\beta| = |\alpha| - \ell \\ &\beta_\mu = \alpha_\mu, \quad \beta_\eta = \alpha_\eta - 1 \\ &\alpha_\nu - 1 \leq \beta_\nu \leq \alpha_\nu \quad \textit{per a qualsevol } \nu \end{aligned}$$

Llavors, la partició $\bar{\alpha}$ definida per:

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu, \quad \textit{si } \nu \neq \mu, \eta \\ &\bar{\alpha}_\mu = \alpha_\mu + 1, \quad \bar{\alpha}_\eta = \alpha_\eta - 1 \end{aligned}$$

verifica $\bar{\alpha} \prec \delta$.

Demostració. Si $\alpha_\eta = \alpha_\mu + 1$ llavors $\bar{\alpha} = \alpha$ i no hi res per demostrar.

Si $\alpha_\eta > \alpha_\mu + 1$ llavors $\bar{\alpha} \prec \alpha \prec \delta$.

Si $\alpha_\eta \leq \alpha_\mu$ podem suposar (reordenant si és necessari) que

$$\alpha_{\mu-1} > \alpha_\mu \geq \alpha_\eta > \alpha_{\eta+1} \quad (\text{o} \quad \mu = 1 \quad \text{i} \quad \alpha_1 \geq \alpha_\eta > \alpha_{\eta+1}).$$

En aquest cas, l'ordre a α i $\bar{\alpha}$ és el mateix i tenim

$$\sum_{\nu \leq \mu_0} \bar{\alpha}_\nu = \sum_{\nu \leq \mu_0} \alpha_\nu \quad \text{si } \mu_0 < \mu \text{ o } \mu_0 \geq \eta, \text{ i}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \leq \mu_0} \bar{\alpha}_\nu = 1 + \sum_{\nu \leq \mu_0} \alpha_\nu \leq 1 + \min(\mu_0 - 1, \ell - 1) + \sum_{\nu \leq \mu_0} \beta_\nu \leq \\ \leq 1 + \min(\mu_0 - 1, \ell - 1) + \sum_{\eta \leq \min(\mu_0, \ell)} (\delta_\nu - 1) = \sum_{\nu \leq \mu_0} \delta_\nu \quad \text{si } \mu \leq \mu_0 < \eta. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposició 3.4.7 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), & |b| &= n-d \end{aligned}$$

Les condicions **(II')** *de la proposició 3.4.5 i* **(III)** *del teorema 3.4.1 són equivalents.*

Demostració. (III) és una conseqüència immediata de (II')(a) i (II')(b). Recíprocament, si (III) es compleix, l'estratègia següent ens permet construir, per recurrència, una successió $c^0, c^1, \dots, c^s$ que verifica la condició (II'): per a cada $j = 1, 2, \dots,$ sigui c^j una partició maximal, respecte a l'ordenació parcial donada per $\prec$, entre les que compleixen:

(a) $|c^j| - |c^{j-1}| = b_j$.

(b) $\ell(c^j) = r_1, \quad c^{j-1}_\nu \le c^j_\nu \le c^{j-1}_\nu + 1$.

(c') $c^s - c^j \prec (b^j)^*$.

sent $b^j = (b_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_s)$.

Noteu que el conjunt de particions que compleixen (a), (b) i (c') no és buit perquè, en general, si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \prec (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell)$, llavors

$$(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_\ell - 1, \alpha_{\ell+1}, \dots) \prec (\delta_1 - 1, \delta_2 - 1, \dots, \delta_\ell - 1),$$

on el membre esquerre se suposa reordenat en forma no creixent.

Per construcció, les condicions (II')(a) i (II')(b) es verifiquen. Finalment, veiem que si (II')(c) no es compleix, llavors c^{j-1} no és maximal entre les particions que verifiquen (a), (b) i (c') en el graó previ. Concretament, el lema 3.4.6 demostra que si la successió $c^0, \dots, c^{j-1}, c^j, c^{j+1}, \dots$ verifica (a), (b) i (c') i

$$c^j_\mu = c^{j-1}_\mu\,, \qquad c^j_\eta = c^{j-1}_\eta + 1$$

$$c^{j+1}_\mu = c^j_\mu + 1\,, \qquad c^{j+1}_\eta = c^j_\eta$$

llavors, les condicions (a), (b) i (c') també es compleixen si la partició c^j és reemplaçada per $\bar{c}^j$ que difereix de c^j únicament en:

$$\bar{c}^j_\mu = c^{j-1}_\mu + 1\,, \quad \bar{c}^j_\eta = c^{j-1}_\eta$$

(és a dir, hem permutat l'ordre creixent de les "torres" μ, η (vegeu l'observació 3.4.5)). En particular, si $c^{j+1}_\mu > c^{j+1}_\eta$, llavors $c^j \prec \bar{c}^j$, que contradiu la suposició que c^j és maximal entre les particions que verifiquen (a), (b) i (c'). ∎

En l'exemple següent, veiem la diferència essencial, indicada a l'observació 3.4.2, entre el cas quadrat i el de parelles de matrius:

Exemple 3.4.8 Les particions $\alpha = (2,2)$, $\beta = (1,1)$ i $\gamma = (2,0)$ compleixen que $\alpha^* - \gamma^* = (2,2) - (1,1) \prec (2,0) = \beta^*$, però la condició (II)(c) del teorema 3.2 no es compleix ja que l'única solució possible seria

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ * & * \end{array}$$

i el nombre de blocs de segon ordre a un nivell més petit o igual a 2 és superior al de primer ordre de nivell menor o igual a 1.

En canvi, sí que es compleix (c) del teorema 3.4.1 perquè el nombre de blocs de segon ordre, a un nivell superior o igual a 2, és igual al de blocs de primer ordre d'un nivell superior o igual a 1.

3.4.3 (I) $\Longrightarrow$ (II)

Tal com hem indicat anteriorment, primer demostrem que la propietat (I) la podem expressar geomètricament per (I"):

Proposició 3.4.9 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), & |b| &= n-d \end{aligned}$$

Les condicions següents són equivalents:

(I) *del teorema 3.4.1.*

(I') *Es compleix la condició* **(I)** *en el cas particular en què P_1 és una BK-matriu, A_2 és una matriu nilpotent en forma de Jordan, i $C_3 = 0$.*

(I") *Hi ha una aplicació lineal definida en un subespai $f : Y \longrightarrow X$, $Y \subset X$, i un subespai f-invariant $W \subset Y$ tal que:*

(1) f és observable, amb BK-índexs R^*.

(2) $\widehat{f}$ és observable, amb BK-índexs r^*.

(3) $\ddot{f}$ és un endomorfisme nilpotent, amb característica de Segre b^*.

Demostració. Per veure que (I') implica (I), solament hem de constatar que

$$\left(\begin{array}{cc|c} Q_1 & Q_{12} & S_1 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A_1 & Z \\ 0 & A_2 \\ \hline C_1 & C_3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} Q_1 & Q_{12} \\ 0 & Q_2 \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} Q_1(A_1 + Q_1^{-1} S_1 C_1) Q_1^{-1} & \dots \\ 0 & Q_2 A_2 Q_2^{-1} \\ \hline T_1 C_1 Q_1^{-1} & T_1(-C_1 Q_1^{-1} Q_{12} + C_3) Q_2^{-1} \end{array}\right)$$

Per tant, P_1 pot reduir-se a una BK-matriu, A_2 a una matriu de Jordan i C_3 a 0 (ja que C_1 té rang maximal, després d'eliminar, si és necessari, les seves files nul·les i les corresponents de C_3). A més, podem suposar $\lambda = 0$ perquè

$$P - \lambda \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 - \lambda \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

són equivalents per blocs a P i P_1 respectivament.

L'equivalència entre (I) i (I") és conseqüència immediata de la proposició 1.8.5 en la qual relacionem les parelles verticals de matrius amb les aplicacions lineals definides en un subespai. ■

Sigui $f : Y \longrightarrow X$ i $W \subset X$ com en (I") de la proposició 3.4.9. Seguint l'esquema de la secció 3.2, per demostrar que la condició (II) del teorema 3.4.1 es verifica, introduïm la filtració doble formada pels subespais: $W_i^j = Y_i \cap W^j$, on W^j són els subespais definits a 1.9.10 de manera que Ker $\ddot{f}^j = W^j/W$ i veiem alguns lemes que ens posen de manifest propietats d'aquesta filtració i que ens facilitaran la demostració final.

Prèviament noteu que, tal com s'indica a les seccions 1.6 i 1.8:

$$\begin{aligned} R_i &= \dim Y_{i-1} - \dim Y_i \\ r_i &= \dim W_{i-1} - \dim W_i \end{aligned}$$

on $Y_i = f^{-i}(Y)$, $W_i = \widehat{f}^{-i}(W) = f^{-i}(W) \cap W = Y_i \cap W$

A més de les propietats dels subespais W^j demostrades a la proposició 1.9.11 hem de tenir en compte, en aquest cas, les següents:

Lema 3.4.10 *(1)* $W^{\ell(b)} = W^{\ell(b)+1} = \ldots = Y$

(2) $b_j = \dim W^j - \dim W^{j-1}$, *per a qualsevol* $j \geq 1$

Demostració. Són conseqüència immediata de la proposició 1.9.11. ■

La filtració doble formada per $\{W_i^j\}_{i,j\geq 0}$ en què

$$W_i^j = f^{-i}(W^j) \cap W^j = Y_i \cap W^j, \quad i, j \geq 0$$

gràcies a la invariància dels subespais W^j, la podem ampliar per a $j < 0$ amb la definició

$$W_i^j = f^{-j}(W_{i-j}), \qquad j < 0$$

i podem posar l'esquema següent:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\cdots\subset f(W_1)\subset & W & \subset & W^1 & \subset\cdots\subset & W^{j-1} & \subset & W^j & \subset\cdots\subset & W^{\ell(b)} & = & Y \\
\cup & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots\subset f(W_2)\subset & W_1 & \subset & W_1^1 & \subset\cdots\subset & W_1^{j-1} & \subset & W_1^j & \subset\cdots\subset & W_1^{\ell(b)} & = & Y_1 \\
\cup & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\ldots & \subset W_{i-1} & \subset & W_{i-1}^1 & \subset\cdots\subset & W_{i-1}^{j-1} & \subset & W_{i-1}^j & \subset\cdots\subset & W_{i-1}^{\ell(b)} & = & Y_{i-1} \\
 & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\ldots & \subset W_i & \subset & W_i^1 & \subset\cdots\subset & W_i^{j-1} & \subset & W_i^j & \subset\cdots\subset & W_i^{\ell(b)} & = & Y_i \\
 & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Notem que

$$\frac{Y}{W} \cong \bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ 1\leq j\leq \ell(b)}} \frac{W_i^j}{W_i^{j-1}+W_{i+1}^j}$$

$$\dim \frac{W_i^j}{W_i^{j-1}+W_{i+1}^j} = \dim W_i^j - \dim W_i^{j-1} - \dim W_{i+1}^j + \dim W_{i+1}^j = r_{i+1}^j - r_{i+1}^{j-1}$$

Aquests fets ens guiaran la construcció que fem a la secció següent per demostrar la suficiència.

Definició 3.4.11 *En les condicions de la definició 1.9.10, per a qualsevol $j \geq 0$ definim:*

$$r_i^j = \dim W_{i-1}^j - \dim W_i^j, \quad i \geq 1$$

De les definicions i de (2) de la proposició 1.9.11, tenim que $f(W_i^j) \subset W_{i-1}^{j-1}$ per a qualssevol $i, j \geq 1$. A la proposició següent resumim algunes de les propietats bàsiques d'aquestes aplicacions:

Lema 3.4.12 *En les mateixes condicions que a la definició precedent,*

(1) $f^{-1}(W_{i-1}^{j-1}) = W_i^j$

(2) les aplicacions induïdes

(i) $\dfrac{W_i^j}{W_{i+1}^j} \longrightarrow \dfrac{W_{i-1}^{j-1}}{W_i^{j-1}}$

(ii) $\dfrac{W_i^{j+1}}{W_i^j} \longrightarrow \dfrac{W_{i-1}^j}{W_{i-1}^{j-1}}$

són injectives per a qualssevol $i, j \geq 1$.

Demostració.

(1) $f^{-1}(W_{i-1}^{j-1}) = f^{-1}(Y_{i-1} \cap W^{j-1}) = Y_i \cap f^{-1}(W^{j-1}) =$

$= Y_i \cap [f^{-1}(W^{j-1}) + W] = Y_i \cap W^j = W_i^j.$

(2) És una conseqüència directa de (1).

■

Finalment, usem la construcció precedent per provar que la condició (I") de la proposició 3.4.9 implica la (II) del teorema 3.4.1.

Sigui $(r^j)^*$, $0 \leq j \leq \ell(b)$, els BK-índexs de la restricció de f a cada subespai W^j, és a dir

$$r^j = (r_1^j, r_2^j, \dots)$$

(vegeu la definició 3.4.11). Observem que aquesta restricció és observable (vegeu la proposició 1.8.6 i (3) de la proposició 3.4.10); per tant, $|r^j| = \dim W^j$.

Veiem que, de fet, aquestes particions verifiquen les propietats a (II) del teorema 3.4.1:

(a) Òbviament $r^0 = r$, $r^{\ell(b)} = R$. A més:

$$\begin{aligned} |r^j| - |r^{j-1}| &= \dim W^j - \dim W^{j-1} = \\ &= \dim \operatorname{Ker} \ddot{f}^j - \dim \operatorname{Ker} \ddot{f}^{j-1} = b_j \end{aligned}$$

per a qualsevol $1 \leq j \leq \ell(b)$.

(b) De la proposició 1.8.7, $r_i^{j-1} \leq r_i^j$, per a qualssevol $i, j \geq 1$. La igualtat és certa si $i = 1$, d'acord amb (v) de la proposició 1.9.4.

La desigualtat $r_i^j \leq r_{i-1}^{j-1}$ segueix de la injectivitat a (2)(i) del lema 3.4.12.

(c) Finalment, la condició (c) és conseqüència de la injectivitat a (2)(ii) del lema 3.4.12.

■

3.4.4 (II) $\Longrightarrow$ (I)

Donades les particions R, r, b i $r^1, r^2, \ldots, r^s$ que verifiquen les condicions (a), (b) i (c) de (II) del teorema 3.4.1. Construïm $f : Y \longrightarrow X, \quad W \subset Y$ de manera que compleixin les condicions (1), (2) i (3) de (I") de la proposició 3.4.9.

Siguin $W \subset Y \subset X$ espais vectorials amb dimensió $|r|$, $|R|$ i $|R| + R_1$ respectivament. Sigui $\widehat{f} : W \longrightarrow X$ una aplicació lineal observable amb BK-índexs r^*, llavors la condició (2) de (I") de la proposició 3.4.9 es compleix. A més, una BK-base de W està formada per $r_1 - r_2$ BK-cadenes de longitud 1, $r_2 - r_3$ BK-cadenes de longitud 2, etc. Sigui

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^0 &= \bigcup_{1 \le i \le \ell(r)} \mathcal{B}_i^0; \\
\mathcal{B}_i^0 &= \{e_{i,k}^0;\ 1 \le k \le r_i - r_{i+1}\}
\end{aligned}$$

un conjunt de generadors d'aquestes BK-cadenes. Aleshores

$$\begin{aligned}
W_i = [&\mathcal{B}_{i+1}^0; \mathcal{B}_{i+2}^0, f(\mathcal{B}_{i+2}^0); \\
&\mathcal{B}_{i+3}^0, f(\mathcal{B}_{i+3}^0), f^2(\mathcal{B}_{i+3}^0); \ldots]
\end{aligned}$$

per a $1 \le i \le \ell(r)$.

Ara, hem d'estendre $\widehat{f}$ a $f : Y \longrightarrow X$ de manera que verifiqui (1) i (3) de (I") de la proposició 3.4.9. Per fer-ho, considerem un subespai $\overline{W}$ suplementari de W a Y, i una base $\mathcal{B}$ d'ell. Pensant en l'esquema del lema 3.4.10, $\overline{W}$ ha de descompondre en suma directa de subespais $\overline{V}_i^j$ amb dimensió

$$d_{i+1}^j = r_{i+1}^j - r_{i+1}^{j-1}, \quad (i \ge 0,\ 1 \le j \le \ell(b))$$

respectivament, i hem de definir f en cada un d'aquests subespais $\overline{V}_i^j$. En primer lloc, descomponem $\mathcal{B}$ en subconjunts amb cardinal d_{i+1}^j:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \bigcup_{\substack{i \ge 0 \\ 1 \le j \le \ell(b)}} \mathcal{B}_{i+1}^j \\
\mathcal{B}_{i+1}^j &= \{e_{i+1,k}^j;\ 1 \le k \le d_{i+1}^j\}
\end{aligned}$$

(Observeu que $\mathcal{B}^j_{i+1} = \emptyset$, si $d^j_{i+1} = 0$; en particular, $\mathcal{B}^j_1 = \emptyset$, i $\mathcal{B}^j_{i+1} = \emptyset$ si $i \geq \ell(r^j)$).

En segon lloc, definim $\overline{V}^j_i = [\mathcal{B}^j_{i+1}] \quad (i \geq 0,\ 1 \leq j \leq \ell(b))$, i, per tant, tenim

$$Y = W \oplus \overline{W} = W \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ 1 \leq j \leq \ell(b)}} \overline{V}^j_i \right)$$

$$\dim \overline{V}^j_i = d^j_{i+1} = r^j_{i+1} - r^{j-1}_{i+1}$$

(Observeu que $\overline{V}^j_0 = \{0\}$, i $\overline{V}^j_i = \{0\}$ si $i \geq \ell(r^j)$).

Si considerem el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & \\
 & \oplus & & \oplus & \\
\cdots \oplus & \overline{V}^{j-1}_i & \oplus & \overline{V}^j_i & \oplus \cdots \\
 & \oplus & & \oplus & \\
\cdots \oplus & \overline{V}^{j-1}_{i+1} & \oplus & \overline{V}^j_{i+1} & \oplus \cdots \\
 & \oplus & & \oplus & \\
 & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

i definim, per a $i \geq 0$, $0 \leq j \leq \ell(b)$

$$V^j_i = W_i \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\ell \geq i \\ 1 \leq h \leq j}} \overline{V}^h_\ell \right)$$

obtenim el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \subset & W & \subset & V^1 & \subset \cdots \subset & V^{\ell(b)} & = & Y \\
 & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots \subset & W_1 & \subset & V^1_1 & \subset \cdots \subset & V^{\ell(b)}_1 & \equiv & V_1 \\
 & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

(on $V^j \equiv V^j_0$ i $V_i \equiv V^{\ell(b)}_i$). Ara, definim f sobre cada $\overline{V}^j_i$ de manera que els corresponents subespais W^j_i (d'acord amb la definició 3.4.11) siguin precisament els V^j_i. Aleshores, tal com volíem, els BK-índexs de f seran R^* i la característica de Segre de $\ddot{f}$ serà b^*, $b_j = |r^j| - |r^{j-1}|$, i d'aquesta manera, la demostració de la suficiència queda acabada.

Definim f com la mitjana aritmètica de dues extensions $f_*,\ f^* : Y \longrightarrow X$ de $\widehat{f}$ que definirem prèviament.

(1) Per a qualsevol $i \geq 1$, definim f_* sobre $\overline{V}_i^j$ per recurrència creixent sobre $1 \leq j \leq \ell(b)$.

Per a $j = 1$,

$$f_*(e^1_{i+1,k}) = e^0_{i,k} \in \mathcal{B}^0_i \subset W_{i-1}\,.$$

És possible perquè la hipòtesi (b) de (II) implica:

$$\dim \overline{V}^1_i = r^1_{i+1} - r_{i+1} \leq r_i - r_{i+1} = \#\mathcal{B}^0_i\,.$$

Per a $j \geq 2$,

$$f_*(e^j_{i+1,k}) = e^{j-1}_{i,k} \in \mathcal{B}^{j-1}_i \subset \overline{V}^{j-1}_{i-1}$$

si $1 \leq k \leq \min\{b^j_{i+1}, b^{j-1}_i\}$, i prenent imatges

$$\begin{aligned} f_*(e^j_{i+1,k}) \;&\in\; \mathcal{B}^{j-2}_i \cup \mathcal{B}^{j-3}_i \cup \cdots \cup \mathcal{B}^0_i \subset \\ &\subset\; \overline{V}^{j-2}_{i-1} \oplus \cdots \oplus \overline{V}^1_{i-1} \oplus W_{i-1} \end{aligned}$$

de forma que f_* sigui injectiva si $d^{j-1}_i < k \leq d^j_{i+1}$.

Això és possible perquè

$$\begin{aligned} &\dim(\overline{V}^1_i \oplus \cdots \oplus \overline{V}^j_i) = \\ &= (r^1_{i+1} - r_{i+1}) + (r^2_{i+1} - r^1_{i+1}) + \ldots \\ &\qquad \cdots + (r^j_{i+1} - r^{j-1}_{i+1}) = \\ &= -r_{i+1} + r^j_{i+1} \leq -r_{i+1} + r^{j-1}_i = \\ &= (r_i - r_{i+1}) + (r^1_i - r_i) + \ldots \\ &\qquad \cdots + (r^{j-1}_i - r^{j-2}_i) = \\ &= \#\mathcal{B}^0_i + \#\mathcal{B}^1_i + \cdots + \#\mathcal{B}^{j-2}_i + \#\mathcal{B}^{j-1}_i. \end{aligned}$$

(2) Ara

$$f^*(e^1_{i+1,k}) = f_*(e^1_{i+1,k}) = e^0_{i,k}\,.$$

Per a qualsevol $j \geq 2$, definim f^* sobre $\overline{V}_i^j$ per recurrència decreixent sobre $1 \leq i < \ell(r^j)$.

Per a $1 \leq k \leq \min\{d_{i+1}^j, d_i^{j-1}\}$,

$$f^*(e_{i+1}^j, k) = f_*(e_{i+1,k}^j) = e_{i,k}^{j-1}$$

i per a $d_i^{j-1} < k \leq d_{i+1}$, prenent imatges

$$\begin{aligned} f^*(e_{i+1,k}^j) \in \mathcal{B}_{i+1}^{j-1} \cup \mathcal{B}_{i+2}^{j-1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\ell(r^{j-1})}^{j-1} \subset \\ \subset \overline{V}_i^{j-1} \oplus \overline{V}_{i+1}^{j-1} \oplus \cdots \oplus \overline{V}_{\ell(r^{j-1})-1}^{j-1} \end{aligned}$$

de manera que f^* sigui injectiva.

Això és possible perquè de la hipòtesi (c) de (II):

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigoplus_{\ell \geq i} \overline{V}_\ell^j \right) = \sum_{\ell > i} (r_\ell^j - r_\ell^{j-1}) \leq \\ \leq \sum_{\ell > i-1} (r_\ell^{j-1} - r_\ell^{j-2}) = \dim \left(\bigoplus_{\ell \geq i-1} \overline{V}_\ell^{j-1} \right) \end{aligned}$$

(3) Finalment, $f = \dfrac{1}{2}(f_* + f^*)$. Òbviament, és una extensió de $\widehat{f}$.

Haurem acabat la demostració del teorema 3.4.1 si $V_i^j = W_i^j$, o equivalentment, $Y_i = V_i, \quad W^j = V^j$.

És obvi que $V_0 = Y$. Per tant, és suficient provar el lema següent:

Lema 3.4.13 *Amb la notació anterior:*

(1) $f^{-1}(V^{j-1}) + W = V^j$, *per a qualsevol* $j \geq 1$.

(2) $f^{-1}(V_{i-1}) = V_i$, *per a qualsevol* $i \geq 1$.

Demostració.

Prèviament observeu que si un vector $e_{i,k}^{j-1} \in \mathcal{B}$ és de $f_*(\mathcal{B}) \cap f^*(\mathcal{B})$, o

$$e_{i,k}^{j-1} = f_*(e_{i+1,k}^j) = f^*(e_{i+1,k}^j) = f(e_{i+1,k}^j)$$

o existeixen $h > 0$ i $\ell \geq 0$ únics, tals que

$$e_{i,k}^{j-1} \in f_*(\mathcal{B}_{i+1}^{j+h}) \cap f^*(\mathcal{B}_{i-\ell}^{j})$$

(1) Per construcció

$$f(V^j) \subset V^{j-1} + f(W)$$

D'on

$$V^j \subset f^{-1}(V^{j-1}) + W$$

Per provar la inclusió contrària, suposem que $x \notin V^j$ i sigui J l'índex màxim $J > j$ tal que x té alguna component no nul·la a $\overline{V}^J \equiv \bigoplus_i \overline{V}_i^J$. Aleshores, $f^*(x)$ ha de tenir alguna component no nul·la a $\overline{V}^{J-1} \equiv \bigoplus_i \overline{V}_i^{J-1}$. D'acord amb l'observació prèvia, i pensant en la definició de J, aquesta component no pot ser anul·lada per cap component de $f_*(x)$, és a dir, $f(x)$ té alguna component no nul·la a $\overline{V}^{J-1}$. Per tant, $f(x) \notin V^{j-1} + f(W)$.

(2) Per construcció, $f(V_i) \subset V_{i-1}$. Llavors, $V_i \subset f^{-1}(V_{i-1})$. Per demostrar la inclusió contrària, procediríem per recurrència creixent sobre i, de forma anàloga a (1). ■

3.5 Construcció de solucions

Quan es compleix la condició (III) del teorema 3.4.1, podem obtenir solucions explícites Z verificant (I) i (I') amb la construcció efectuada a la secció 3.4.4, partint d'una successió de particions que compleixi (II). Podríem, igual que en el cas quadrat, fer un algorisme per a l'obtenció de solucions explícites de Z però, donat que els raonaments són totalment anàlegs, ens limitem a comentar algunes analogies i diferències envers el cas quadrat.

És obvi que successions diferents de particions com a (II) donen solucions no equivalents. L'exemple 3.5.3 demostra que és possible obtenir solucions no equivalents a partir d'una mateixa successió de particions.

Exemple 3.5.1 És evident que les particions

$$R = (2, 2, 1), \quad r = (2), \quad b = (1, 1, 1)$$

verifiquen la condició (III) del teorema 3.4.1. Són possibles les dues successions de particions que verifiquen (II):

$$(2, 1), \quad (2, 2), \quad (2, 2, 1)$$
$$(2, 1), \quad (2, 1, 1), \quad (2, 2, 1)$$

D'acord amb la construcció feta a la secció 3.4.4, donen lloc respectivament a les solucions no equivalents següents:

$$\begin{array}{|cc|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|cc|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La següent proposició ens demostra que, contràriament al cas quadrat (vegeu l'exemple 3.4.8), si $b = (1, 1, \dots, 1)$ sempre hi ha solució.

Proposició 3.5.2 *Donades tres particions:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (1, 1, \dots, 1), & |b| &= n - d \end{aligned}$$

amb $r_1 = R_1, \quad (R^*)_\nu \geq (r^*)_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$*, aleshores la condició* **(III)** *del teorema 3.4.1 es compleix, és a dir,*

$$R^* - r^* \prec b^*$$

Demostració.

No és difícil veure que una successió de particions r^j, $0 \leq j \leq \ell(b)$, que verifiqui (II) es pot construir per recurrència de la manera següent:

$$r^j_{i(j)} = r^{j-1}_{i(j)} + 1$$
$$r^j_i = r^{j-1}_i, \quad \text{si } i \neq i(j)$$

sent

$$i(j) = \max\{i: \; r^{j-1}_i < R_i, \quad r^{j-1}_i < r^{j-1}_{i-1}\}$$

Llavors, com en l'exemple previ, es poden obtenir solucions explícites amb la construcció de la secció 3.4.4. ■

A l'exemple que hi ha a continuació veiem que dues solucions poden tenir les mateixes LR-successions i no ser equivalents.

Exemple 3.5.3 Donades les particions

$$R = (3, 3, 2), \quad r = (3, 2), \quad b = (2, 1)$$

Les aplicacions lineals $f_\lambda : Y \longrightarrow X$ definides sobre una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ del subespai $W \subset Y$ per

$$f_\lambda(e_1) = e_2, \quad f_\lambda(e_2) = e_9, \quad f_\lambda(e_3) = e_4, \quad f_\lambda(e_4) = e_{10}, \quad f_\lambda(e_5) = e_{11}$$

i sobre una base $\{e_6, e_7, e_8\}$ d'un suplementari de W a Y per

$$f_\lambda(e_6) = e_1, \quad f_\lambda(e_7) = e_5, \quad f_\lambda(e_8) = \lambda e_7 + e_3 + e_6$$

sent $\{e_1, e_2, \dots, e_{11}\}$ una base de X, tenen l'expressió matricial

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

i són solució del problema amb la mateixa LR-successió $(3,3,1),(3,3,2)$, però no són totes equivalents perquè

$$f_\lambda(W_2^2) \subset W_1 + W_2^1 = [e_1, e_3, e_6] \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0$$

En el cas de parelles de matrius no és tan conegut el "lema de condensació", per tant, en fem aquí una demostració.

De fet, les solucions que s'han construït en el cas de particions compatibles a la demostració del teorema 3.4.1 són condensades.

Lema 3.5.4 *Siguin R, r, b tres particions que verifiquen les condicions del teorema 3.4.1, i considerem el cas particular* **(I')***. Llavors:*

(1) Per a qualsevol solució Z, existeix una solució equivalent Z' amb entrades no nul·les només a les r_1 files corresponents a les files nul·les de A_1.

(2) A més, es pot escollir Z' de manera que les seves entrades a les b_1 columnes corresponents a les columnes nul·les de A_2 també siguin 0, excepte una de les entrades a cada columna, que pot ser un 1 i, de manera que aquests 1 estiguin situats en files diferents.

Demostració. (1) És immediat que cada vector de la base de Y, que no sigui de W, es pot canviar sumant-li un vector de W, de tal manera que la seva imatge per f sigui una combinació lineal dels generadors de les BK-cadenes de W. Concretament, suposem $P_1 = \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}$ una BK-matriu i $A_2 = J$ una matriu nilpotent en forma de Jordan. Observem que

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & Q_{12} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} N & Z \\ 0 & J \\ \hline E & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} I & Q_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & Z - NQ_{12} + Q_{12}J \\ 0 & J \\ \hline E & EQ_{12} \end{array}\right)$$

Escollim Q_{12} de manera que $EQ_{12} = 0$ i $Z' = Z - NQ_{12} + Q_{12}J$ verifiqui la propietat desitjada. Per a la primera condició, és suficient que siguin nul·les les files de Q_{12} corresponents a la primera de cada un dels blocs de N. La resta de files de Q_{12} es poden calcular fàcilment per recurrència amb l'objectiu d'anul·lar totes les files de Z excepte les corresponents a les nul·les de N. Per exemple, sigui

$$N = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad J = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors: $EQ_{12} = 0$

$$-NQ_{12} + Q_{12}J = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & c_3 & c_4 & 0 \\ -c_1 & -c_1 + d_3 & -c_3 + d_4 & -c_4 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \end{pmatrix}.$$

És clar que Q_{12} es pot escollir de manera que $Z - NQ_{12} + Q_{12}J$ tingui entrades nul·les aa les files segona, quarta i cinquena.

(2) De la proposició 3.4.12, es dedueix immediatament que, per a qualsevol $i \geq 1$, les aplicacions induïdes per f

$$\frac{W_i^1}{W_{i+1}^1 + W_i} \longrightarrow \frac{W_{i-1}}{W_i + f(W_i)}$$

són injectives. Observem que els vectors de W^1/W són els vectors propis de $\ddot{f}$. Per tant, a causa de les injectivitats precedents, les imatges d'una base de $\ddot{f}$-vectors propis (en realitat, de un conjunt de representants de W^1), es pot estendre a una família de BK-generadors de $\widehat{f}$. ■

S'obtenen solucions amb un nombre minimal d'entrades no nul·les quan el subespai W és marcat:

Proposició 3.5.5 *Donades tres particions que verifiquen:*

$$\begin{aligned} R &= (R_1, R_2, \dots), & |R| &= n \\ r &= (r_1, r_2, \dots), & |r| &= d \\ b &= (b_1, b_2, \dots), & |b| &= n - d \end{aligned}$$

Són equivalents:

(1) Es compleix **(I')** *de la proposició 3.4.9 i existeix una solució Z amb les entrades citades a la part (2) del lema 3.5.4 com a úniques entrades no nul·les, és a dir, b_1 entrades amb valor 1 situades en (diferents) columnes corresponents a les nul·les a J, i a (diferents) files corresponents a les nul·les a N.*

(2) Existeix un subespai f-marcat W que verifica **(I")** *de la proposició 3.4.9.*

(3) $R^* - r^* = b^*$.

Capítol 4

Deformacions de matrius quadrades amb un subespai invariant fix

4.1 Introducció

En aquest capítol estudiem els endomorfismes que deixen invariant un subespai determinat i són en un entorn d'un endomorfisme determinat de la mateixa classe.

Concretem amb la notació que farem servir el que volem dir. Sigui
$\mathcal{M} = \{a \in M_{n+m}(\mathbb{C}) : a = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_m(\mathbb{C}), C \in M_{n,m}(\mathbb{C})\}$.
Els elements de $\mathcal{M}$ els expressem per les lletres del tipus $a, p, \dots$ indicant la primera de les tres matrius no nul·les i les altres dues seguiran l'ordre alfabètic, és a dir, $a = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \dots$. Per a^* indiquem la transposada de la matriu a. Sabem que donat un subespai $W \subset \mathbb{C}^{n+m}$ de dimensió n, un endomorfisme de $\mathbb{C}^{n+m}$ el deixa invariant si, i solament si, la seva matriu en una base adaptada a la filtració $W \subset \mathbb{C}^{n+m}$ és de $\mathcal{M}$. Considerem fixada una d'aquestes bases i notem per $f_a \in End(\mathbb{C}^{n+m})$ l'endomorfisme amb matriu a en aquesta base.

Per tant, tal com hem dit, estudiem els endomorfismes f que deixen invariant

W i estan en un entorn d'un f_a donat. O equivalentment, si $a \in \mathcal{M}$ és la matriu d'aquest endomorfisme, determinem les matrius de $\mathcal{M}$ en un entorn de centre la matriu a. A tal efecte, utilitzem les tècniques d'Arnold [1].

Indiquem per $\mathcal{G}$ el grup de les matrius invertibles de $\mathcal{M}$. En tot el capítol usem la identificació $\mathcal{M} \cong \mathbb{C}^{n^2+nm+m^2}$ i que $\mathcal{G}$ és un obert dens de $\mathcal{M}$ amb la topologia que en resulta. I és la matriu identitat en qualsevol espai de matrius que considerem i solament matisem en quin, si dóna lloc a confusió.

En la secció 4.2 recordem les definicions d'òrbita per l'acció d'un grup (4.2.1), deformació (4.2.2), deformació induïda (4.2.3) i deformació miniversal (4.2.4), i demostrem directament que el coneixement de la deformació miniversal en un punt de l'òrbita implica el de les deformacions en qualsevol altre punt d'ella (proposició 4.2.5).

Enunciem el conegut lema de l'òrbita tancada (teorema 4.2.6) i relacionem transversalitat amb versalitat (4.2.7, 4.2.8 i 4.2.9). Acabem aplicant-ho al nostre cas per a obtenir les equacions que donen una deformació miniversal (teorema 4.2.11).

En la secció 4.3 apliquem el teorema anterior per a obtenir explícitament una deformació miniversal d'una matriu marcada. Comencem introduint les definicions de diferents tipus de matrius que ens ajudaran a simplificar els enunciats com les B-matrius i TSB-matrius (4.3.1), B-matrius i TSB-matrius per blocs (4.3.3) i la forma canònica d'una matriu marcada nilpotent (4.3.4). Després hi ha un seguit de lemes i proposicions preparatoris per a finalitzar amb el teorema 4.3.13 que en dóna una deformació miniversal d'una matriu marcada. En el teorema 4.3.18 obtenim una segona deformació miniversal que millora l'anterior perquè evita la repetició dels paràmetres.

Finalment, en l'última secció relacionem les deformacions amb el problema de Carlson (teorema 4.4.4)

4.2 Deformació miniversal

Per estudiar quines classes d'equivalència respecte a la relació de conjugació habitual, associada a canvis de base, hi ha en un entorn d'una matriu quadrada donada, i quina estructura geomètrica presenten, Arnold es basà en què aquestes classes d'equivalència són òrbites per l'acció del grup lineal, i són, doncs, subvarietats diferenciables. De fet, les tècniques d'Arnold es generalitzen ([27]) a altres casos en els quals es dóna aquest fet bàsic. En aquesta situació, les deformacions versals s'identifiquen amb les subvarietats transversals a la classe (o òrbita) de la matriu considerada. En el nostre cas, vegem la relació d'equivalència considerada i les definicions i teoremes que en resulten.

Definició 4.2.1 *Sobre el conjunt $\mathcal{M}$ considerarem l'acció del grup $\mathcal{G}$ (canvis de base, entre les adaptades a $W \subset \mathbb{C}^{n+m}$), definida per la conjugació:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (p, a) & \longmapsto & p^{-1}ap \end{array}$$

notarem $p * a = p^{-1}ap$.

L'òrbita *de la matriu $a \in \mathcal{M}$ la indiquem per $\mathcal{O}_a$, és a dir*

$$\mathcal{O}_a = \{p * a : p \in \mathcal{G}\}.$$

Naturalment, coincideix amb la classe d'equivalència de $a \in \mathcal{M}$ per la relació associada a l'acció del grup $\mathcal{G}$.

Definició 4.2.2 *Sigui $\mathcal{V}$ una varietat diferenciable (per exemple, $\mathcal{M}$ o $\mathcal{G}$). Una* deformació *de $a \in \mathcal{V}$ és una aplicació diferenciable*

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{V}$$

on Λ és un entorn de l'origen a $\mathbb{C}^l$ i $\varphi(0) = a$. També es diu que la imatge $\varphi(\Lambda)$ és una família de deformacions *de l'element central $a \in \mathcal{V}$.*

El conjunt Λ rep el nom de base de la deformació *i si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \Lambda$ diem que λ_i és un* paràmetre de deformació.

Per exemple, tota parametrització local d'una subvarietat $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ amb $a \in \mathcal{S}$, n'és una deformació. Diem simplement que $\mathcal{S}$ és una deformació de a.

Definició 4.2.3 *Si Γ és un entorn de l'origen a $\mathbb{C}^t$, $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ és una aplicació diferenciable tal que $\sigma(0) = 0$ i φ és una deformació de base Λ, diem que $\varphi \circ \sigma$ és una* deformació induïda *per φ.*

Un objectiu fonamental en les tècniques d'Arnold és trobar les deformacions "versals" caracteritzades pel fet que qualsevol altra és induïda per ella. Recordem la definició:

Definició 4.2.4 (Deformació versal/miniversal). *Diem que una deformació de $a \in \mathcal{M}$, $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}$ és* versal*, si donada qualsevol altra deformació de $a \in \mathcal{M}$, $\psi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}$, existeixen un entorn de l'origen $\Gamma' \subset \Gamma$, una aplicació diferenciable $\sigma : \Gamma' \longrightarrow \Lambda$ i una deformació de $I \in \mathcal{G}$, $\delta : \Gamma' \longrightarrow \mathcal{G}$, de manera que*

$$\psi(\tau) = \delta(\tau) * \varphi(\sigma(\tau)), \qquad \forall \tau \in \Gamma'.$$

Diem que és miniversal *si té el nombre mínim de paràmetres d'entre totes les versals. Aleshores es diu igualment que és una* forma canònica diferenciable local*, en $a \in \mathcal{M}$, de la família de deformacions $\varphi(\Lambda)$.*

La proposició següent ens diu que n'hi ha prou a conèixer una deformació miniversal en un punt de l'òrbita perquè deformacions miniversals dels altres punts de l'òrbita es dedueixen d'aquesta deformació mitjançant l'acció del grup.

Proposició 4.2.5 *Si $\bar{a} = p * a$, amb $\bar{a}, a \in \mathcal{M}$ i $p \in \mathcal{G}$, i $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}$ és una deformació versal/miniversal de $a \in \mathcal{M}$, l'aplicació $p * \varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}$ definida per $(p * \varphi)(\lambda) = p * \varphi(\lambda)$ és una deformació versal/miniversal de $\bar{a} \in \mathcal{M}$*

Demostració. Efectivament, donada una deformació $\overline{\psi}$ de base Γ de $\bar{a} \in \mathcal{M}$, l'aplicació ψ definida per $\psi(\tau) = \rho^{-1} * \overline{\psi}(\tau)$ és una deformació de base Γ de $a \in \mathcal{M}$. Si φ és una deformació versal/miniversal de $a \in \mathcal{M}$, aplicant la definició 4.2.4, existeixen Γ', δ, σ tal que

$$\psi(\tau) = \delta(\tau) * \varphi(\sigma(\tau)) \,, \quad \forall\, \tau \in \Gamma'$$

i fent actuar ρ resulta:

$$\overline{\psi}(\tau) = \rho * (\delta(\tau) * \varphi(\sigma(\tau))) = (\rho * \delta(\tau)) * (\rho * \varphi(\sigma(\tau)))$$

que indica que $\rho * \varphi$ és una deformació versal/miniversal de $\bar{a} \in \mathcal{M}$. ■

Ens basem en el conegut lema de l'òrbita tancada, ([27], pàg. 37) per afirmar que en el nostre cas, les òrbites són subvarietats diferenciables i, per tant, podem aplicar les tècniques d'Arnold. Si ho particularitzem al nostre cas, podem enunciar:

Teorema 4.2.6 *Per a cada $a \in \mathcal{M}$, l'òrbita $\mathcal{O}_a$ per l'acció del grup algebraic $\mathcal{G}$, és una subvarietat diferenciable de $\mathcal{M}$ localment tancada amb frontera unió d'òrbites de dimensió estrictament menor.*

Vegem com podem obtenir deformacions miniversals, usant el punt clau de les tècniques esmentades i relacionant la versalitat amb la transversalitat. Recordem la definició d'aquest últim concepte:

Definició 4.2.7 *Sigui $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ una subvarietat diferenciable de la varietat $\mathcal{V}$ i $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{V}$ una aplicació diferenciable. Diem que φ és* transversal *a $\mathcal{S}$ en $\lambda \in \Lambda$ si $\varphi(\lambda) \in \mathcal{S}$ i l'espai tangent a $\mathcal{V}$ en el punt $\varphi(\lambda)$ descompon de la següent manera:*

$$T_{\varphi(\lambda)}\mathcal{V} = Im\, d\varphi_\lambda + T_{\varphi(\lambda)}\mathcal{S}$$

En particular, si Λ és una subvarietat de $\mathcal{V}$ (i φ és la inclusió), diem que és transversal a $\mathcal{S}$ en $\lambda \in \Lambda$ si

$$T_\lambda\mathcal{V} = T_\lambda\Lambda + T_\lambda\mathcal{S}$$

Diem que és minitransversal *si aquesta suma és directa.*

Tal com hem dit, el punt clau és la proposició següent, que [1] demostra per a matrius quadrades, i que és generalitzable (per exemple [27]) als casos, com el nostre, en els quals les classes d'equivalència són subvarietats diferenciables donades com a òrbites per l'acció d'un grup de Lie.

Proposició 4.2.8 *Una deformació $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}$ de $a \in \mathcal{M}$ és versal/miniversal si, i solament si, és transversal/minitransversal a l'òrbita $\mathcal{O}_a$ en l'origen $O \in \Lambda$.*

Corol·lari 4.2.9 *Una deformació miniversal en $a \in \mathcal{M}$ queda determinada per qualsevol subespai suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$ a $T_a\mathcal{M} = \mathcal{M}$. En concret, si $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ és una base d'un suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$ a $\mathcal{M}$, una deformació miniversal en $a \in \mathcal{M}$ serà:*

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = a + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$$

Per aplicar aquest corol·lari al nostre cas, obtinguem una caracterització de $T_a\mathcal{O}_a$ utilitzant que aquest subespai és la imatge de l'aplicació diferencial en $I \in \mathcal{G}$ de

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & p & \longmapsto & p * a \end{array}$$

Proposició 4.2.10 *Sigui la matriu $a \in \mathcal{M}$ i $\mathcal{O}_a$ la seva òrbita per l'acció del grup $\mathcal{G}$, llavors, l'espai tangent a aquesta òrbita en el punt $a \in \mathcal{M}$ és*

$$T_a\mathcal{O}_a = \{[a, p] : p \in \mathcal{M}\}$$

sent $[a, p] = ap - pa$

Demostració. Per a qualsevol $p \in \mathcal{M}$ es compleix

$$\begin{aligned} d\alpha_I(p) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\alpha(I + \epsilon p) - \alpha(I)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}((I + \epsilon p)^{-1} a (I + \epsilon p) - a) = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}((I - \epsilon p) a (I + \epsilon p) - a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(\epsilon ap - \epsilon pa) = [a, p] \end{aligned}$$

■

Estem en condicions d'enunciar i demostrar el teorema fonamental d'aquesta secció:

Teorema 4.2.11 *Sigui*

$$a = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

Una deformació miniversal en aquest punt queda determinada per la subvarietat lineal que passa per $a \in \mathcal{M}$ i té per subespai director el format per les matrius

$$x = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

que compleixen les condicions

(1) $A^*Z - ZB^* = 0$

(2) $[A^*, X] - ZC^* = 0$

(3) $[Y, B^*] - C^*Z = 0$

Demostració. Per poder aplicar 4.2.9, una forma d'obtenir un suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$ consisteix a definir un producte escalar a $\mathcal{M}$ i buscar l'ortogonal.

Considerem el producte escalar a $\mathcal{M}$ definit per

$$< x, p >= tr(xp^*)$$

$x \in \mathcal{M}$ serà de l'ortogonal de $T_a\mathcal{O}_a$ si compleix

$$< x, [a, p] >= 0, \qquad \forall p \in \mathcal{M}$$

i com que

$$[a, p] = \begin{pmatrix} AP - PA & AR + CQ - PC - RB \\ 0 & BQ - QB \end{pmatrix}$$

aquesta condició equival a

$$tr(XP^*A^* - XA^*P^* + ZR^*A^* + ZQ^*C^* - ZC^*P^* - ZB^*R^*) + tr(YQ^*B^* - YB^*Q^*) = 0$$

$$\forall P \in M_n(\mathbb{C}), Q \in M_m(\mathbb{C}), R \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

usant que la traça és invariant si fem permutacions circulars de les matrius, la condició és equivalent a

$$tr(A^*XP^* - XA^*P^* + A^*ZR^* - ZC^*P^* - ZB^*R^*) + tr(C^*ZQ^* + B^*YQ^* - YB^*Q^*) = 0$$

$$\forall P \in M_n(\mathbb{C}), Q \in M_m(\mathbb{C}), R \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

i traient factor comú, resulta

$$tr((A^*X - XA^* - ZC^*)P^* + (A^*Z - ZB^*)R^*) + tr((C^*Z + B^*Y - YB^*)Q^*) = 0$$

$$\forall P \in M_n(\mathbb{C}), Q \in M_m(\mathbb{C}), R \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

que equival a

$$< \begin{pmatrix} A^*X - XA^* - ZC^* & A^*Z - ZB^* \\ 0 & C^*Z + B^*Y - YB^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix} >= 0$$

$$\forall P \in M_n(\mathbb{C}), Q \in M_m(\mathbb{C}), R \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

que implica que el primer factor és nul.

Acabem la demostració usant el corol·lari 4.2.9. ■

4.3 Obtenció de deformacions miniversals per a matrius marcades

Recordem que la definició de matriu marcada és a 2.2.6.

Introduïm un tipus de matrius que ens sortiran tot sovint en la resolució de les equacions del teorema 4.2.11.

Definició 4.3.1 *Una matriu $X = (x_{i,j}) \in M_{\gamma,\beta}(\mathbb{C})$ direm que és a bandes i escriurem que X és una* B-matriu *si es compleix que*

$$x_{i,j} = x_{i+1,j+1}$$

Si, a més,

$$x_{i,\beta} = 0 \quad si \quad i > \min(\gamma, \beta)$$

diem que X és una matriu triangular superior a bandes i escriurem que és una TSB-matriu.

Les bandes les numerem per les files de l'última columna.

Exemple 4.3.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és una B-matriu.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

és una TSB-matriu.

Definició 4.3.3 *Una matriu*

$$X = \Big[X_{i,j}\Big]_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s} \quad X_{i,j} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C})$$

on cada un dels blocs $X_{i,j}$ sigui una B-matriu, diem que és una B-matriu per blocs. *Anàlogament es defineix una* TSB-matriu per blocs.

Definició 4.3.4 *Una matriu $a \in \mathcal{M}$ marcada i nilpotent diem que és en* forma canònica *si:*

(1) $A = diag(A_1, \dots, A_r)$, *sent $A_1, \dots, A_r$ matrius nilpotents en forma de Jordan de mides $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ respectivament, on $\gamma_1 + \cdots + \gamma_r = n$.*

(2) $B = diag(B_1, \dots, B_s)$, *sent $B_1, \dots, B_s$ matrius nilpotents en forma de Jordan de mides $\beta_1, \dots, \beta_s$ respectivament, on $\beta_1 + \cdots + \beta_s = m$.*

(3) $C = [C_{i,j}]_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s} \qquad C_{i,j} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C})$ *tal que*

$$C_{ii} = \left[\begin{array}{c|c} 0 \dots 0 & 1 \\ \hline & 0 \\ \mathbf{0} & \vdots \\ & 0 \end{array}\right] \qquad \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \leq \min(r,s)$$

$C_{ij} = 0$ *en un altre cas.*

(4) $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_p$.

(5) $\beta_i \geq \beta_{i+1} \quad si \quad \begin{cases} 0 < i < p \\ \gamma_i = \gamma_{i+1} \end{cases}$

(6) $\gamma_{p+1} \geq \gamma_{p+2} \geq \cdots \geq \gamma_r$.

(7) $\beta_{p+1} \geq \beta_{p+2} \geq \cdots \geq \beta_s$.

Diem que la matriu a és del tipus $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$, *sent* $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ *i* $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$

Exemple 4.3.5 La següent matriu a és una matriu marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $((3,2,1,3,1),(2,4,1,3,2),3)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c||ccc|c||cc|cccc|c||ccc|cc}
&&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&& \\
1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&1&&&&&& \\
&&&1&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&1&&&&& \\
\hline\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&1&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&1&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&
\end{array}\right]$$

Gràcies als raonaments del capítol 1 podem suposar que la matriu $a \in \mathcal{M}$ marcada és nilpotent i, gràcies a la proposició 4.2.5, podem suposar que és en forma canònica.

Resolguem el sistema format per les equacions (1), (2) i (3) si la matriu $a \in \mathcal{M}$ és marcada, nilpotent i en forma canònica.

Lema 4.3.6 Si $A \in M_\gamma(\mathbb{C})$ i $B \in M_\beta(\mathbb{C})$ són matrius nilpotents en forma de Jordan amb anul·lador de grau màxim, una matriu $Z \in M_{\gamma,\beta}(\mathbb{C})$ és solució de l'equació

$$A^*Z - ZB^* = 0 \tag{1}$$

si, i solament si, Z és una TSB-matriu.

Demostració. L'equació (1) és

$$\begin{bmatrix} z_{2,1} & z_{2,2} & \dots & z_{2,\beta} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & \dots & z_{3,\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{\gamma,1} & z_{\gamma,2} & \dots & z_{\gamma,\beta} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} & z_{1,2} & \dots & z_{1,\beta-1} \\ 0 & z_{2,1} & z_{2,2} & \dots & z_{2,\beta-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & z_{\gamma,1} & z_{\gamma,2} & \dots & z_{\gamma,\beta-1} \end{bmatrix}$$

que dóna $z_{h,\ell} = z_{h+1,\ell+1}$, que ens diu que Z és una B-matriu i $z_{h,1} = z_{\gamma,\beta-\ell} = 0$ si $h, \ell > 1$, que ens diu que és una TSB-matriu. ∎

Proposició 4.3.7 *Sigui* $a = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus* $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$*. Una matriu*

$$Z = [Z_{ij}]_{\substack{1\le i\le r \\ 1\le j\le s}} \in M_{n,m}(\mathbb{C})\,,$$

amb $Z_{ij} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C})$*, és solució de l'equació*

(1) $$A^*Z - ZB^* = 0$$

si, i solament si, Z *és una TSB-matriu per blocs.*

Demostració. L'equació (1) equival al conjunt d'equacions

$$A_i^* Z_{ij} - Z_{ij} B_j^* = 0\,, \qquad 1 \le i \le r\,, \quad 1 \le j \le s$$

que, segons el lema anterior, tenen com a solució Z_{ij} TSB-matrius. ∎

Lema 4.3.8 Si $a = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ és marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$, les equacions (2) i (3) de (4.2.11) són equivalents a

(2) $$A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = \sum_{k=1}^{s} Z_{ik} C_{jk}^*\,, \quad 1 \le i, j \le r$$

que si $1 \leq j \leq p$ es converteix en

$$A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = Z_{ij} C_{jj}^*$$

i si $p < j \leq r$ en

$$A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = 0\,.$$

(3) $$Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = \sum_{k=1}^{r} C_{k_i}^* Z_{kj}\,, \quad 1 \leq i, j \leq s$$

que si $1 \leq i \leq p$ es converteix en

$$Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = C_{ii}^* Z_{ij}$$

i si $p < i \leq s$ en

$$Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = 0\,.$$

Demostració. N'hi ha prou a utilitzar la descomposició en blocs indicada a la definició (4.3.4). ■

Per tant, en descompondre el sistema format per les equacions (1), (2) i (3) de (4.2.11) per blocs haurem de distingir quatre casos diferents:

I) $1 \leq i, j \leq p$

II) $i > p, \ j \leq p$

III) $i \leq p, \ j > p$

IV) $i, j > p$

Resolguem cada un dels casos:

Proposició 4.3.9 (Cas I) *Si A_i, A_j, B_i, B_j són matrius quadrades nilpotents amb anul·lador de grau màxim γ_i, γ_j, β_i, β_j respectivament, en forma de Jordan i $C_{ii} \in M_{\gamma_i,\beta_i}(\mathbb{C})$, $C_{jj} \in M_{\gamma_j,\beta_j}(\mathbb{C})$ són matrius amb tots els elements nuls excepte l'element de la primera fila i última columna que val 1, les matrius*

$$X_{ij} \in M_{\gamma_i,\gamma_j}(\mathbb{C})\,, \quad Y_{ij} \in M_{\beta_i,\beta_j}(\mathbb{C})\,, \ i \ Z_{ij} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C})\,,$$

són solucions del sistema

1.I $\quad A_i^* Z_{ij} - Z_{ij} B_j^* = 0.$

2.I $\quad A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = Z_{ij} C_{jj}^*.$

3.I $\quad Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = C_{ii}^* Z_{ij}.$

quan:

a) Si $\gamma_i \leq \gamma_j \quad o \quad \beta_i \geq \beta_j$*, sempre que*

- $Z_{ij} = 0.$
- X_{ij} *i* Y_{ij} *són TSB-matrius.*

b) Si $\gamma_i > \gamma_j \quad i \quad \beta_i < \beta_j$*, sempre que*

- $Z_{ij} = (z_{h,\ell})$ *és una TSB-matriu amb*

  $z_{h,\ell} = 0$ *si* $h > \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i).$

- $X_{ij} = (x_{h,\ell})$ *és una B-matriu amb*

  $x_{h+1,1} = z_{h,\beta_j}$ *si* $0 < h \leq \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i)$

  $x_{h+1,1} = 0$ *si* $\min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i) < h < \gamma_i$

- $Y_{ij} = (y_{h,\ell})$ *és una B-matriu amb*

  $y_{\beta_i,\beta_j - h} = z_{h,\beta_j}$ *si* $0 < h \leq \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i)$

  $y_{\beta_i,\beta_j - h} = 0$ *si* $\min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i) < h < \beta_j$

Observació. Notem que en el cas b) això vol dir que

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} x_{\gamma_j,\gamma_j} & \dots & x_{2,\gamma_j} & x_{1,\gamma_j} \\ z_{1,\beta_j} & \ddots & \ddots & x_{2,\gamma_j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z_{\mu,\beta_j} & \ddots & \ddots & x_{\gamma_j,\gamma_j} \\ 0 & \ddots & \ddots & z_{1,\beta_j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z_{\mu,\beta_j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \gamma_i - \gamma_j - \mu \end{matrix}$$

on $\mu = \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i)$

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{\beta_j-\beta_i-\mu} & z_{\mu,\beta_j} & \dots & z_{1,\beta_j} & y_{\beta_i,\beta_j} & \dots & y_{2,\beta_j} & y_{1,\beta_j} \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & y_{2,\beta_j} \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots & 0 & z_{\mu,\beta_j} & \dots & z_{1,\beta_j} & y_{\beta_i,\beta_j} \end{bmatrix}$$

Per tant, la solució del sistema, en aquests casos, té els graus de llibertat següents:

a) $\gamma_i + \beta_j$.

b) $\min(\gamma_i + \beta_i,\ \gamma_j + \beta_j)$.

o, en general,

$$\min(\gamma_i + \beta_j,\ \gamma_i + \beta_i,\ \gamma_j + \beta_j)\,.$$

Demostració. Segons el lema 4.3.6, Z_{ij} és solució de (1) si és una TSB-matriu. La resta d'equacions del sistema, es converteixen en

$$\text{(2.I)} \qquad \begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,\gamma_j} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{\gamma_i,1} & x_{\gamma_i,2} & \dots & x_{\gamma_i,\gamma_j} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1,\beta_j} & x_{1,1} & \dots & x_{1,\gamma_j-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{\gamma_i,\beta_j} & x_{\gamma_i,1} & \dots & x_{\gamma_i,\gamma_j-1} \end{bmatrix}$$

$$(3.\mathrm{I}) \qquad \begin{bmatrix} 0 & y_{1,1} & \dots & y_{1,\beta_j-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & y_{\beta_i,1} & \dots & y_{\beta_i,\beta_j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,1} & \dots & \dots & y_{2,\beta_j} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{\beta_i,1} & \dots & \dots & y_{\beta_i,\beta_j} \\ z_{1,1} & \dots & \dots & z_{1,\beta_j} \end{bmatrix}$$

on, per ser Z_{ij} una TSB-matriu, tenim

$$\begin{cases} z_{1,\beta_j-h+1} = z_{h,\beta_j} \\ z_{h,\beta_j} = 0 \quad \text{si} \quad h > \min(\gamma_i, \beta_j) \end{cases}$$

Aquestes equacions matricials es converteixen en

$$(2.\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x_{h,\ell} = x_{h+1,\ell+1} & \\ x_{\gamma_i,\ell} = 0 & \text{si} \quad 1 \le \ell < \gamma_j \\ x_{h+1,1} = z_{h,\beta_j} & \text{si} \quad 1 \le h < \gamma_i \\ z_{\gamma_i,\beta_j} = 0 & \end{cases}$$

$$(3.\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} y_{h,\ell} = y_{h+1,\ell+1} & \\ y_{h,1} = 0 & \text{si} \quad 1 < h \le \beta_i \\ y_{\beta_i,\ell} = z_{1,\ell+1} & \text{si} \quad 1 \le \ell < \beta_j \\ z_{1,1} = 0 & \end{cases}$$

Les dues primeres equacions de cada grup ens diuen que X_{ij} i Y_{ij} són B-matrius.

Distingim dos casos:

a) Si $\gamma_i \le \gamma_j$ ($\beta_i \ge \beta_j$), la segona equació del primer (segon) grup ens diu que X_{ij} (Y_{ij}) és TSB-matriu. En aquest cas, la tercera i la quarta equacions del primer (segon) grup ens diuen que l'última (primera) columna (fila) de Z_{ij} és nul·la i, per ser TSB-matriu, $Z_{ij} = 0$. Llavors, la tercera equació del segon (primer) grup ens diu que Y_{ij} (X_{ij}) és TSB-matriu, si $\beta_i < \beta_j$ ($\gamma_i > \gamma_j$).

b) Si $\gamma_i > \gamma_j$ i $\beta_i < \beta_j$, i usant que X_{ij} i Y_{ij} són B-matrius, les segones equacions de cada grup es poden posar

$$\begin{cases} x_{h+1,1} = 0 & \text{si} \quad \gamma_i - \gamma_j < h < \gamma_i \\ y_{\beta_i,\beta_j-h} = 0 & \text{si} \quad \beta_j - \beta_i < h < \beta_j \end{cases}$$

Si les combinem amb les terceres i quartes resulta, a més,

$$\begin{cases} z_{h,\beta_j} = 0 & \text{si} \quad \gamma_i - \gamma_j < h \leq \gamma_i \\ z_{1,\beta_j-h+1} = 0 & \text{si} \quad \beta_j - \beta_i < h \leq \beta_j \end{cases}$$

que diu que Z_{ij} és una TSB-matriu amb

$$z_{h,\beta_j} = 0 \quad \text{si} \quad h > \min(\gamma_i - \gamma_j,\, \beta_j - \beta_i)$$

i

$$\begin{cases} x_{h+1,1} = z_{h,\beta_j} & \text{si} \quad 1 \leq h \leq \gamma_i - \gamma_j \\ y_{\beta_i,\beta_j-h} = z_{1,\beta_j-h+1} & \text{si} \quad 1 \leq h \leq \beta_j - \beta_i \end{cases}$$

d'on resulta trivialment la proposició. ■

Enunciem sense demostració les resolucions dels altres tres casos, ja que els raonaments són els mateixos que en la proposició anterior i els sistemes són més senzills.

Proposició 4.3.10 (Cas II) *Si A_i, A_j, B_i, B_j són matrius quadrades nilpotents amb anul·lador de grau màxim γ_i, γ_j, β_i, β_j respectivament, en forma de Jordan i $C_{jj} \in M_{\gamma_j,\beta_j}(\mathbb{C})$ una matriu amb tots els elements nuls excepte l'element de la primera fila i última columna que val 1, les matrius*

$$X_{ij} \in M_{\gamma_i,\gamma_j}(\mathbb{C})\,, \quad Y_{ij} \in M_{\beta_i,\beta_j}(\mathbb{C})\,, \ i \ Z_{ij} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C})\,,$$

són solucions del sistema

1.II $\quad A_i^* Z_{ij} - Z_{ij} B_j^* = 0.$

2.II $\quad A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = Z_{ij} C_{jj}^*.$

3.II $\quad Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = 0.$

quan:

a) Si $\gamma_i \leq \gamma_j$, sempre que

- $Z_{ij} = 0.$

- *X_{ij} i Y_{ij} són TSB-matrius.*

b) Si $\gamma_i > \gamma_j$, sempre que

- *$Z_{ij} = (z_{h,\ell})$ és una TSB-matriu amb*

$$z_{h,\ell} = 0 \text{ si } h > \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j).$$

- *$X_{ij} = (x_{h,\ell})$ és una B-matriu amb*

$$x_{h+1,1} = z_{h,\beta_j} \text{ si } 0 < h \leq \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j)$$
$$x_{h+1,1} = 0 \text{ si } \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j) < h < \gamma_i.$$

- *Y_{ij} és una TSB-matriu.*

Proposició 4.3.11 (Cas III) *Si A_i, A_j, B_i, B_j són matrius quadrades nilpotents amb anul·lador de grau màxim γ_i, γ_j, β_i, β_j respectivament, en forma de Jordan i $C_{ii} \in M_{\gamma_i,\beta_i}(\mathbb{C})$ una matriu amb tots els elements nuls excepte l'element de la primera fila i última columna, que val 1, les matrius*

$$X_{ij} \in M_{\gamma_i,\gamma_j}(\mathbb{C}), \quad Y_{ij} \in M_{\beta_i,\beta_j}(\mathbb{C}), \text{ i } Z_{ij} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C}),$$

són solucions del sistema

1.III $\quad A_i^* Z_{ij} - Z_{ij} B_j^* = 0.$

2.III $\quad A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = 0.$

3.III $\quad Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = C_{ii}^* Z_{ij}.$

quan:

a) Si $\beta_j \leq \beta_i$, sempre que

- *$Z_{ij} = 0.$*
- *X_{ij} i Y_{ij} són TSB-matrius.*

b) Si $\beta_j > \beta_i$, sempre que

- *$Z_{ij} = (z_{h,\ell})$ és una TSB-matriu amb*

$z_{h,\ell} = 0$ *si* $h > \min(\gamma_i, \beta_j - \beta_i)$.

- X_{ij} *és una TSB-matriu.*
- $Y_{ij} = (y_{h,\ell})$ *és una B-matriu*

$y_{\beta_i,\beta_j-h} = z_{h,\beta_j}$ *si* $0 < h \leq \min(\gamma_i, \beta_j - \beta_i)$

$y_{\beta_i,\beta_j-h} = 0$ *si* $\min(\gamma_i, \beta_j - \beta_i) < h < \beta_j$.

Proposició 4.3.12 (Cas IV) *Si* A_i, A_j, B_i, B_j *són matrius quadrades nilpotents amb anul·lador de grau màxim* γ_i, γ_j, β_i, β_j *respectivament, en forma de Jordan, les matrius*

$$X_{ij} \in M_{\gamma_i,\gamma_j}(\mathbb{C}), \quad Y_{ij} \in M_{\beta_i,\beta_j}(\mathbb{C}), \ i \ Z_{ij} \in M_{\gamma_i,\beta_j}(\mathbb{C}),$$

són solucions del sistema

1.IV $A_i^* Z_{ij} - Z_{ij} B_j^* = 0.$

2.IV $A_i^* X_{ij} - X_{ij} A_j^* = 0.$

3.IV $Y_{ij} B_j^* - B_i^* Y_{ij} = 0.$

Quan X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} *siguin TSB-matrius.*

Podem resumir les proposicions anteriors en el teorema següent:

Teorema 4.3.13 (Primera deformació miniversal) *Sigui* $a \in \mathcal{M}$ *marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus* $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$. *Una deformació miniversal en aquest punt és l'aplicació* φ *tal que* $\varphi(x) = a + x$ *amb la matriu* $x = \begin{pmatrix} X & Z \\ O & Y \end{pmatrix}$, *que compleix les condicions següents:*

I) $1 \leq i, j \leq p$

a) Si $\gamma_i \leq \gamma_j$ *o* $\beta_i \geq \beta_j$

$Z_{ij} = 0$

X_{ij}, Y_{ij} *TSB-matrius.*

b) Si $\gamma_i > \gamma_j$ *i* $\beta_i < \beta_j$

Z_{ij} *TSB-matriu amb* $\text{rank}\,(Z_{ij}) \leq \min(\gamma_i - \gamma_j,\, \beta_j - \beta_i) = \mu_{ij}$.

X_{ij} *B-matriu amb* $\text{rank}\,(X_{ij}) \leq \gamma_j + \mu_{ij}$ *i les bandes* $\gamma_j + 1, \ldots, \gamma_j + \mu_{ij}$ *iguals a les bandes* $1, \ldots, \mu_{ij}$ *de* Z_{ij}.

Y_{ij} *B-matriu amb* $\text{rank}\,(Y_{ij}) \leq \min(\beta_i, \beta_j) + \mu_{ij}$ *i les bandes* $\beta_i + 1, \ldots, \beta_i + \mu_{ij}$ *iguals a les bandes* $1, \ldots, \mu_{ij}$ *de* Z_{ij}.

II) $i > p$, $j \leq p$

a) Si $\gamma_i \leq \gamma_j$

$Z_{ij} = 0$

X_{ij}, Y_{ij} *TSB-matrius.*

b) Si $\gamma_i > \gamma_j$

Z_{ij} *TSB-matriu amb* $\text{rank}\,(Z_{ij}) \leq \min(\gamma_i - \gamma_j,\, \beta_j) = \delta_{ij}$.

X_{ij} *B-matriu amb* $\text{rank}\,(X_{ij}) \leq \gamma_j + \delta_{ij}$ *i les bandes* $\gamma_j + 1, \ldots, \gamma_j + \delta_{ij}$ *iguals a les bandes* $1, \ldots, \delta_{ij}$ *de* Z_{ij}.

Y_{ij} *TSB-matriu.*

III) $i \leq p$, $j > p$

a) Si $\beta_i \geq \beta_j$

$Z_{ij} = 0$

X_{ij}, Y_{ij} *TSB-matrius.*

b) Si $\beta_i < \beta_j$

Z_{ij} *TSB-matriu amb* $\text{rank}\,(Z_{ij}) \leq \min(\gamma_i, \beta_j - \beta_i) = \varepsilon_{ij}$.

X_{ij} *TSB-matriu.*

Y_{ij} *B-matriu amb* $\text{rank}\,(Y_{ij}) \leq \beta_i + \varepsilon_{ij}$ *i les bandes* $\beta_i + 1, \ldots, \beta_i + \varepsilon_{ij}$ *iguals a les bandes* $1, \ldots, \varepsilon_{ij}$ *de* Z_{ij}.

IV) $i, j > p$

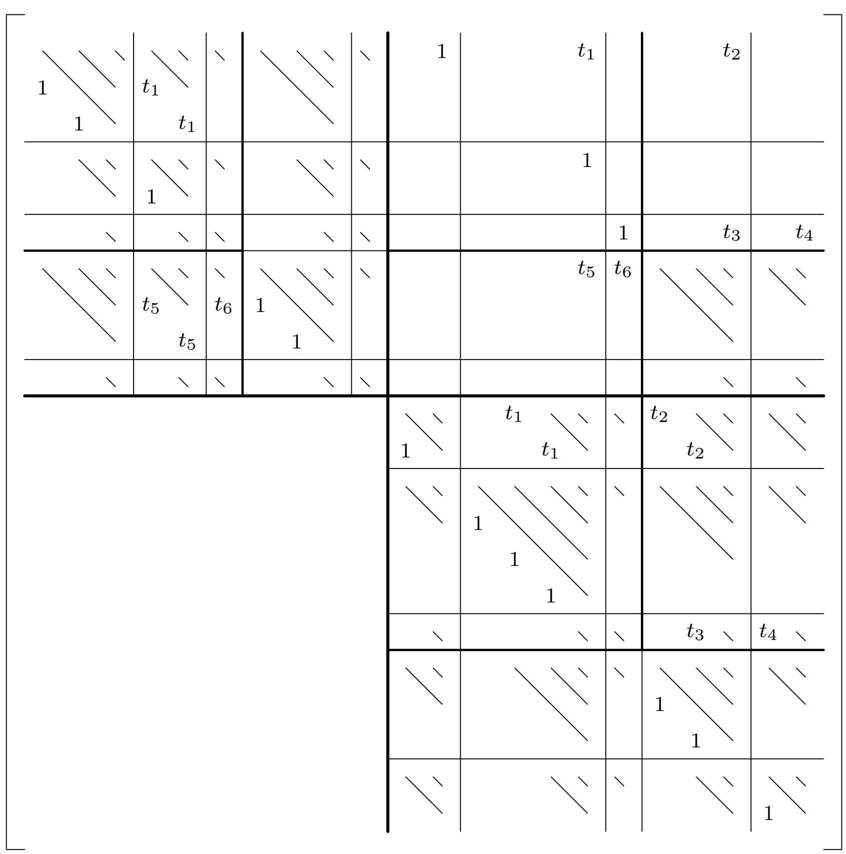
$X_{ij},\ Y_{ij},\ Z_{ij}$ *TSB-matrius.*

Com que el nombre de paràmetres d'una deformació miniversal és la dimensió de l'ortogonal a l'espai tangent a l'órbita en el punt $a \in \mathcal{M}$, podem enunciar el corol·lari següent.

Corol·lari 4.3.14 *Sigui $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$. La codimensió de l'órbita en $a \in \mathcal{M}$ és:*

$$\begin{aligned} &codim\mathcal{O}_a = \\ &= \sum_{1\le i,j\le r} \min(\gamma_i, \gamma_j) + \sum_{1\le i,j\le s} \min(\beta_i, \beta_j) + \sum_{1\le i,j\le p} \max[0,\ \min(\gamma_i - \gamma_j,\ \beta_j - \beta_i)] + \\ &+ \sum_{\substack{p<i\le r\\ 1\le j\le p}} \max[0,\ \min(\gamma_i - \gamma_j,\ \beta_j)] + \sum_{\substack{1\le i\le p\\ p<j\le s}} \max[0,\ \min(\gamma_i,\ \beta_j - \beta_i)] + \sum_{\substack{p<i\le r\\ p<j\le s}} \min(\gamma_i,\ \beta_j) \end{aligned}$$

Exemple 4.3.15 Si a és la matriu marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $((3,2,1,3,1),(2,4,1,3,2),3)$ de l'exemple 4.3.5, la matriu x serà:



on els paràmetres t_i són els que apareixen en més d'un bloc i les bandes indicades són les que poden ser no nul·les.

Obtinguem ara una deformació miniversal de $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica, en què els paràmetres surtin una sola vegada. Ho farem obtenint una base adequada d'un suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$.

Definició 4.3.16 *Donada $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica (vegeu la definició 4.3.4) definim*

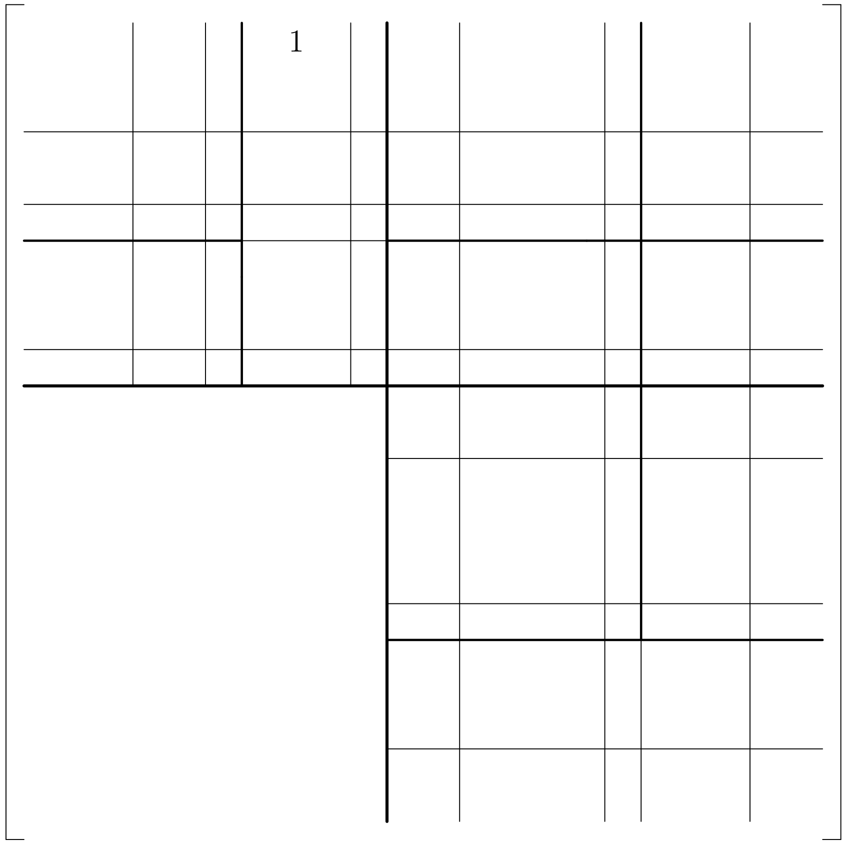
$$
\begin{array}{lll}
a_{ij}^k \in \mathcal{M} & 1 \leq i, j \leq r & 1 \leq k \leq \min(\gamma_i, \gamma_j) \\[2ex]
b_{ij}^k \in \mathcal{M} & 1 \leq i, j \leq s & 1 \leq k \leq \min(\beta_i, \beta_j) \\[2ex]
c_{ij}^k \in \mathcal{M} & 1 \leq i \leq r,\, 1 \leq j \leq s & 1 \leq k \leq \min(\gamma_i, \beta_j)
\end{array}
$$

com matrius que tenen blocs, de la mateixa mida que $a \in \mathcal{M}$, amb tots els elements nuls excepte un 1 en el bloc A_{ij}, B_{ij} o C_{ij} respectivament, situat a la primera fila, i columna k-èsima, començant a comptar les columnes des de la dreta.

Nota: Per concretar, si $D \in M_{q,t}(\mathbb{C})$ és el bloc no nul,

$$d_{1,t-k+1} = 1 \qquad \text{i la resta d'elements nuls.}$$

Exemple 4.3.17 Si a és la matriu marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $((3,2,1,3,1),(2,4,1,3,2),3)$ de l'exemple 4.3.5, la matriu $a_{1,4}^2$ és:



Per simplificar la notació, donada la matriu $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$, notem

$$
\begin{aligned}
\gamma' &= \sum_{1\le i,j\le r} \min(\gamma_i,\gamma_j)\\
\beta' &= \sum_{1\le i,j\le s} \min(\beta_i,\beta_j)\\
\mu &= \sum_{1\le i,j\le p} \max[0,\min(\gamma_i-\gamma_j,\beta_j-\beta_i)] + \sum_{\substack{p<i\le r\\ 1\le j\le p}} \max[0,\, \min(\gamma_i-\gamma_j,\, \beta_j)] +\\
&\qquad + \sum_{\substack{1\le i\le p\\ p<j\le s}} \max[0,\, \min(\gamma_i,\, \beta_j-\beta_i)] + \sum_{\substack{p<i\le r\\ p<j\le s}} \min(\gamma_i,\, \beta_j)
\end{aligned}
$$

de manera que, amb aquesta notació, $codim\mathcal{O}_a = \gamma' + \beta' + \mu$,

(a) $$\widehat{x} = (x_{ij}^k) \in \mathbb{C}^\gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \le i,j \le r \\ 1 \le k \le \min(\gamma_i,\gamma_j) \end{array} \right\}$$

(b) $$\widehat{y} = (y_{ij}^k) \in \mathbb{C}^\beta \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \le i,j \le s \\ 1 \le k \le \min(\beta_i,\beta_j) \end{array} \right\}$$

$$(c) \qquad \widehat{z} = (z_{ij}^k) \in \mathbb{C}^{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i,j \leq p\,, 0 < k \leq \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_j - \beta_i) \\ p < i \leq r\,, 1 \leq j \leq p\,, 0 < k \leq \min(\gamma_i - \gamma_j, \beta_i) \\ 1 < i \leq p\,, p < j \leq s\,, 0 < k \leq \min(\gamma_i, \beta_j - \beta_i) \\ p < i \leq r\,, p < j \leq s\,, 1 \leq k \leq \min(\gamma_i, \beta_j) \end{array} \right\}$$

Indiquem per S_a l'espai vectorial generat per les matrius a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k, on els índexs i, j, k varien en els conjunts (a), (b) i (c), respectivament.

Teorema 4.3.18 (Segona deformació miniversal) *Sigui $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica del tipus $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, p)$. Una deformació miniversal en aquest punt és l'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}^{\gamma'} \times \mathbb{C}^{\beta'} \times \mathbb{C}^{\mu} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) & \longmapsto & a + \sum\limits_{i,j,k} x_{ij}^k a_{ij}^k + \sum\limits_{i,j,k} y_{ij}^k b_{ij}^k + \sum\limits_{i,j,k} z_{ij}^k c_{ij}^k \end{array}$$

Demostració. Per construcció, el conjunt de les matrius $\{a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k\}_{i,j,k}$ és linealment independent i l'espai generat per aquestes matrius S_a té dimensió $\gamma' + \beta' + \mu$, que segons el corol·lari 4.3.14, és la de l'ortogonal de $T_a\mathcal{O}_a$. Per veure que és un suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$ n'hi ha prou a demostrar que la seva intersecció és el zero. Veurem que donat qualsevol element de S_a distint de zero, existeix un element de $(T_a\mathcal{O}_a)^{\perp}$ tal que el seu producte no és nul.

Sigui $x \in (T_a\mathcal{O}_a)^{\perp}$, llavors

$$\begin{array}{rcl} < x, a_{ij}^k > & = & \operatorname{tr} \left[X_{ij} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \right]_{\gamma_j - k + 1} = (X_{ij})_{1, \gamma_j - k + 1} \\ < x, b_{ij}^k > & = & (Y_{ij})_{1, \beta_j - k + 1} \\ < x, c_{ij}^k > & = & (Z_{ij})_{1, \beta_j - k + 1} \end{array}$$

En conseqüència, donat un element de S_a

$$v = \sum_{i,j,k} x_{ij}^k a_{ij}^k + \sum_{i,j,k} y_{ij}^k b_{ij}^k + \sum_{i,j,k} z_{ij}^k c_{ij}^k$$

Considerem un element $x = \left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline \mathbf{0} & Y \end{array}\right) \in (T_a\mathcal{O}_a)^\perp$, on

$$\begin{cases} (X_{ij})_{1,\gamma_j-k+1} = \overline{x_{ij}^k} \\ (Y_{ij})_{1,\beta_j-k+1} = \overline{y_{ij}^k} \\ (Z_{ij})_{1,\beta_j-k+1} = \overline{z_{ij}^k} \end{cases}$$

amb els índexs variant dins dels respectius conjunts (a), (b) i (c).

Llavors,

$$< v, x >= \sum_{i,j,k} |x_{ij}^k|^2 + \sum_{i,j,k} |y_{ij}^k|^2 + \sum_{i,j,k} |z_{ij}^k|^2$$

i

$$< v, x >= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0\,.$$

Per tant, hem demostrat que S_a és un suplementari de $T_a\mathcal{O}_a$. ∎

Exemple 4.3.19 En l'exemple (4.3.15) la nova deformació miniversal és

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc|c|ccc|c|cc|cccc|c|ccc|cc}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & & 1 & & & & * & & & & * & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & * & * & * & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & * & & * & * & & & * & * & & & & & & & 1 & & & * & & * \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & & & & & & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & * & & * & * & & & * & * & & & & & & & & & & * & & * \\
\hline
 & & & & & & & & & & * & * & & & * & * & * & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & & * & & & & * & * & & & * & & * \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & * & * & & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
\cline{11-22}
 & & & & & & & & & & * & * & & & * & * & * & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 &
\end{array}\right]
$$

4.4 Relació amb el problema de Carlson

Les deformacions que mantenen fixes les característiques de Segre del subespai i del quocient, resulta que, segons el teorema d'Arnold [1], són exactament les que tenen nuls els paràmetres dels blocs corresponents al subespai i al quocient:

Proposició 4.4.1 *Sigui $a \in \mathcal{M}$ marcada, nilpotent i en forma canònica. Una representació local de les matrius pròximes a la donada que conserven les característiques de Segre del subespai i del quocient està formada per les matrius del teorema 4.3.18 amb $X = 0$ i $Y = 0$.*

En particular, es dedueix immediatament la següent caracterització de les matrius marcades "estructuralment estables respecte al problema de Carlson". És a dir, aquelles per a les quals totes les d'un cert entorn que conservin les característiques de Segre del subespai i del quocient són equivalents a ella mateixa.

Corol·lari 4.4.2 *Si considerem les deformacions de les matrius nilpotents marcades que mantenen fixes les característiques de Segre del subespai i del quocient, són estables per aquestes deformacions les que compleixen:*

(i) $p = min(r, s)$.

(ii) $\gamma_i \geq \gamma_{i+1}$.

(iii) $\beta_i \geq \beta_{i+1}$.

Més en general, anem a veure (4.4.4) que a partir de la deformació miniversal (4.3.18), podem trobar una representació de les solucions al problema de Carlson per a una parella (β^*, γ^*) que millora el conegut "lema de condensació". Concretament, ho farem a través de la deformació miniversal de la terna $(\beta^* + \gamma^*, \beta^*, \gamma^*)$. Observeu (vegeu la definició de suma de particions (1.2.3) que aquesta terna és la solució trivial de Carlson per a la parella (β^*, γ^*), sent la seva realització matricial marcada del tipus $(\gamma, \beta, 0)$, és a dir, amb el bloc $C = 0$.

En primer lloc, remarquem que, donades les característiques de Segre (β^*, γ^*) del quocient i del subespai, hi ha representants de totes les seves realitzacions marcades en qualsevol entorn de de la matriu marcada del tipus $(\gamma, \beta, 0)$

Proposició 4.4.3 *En qualsevol entorn de la realització marcada de la terna de particions de Weyr* $(\beta^* + \gamma^*, \beta^*, \gamma^*)$ *hi ha totes les realitzacions marcades possibles de la parella* (β^*, γ^*).

Demostració. En la deformació miniversal del teorema 4.3.18 fem nuls tots els coeficients excepte alguns z^1_{ij} de forma que per a cada i i per a cada j n'hi hagi com a màxim un de sol no nul. ■

Com que pel corol·lari 3.3.11 sabem que s'obtenen realitzacions matricials de totes les ternes Carlson compatibles $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ en els entorns de les realitzacions marcades de la parella (β^*, γ^*), podem concloure:

Teorema 4.4.4 *Si en la deformació miniversal de la realització marcada de la terna* $(\beta^* + \gamma^*, \beta^*, \gamma^*)$ *considerem tots els valors possibles dels paràmetres* $(X = 0, Y = 0)$

que no modifiquin la parella (β^*, γ^*) tindrem representants de totes les realitzacions matricials possibles de la parella (β^*, γ^*).

Exemple 4.4.5 Donades les particions de Segre de l'exemple 4.3.5, que són $\beta = (4, 3, 2, 2, 1)$ i $\gamma = (3, 3, 2, 1, 1)$, ordenades en forma decreixent, tenim que la característica de Segre conjugada de $\beta^* + \gamma^*$ és la que s'obté unint les dues particions anteriors $(4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

La família de deformacions que no modifica la parella (β^*, γ^*) i que conté realitzacions matricials de totes les LR-succcessions amb aquesta parella és:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c|ccc|c|cc|cccc|c|ccc|cc}
&&&&&&&&&&*&*&&*&*&*&*&*&*&*&*&* \\
1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&*&*&&&*&*&*&&*&*&*&* \\
&&&1&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&*&&&&*&&&&*&&* \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&*&*&*&*&*&*&*&*&* \\
&&&&&&1&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&*&&&&*&*&&&*&&* \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&1&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&&& \\
\hline
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&
\end{array}\right]$$

(Hem mantingut el mateix ordre de blocs que en l'exemple 4.3.5)

Observació 4.4.6 *L'exemple anterior palesa que el teorema 4.4.4 millora el conegut "lema de condensació", ja que permet reduir considerablement el nombre de paràmetres.*

Exemple 4.4.7 Les matrius marcades nilpotents de $M_6(\mathbb{C})$ tals que la característica de Segre del subespai i del quocient sigui $(2, 1)$ són:

p	γ	β	conjugada de Segre
0	(2,1)	(2,1)	(4,2)
1	(2,1)	(2,1)	(3,1,1,1)
1	(2,1)	(1,2)	(3,2,1)
1	(1,2)	(2,1)	(3,2,1)
1	(1,2)	(1,2)	(3,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,2,1,1)
2	(2,1)	(1,2)	(2,2,2)

Si deformem el primer cas, que és el que correspon a la suma directa de dos subespais invariants, respectant les característiques de Segre dels dos subespais obtenim:

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 0 & 0 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & t & u \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que segons els diferents valors dels paràmetres dóna les característiques de Segre següents:

conjugada de Segre	$yu - zt$	y	x	zt	z	t	u
(2,2,1,1)	$\neq 0$	$\neq 0$					
(2,2,2)	$\neq 0$	0					
(3,1,1,1)	0	$\neq 0$					
(3,2,1)	0	0	$\neq 0$	0	(*)		
(3,2,1)	0	0	0	0	(**)		
(3,3)	0	0	0	0	0	0	$\neq 0$
(4,1,1)	0	0	$\neq 0$	0	0	0	0
(4,2)	0	0	0	0	0	0	0

(*) $z \neq 0$ o $t \neq 0$ o $u \neq 0$.

(**) $z \neq 0$ o $t \neq 0$.

Que realitzen, respectivament, les 8 LR-successions possibles que combinen les particions (2,1) i (2,1) donades:

(2,1)	(2,2,1)	(2,2,1,1)
(2,1)	(2,2,1)	(2,2,2)
(2,1)	(3,1,1)	(3,1,1,1)
(2,1)	(3,2)	(3,2,1)
(2,1)	(3,1,1)	(3,2,1)
(2,1)	(3,2)	(3,3)
(2,1)	(4,1)	(4,1,1)
(2,1)	(4,1)	(4,2)

Observeu que, en aquest cas, la setena LR-successió mai no pot tenir una realització marcada.

Bibliografia

[1] V.I. Arnold, *On Matrices Depending on Parameters*, Uspekhi Mat. Nauk., 26 (1971), p. 101–114.

[2] I. Baragaña; I. Zaballa, *Block Similarity Invariants of Restrictions to* (A, B)*-invariants Subspaces*, Linear Algebra Appl., 220 (1995), p. 31–62.

[3] I. Baragaña; I. Zaballa, *Feedback Invariants of Supplementary Pairs of Matrices*, Automatica, 33, n. 12 (1997), p. 2119–2130.

[4] I. Baragaña; I. Zaballa, *Feedback Invariants of Restrictions and Quotients: Series Connected Systems*, Preprint (1998).

[5] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre II of Algèbre, Hermann, París, 1964.

[6] R. Bru; L. Rodman; H. Schneider, *Extensions of Jordan Bases for Invariant Subspaces of a Matrix.* Linear Algebra Appl., 150 (1991), p. 209–225.

[7] A. Compta; J. Ferrer, *On* $(A, B)^t$*-invariant Subspaces Having Extendible Brunovsky Bases*, Linear Algebra Appl., 255 (1997), p. 185–201.

[8] A. Compta; X. Puerta, *An Alternative Geometric Characterization of Marked Subspaces*, Actas de EAMA 97 (Encuentros de Análisis Matricial y Aplicaciones) Sevilla.

[9] A. Compta; J. Ferrer, *A Geometric Approach to the Carlson Problem*, SIAM Journal on Matrix Analysis Appl. Vol. 22, n. 1(2000), p. 258-275.

[10] A. Compta; J. Ferrer, *Matricial Realizations of the Solutions of the Carlson Problem*,Preprint (2001)

[11] J. Ferrer; M.I. García; F. Puerta, *Brunovsky Local Form of a Holomorphic Family of Pais of Matrices*, Linear Algebra Appl., 253 (1997), p. 175–198.

[12] J. Ferrer; M.I. García; F. Puerta, *Differentiable Families of Subspaces*, Linear Algebra Appl., 199 (1994), p. 229–252.

[13] J. Ferrer; F. Puerta, *Similarity of Non-everywhere Defined Linear Maps*, Linear Algebra and Appl., 150 (1992), p. 27–55.

[14] J. Ferrer; F. Puerta; X. Puerta, *Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces*, Linear Algebra Appl., 235 (1996), . 15–34.

[15] W. Fulton, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices (after A. Klyachko)*, Séminaire Bourbaki, vol. 1997/8, Astérisque n. 252 (1998), Exp. n. 845, 5, p. 225–269.

[16] W. Fulton, *Eigenvalues, Invariant factors, Highest Weights, and Schubert Calculus*, Bulletin of The Amer. Math. Soc., vol. 37 n. 3 (2000), p. 209–249.

[17] I. García Planas, *Estudio geométrico de familias diferenciables de matrices*, tesi doctoral. UPC, 1994.

[18] W.H. Greub, *Linear Algebra.* Sringer-Verlag, Nova York (1967).

[19] I. Gohberg; M.A. Kaashoek, *Unsolved Problems in Matrix and Operator Theory II. Partial Multiplicities for Products*, Integral Equations and Operator Theory, vol. 2 /1 (1979), p. 116–120.

[20] I. Gohberg; P. Lancaster; L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications.* Wiley, Nova York (1986).

[21] I. Gohberg; M.A. Kaashoek; F. van Schagen, *Partially Specified Matrices and Operators: Classification, Completion, Applications*, 0T 79, Birkhäuser Verlag, Basilea, 1995.

[22] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1981.

[23] T. Klein, *The Multiplication of Schur Functions and Extensions of p-modules*, Journal London Math. Soc., 43 (1968), p. 280–284.

[24] A.A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math., 4 (1998), p. 419–445.

[25] A. Knutson; T. Tao, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: Proof of the saturation conjecture*, Journal of The Amer. Math. Soc., vol. 12 n. 4 (1999), p. 1055–1090.

[26] X. Puerta *Contribucions a l'estudi geomètric de sistemes lineals multivariables*, tesi doctoral. UPC, 1998.

[27] A. Tannenbaum, *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, LNM, n. 845, Springer, 1981.

[28] R.C. Thompson, *Smith Invariants of a Product of Integral Matrices*, Contemporary Mathematics. AMS, vol. 47 (1985), p. 401–435.

[29] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman, Nova York, 1971.

[30] J.C. Willems, *Topological Classification and Structural Stability of Linear Systems*, Journal of Differential Equations, vol. 35 (1980), p. 306–318.

[31] W.M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer, Nova York, 1979.