

24 -303

56

57

58

## Técnicas de detección adaptativa con tasa de falsa alarma constante

Antoni ELIAS FUSTÉ,  
Doctor Ingeniero de Telecomunicación,  
y Jordi PUGA ANTEQUERA,  
Ingeniero de Telecomunicación,

### Abstract

*Radar detection procedures involve the comparison of the received signal amplitude to a threshold. In order to obtain a constant false alarm rate (CFAR), an adaptive threshold must be applied reflecting the local clutter situation. This paper discusses the cell averaging and ordered statistic approaches for single receivers and presents a recursive formulation of an algorithm that permits for a system formed by  $N$  different CFAR detectors and a fixed level of false alarm in the data fusion center, to test the different intermediate fusion rules between the OR and AND rules, rules of rank  $K$ , with  $1 \leq K \leq N$ , to obtain the rank  $K$  that maximizes the detection probability in the fusion center. The threshold values  $T_i$  of each CFAR detector, are calculated as a function of the probability of false alarm and decision rule (rank  $K$ ) used in the fusion center. The algorithm also permits us to consider the receivers as a function of their quality or of the quality of the channel that connects them to the fusion center. The performances of the different procedures are shown in several figures.*

## 1. Introducción

En los sistemas modernos de radar, equipados con circuitos automáticos de detección, el uso de las técnicas CFAR (Constant False Alarm Ratio) resulta imprescindible si pretendemos mantener prácticamente constante el nivel de falsas alarmas en el proceso de detección en un entorno *a priori* desconocido i variante, tanto espacial como temporalmente.

Se denomina detección al proceso por el cual se pone de manifiesto la existencia de señal útil o eco, en una zona determinada del espacio y en un tiempo también determinado, en presencia de numerosas señales interferentes, ruido térmico (siempre presente en todos los dispositivos físicos), «clutter» (interferencia del entorno, ecos no deseados, tierra, mar, lluvia, etc.), ECM (Contramedidas electrónicas, jammer, chaff, etc.), señales procedentes de lóbulos secundarios de radares vecinos, etc. Procesos todos ellos de naturaleza aleatoria y que por tanto sólo pueden ser caracterizados estadísticamente y cuyo tratamiento deberá realizarse forzosamente con herramientas estadísticas, confiriendo este carácter a toda la problemática de la detección que en general consistirá en poner de manifiesto la existencia de una señal aleatoria dentro de un proceso interferente de la misma naturaleza.

En este artículo presentamos una visión general de la teoría de la detección radar, analizando los detectores por umbral adaptativo de uso más generalizado dentro de la familia de los detectores CFAR paramétricos; «Cell Averaging Constant False Alarm Rate» o CFAR Promediador, CAGO CFAR (Cell Averaging Greatest Of) o CFAR Promediador el Mayor De, CAGO CFAR (Cell Averaging Smallest Of) o CFAR Promediador el Menor De, OS CFAR (Ordered Statistic) o CFAR de Estadísticos Ordenados, OSGO CFAR (Ordered Statistic Greatest Of) o CFAR de Estadísticos Ordenados el Mayor De, OSSO CFAR (Ordered Statistic Smallest Of) o CFAR de Estadísticos Ordenados el Menor De. Posteriormente se comparan sus prestaciones ante un protocolo concreto de pruebas, y finalmente se presenta el análisis de un Centro de Fusión de Datos para varios receptores distintos pero homogéneos conectados en paralelo.

## 2. El proceso de detección

Supuesta la naturaleza aleatoria de la señal útil así como de la señal interferente, definimos dos hipótesis para cada celda de resolución radar:

$$\begin{aligned} H_0: & \text{Ausencia de blanco.} \\ H_1: & \text{Presencia de blanco.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las funciones de densidad de probabilidad características del tipo de señal existente en una celda de resolución serán:

$f_x(x|H_0)$  = Función densidad de probabilidad en ausencia de blanco.

$f_x(x|H_1)$  = Función densidad de probabilidad en presencia de blanco.

Un tratamiento estadístico de estas funciones [1], nos da las siguientes probabilidades de detección, falsa alarma y pérdida:

$$P_d = \int_C^{\infty} f_x(x|H_1) dx = 1 - P_m \quad (2.2)$$

$$P_{fa} = \int_C^{\infty} f_x(x|H_0) dx \quad (2.3)$$

$$P_m = \int_{-\infty}^C f_x(x|H_1) dx = 1 - P_d \quad (2.4)$$

expresiones en las cuales

$P_d$  es la Probabilidad de Detección.

$P_{fa}$  es la Probabilidad de Falsa Alarma.

$P_m$  es la Probabilidad de tener una pérdida (miss).

$C$  es el valor del umbral de detección.

Una representación gráfica de estas probabilidades para un caso concreto con  $f_x(x|H_0)$  del tipo Rayleigh (ruido gaussiano detectado por envolvente) y  $f_x(x|H_1)$  del tipo Rice (blanco representado por un componente determinista sinusoidal y una componente aleatoria del tipo gaussiano después de una detección por envolvente) se encuentra en la figura 2-1.

Da una colección de muestras  $X$  (con  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ ) pertenecientes al espacio de observación  $\gamma$  dividido en dos regiones  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , correspondientes a los subespacios de los sucesos  $H_0$  y  $H_1$  res-

pectivamente, por el criterio de máxima verosimilitud, se decidirá H1 si esta hipótesis es más probable para dicha colección que la hipótesis alternativa H0. Escrito matemáticamente el test a desarrollar es:

$$p(X|H_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} p(X|H_1) \quad (2.5)$$

o lo que es lo mismo observar la razón de máxima verosimilitud (maximum likelihood ratio) (2.6).

$$\Lambda(X) = \frac{p(X|H_1)}{p(X|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 1 \quad (2.6)$$

La razón  $\Lambda(X)$  se compara con un umbral de decisión C y se opta por H1 o H0 según se exceda o no dicho umbral. Para la determinación del mencionado umbral C se pueden tomar dos criterios, el de Bayes o de máxima probabilidad *a posteriori*, y el de Neyman-Pearson. En el primero, la elección del umbral C depende de los costes o ponderaciones estimadas para cada decisión basados en el conocimiento *a posteriori* de las probabilidades de cada hipótesis, esta optimización es muy usada en los detectores de los equipos de transmisión de datos y en general en todos los sistemas de telecomunicación, con este criterio se consigue optimizar la relación entre la probabilidad de detección con respecto a la de falsa alarma. Sin embargo, en los sistemas de radiolocalización (radar) resulta preferible acotar la probabilidad de falsa alarma a un valor determinado  $\gamma$ , con lo cual la probabilidad de detección debe de ser maximizada bajo esta restricción (problema típico de multiplicadores de Lagrange) obteniéndose el valor del umbral de detección C, éste es el criterio de Neyman-Pearson que formulado matemáticamente como un problema de multiplicadores de Lagrange queda:

$$P_{fa} = \gamma \quad (2.7)$$

Al maximizar una función (pd) bajo la restricción impuesta por otra función (pfa), la derivada o gradiente de la primera será en cada punto perpendicular a la misma, en particular en el punto don-

de la función a maximizar y la función de restricción sean tangentes, los gradientes de ambas serán paralelos, es decir, diferirán sólo en una constante (el multiplicador de Lagrange), esto permite escribir la siguiente relación donde se maximiza una función objetiva que en este caso llamamos G.

$$G = P_d + \beta (\gamma - P_{fa}(C)) \quad (2.8)$$

donde  $\beta$  es el multiplicador de Lagrange.

$$G = \int_C^\infty f_x(x|H_1) dx + \beta \cdot \int_C^\infty f_x(x|H_0) dx + \gamma \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -f_x(C|H_1) + \beta \cdot f_x(C|H_0) = 0 \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{f_x(C|H_1)}{f_x(C|H_0)} \quad \text{para máxima } P_d \quad (2.11)$$

O lo que es lo mismo:

$$\Gamma_1 = \left\{ X : [ p(X|H_1) - \beta p(X|H_0) ] > 0 \right\} \quad (2.12)$$

$$\Gamma_1 = \left\{ X : \Lambda(X) > \beta \right\} \quad (2.13)$$

$$\Gamma_0 = \left\{ X : \Lambda(X) < \beta \right\} \quad (2.14)$$

$$\text{con } \beta \text{ tal que } p(X \in \Gamma_1 | H_0) = \gamma \quad (2.15)$$

### 3. Los detectores CFAR

El subsistema de detección CFAR está basado en las técnicas de detección por umbral adaptativo no coherentes, su uso viene impuesto por la limitada supresión de interferencias que proporcionan los sistemas y técnicas coherentes, por ejemplo, los MTI. Existen dos técnicas de realización de la filosofía de la detección por umbral adaptativo (figura 3.1):

- Espacial, en la cual el umbral es estimado para cada celda de resolución a partir de los ecos de las celdas adyacentes.

- Temporal, en el que el umbral es estimado para cada celda de resolución por la ponderación de los diferentes valores tomados por la misma en tiempos precedentes.

El CFAR espacial resulta interesante cuando la interferencia es homogénea en alcance y doppler, mientras que el temporal suele usarse cuando la interferencia es inhomogénea [2].

Un entorno radar generalizado, comprende una serie de «scatters» o fuentes de clutter comprendidas entre los conjuntos de scatters continuos hasta los discretos con cualquier tipo de distribución, desde los prácticamente especulares a los difusos, etc. El clutter varía simultáneamente en tiempo (para una celda de resolución dada) y en espacio (distintas celdas de resolución en un instante determinado). Las distribuciones espaciales y temporales de clutter tienen generalmente distintas propiedades estadísticas y distintas relaciones con el tipo de señal que emplee el radar (frecuencia, polarización, etc.).

Los modelos matemáticos de los ecos de clutter incoherente, están basados en la función de densidad de probabilidad (pdf) y requieren para cada porción de entorno homogéneo determinado un análisis de la dependencia de la reflectividad versus polarización, ángulo de incidencia, frecuencia, etc.

La caracterización más simple para el clutter o interferencia, consiste en tomar una función de densidad de probabilidad (pdf) para el mismo de tipo Rayleigh, la cual aplica cuando consideramos un gran número de scatters para cada celda de resolución con una detección lineal o de envolvente, lo cual es equivalente a suponer para la señal de r.f. de los ecos una distribución gaussiana.

Otros modelos probabilísticos para el clutter son el Exponencial, Log-normal, Weibull, Log-Weibull, Distribución K, etc., sus fun-

ciones de densidad de probabilidad y algunas propiedades se describen en las figuras 3.2 a 3.7.

También resulta importante en la caracterización del clutter su distribución espectral, esta característica es de gran importancia cuando se procesa con técnicas CFAR las salidas de un MTD y su conocimiento y acotación no resulta nada simple, puesto que combina parámetros de radiofrecuencia del radar con características orográficas y meteorológicas del entorno [3]. Su estimación a partir de pocos datos (ecos), constituye el núcleo principal de la moderna «Teoría Avanzada de la Detección», la realización de detectores CFAR coherentes es actualmente un tema de investigación indicativo del estado del arte en esta materia, por lo que en resumen podemos decir que un estudio completo del clutter debería incluir la correlación de los modelos estadísticos y espectrales con las medidas efectuadas por un determinado radar para distintos entornos y distintas condiciones meteorológicas, lo que hace que en general el problema no pueda tratarse en toda su magnitud, limitando la gran variedad de entornos posibles a unas clases susceptibles de simularse por las funciones estadísticas anteriormente mencionadas y cuyo ajuste a los datos proporcionados por el radar tampoco resultan evidentes, requiriendo un gran esfuerzo de cálculo de ordenador y complicados algoritmos de simulación, algunos todavía no disponibles.

Respecto al dispositivo que realiza la detección, dos tipos de detectores pueden considerarse para la obtención de la señal vídeo en banda base: detectores coherentes y detectores cuadráticos o incoherentes. El ideal desde el punto de vista radioeléctrico es el detector lineal que nos proporciona amplitud y fase de la señal (detector coherente), sin embargo, desde el punto de vista de análisis, un detector de ley cuadrática que sólo nos proporciona el módulo al cuadrado (incoherente) simplifica enormemente los cálculos con un error despreciable caso de ser sustituido en el procesador por un detector lineal (coherente o no) [4], [5], en lo que a tratamiento del módulo de la señal se refiere. La anterior aserción nos permite considerar válidos todos los resultados de los análisis, independientemente del tipo de detector empleado, incluso cuando dentro del tratamiento digital de la señal, el detector de vídeo lineal se aproxima por la suma de las componentes en fase y cuadratura o cualquier algoritmo equivalente cuyo objetivo sea no aumentar excesivamente el número de operaciones del procesado, puesto que siempre estarán comprendidos entre estos dos casos extremos anteriormente mencionados, el detector lineal y el cuadrático.

Los procesadores CFAR pueden clasificarse de distintas formas atendiendo a las diferentes formas de actuación de los mismos:

a) Según el tipo de variación de la interferencia (clutter), los CFAR pueden ser:

- Temporales.
- Espaciales.

b) Atendiendo al conocimiento o no del tipo de interferencia, los CFAR espaciales se clasifican en:

- Paramétricos.
- No paramétricos.

Los primeros consideran conocido el tipo de estadística de la interferencia clutter calculando a partir de la estimación de las celdas vecinas a la celda bajo test los primeros momentos estadísticos que caracterizan la interferencia, para posteriormente comparar con la celda bajo test y decidir si existe blanco o solamente clutter en la misma. Siempre se considera que en celdas adyacentes la interferencia tiene la misma función de densidad de probabilidad y que están incorrelacionadas entre si.

Los CFAR no paramétricos actúan independientemente del tipo de interferencia, lo cual los hace menos robustos que los paramétricos frente a interferencias conocidas, proporcionando también (frente a estadísticas conocidas) mayores pérdidas de la probabilidad de detección que los CFAR paramétricos cuando actúan frente a la interferencia para la que han sido diseñados.

El esquema general de funcionamiento de un procesador CFAR espacial se corresponde con el indicado en la figura 3.8, en ella se puede ver que la señal detectada para cada celda de resolución es almacenada en un registro de desplazamiento, el cual permite la estimación del umbral de detección a partir de la evaluación de la potencia media de interferencia de las celdas vecinas, éstas se eligen para un determinado radial en un número total de  $M$  celdas, de las cuales  $M/2$  son precedentes y  $M/2$  siguientes a la celda bajo test, suele dejarse también una celda de guarda delantera y una posterior para evitar que blancos extensos perturben la estimación de la interferencia.

El dato a procesar es comparado con un umbral, el primer paso consiste en estimar la potencia media del clutter  $Z$  para a continuación multiplicar la estima por un factor de escala  $T$  que depende del método de estima empleado y de la Probabilidad de falsa alar-

ma (Pfa) deseada. El producto resultante  $T.Z$  se usa directamente como valor de umbral. En los procesadores CFAR de tipo paramétrico la estadística de la interferencia se supone conocida salvo en un factor de escala. El diseño de los procesadores CFAR paramétricos se realiza bajo la suposición de interferencia homogénea y estacionaria, sin embargo es sabido que en situaciones reales no siempre se cumplen estas dos condiciones puesto que en determinadas situaciones reales tendremos inhomogeneidad (bordes de clutter) y no estacionariedad (blancos en las celdas de estimación).

El procesador paramétrico más conocido y clásico es el CFAR promediador o CA CFAR, diseñado para interferencias de tipo Rayleigh, calcula la media aritmética de los valores de las celdas de referencia como estima de la potencia media de ruido (fig. 3.9). Su robustez frente a bordes de clutter y blanco múltiple es pequeña. Para combatir estas situaciones han surgido otros procesadores que emplean algoritmos más sofisticados [6], [7], [8], [9], la contrapartida de dicha sofisticación es una pérdida de detectabilidad respecto a la situación original de interferencia homogénea y estacionaria, pérdida, sin embargo, menor que la que representa el uso de un CFAR no paramétrico.

### 3.1. ANÁLISIS DE UN CFAR PROMEDIADOR (CA-CFAR)

Supongamos que disponemos de una distribución espacial homogénea de la potencia recibida de la señal interferente, consideraremos además por razones de simplicidad y como ya se ha comentado sin pérdida de generalidad, que el detector de amplitud es del tipo cuadrático, si la interferencia es del tipo normal o gaussiano, después de la detección tendremos para cada celda de resolución una estadística del tipo Exponencial para la señal recibida, es decir, una función de densidad de probabilidad (pdf) tal y como:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.1)$$

y una función de distribución acumulada (cdf):

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\mu} & x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.2)$$

Al efectuar un procesado CA CFAR para hallar el valor medio de la interferencia y a partir de las variables aleatorias representativas de cada celda (fig. 3.9) estamos obteniendo una nueva variable aleatoria, suma de las M variables aleatorias independientes adyacentes cuya función de densidad de probabilidad puede obtenerse de forma recursiva a partir de [1]:

$$f_z(z) \Big|_{z=x_1+x_2} = \int_0^z f_{x_1}(x) \cdot f_{x_2}(z-x) \cdot dx = \frac{1}{\mu^2} z e^{-z/\mu} \quad (3.3)$$

$$f_z(z) \Big|_{z=(x_1+x_2)+x_3} = \frac{1}{\mu^3} \frac{z^2}{2} e^{-z/\mu} \quad (3.4)$$

repetiendo el proceso hasta tener  $z = x_1 + x_2 + \dots + x_M$  obtenemos la función de densidad de probabilidad de la estimación:

$$f_z(z) \Big|_{z=\sum_{i=1}^M x_i} = \frac{1}{\mu^M} \frac{z^{M-1}}{(M-1)!} e^{-z/\mu} \quad (3.5)$$

Siguiendo la estructura definida en la figura 3.9, ahora debemos de comparar si la señal de la celda bajo test que denominamos «y» es mayor o menor que el valor medio de la estimación de las celdas adyacentes, en concreto, si tenemos fijado un valor de umbral de detección C, como para optimizar el número de operaciones no hemos estimado el valor medio sino el valor suma, definiremos un factor de escala de umbral T tal que  $T = C/M$  con lo que la probabilidad de falsa alarma aplicando la definición de la expresión 2.3 será:

$$P_{fa} = p\{y \geq Tz\} \quad P_{fa} = \int_0^{\infty} p\{y \geq Tz\} \cdot f_z(z) dz \quad (3.6)$$

$$P_{fa} = \int_0^{\infty} [1 - F_x(y)] \Big|_{y=Tz} \cdot f_z(z) dz = \int_0^{\infty} p\{y \geq Tz\} f_z(z) dz \quad (3.7)$$

$$P_{fa} = \int_0^{\infty} \left[ \int_{Tz}^{\infty} f_x(y) dy \right] \cdot f_z(z) dz \quad (3.8)$$

cuya resolución de acuerdo con las expresiones 3.1 y 3.6 nos da:

$$P_{fa} = \frac{1}{(1 + T)^M} \quad (3.9)$$

expresión que nos muestra claramente que el procedimiento es CFAR puesto que la probabilidad de falsa alarma sólo depende del proceso «número de celdas de estimación M y factor de escala de umbral de detección T ( $T = C/M$ )» y no del valor estimado de la interferencia  $\mu$ .

Si en la celda bajo test «y» existiera un blanco de la misma naturaleza estadística que la interferencia pero con una potencia media superior, llamando «S» a la relación señal a interferencia de forma que la función de densidad de probabilidad de la celda la podamos escribir como:

$$f_x(y) = \frac{1}{\mu(1+S)} e^{-\frac{y}{\mu(1+S)}} \quad (3.10)$$

entonces, la probabilidad de detección por aplicación de la expresión 2.2 queda:

$$P_d = \int_0^{\infty} [1 - F_x(y)] \Big|_{y=Tz} \cdot f_z(z) dz = \int_0^{\infty} p\{y \geq Tz\} f_z(z) dz \quad (3.11)$$

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[ \int_{Tz}^{\infty} f_x(y) dy \right] \cdot f_z(z) dz \quad (3.12)$$

$$P_d = \frac{(1 + S)^M}{(1 + S + T)^M} \quad (3.13)$$

Se definen las pérdidas CFAR como el incremento de relación señal a interferencia S que necesita un detector CFAR una vez se ha fijado el umbral de detección (C o T), para tener una probabilidad de detección del 50 % con respecto a la S que necesita el detector óptimo o de Neyman-Pearson.

El detector de Neyman-Pearson sería aquél que fuera capaz de estimar completamente la interferencia, es decir, un CA con infinito número de celdas de estimación, resulta fácil de comprobar que para el detector óptimo las probabilidades de detección y falsa alarma tienden a 1 y 0 respectivamente para relaciones S altas y umbrales C también altos.

$$P_d \Big|_{M \rightarrow \infty} = \frac{(1 + S)^M}{(1 + S + C/M)^M} = e^{-\frac{C}{1+S}} \Rightarrow 1 \quad \text{(para relaciones S altas)} \quad (3.14)$$

$$P_{fa} \Big|_{M \rightarrow \infty} = \frac{1}{(1 + C/M)^M} = e^{-C} \Rightarrow 0 \quad \text{(para C altos)} \quad (3.15)$$

### 3.2. ANÁLISIS DE LOS CFAR PROMEDIADORES MODIFICADOS, CAGO Y CASO CFAR

Aplicando la misma mecánica descrita en el apartado anterior pero teniendo en cuenta que el proceso ahora añade un paso más consistente en determinar la estimación mayor o menor de los dos conjuntos de celdas de M/2 precedentes y consecuentes a la celda bajo test, la función de densidad de probabilidad de la estimación será ahora [1]:

CAGO CFAR  $z = \max (y_{precedente}, y_{consecuente})$  (3.16)

$$f_z(z) = 2 f_y(y) F_y(y) \Big|_{y=z}$$

CASO CFAR  $z = \min (y_{precedente}, y_{consecuente})$  (3.17)

$$f_z(z) = 2 f_y(y) [1 - F_y(y)] \Big|_{y=z}$$

donde

$$y_{precedente} = \sum_{i=1}^{M/2} x_i \quad (3.18)$$

$$y_{consecuente} = \sum_{i=M/2-1}^M x_i \quad (3.19)$$

la aplicación sobre esta nueva función de densidad de probabilidad del proceso 3.7 a 3.10 conduce ahora a las siguientes expresiones:

$$P_{fa} \Big|_{CAGO} = 2 \left[ (1+2T/M)^{-M/2} - (2+2T/M)^{-M/2} \cdot \sum_{i=0}^{M/2-1} \binom{M/2-1+i}{i} (2 + 2T/M)^{-1} \right] \quad (3.20)$$

$$P_d \Big|_{CAGO} = 2 \left[ (1+2T/(M(1+S)))^{-M/2} - (2+2T/(M(1+S)))^{-M/2} \cdot \sum_{i=0}^{M/2-1} \binom{M/2-1+i}{i} (2 + 2T/(M(1+S)))^{-1} \right] \quad (3.21)$$

$$P_{fa} \Big|_{CASO} = \left[ 2/(2+T)^{M/2} \right] \cdot \sum_{i=0}^{M/2-1} \binom{M/2-1+i}{i} (2+T)^{-1} \quad (3.22)$$

$$P_d \Big|_{CASO} = \left[ 2/(2+T/(1+S))^{M/2} \right] \cdot \sum_{i=0}^{M/2-1} \binom{M/2-1+i}{i} (2+T/(1+S))^{-1} \quad (3.23)$$

### 3.3. ANÁLISIS DEL CFAR DE ESTADÍSTICOS ORDENADOS OS CFAR

El CFAR de estadísticos ordenados (OS CFAR), es un CFAR paramétrico el cual obtiene la estimación del nivel de potencia de la señal interferente por elección de una muestra representativa, su

diagrama de actuación se encuentra representado en la figura 3.10. Supuesta una colección de M muestras correspondientes (al igual que el CA CFAR) a los valores de nivel de interferencia de las M/2 celdas antecedentes y las M/2 celdas consecuentes a la celda bajo test, todas ellas de la misma naturaleza estadística e independientes entre sí,  $X = x_1, x_2, \dots, x_M$ , la obtención del nivel de interferencia se obtiene tras la ordenación de estas muestras de menor a mayor, según el valor de las mismas:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(M)} \tag{3.24}$$

(donde ahora los subíndices entre paréntesis no representan el orden de la célula de estimación sino el orden que ocupan tras la ordenación en función del valor de cada muestra  $x_i$ ).

Una vez ordenadas las muestras se elige siempre como representativa de la interferencia la que ocupa el lugar k-ésimo ( $x_{(k)}$ ) [8].

Si suponemos para cada celda una variable aleatoria con funciones de densidad de probabilidad y de distribución acumulada del tipo exponencial, expresiones 3.1 y 3.2, por los mismos razonamientos dados al principio del apartado, la nueva función de densidad de probabilidad representativa de la estimación será ahora:

$$z = x_{(k)} \quad , \text{ con } 1 \leq k \leq M \tag{3.25}$$

$$f_z(z) = f_{x_{(k)}}(x) = k \binom{M}{k} (1 - F_x(x))^{M-k} \cdot (F_x(x))^{k-1} \cdot f_x(x) \tag{3.26}$$

$$f_z(z) = (k/\mu) \binom{M}{k} (e^{-x/\mu})^{M-k+1} (1 - e^{-x/\mu})^{k-1} \tag{3.27}$$

La aplicación ahora de las expresiones para las probabilidades de falsa alarma y detección, 2.3 o 3.6 y 3.7, y 2.2 o 3.11, conducen a

$$P_{fa} = k \binom{M}{k} \frac{(k-1)! (T+M-k)!}{(T+M)!} \tag{3.28}$$

$$P_d = k \binom{M}{k} \frac{(k-1)! [T/(1+S) + M-k]!}{[T/(1+S) + M]!} \tag{3.29}$$

expresiones en las cuales K es el orden de la muestra elegida como representativa, S es la relación señal a interferencia (SNR) y  $\Gamma()$  es la función gamma que en primera aproximación para argumentos enteros puede ser substituida por el factorial mediante la siguiente igualdad:

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{para } n \text{ entero} \tag{3.30}$$

En este tipo de procesador CFAR nos queda todavía un grado de libertad, concretamente la elección del orden K, dado que en principio no tenemos ninguna restricción sobre el mismo, lo más lógico parece ser el elegir el orden k que nos maximice la probabilidad de detección, o dicho de otro modo, elegiremos el orden k que nos proporcione menos pérdidas CFAR, observando las curvas del nivel de detección medio (ADT), figuras 3.11 y 3.12, se observa que el valor de k óptimo se corresponde aproximadamente con  $K = (6/7)M$  independiente del valor de la función de densidad de probabilidad, es por eso que para  $M = 32$  se toma  $k = 27$ .

### 3.4. ANÁLISIS DE LOS CFAR DE ESTADÍSTICOS ORDENADOS MODIFICADOS, OSGO Y OSSO CFAR.

Con el fin de ganar tiempo de procesado usando dos procesadores que trabajen simultáneamente cada uno con una colección de M/2 muestras correspondientes a las células antecedentes y consecuentes a la célula bajo test, se pueden desarrollar dos nuevos tipos de procesadores que se correspondan con las variantes del CFAR promediador CAGO (el mayor de los dos) y CASO (el menor de los dos). Con la misma filosofía que en el CFAR promediador, para hallar las nuevas funciones de densidad de probabilidad de la estimación de la interferencia, se usan las expresiones 3.16 y 3.17 que aplicadas a la función original de ordenación estadística 3.27 para una colección de M/2 muestras nos dan:



$$f_z(z) = 2k^2 \binom{M/2}{k} \left[ (1-e^{-z/\mu})^{(k-1)/(M/2-k)} - (1-e^{z/\mu})^{(M/2-1)/(M/2-k)} \right]^{M/2-k} \cdot (1/\mu) e^{-z/\mu} \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=0}^{M/2-k} \binom{M/2-k}{i} \frac{(-1)^{M/2-k-i}}{M/2-i} (1-e^{-z/\mu})^{M/2-1}$$

y aplicando las expresiones 3.6, 3.7 y 3.11 para las probabilidades de detección y de falsa alarma obtenemos:

$$P_{fa} = 2k^2 \binom{M/2}{k} \sum_{j=0}^{M/2-k} \sum_{i=0}^{M/2-k} \binom{M/2-k}{j} \binom{M/2-k}{i} \quad (3.32)$$

$$\frac{(-1)^{M-2k-j-i}}{M/2-i} \cdot \frac{\Gamma(M-j-i) \cdot \Gamma(T+1)}{\Gamma(M-j-i+T+1)}$$

$$P_{fa} = 2k \binom{M/2}{k} \left( \frac{\Gamma(k) \Gamma(T+M/2-k+1)}{\Gamma(T+M/2+1)} - \sum_{j=0}^{M/2-k} \sum_{i=0}^{M/2-k} \binom{M/2-k}{j} \binom{M/2-k}{i} \frac{(-1)^{M-2k-j-i}}{M/2-i} \frac{\Gamma(M-j-i) \Gamma(T+1)}{\Gamma(M-j-i+T+1)} \right) \quad (3.33)$$

$$P_d = 2k^2 \binom{M/2}{k} \sum_{j=0}^{M/2-k} \sum_{i=0}^{M/2-k} \binom{M/2-k}{j} \binom{M/2-k}{i} \frac{(-1)^{M-2k-j-i}}{M/2-i} \frac{\Gamma(M-j-i) \Gamma(T/(1+S)+1)}{\Gamma(M-j-i+T/(1+S)+1)} \quad (3.34)$$

$$P_d = 2k \binom{M/2}{k} \left( \frac{\Gamma(k) \Gamma(T/(1+S)+M/2-k+1)}{\Gamma(T/(1+S)+M/2+1)} - \sum_{j=0}^{M/2-k} \sum_{i=0}^{M/2-k} \binom{M/2-k}{j} \binom{M/2-k}{i} \frac{(-1)^{M-2k-j-i}}{M/2-i} \frac{\Gamma(M-j-i) \Gamma(T/(1+S)+1)}{\Gamma(M-j-i+T/(1+S)+1)} \right) \quad (3.35)$$

Las expresiones 3.32 y 3.33 nos permiten conocer el factor de escala de umbral  $T$  para una probabilidad de falsa alarma determinada, en las tablas 3.1 y 3.2 se presenta una colección de factores de umbral para probabilidades de falsa alarma de una millonésima y una cienmillonésima en función del orden  $k$  elegido como representativo de la interferencia, para los tres tipos de CFAR de Estadísticos Ordenados.

### 3.5. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

En las figuras 3.13 y 3.14 tenemos una representación de las probabilidades de detección en función de la relación señal a interferencia (SNR) para los procesadores CFAR estudiados con  $M = 32$  y para dos probabilidades de falsa alarma típicas en los sistemas de radiolocalización,  $10E-6$  y  $10E-8$ . Observamos que el CFAR de mejor comportamiento con respecto a las pérdidas CFAR es el CFAR promediador CA CFAR, el cual representa una pérdida de 1.5 dB con respecto al detector óptimo de Neyman-Pearson (óptimo pero

no adaptativo), el OS CFAR representa una pérdida de casi 3 dB con respecto al detector óptimo, mientras que el OSGO incrementa esta pérdida de forma inapreciable no siendo así para el OSSO, el cual representa una pérdida de 2 dB con respecto al OSSO.

Las figuras 3.15 a 3.19 representan el comportamiento de estos CFAR frente a un caso particular de escenario radar (protocolo de pruebas), sobre un radial de 256 muestras se ha situado una nube de clutter con un salto de nivel de 30 dB entre las posiciones 30 y 190, además se han dispuesto 3 blancos sobre la nube de clutter con relaciones señal a interferencia de 19, 54 y 19 dB respectivamente y posiciones en las celdas 100, 105 y 110. Fuera de la nube de clutter se ha posicionado un blanco con una relación SNR de 22 dB en la celda 215. La observación de las figuras nos muestra que:

— El CA CFAR produce tres pérdidas de blanco debido a que son enmascarados por el blanco grande o el borde de clutter.

— El CAGO CFAR aunque elimina el blanco grande, como puede observarse al seguir la línea de umbral, también sufre las mismas pérdidas que el CA CFAR.

— El OS CFAR y el OSGO CFAR producen una detección correcta de todos los blancos.

— El OSSO CFAR aunque realiza una detección correcta de todos los blancos, produce falsas alarmas en los bordes de clutter.

En resumen, podemos concluir que en ambientes no homogéneos y no estacionarios los CFAR de estadísticos ordenados son los que tienen una mejor relación de eficacia puesto que sin tener las pérdidas CFAR de los no paramétricos responden mejor que los promediadores.

#### 4. Los centros de fusión de datos

Los sistemas de detección distribuida presentan una serie de ventajas sobre los sistemas concentrados o únicos, entre otras:

- Mayor robustez y fiabilidad.
- Mejor tratamiento de la interferencia del entorno.
- Mayor volumen de cobertura.

Si además cada detector que forma parte del sistema distribuido es capaz de procesar parte de la información enviándola reducida al centro de fusión, a las ventajas anteriores se añade la de la

reducción del ancho de banda del canal de comunicación que enlaza cada detector con el centro de fusión, con respecto al ancho de banda que se requeriría para enviar una información equivalente sin reducir y a la misma velocidad.

En este apartado proponemos el estudio de un sistema multi-sensor que usa receptores del tipo CA CFAR. En el sistema analizado (fig. 4.1) cada uno de los receptores que cubre la zona de observación toma la decisión de presencia o ausencia de blanco de forma independiente y envía este resultado al Centro de Fusión de Datos, el cual toma la decisión final en función de las múltiples decisiones individuales.

Para el Centro de Fusión, se analizan las reglas K de N, supuesto un sistema de N receptores, es decir, dicho centro decide presencia de blanco, si por lo menos K de los N receptores así lo han decidido,  $0 \leq K \leq N$ , y con la restricción de Probabilidad de Falsa Alarma constante.

Bajo las hipótesis binarias de detección:

H0: Ausencia de blanco.

H1: Presencia de blanco.

Podemos definir las probabilidades de detección y falsa alarma de cada receptor, como:

$P_{di} = P(H1/H1)$  en el detector «i».

$P_{fai} = P(H1/H0)$  en el detector «i».

Las probabilidades de detección y falsa alarma en el Centro de Fusión pueden expresarse como:

$$P_{dt} = \sum_D R(D) \cdot \prod_{S0} (1 - P_{di}) \cdot \prod_{S1} P_{di} \quad (4.1)$$

$$P_{fat} = \sum_D R(D) \cdot \prod_{S0} (1 - P_{fai}) \cdot \prod_{S1} P_{fai} \quad (4.2)$$

donde:

- $\sum_D$  : Sumatorio de todas las posibles combinaciones de decisión.
- S1: Grupo de detectores que han decidido presencia de blanco.
- S0: Grupo de detectores que han decidido ausencia de blanco.
- R(D): Regla de decisión.

En general para N detectores el Centro de Fusión va a disponer de un vector de decisiones D:

$$D = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_N) \tag{4.3}$$

$d_i = 1$  : Receptor «i» decide presencia de blanco.  
 $d_i = 0$  : Receptor «i» decide ausencia de blanco.

La regla de fusión propuesta para el Centro de Fusión es la siguiente:

$$R(D) = \begin{cases} 1 & \text{(presencia de blanco) si } \sum_{i=1}^N d_i \geq K \\ 0 & \text{(ausencia de blanco) si } \sum_{i=1}^N d_i < K \end{cases} \tag{4.4}$$

Así por ejemplo, para tres receptores tendremos:

$$\begin{aligned} Pdt = & R(1,1,1) \cdot Pd_1 \cdot Pd_2 \cdot Pd_3 + R(1,1,0) \cdot Pd_1 \cdot Pd_2 \cdot (1-Pd_3) + \\ & + R(1,0,1) \cdot Pd_1 \cdot (1-Pd_2) \cdot Pd_3 + R(0,1,1) \cdot (1-Pd_1) \cdot Pd_2 \cdot Pd_3 + \\ & + R(1,0,0) \cdot Pd_1 \cdot (1-Pd_2) \cdot (1-Pd_3) + \\ & + R(0,1,0) \cdot (1-Pd_1) \cdot Pd_2 \cdot (1-Pd_3) + \\ & + R(0,0,1) \cdot (1-Pd_1) \cdot (1-Pd_2) \cdot Pd_3 + \\ & + R(0,0,0) \cdot (1-Pd_1) \cdot (1-Pd_2) \cdot (1-Pd_3) \end{aligned}$$

si la regla de fusión es  $K = 2$ , entonces:

$$\begin{aligned} R(1,1,1) = R(1,1,0) = R(1,0,1) = R(0,1,1) = 1 \\ R(1,0,0) = R(0,1,0) = R(0,0,1) = R(0,0,0) = 0 \end{aligned}$$

Para la probabilidad de falsa alarma en el Centro de Fusión (pfat) obtendríamos unas expresiones similares usando la igualdad (2).

La regla puede generalizarse para el caso que se desee ponderar las decisiones de cada receptor, en este caso usaremos un vector de peso A definido como:

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) \tag{4.5}$$

donde cada  $a_i$  es el peso normalizado ( $0 \leq a_i \leq 1$ ) representativo de la calidad del par receptor-canal «i».

La regla de decisión R(D) quedará expresada como:

$$R(D) = \begin{cases} 1 & \text{(blanco presente) si } A \cdot D^T \geq Z \\ 0 & \text{(blanco ausente) si } A \cdot D^T < Z \end{cases} \tag{4.6}$$

donde Z es un número racional tal que  $0 \leq Z \leq N$  y K sería aproximado por la parte entera de Z que minimiza el error de redondeo.

Una vez fijada la regla de decisión K o Z las expresiones (4.1) y (4.2) pueden desarrollarse en función de K y de N de la siguiente forma:

$$Pdt_{KN} = \sum_{i=K}^N \left\{ \left( \sum_{p=0}^{i-K} (-1)^p \cdot C(i,p) \right) \cdot \left( \sum_{c_{iN}} \left[ \prod_j Pd_j \right] \right) \right\} \tag{4.7}$$

$$Pfat_{KN} = \sum_{i=K}^N \left\{ \left( \sum_{p=0}^{i-K} (-1)^p \cdot C(i,p) \right) \cdot \left( \sum_{c_{iN}} \left[ \prod_j Pfa_j \right] \right) \right\} \tag{4.8}$$

donde:

- $Pdt_{KN}$  y  $Pfat_{KN}$  son las probabilidades de detección y falsa alarma en el Centro de Fusión de Datos de N receptores para una regla de rango K.
- $Pd_j$  y  $Pfa_j$  son las probabilidades de detección y falsa alarma para el receptor j-ésimo.
- $C(i, p)$  son las combinaciones de i elementos tomadas en grupos de p elementos.

$$C(i, p) = \binom{i}{p} = \frac{i!}{p! \cdot (i-p)!} \tag{4.9}$$

—  $\sum_{c_{iN}} \left[ \prod_j Pd_j \right]$  es la suma de todos los posibles productos de i probabilidades de detección ( $Pd_j$ ) tomados desde  $i = 1$  hasta N.

Lo mismo aplica para  $\sum_{c_{iN}} \left[ \prod_j Pfa_j \right]$  Por ejemplo:

$$\sum_{c_{23}} \left[ \prod_j Pd_j \right] = Pd_1 \cdot Pd_2 + Pd_1 \cdot Pd_3 + Pd_2 \cdot Pd_3$$

$$\sum_{c_{34}} \left[ \prod_j Pd_j \right] = Pd_1 \cdot Pd_2 \cdot Pd_3 + Pd_1 \cdot Pd_2 \cdot Pd_4 + Pd_1 \cdot Pd_3 \cdot Pd_4 + Pd_2 \cdot Pd_3 \cdot Pd_4$$

El cálculo directo de  $\sum_{c_{1N}} \left[ \prod_j Pd_j \right]$  no resulta evidente, sin embargo puede obtenerse la siguiente fórmula recursiva [10]:

$$Pdt_{kN} = \sum_{i=k}^N \left\{ \left[ \sum_{p=0}^{i-k} (-1)^p \binom{i}{p} \right] \cdot \left[ \sum_{q=1}^{N-1+1} Pd_q \left( \sum_{r=q+1}^{N-1+2} Pd_r \left( \sum_{s=r+1}^{N-1+3} Pd_s (\dots) \right) \right) \right] \right\} \tag{4.10}$$

$$Pfat_{kN} = \sum_{i=k}^N \left\{ \left[ \sum_{p=0}^{i-k} (-1)^p \binom{i}{p} \right] \cdot \left[ \sum_{q=1}^{N-1+1} Pfa_q \left( \sum_{r=q+1}^{N-1+2} Pfa_r \left( \sum_{s=r+1}^{N-1+3} Pfa_s (\dots) \right) \right) \right] \right\} \tag{4.11}$$

expresiones que permiten su desarrollo cómodo en un proceso de cálculo mecanizado con ordenador.

#### 4.1. OPTIMIZACIÓN DEL SISTEMA PARA RECEPTORES DEL TIPO CA-CFAR

Dado un sistema con N receptores distribuidos del tipo CA CFAR se propone como optimización global el fijar la probabilidad de falsa alarma en el centro de fusión maximizando la Pdt, dicha optimización es distinta a la típica [11] consistente en fijar cada Pfai maximizando la Pdt con la cual resulta como regla de fusión óptima simple la regla OR (K = 1). El problema que tenemos que resolver consiste en determinar los valores de umbral Ti de cada receptor a partir del valor de la Pfat, de la regla de fusión K de N y del tipo de receptor CA CFAR en este caso.

Tenemos una función de N variables  $Pdt = Pdt_{kN}(T_1, T_2, \dots, T_N)$  la cual queremos maximizar bajo la restricción impuesta por otra función  $Pfat_{kN}(T_1, T_2, \dots, T_N)$ , es decir, tenemos un problema de

multiplicadores de Lagrange. Para su solución definimos la siguiente función objetiva:

$$J(T_1, T_2, \dots, T_N) = Pdt_{kN}(T_1, T_2, \dots, T_N) + \beta \cdot [Pfat_{kN}(T_1, T_2, \dots, T_N) - \gamma] \tag{4.12}$$

- $\beta$  es el Multiplicador de Lagrange.
- $\gamma$  es el valor deseado para la probabilidad de falsa alarma en el centro de fusión.

El sistema de ecuaciones que la expresión (4.12) representa es generalmente no lineal debido a la no linealidad de las expresiones para las probabilidades de detección y de falsa alarma de los receptores, para el caso de receptores CA CFAR y bajo la consideración de clutter Rayleigh tenemos, según las expresiones (3.8) y (3.12):

$$Pdi = \frac{(1 + Si)^{Mi}}{(1 + Si + Ti)^{Mi}} \tag{4.13} \quad Pfa_i = \frac{1}{(1 + Ti)^{Mi}} \tag{4.14}$$

donde:

- Si es la relación señal a clutter en el receptor «i».
- Mi es el número de celdas de estimación del receptor «i».
- Ti es el factor de escala de umbral del receptor «i».

El sistema de ecuaciones no lineales a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, T_N, \beta)}{\partial T_1} &= 0 \\ \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, T_N, \beta)}{\partial T_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, T_N, \beta)}{\partial T_N} &= 0 \\ Pfat_{kN}(T_1, T_2, \dots, T_N) &= \gamma \end{aligned} \tag{4.15}$$

que es un sistema completamente determinado de  $N + 1$  ecuaciones y  $N + 1$  incógnitas  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$  y  $\beta$ .

El sistema es fuertemente no lineal, como puede verse en el siguiente ejemplo para  $N = 3$  y  $K = 2$ :

$$P_{dt,2,3} = \frac{(1+S_1)^{M_1} \cdot (1+S_2)^{M_2}}{(1+S_1+T_1)^{M_1} \cdot (1+S_2+T_2)^{M_2}} + \frac{(1+S_1)^{M_1} \cdot (1+S_3)^{M_3}}{(1+S_1+T_1)^{M_1} \cdot (1+S_3+T_3)^{M_3}} + \frac{(1+S_2)^{M_2} \cdot (1+S_3)^{M_3}}{(1+S_2+T_2)^{M_2} \cdot (1+S_3+T_3)^{M_3}} - \frac{2 \cdot (1+S_1)^{M_1} \cdot (1+S_2)^{M_2} \cdot (1+S_3)^{M_3}}{(1+S_1+T_1)^{M_1} \cdot (1+S_2+T_2)^{M_2} \cdot (1+S_3+T_3)^{M_3}}$$

$$P_{fat,2,3} = \frac{1}{(1+T_1)^{M_1} \cdot (1+T_2)^{M_2}} + \frac{1}{(1+T_1)^{M_1} \cdot (1+T_3)^{M_3}} + \frac{1}{(1+T_2)^{M_2} \cdot (1+T_3)^{M_3}} - \frac{2}{(1+T_1)^{M_1} \cdot (1+T_2)^{M_2} \cdot (1+T_3)^{M_3}}$$

$$J(T_1, T_2, T_3) = P_{d,2,3}(T_1, T_2, T_3) + \beta \cdot [P_{fa,2,3}(T_1, T_2, T_3) - \gamma]$$

La resolución del sistema (4.15) hay que hacerla a partir de métodos iterativos, para CA CFAR el método usado con buenos resultados ha sido el de Newton Raphson [12], la obtención de los valores  $T_i$  se consigue mediante el siguiente proceso:

$$[T_i, \beta]_{z+1}^T = [T_i, \beta]_z^T + [\partial F / \partial (T_i, \beta)]^{-1} \cdot [F]^T \tag{4.16}$$

$$[T_i, \beta]_z = [T_{1z}, T_{2z}, \dots, T_{Nz}, \beta_z] \tag{4.17}$$

$$[T_i, \beta]_{z+1} = [T_{1z+1}, T_{2z+1}, \dots, T_{Nz+1}, \beta_{z+1}] \tag{4.18}$$

$$[F] = \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_1}, \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_2}, \dots, \frac{\partial J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_N}, (P_{fat} - \gamma) \tag{4.19}$$

$$[\partial F / \partial (T_i, \beta)] =$$

$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial^2 (T_1)^2}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_1 \partial T_2}$	$\dots$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_1 \partial T_N}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_1 \partial \beta}$
$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_2 \partial T_1}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial^2 (T_2)^2}$	$\dots$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_2 \partial T_N}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_2 \partial \beta}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_N \partial T_1}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_N \partial T_2}$	$\dots$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial (T_N)^2}$	$\frac{\partial^2 J(T_1, T_2, \dots, \beta)}{\partial T_N \partial \beta}$
$\frac{\partial [P_{fakN}(T_1, \dots, T_N) - \gamma]}{\partial T_1}$	$\dots$	$\frac{\partial [P_{fakN}(T_1, \dots, T_N) - \gamma]}{\partial T_N}$	$\dots$	$\frac{\partial [P_{fakN}(T_1, \dots, T_N) - \gamma]}{\partial \beta}$

(4.20)

La solución inicial se obtiene tras calcular cada  $T_{i0}$ , suponiendo que todos los receptores son iguales al receptor «i» para cada «i» y promediando las  $\beta$  obtenidas en cada suposición para obtener  $\beta_0$ .

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\partial P_{dtkN}(T_1, T_2, \dots, T_N)_0}{\partial T_1}}{\frac{\partial P_{fatkN}(T_1, T_2, \dots, T_N)_0}{\partial T_1}} \tag{4.21}$$

#### 4.2. RESULTADOS DE APLICACIÓN

En las figuras 4.2 a 4.7 se muestran algunos resultados de la aplicación del método descrito en el apartado anterior para diversos centros de fusión de datos.

En las figuras 4.2 y 4.3 se muestra la probabilidad de detección en el Centro de Fusión de Datos en función de la relación señal a interferencia (SNR) para unas acotaciones determinadas de la probabilidad de falsa alarma en el Centro de Fusión de Datos (Pfat), para unos conjuntos de 4 y 5 receptores iguales, en ambas figuras se puede comprobar que la regla OR ( $K = 1$ ) no es siempre la que provoca una mayor probabilidad de detección en el Centro de Fusión, viéndose superada, según las relaciones SNR, por las reglas  $K = 2$  y  $K = 3$ .

Las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 muestran para diversas colecciones de receptores diferentes la probabilidad de detección en el Centro de Fusión de Datos con respecto a la probabilidad de falsa alarma en el mismo Centro, también en estos casos puede verse que existen reglas que maximizan la probabilidad de detección en el Centro de Fusión y que generalmente no coinciden con la regla OR ( $K = 1$ ).

La figura 4.7 muestra los valores del factor de escala de umbral T para cada receptor de un conjunto de tres receptores diferentes en función de la probabilidad de falsa alarma en el Centro de Fusión, observándose que el valor de T aumenta en razón inversa a la calidad del receptor.

En resumen, podemos concluir que: los resultados de la aplicación de este método recursivo permiten la obtención para cada grupo de diferentes receptores CA CFAR y para cada nivel de falsa alarma en el Centro de Fusión, determinar qué rango K maximiza la probabilidad de detección, los resultados de diversas aplicaciones permiten afirmar:

— Fijando la probabilidad de falsa alarma en el Centro de Fusión, la regla OR no es siempre la que maximiza la probabilidad de detección del Centro de Fusión.

— La probabilidad de detección del Centro de Fusión aumenta con el número de receptores N así como con su calidad para cualquier regla de decisión K.

— El valor de umbral  $T_i$  de cada receptor aumenta de manera inversa con la calidad del receptor.

#### 5. Conclusiones

El conocimiento de las estadísticas de las señales útiles e interferentes de un sistema de radiolocalización, permite el desarrollo de técnicas de detección paramétricas y adaptativas que ofrecen unas buenas prestaciones con respecto a las probabilidades de detección y con garantías de falsa alarma constante incluso en situaciones distintas a las originales de diseño (entornos interferentes no homogéneos). La técnica CFAR de estadísticos ordenados y sus modificaciones se presenta como una de las más potentes desde el punto de vista de superación de inhomogeneidades y falta de estacionariedad (blancos en las celdas de estimación), su tiempo de proceso y sus pérdidas la hacen, sin embargo, no aconsejable en entornos perfectamente parametrizados y homogéneos, frente a las técnicas más simples del tipo promediador. Los Centros de Fusión de Datos son ya abordables con prestaciones idénticas a los de los receptores aislados en cuanto a comportamientos de falsa alarma constante, añadiendo las ventajas de la detección distribuida que apunta como la técnica del futuro en toda la problemática de la detección, especialmente en temas como los blancos escasamente observables, avión de «stealth», camuflaje de blancos mediante «jammer» y «chaff» [13], etc.

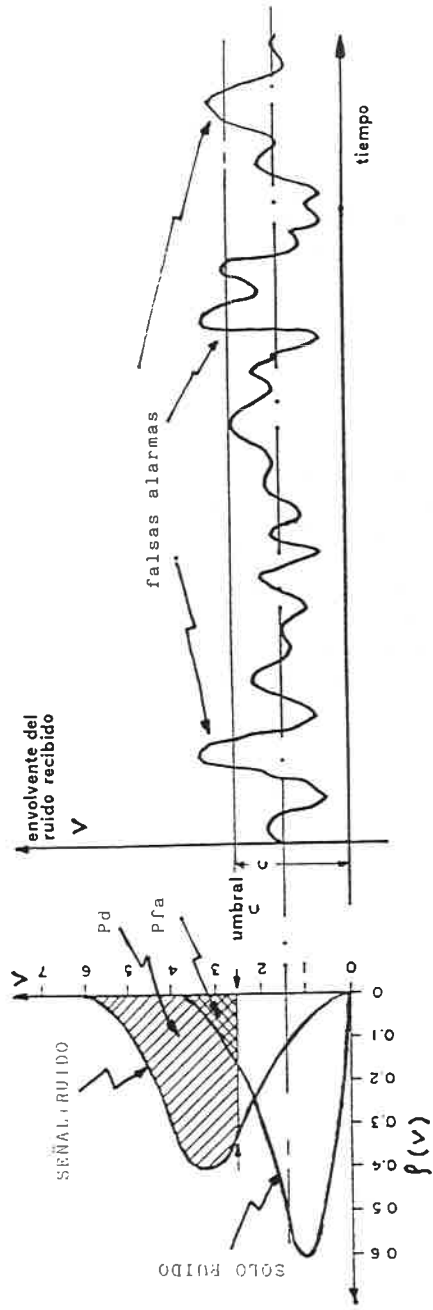


FIGURA II. 1

Probabilidades de Detección y Falsa Alarma en un detector por umbral fijo. El ruido detectado es del tipo Rayleigh, la curva que representa la señal más el ruido es una función de tipo Rice (correspondiente a una señal determinista sinusoidal más ruido gaussiano antes de detectar) con una relación señal a ruido de 10 dB.

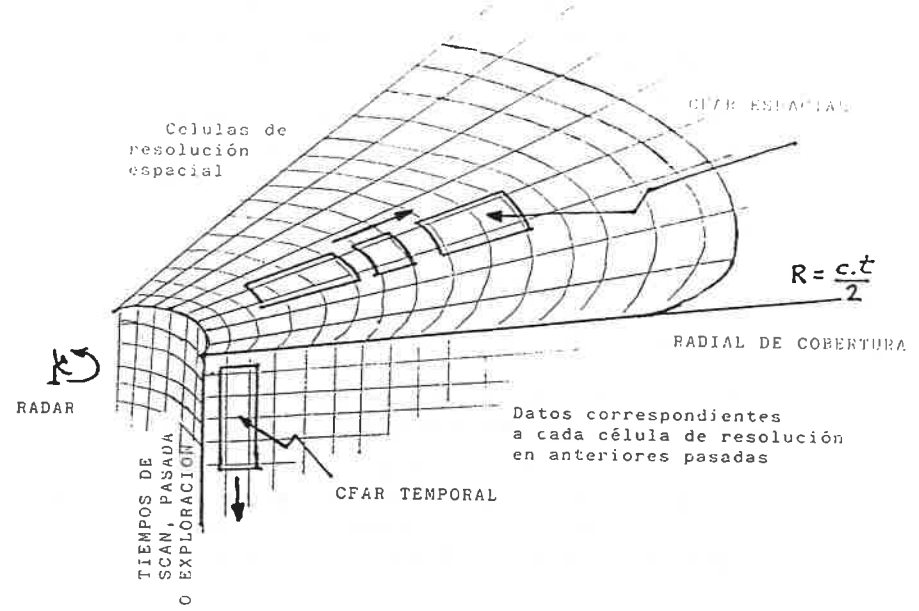


FIGURA III. 1

Ilustración correspondiente a las formas de actuación CFAR. El CFAR espacial opera sobre los ecos de un radial de cobertura correspondientes a una misma pasada o exploración. El CFAR temporal opera con los datos de cada celda de resolución correspondientes a la pasada actual más las anteriores debidamente ponderadas.

LEY EXPONENCIAL

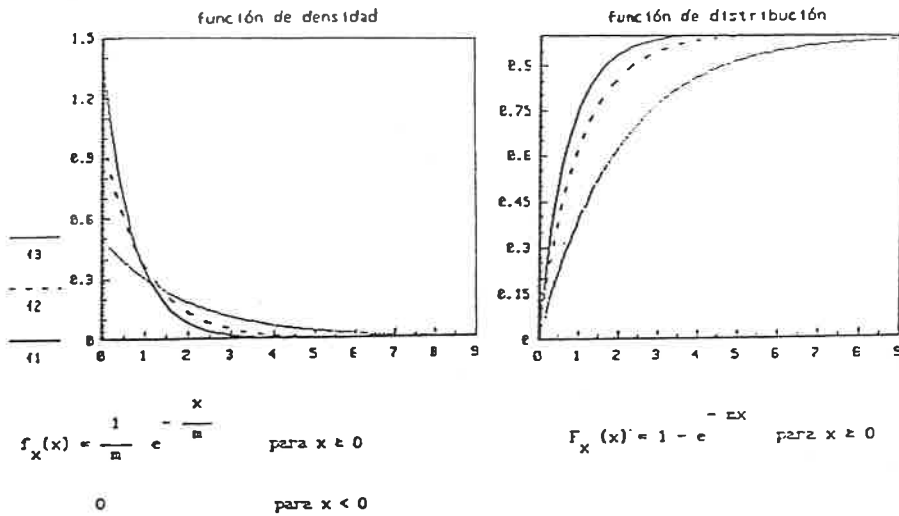


FIGURA III. 2

Funciones de densidad y de distribución de la ley exponencial. En ellas se puede apreciar la evolución de dicha ley al aumentar la potencia (la función f1 tiene una media  $m=0.7071$ , lo que corresponde a potencia unidad; f2 tiene  $m=1$  (potencia=2), y f3 tiene  $m=1.4142$  (potencia=4).

LEY RAYLEIGH

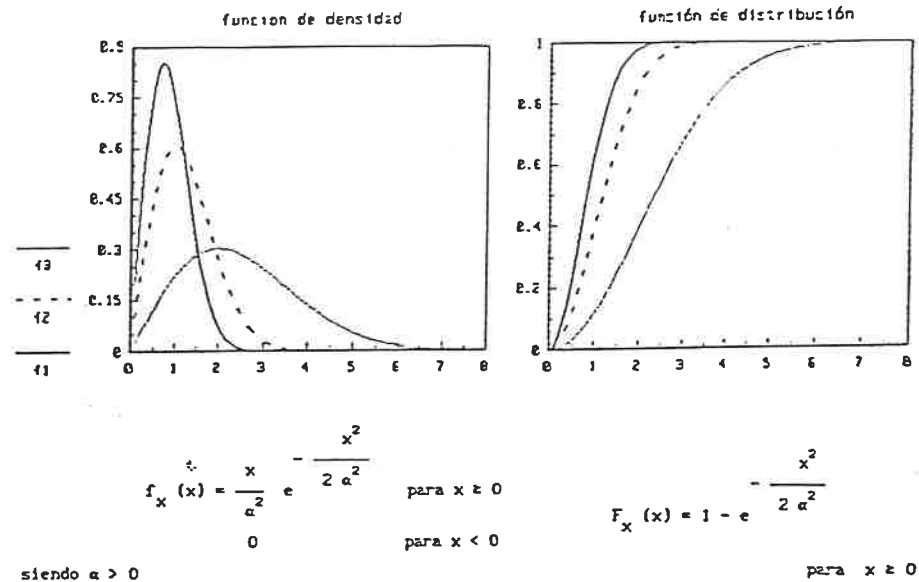
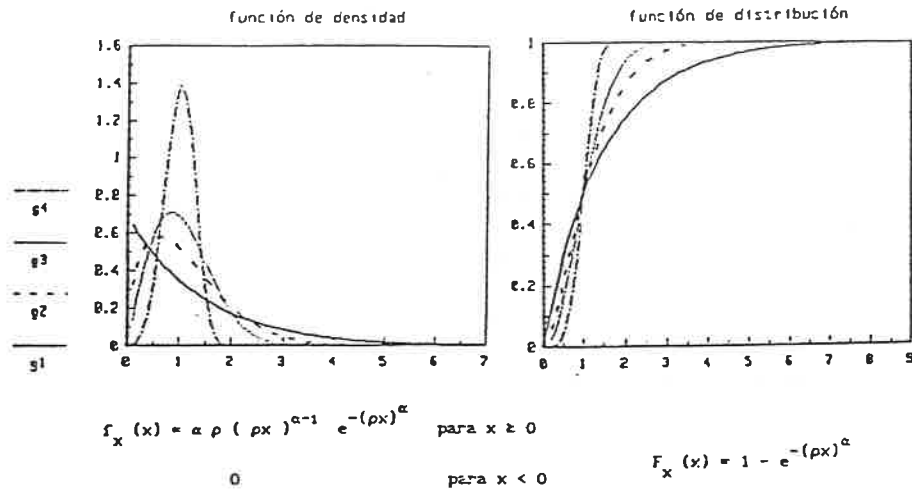


FIGURA III. 3

Representación de las funciones de densidad y distribución de la ley de Rayleigh para valores de la potencia 1 (f1), 2 (f2) y 8 (f3).



LEY WEIBULL



$$f_x(x) = \begin{cases} \alpha \rho (\rho x)^{\alpha-1} e^{-(\rho x)^\alpha} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\rho x)^\alpha} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

siendo  $\alpha, \rho > 0$   
donde  $\alpha$  es el parámetro de forma y  $\rho$  es el escala.

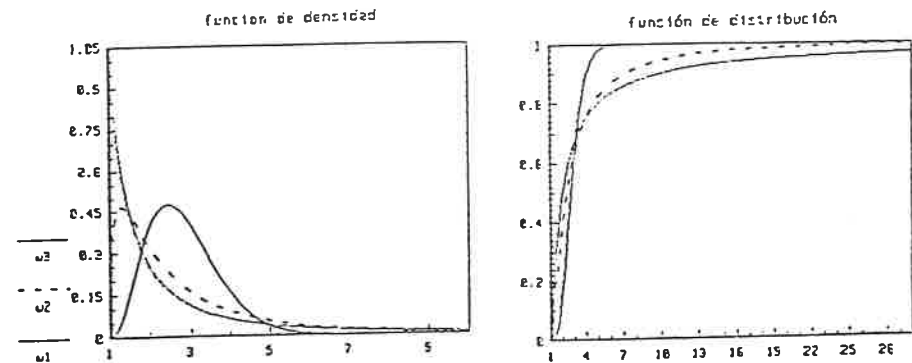
FIGURA III. 4

Representación de las funciones de densidad y distribución de la ley Weibull para v.a con la misma mediana  $X_m=1$ , variando el parámetro  $\alpha$  de la siguiente forma:  $\alpha=1$  ( $g^1$ ),  $\alpha=1.5$  ( $g^2$ ),  $\alpha=2$  ( $g^3$ ) y  $\alpha=4$  ( $g^4$ ).

La ley Weibull se particulariza en una ley exponencial para  $\alpha=1$  siendo entonces:  $E(x)=1/\rho=m$ , donde  $m$  es la de la función exponencial.

Asimismo se concreta en una ley Rayleigh para  $\alpha=2$  quedando entonces el parámetro  $\rho$  de la Weibull relacionado con el  $\alpha$  de la Rayleigh según:  $\rho^2=1/(2\alpha^2)$ .

LEY LOG-WEIBULL



$$f_x(x) = \frac{1}{x} \alpha \rho (\rho \ln(x))^{\alpha-1} e^{-(\rho \ln(x))^\alpha}$$

FIGURA III. 5

Fdp y de distribución de la ley log-Weibull, para valores de la media de su v.a Weibull asociada fijos ( $m=1$ ) y de la varianza de 0.1 ( $w^1$ ), 0.5 ( $w^2$ ) y 1 ( $w^3$ ).

LEY LOG-NORMAL

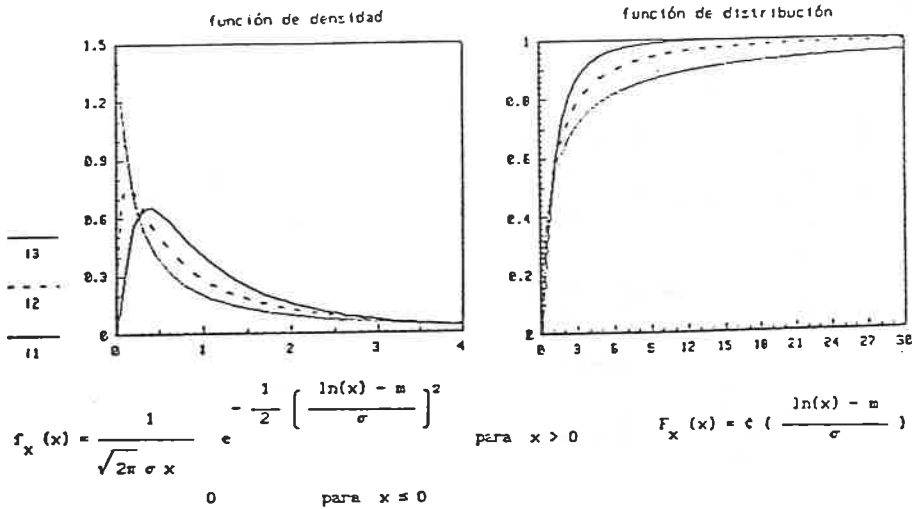


FIGURA III. 6

Funciones de densidad y distribución de la ley log-normal para un valor de la mediana constante  $X_m=1$ , o sea la media de la v.a normal asociada tiene media nula. La varianza de dicha v.a asociada toma los valores 1 para 11 (potencia unidad), 2 para 12, y 4 para 14.

DISTRIBUCION K o de HANKEL

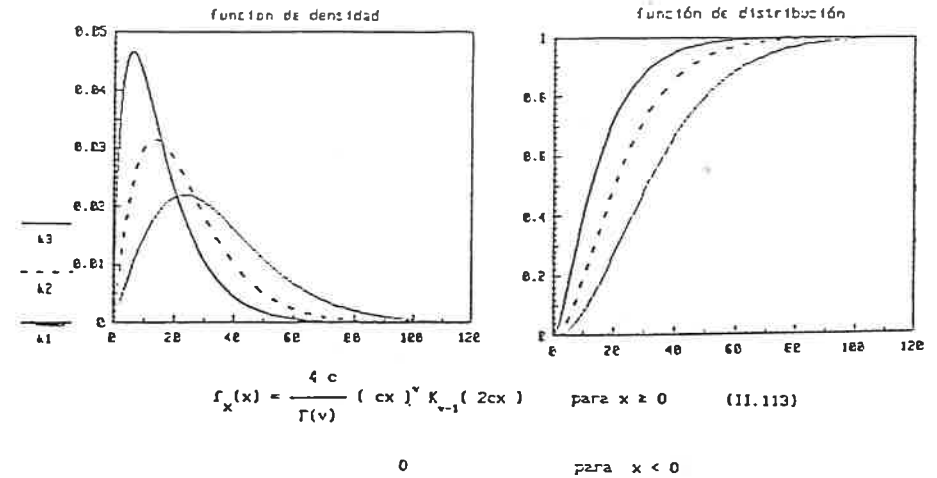


FIGURA III. 7

Donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma y  $K_v(\cdot)$  es la función modificada de Bessel de segunda especie y orden  $v$ ;  $c$  y  $v$  son dos parámetros reales positivos, siendo el primero el factor de escala y el segundo el de forma.

Funciones de densidad y distribución de la ley K. En ellas se puede apreciar la evolución de dicha ley al variar el parámetro  $v$  desde 1 ( $k^1$ ), 2 ( $k^2$ ) y 4 ( $k^3$ ) manteniendo constante el parámetro  $c$  al valor 0.05.

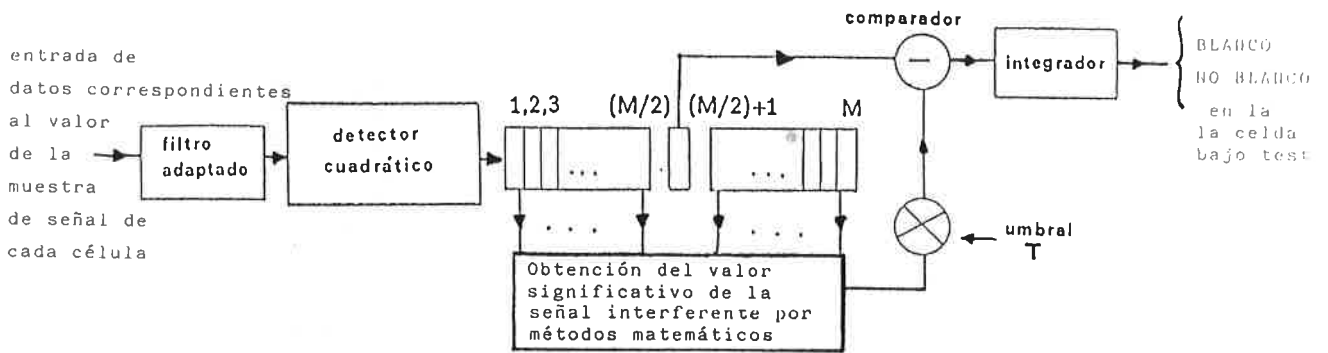


FIGURA III. 8

Diagrama de bloques de un CFAR espacial generalizado.

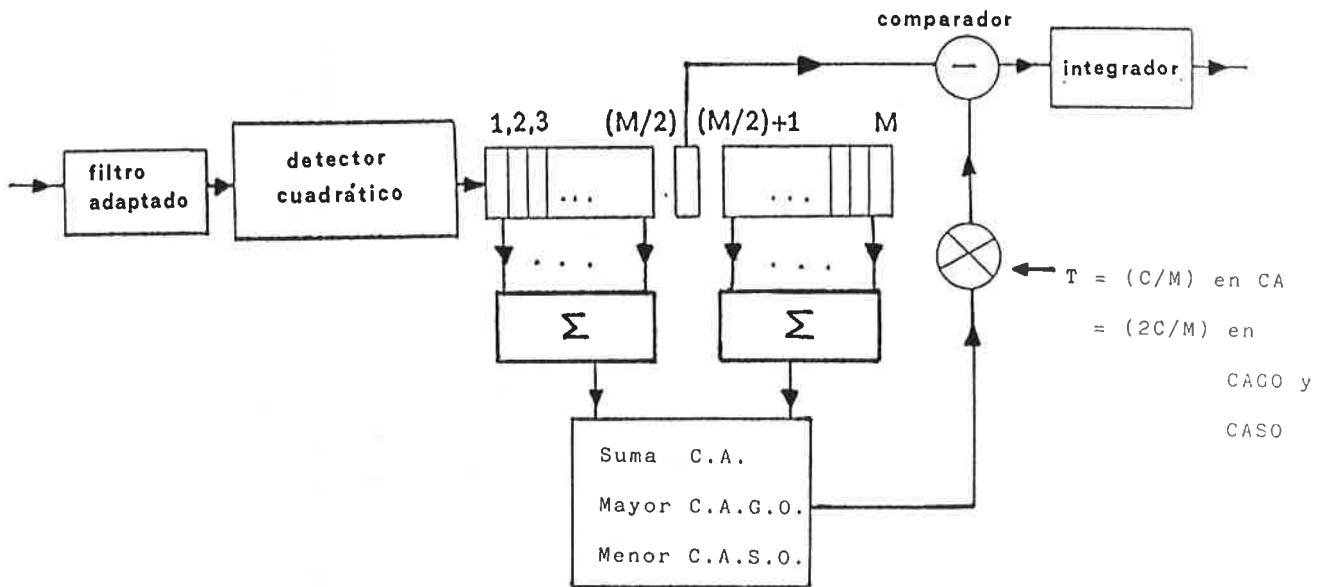


FIGURA III. 9

Diagrama de bloques de un CFAR Promediador y de sus modificaciones "el mayor de" (CAGO) y "el menor de" (CASO).

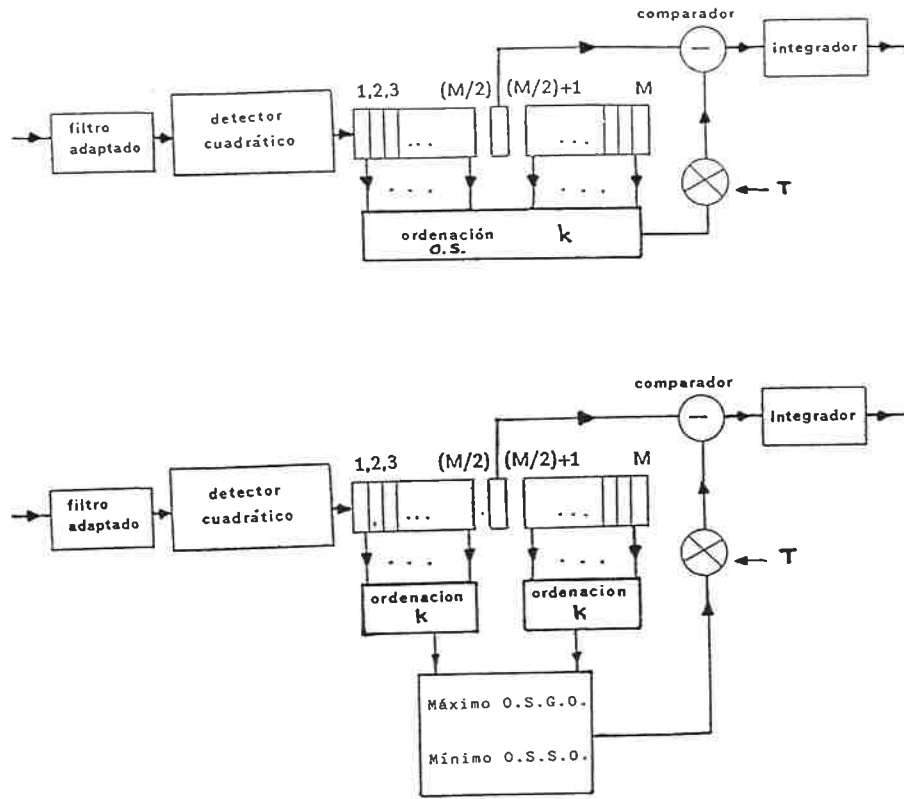


FIGURA III. 10

Diagrama de bloques de un CFAR de Estadísticos Ordenados (OS CFAR) y de sus modificaciones "el mayor de" (OSGO) y "el menor de" (OSSO).

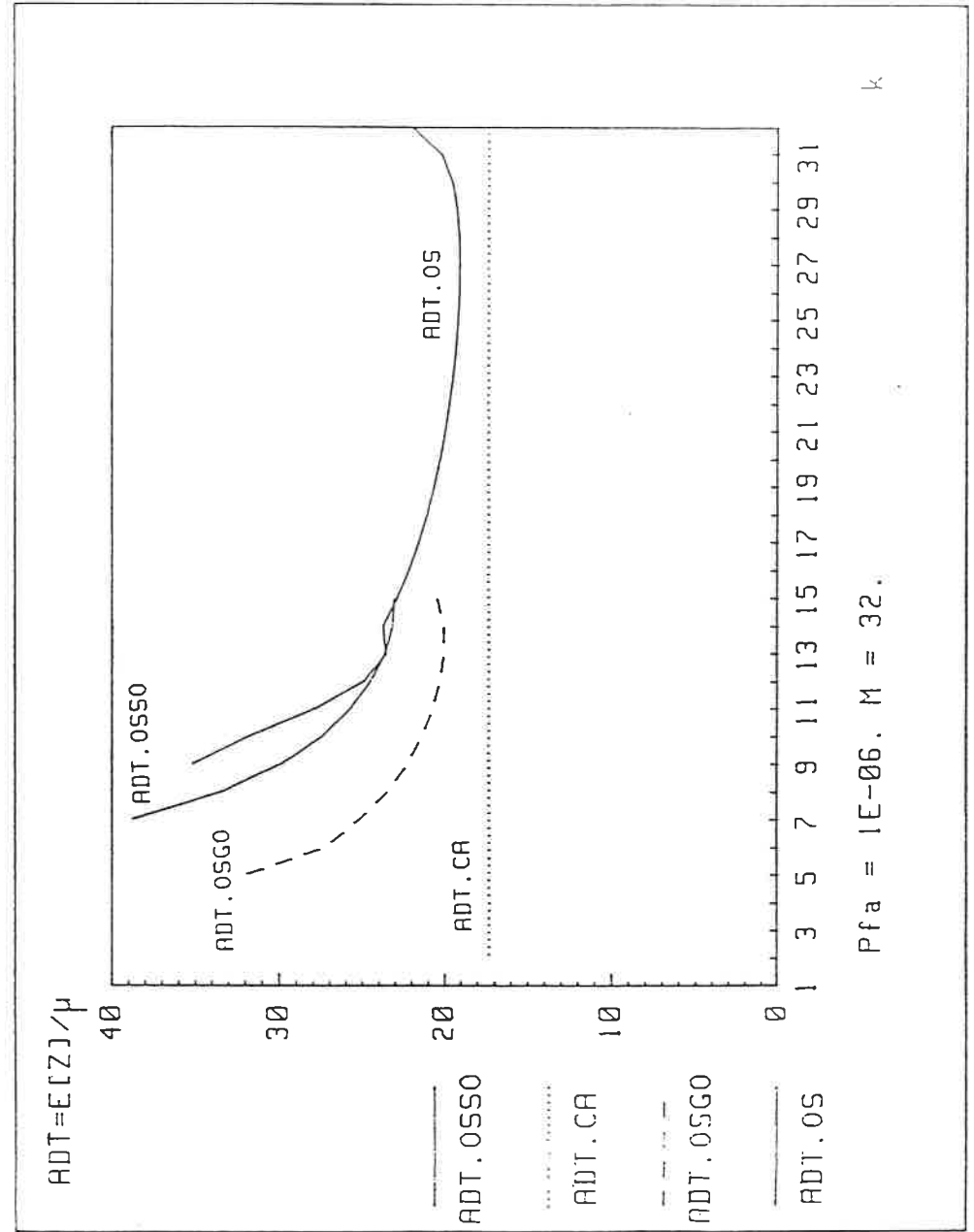


FIGURA III. 11

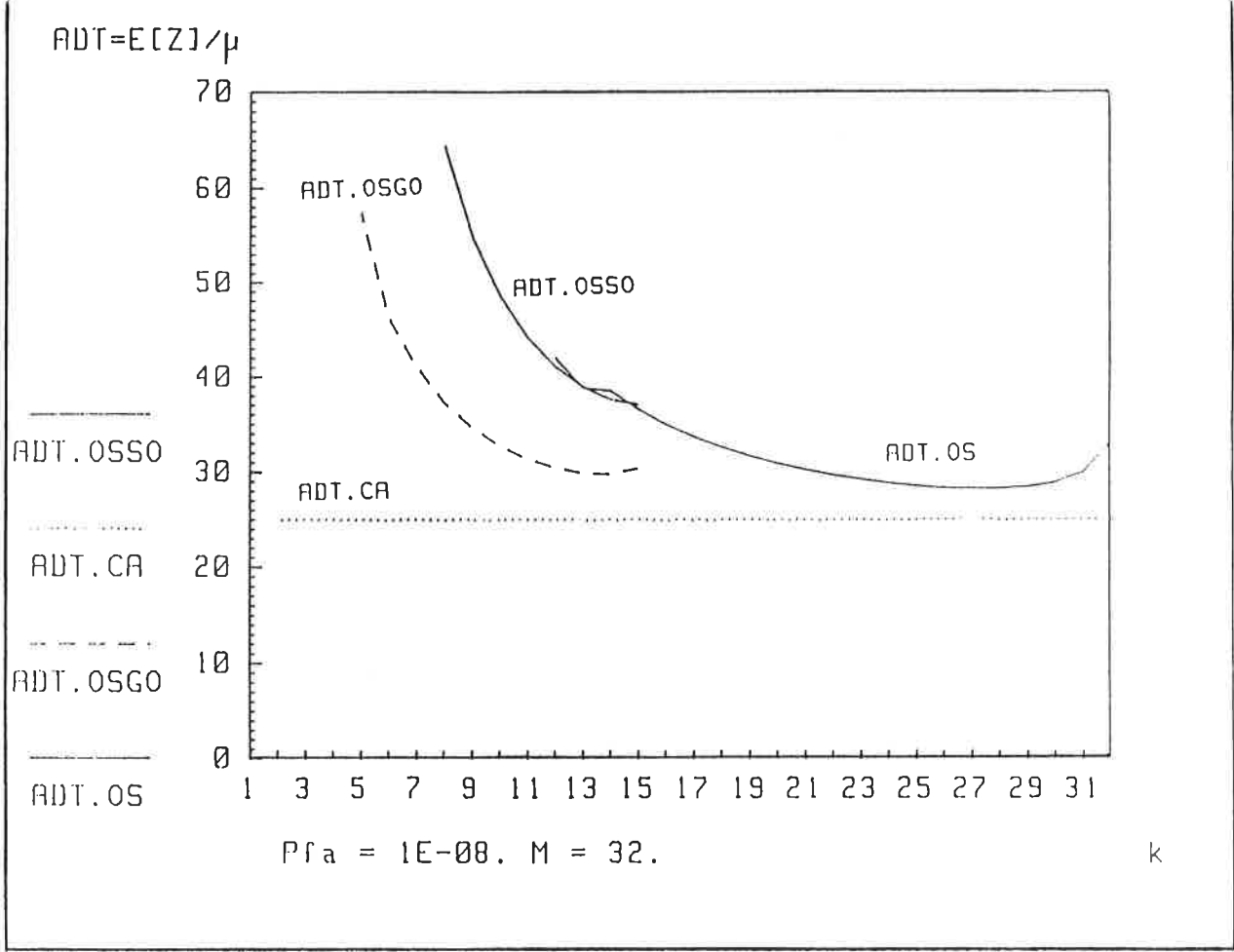


FIGURA III. 12

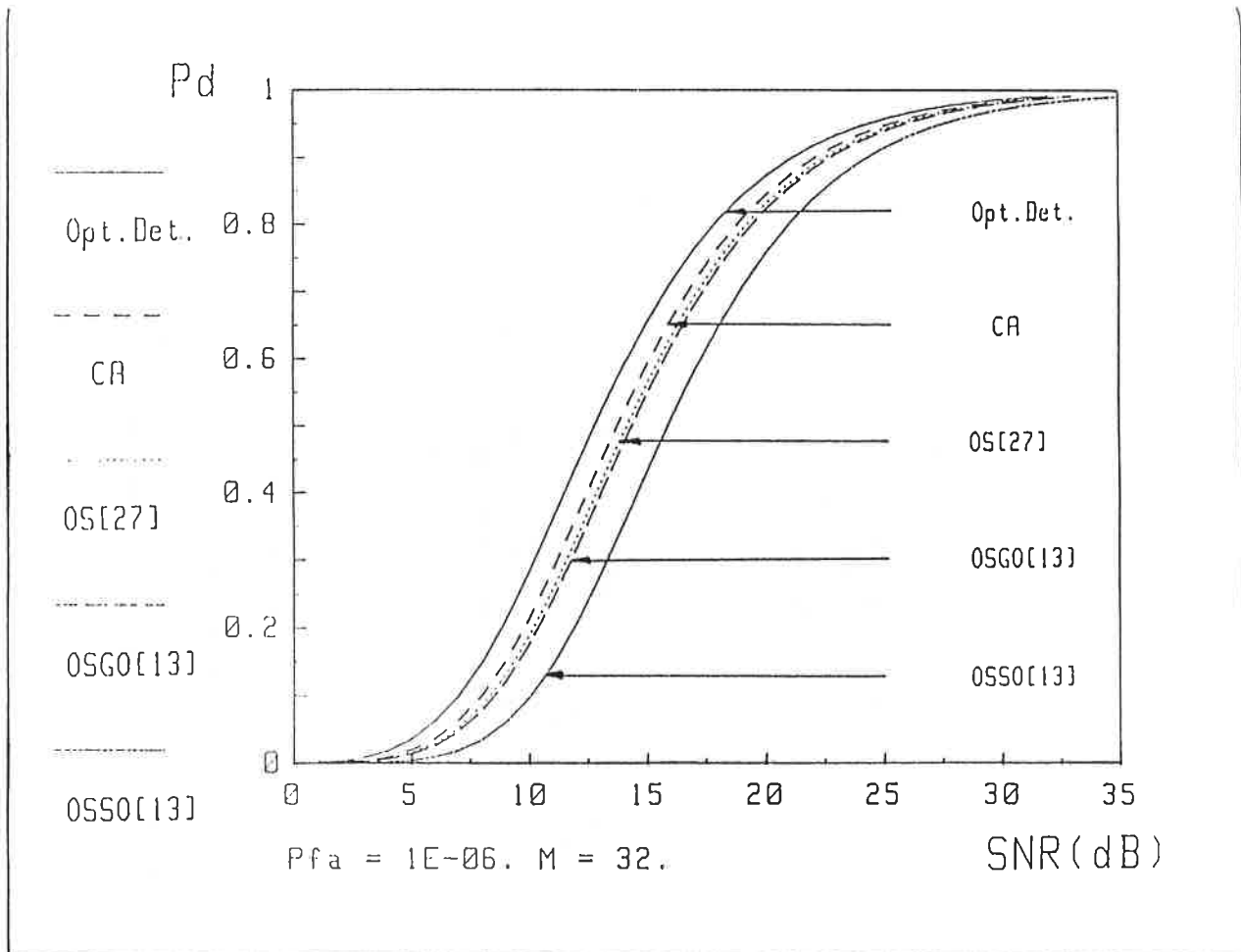


FIGURA III. 13

Probabilidades de Detección de los diferentes sistemas CFAR en función de la relación señal a ruido para una Pfa de 10 E-6.

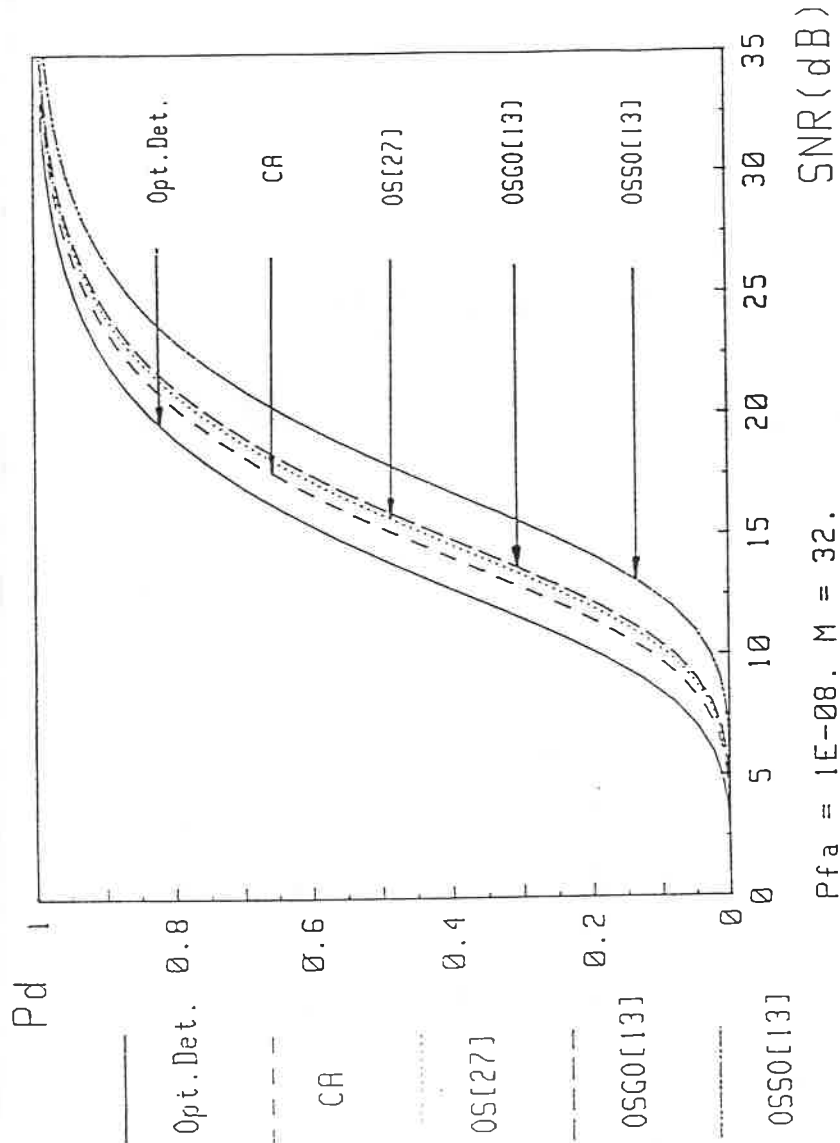


FIGURA III. 14

Probabilidades de Detección de los diferentes sistemas CFAR en función de la relación señal a ruido para una  $P_{fa}$  de  $10^{-8}$ .

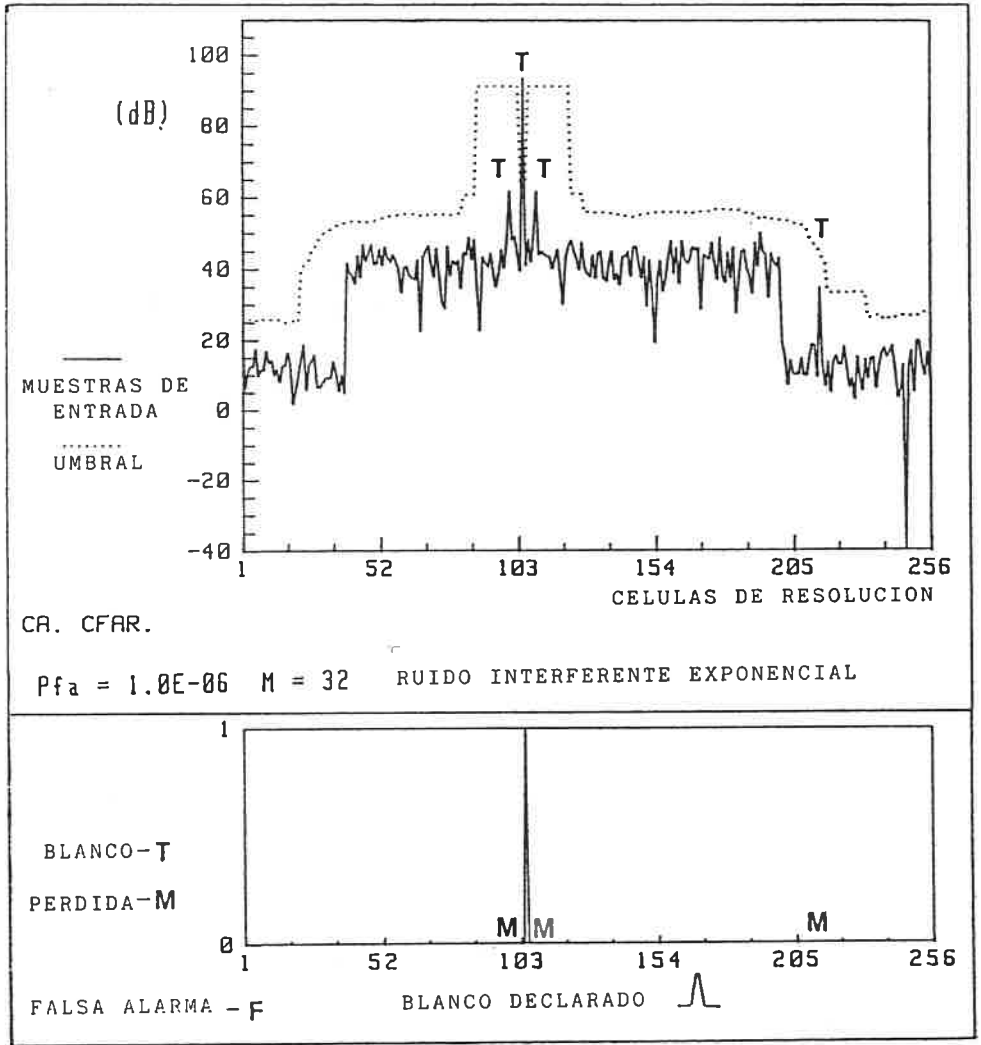


FIGURA III. 15

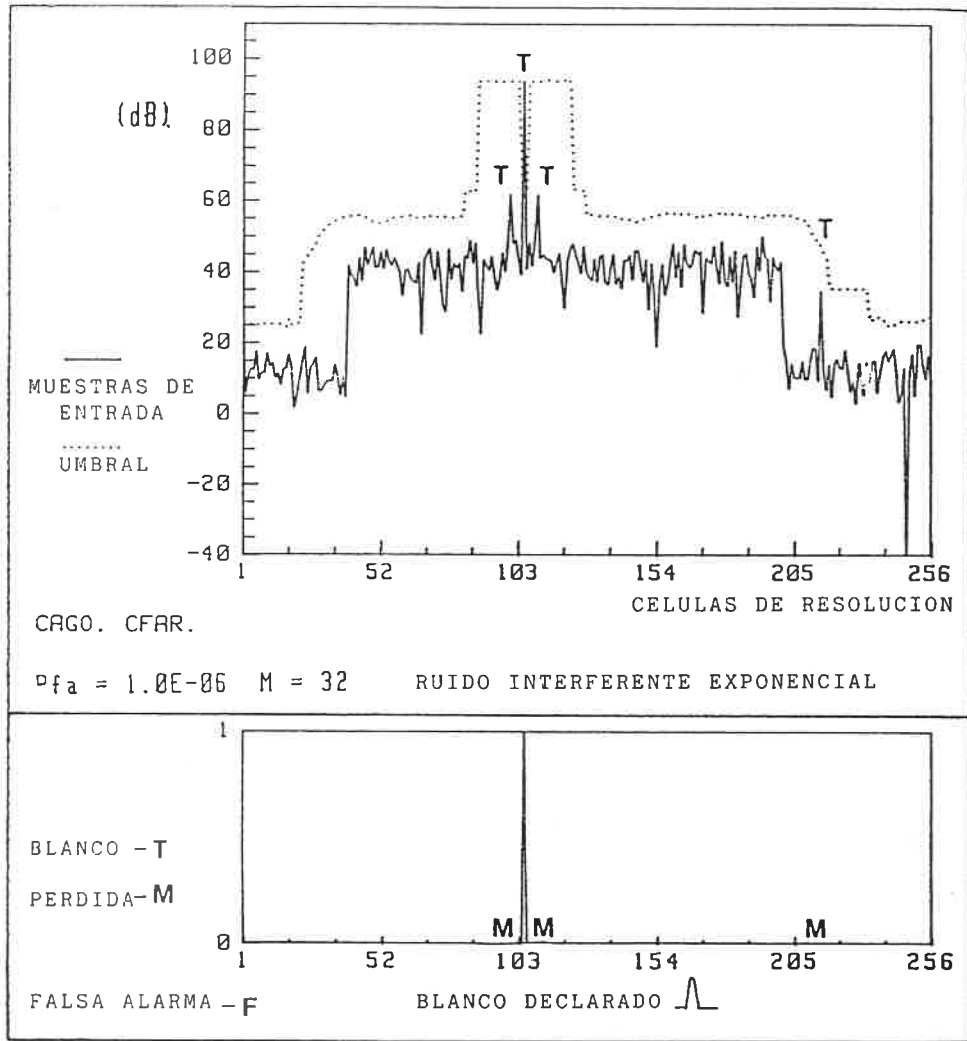


FIGURA III. 16

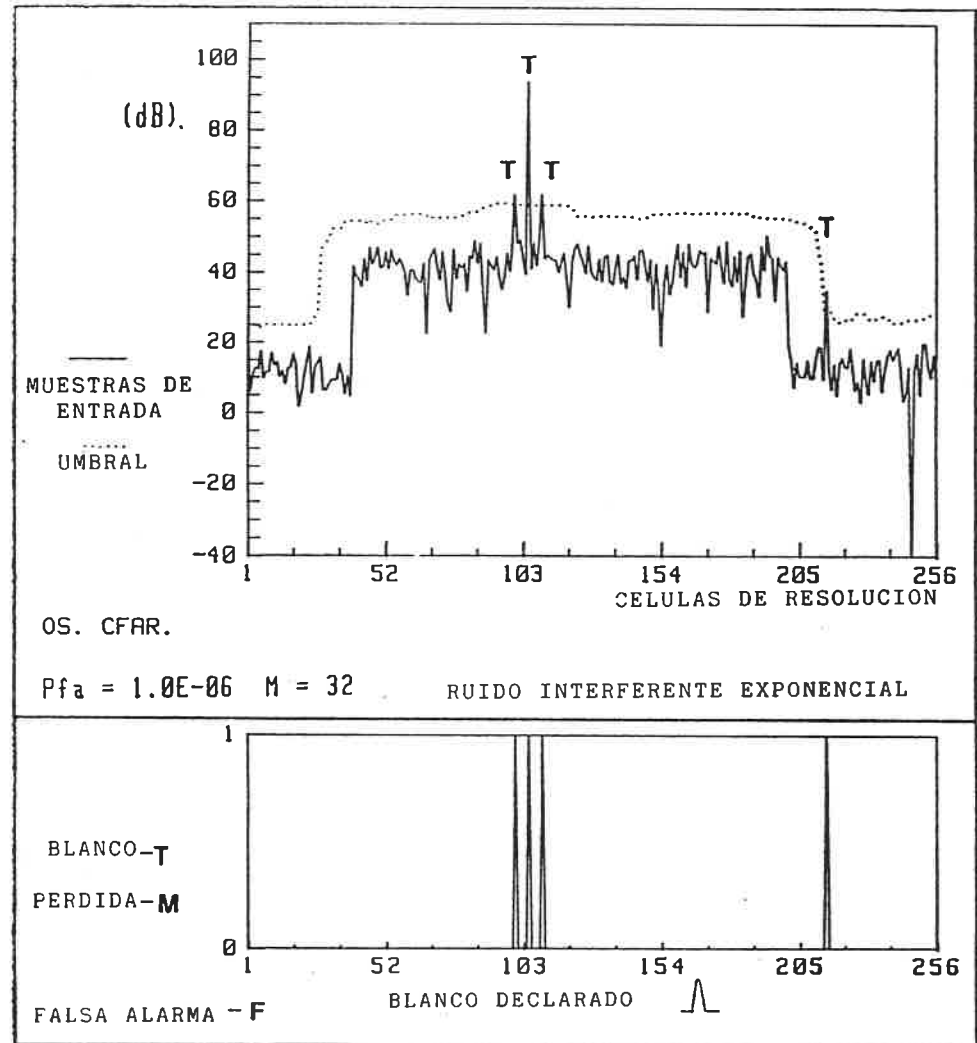


FIGURA III. 17

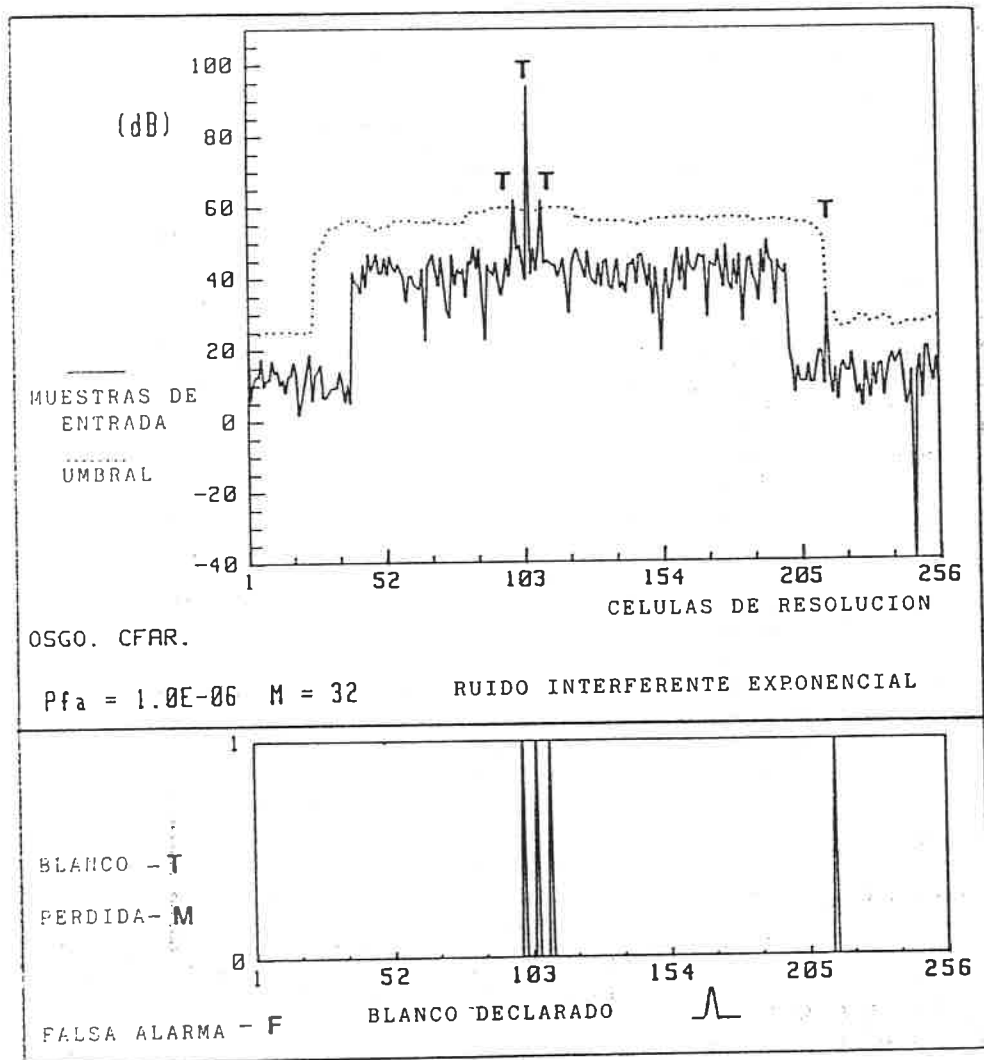


FIGURA III. 18

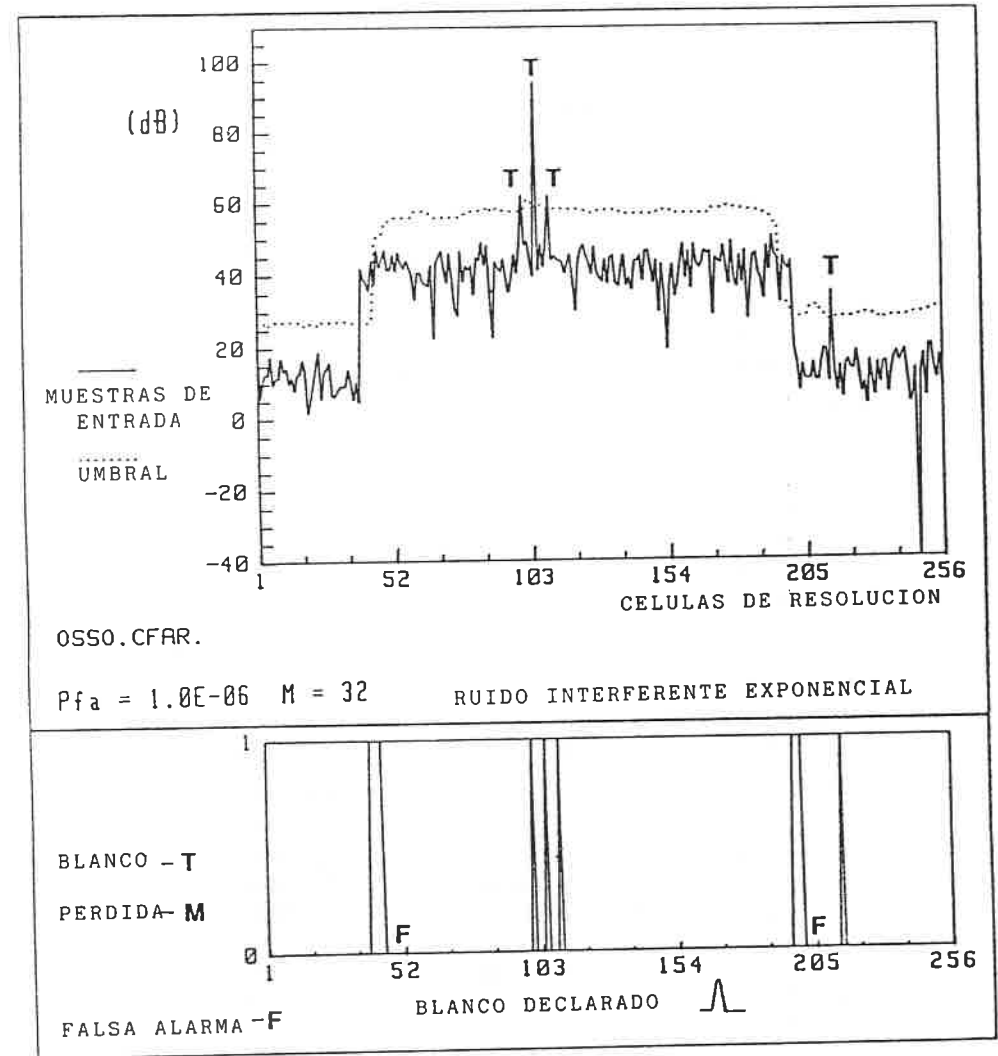


FIGURA III. 19



TABLA 3.1

Factor de escala T para OS, OSGO y OSSO CFAR con interferencia exponencial para  $M=32$  y  $P_{fa} = 10 E-6$

K	$1 \leq K \leq M$ OS CFAR	$1 \leq k \leq m/2$	
		OSGO CFAR	OSSO CFAR
32	5.440460		
31	6.579733		
30	7.606999		
29	8.615643		
28	9.644402		
27	10.71759		
26	11.85498		
25	13.07535		
24	14.39853		
23	15.84684		
22	17.44654		
21	19.22939		
20	21.23478		
19	23.51253		
18	26.12690		
17	29.16228		
16	32.73206		
15	36.99163	7.263981	11.79037
14	42.16010	9.073313	14.83076
13	48.55500	11.05236	18.40066
12	56.65329	13.32843	22.80241
11	67.19936	16.04618	28.46141
10	81.41584	19.40623	36.05826
9	101.4347	23.71711	46.77891
8		29.49240	62.87313
7		37.66004	89.07619
6		50.07664	
5		71.00034	

TABLA 3.2

Factor de escala T para OS, OSGO y OSSO CFAR con interferencia exponencial para  $M=32$  y  $P_{fa} = 10 E-8$

K	$1 \leq K \leq M$ OS CFAR	$1 \leq k \leq m/2$	
		OSGO CFAR	OSSO CFAR
32	8.169095		
31	9.778580		
30	11.26185		
29	12.73983		
28	14.26541		
27	15.87409		
26	17.59633		
25	19.46286		
24	21.50714		
23	23.76814		
22	26.29271		
21	29.13885		
20	32.37988		
19	36.11030		
18	40.45426		
17	45.57830		
16	51.71125		
15	59.17445	10.81250	18.97285
14	68.43278	13.50601	24.07937
13	80.18070	16.51451	30.29332
12	95.49571	20.04474	38.23946
11		24.34975	48.86809
10		29.79788	63.79190
9		36.97913	85.98831
8		46.91550	121.49221
7		61.54199	
6		84.95542	
5		127.2706	

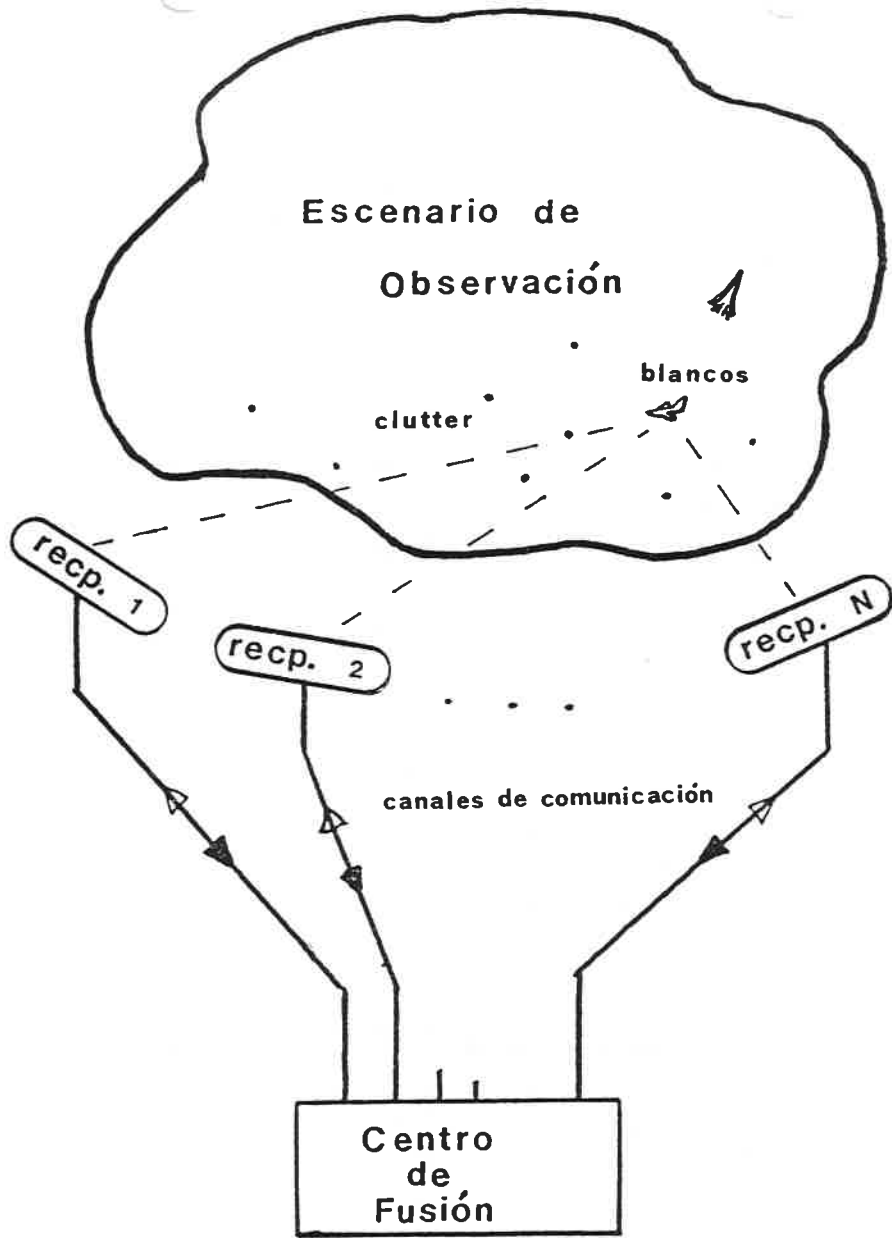


FIGURA IV. 1

Esquema ilustrativo del problema de la detección distribuida.

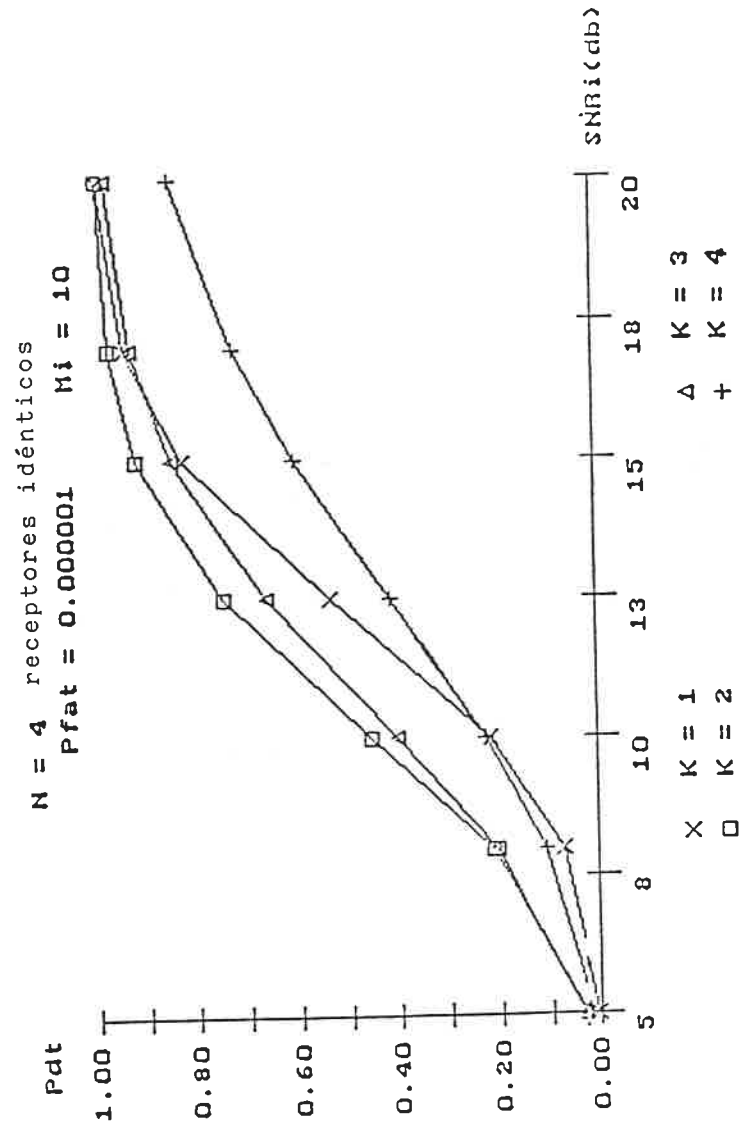


FIGURA IV. 2

Probabilidad de Detección en el Centro de Fusión de Datos para 4 receptores iguales en función de la relación señal a ruido mínima de los receptores, para cuatro reglas de fusión.





