

ADAPTACION DE IMPEDANCIAS MEDIANTE REDES SELECTIVAS

POR JOSE B. MARIÑO

E. T. S. I. de Telecomunicación de Tarrasa
(Barcelona)

RESUMEN

Del teorema de la máxima transferencia de potencia se deduce que, para que una carga caracterizada por una impedancia Z_L reciba la máxima potencia útil del generador que la alimenta, ha de verificarse:

$$Z_L = Z_g^* \quad (1)$$

donde Z_g^* es la impedancia conjugada del generador. En el caso que ambas sean reales (resistivas puras) (1) se transforma en

$$R_L = R_g \quad (2)$$

En la práctica dichas igualdades se cumplirán difícilmente a priori, pues generador y carga vendrán impuestos de antemano en la casi totalidad de los casos. Nuestro interés se centrará, pues, en aquellas redes que nos proporcionen la adaptación (1) o (2) entre dos impedancias que en principio no la verifican.

En nuestro estudio nos restringimos al caso de dos resistencias puras, simplificación que nos permite utilizar la teoría de síntesis de filtros, grandemente desarrollada. Siguiendo la teoría de Darlington, se presenta la generalización de las células adaptadoras en L. Para ello se hace uso de la teoría de la aproximación, discutiéndose detenidamente el caso de los polinomios de Butterworth y Chebychew e ilustrándose los procesos analíticos de diseño por medio de ejemplos totalmente resueltos.

Supuesto sobradamente conocido, prescindimos de detenernos a considerar al transformador como acoplador de impedancias.

1. TEOREMA DE EWERTT

Este teorema, cuya realidad física es evidente, enuncia: «Cuando se adaptan mediante una red no disipativa dos impedancias (ver fig. 1), conseguida la adaptación en una sección (la a , por ejemplo), queda automáticamente lograda en to-

das las demás secciones (b y c)». Por tanto, usando redes compuestas de bobinas y condensadores, nuestro problema se resuelve adaptando en una sección de la red. Estas redes poseen, además, la ventaja de que en la adaptación no se disminuye la potencia útil que puede entregar el generador a la carga, como sucede adaptando mediante atenuadores. Sin embargo, presentan el inconveniente de que la eficacia de su función es selectiva en frecuencias.

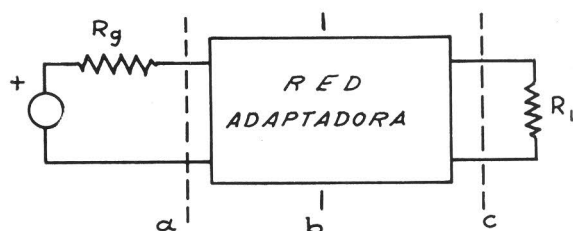


FIGURA 1

2. SECCION EN L

Las configuraciones de filtros paso bajo y paso alto son grandemente utilizadas en estos menesteres. Las células más sencillas se presentan en la figura 2.

$$L_1 = \frac{\Delta}{2\pi f_0} \quad C_1 = \frac{1}{2\pi f_0 B} \quad L_2 = \frac{B}{2\pi f_0} \quad C_2 = \frac{1}{2\pi f_0 \Delta}$$

a) b)

$$\Delta = \sqrt{R_2(R_1 - R_2)} \quad B = R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$$

a) b)

En ella, R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$) son las resistencias a adaptar, independientemente de su función de generador o carga; con ello se evidencia que la reactancia en paralelo ha de situarse del lado de la mayor de ellas. Estas redes adaptan a una sola frecuencia, precisamente f_0 , con un ancho de banda a 3 dB, dado por:

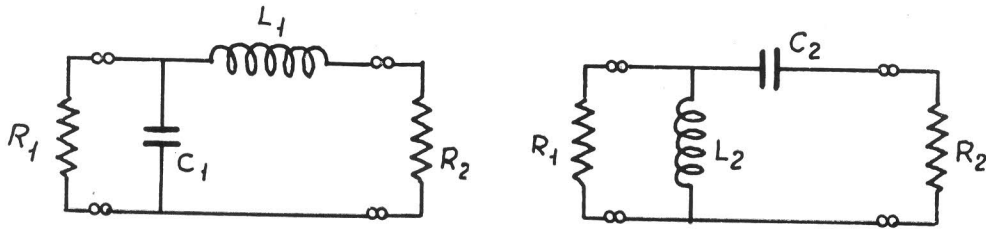


FIGURA 2

$$B_a = f_0 \left[\sqrt{1 + \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{n-1}} - \sqrt{1 - \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n-1}} \right]$$

$$B_b = f_0 \left[\left(1 - \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

respectivamente de las redes de la figura a) y b),
siendo $n = \frac{R_1}{R_2}$.

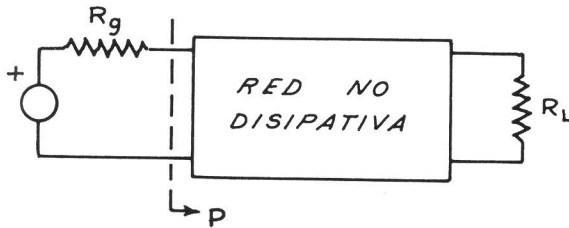


FIGURA 3

3. PERDIDAS DE INSERCIÓN

De la teoría de Darlington se conoce que

$$|\rho|^2 = 1 - t \frac{P_2}{P_{20}}$$

donde

$$t = \frac{4 R_g R_L}{(R_g + R_L)^2} \quad \text{y} \quad t < \frac{P_{20}}{P_2} < \infty$$

son las pérdidas de inserción de la red. Cuando

$$\frac{P_{20}}{P_2} = t,$$

el coeficiente de reflexión verifica

$$|\rho| = \rho = 0$$

es decir, a la entrada de la red hay adaptación de impedancias, y, como ésta es reactiva pura, por el teorema de Eweritt también se encuentra adaptada la carga.

Las pérdidas de inserción de redes adaptadoras con configuraciones de filtros paso bajo han de tomar el valor de 1 a la frecuencia cero para evitar el uso de un transformador ideal, ya que a esta frecuencia la red asintótica del filtro es un

cortocircuito. Lo mismo se puede decir de la configuración paso alto a la frecuencia infinito.

Con esto tratemos de sintetizar la red de la figura 2 mediante

$$\frac{P_{20}}{P_2}$$

Esta ha de tener la expresión

$$\frac{P_{20}}{P_2} = a s^4 + b s^2 + 1 \quad (3)$$

y hemos de determinar a y b con la condición de que a la frecuencia normalizada 1 (frecuencia de adaptación) $\frac{P_{20}}{P_2}$ tenga un mínimo de valor t .

Así:

$$\frac{\delta P_{20}/P_2}{\delta s} = 4 a s^3 + 2 b s = 2 s (2 a s^2 + b)$$

luego, $2 a = b$; y de (3):

$$t = a - b + 1$$

y a y b toman los valores

$$a = 1 - t = \frac{1}{2} b$$

Ejemplo. Supongamos $R_g = 1$, $R_L = 0,5$ y $w_0 = 1$, entonces:

$$t = \frac{8}{9}$$

y

$$\frac{P_{20}}{P_2} = 0,11 s^4 + 0,22 s^2 + 1$$

con lo que

$$|\rho|^2 = \frac{(s^2 + 1)^2}{s^2 + 2s^2 + 9}$$

y

$$\rho = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

de donde

$$Y \text{ o } Z = s + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}$$

y considerando Y obtenemos la red de la figura 4, cuyos valores corresponden a los que se obtendrían aplicando las expresiones de la figura 2 a). Si se

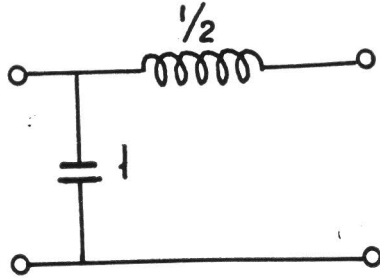


FIGURA 4

quisiese obtener la configuración de la figura 2 b), aplicamos la transformación de frecuencia $\lambda = \frac{1}{s}$ (paso bajo — paso alto) y obtendremos la célula de la figura 5, que corresponde a los cálculos reseñados en la figura 2 b).

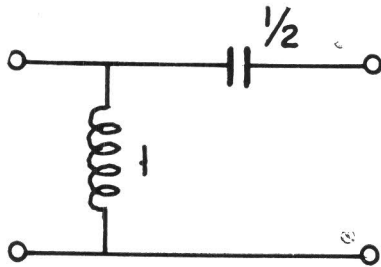


FIGURA 5

4. UTILIZACION DE LAS FUNCIONES DE BUTTERWORTH

Si deseamos una respuesta más plana alrededor de $w_0 = 1$ que la obtenida con una simple sección L, como en el caso anterior, podemos tomar:

$$\delta \frac{P_{20}}{P_2} = 2as(s^2 + 1)^n,$$

con lo cual

$$\frac{P_{20}}{P_2} = a(s^2 + 1)^{n+1} + b$$

donde a y b se pueden determinar con la condición de que

$$\frac{P_{20}}{P_2}$$

ha de verificar:

$$\begin{aligned} \frac{P_{20}}{P_2} &= 1 & \text{para } s = 0 \\ \frac{P_{20}}{P_2} &= t & \text{para } s = j \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ b &= t \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} a &= 1 - t \\ b &= t \end{aligned}$$

y podemos escribir:

$$\frac{P_2}{P_{20}} = \frac{\frac{1}{1-t}}{(s^2 + 1)^{n+1} + \frac{t}{1-t}}$$

Siguiendo el proceso de Darlington,

$$|\rho|^2 = 1 - \frac{\frac{t}{1-t}}{(s^2 + 1)^{n+1} + \frac{t}{1-t}} = \frac{(s^2 + 1)^{n+1}}{(s^2 + 1)^{n+1} + \frac{t}{1-t}}$$

con lo que se infiere que $n + 1$ ha de ser par y puede plantearse, en definitiva, que:

$$\frac{P_2}{P_{20}} = \frac{\frac{1}{1-t}}{(s^2 + 1)^{2n} + \frac{t}{1-t}} \quad (4)$$

donde n indicará el número de secciones en L en cascada que son utilizadas.

Obsérvese que (4) tiene una expresión formalmente idéntica a la función de Butterworth utilizada en filtros paso bajo, dada por

$$\frac{P_2}{P_{20}} = \frac{1}{1 + \eta^{2n}}$$

donde η es la pulsación normalizada, siempre que

$$\eta = s^2 + 1$$

Esta transformación, generalizada, tendrá un importante papel en la sección siguiente.

La analogía que se evidencia parte del hecho de que ambas funciones concentran su eficacia, respectivamente, en $w = 1$ y $w = 0$, haciendo en dichos puntos la respuesta maximalmente plana.

La frecuencia de corte 3 dB se obtiene mediante la ecuación

$$\begin{aligned} (-w_c^2 + 1)^{2n} &= + \frac{t}{1-t} \quad \left(\frac{P_{20}}{P_2} = 2t \right) \\ 1 - w_c^2 &= \pm \sqrt[2n]{\frac{t}{1-t}} \\ w_c^2 &= 1 \pm \sqrt[2n]{\frac{t}{1-t}} \end{aligned}$$

y, definitivamente,

$$w_c = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2n}{1-t}}}$$

que coincide con las dadas anteriormente para el caso $n = 1$.

Según que t sea mayor, igual o menor que un medio, hay que observar los siguientes hechos:

a) $t > 1/2$: entonces $\frac{t}{1-t} > 1$, y según aumenta n disminuye el ancho de banda.

b) $t = 1/2$: las frecuencias de corte son independientes de n , pues $\frac{t}{1-t} = 1$.

c) $t < 1/2$: con lo que $\frac{t}{1-t} < 1$, y el ancho de banda aumenta con n .

Análogamente al caso explicado en el epígrafe anterior, mediante transformación $\lambda = \frac{1}{s}$ se obtienen n secciones en L con configuración de filtro paso alto.

Ejemplo. Con dos secciones en L de respuesta maximalmente planas adaptamos a la pulsación $w = 1$ una carga de 0,1 a un generador de impedancia interna 1 (no olvidemos que en el procedimiento de Darlington R_g se normaliza siempre a la unidad).

Podemos plantear directamente

$$|\rho|^2 = \frac{(s^2 + 1)^4}{(s^2 + 1)^4 + \frac{t}{1-t}}$$

Ahora bien:

$$t = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0,1}{(1 + 0,1)^2} = 0,332$$

y

$$\frac{t}{1-t} = \frac{0,332}{0,668} = 0,518$$

Así,

$$|\rho|^2 = \frac{(s^2 + 1)^4}{(s^2 + 1)^4 + 0,518}$$

Las raíces del denominador se obtienen fácilmente:

$$s^2 + 1 = 0,6 (\pm 1 \pm j)$$

y

$$s = \pm 0,234 \pm j 1,290$$

$$s = \pm 0,405 \pm j 0,748$$

Con ello:

$$\rho = \frac{(s^2 + 1)^2}{[(s + 0,234)^2 + 1,292] [(s + 0,405)^2 + 0,748^2]} = \frac{s^4 + 2s^2 + 1}{s^4 + 1,278s^3 + 28,19s^2 + 1,726s + 1,22}$$

y

$$Z \text{ o } Y = \frac{2s^4 + 1,278s^3 + 4,819s^2 + 1,726s + 2,22}{1,278s^3 + 0,819s^2 + 1,726s + 0,22}$$

Prosiguiendo con la síntesis de Darlington obtenemos:

$$\sqrt{m_1 m_2 - n_1 n_2} = 0,7$$

y

$$Z_{11} \text{ o } Y_{11} = \frac{2s^4 + 4,819s^2 + 2,22}{1,278s^3 + 1,726s}$$

$$Z_{12} \text{ o } Y_{21} = \frac{\pm 0,7}{1,278s^3 + 1,726s}$$

$$Z_{22} \text{ o } Y_{22} = \frac{0,819s^2 + 0,22}{1,278s^3 + 1,726s}$$

Dado que solamente Z_{11} o Y_{11} tienen polos particulares y en los comunes la condición de los residuos se cumple con el signo de igualdad, la red se obtiene por desarrollo directo de Z_{11} o Y_{11} .

$$Z_{11} \text{ o } Y_{11} = 1,57s + \frac{1}{0,6s + \frac{1}{5,45s + \frac{1}{0,174s}}}$$

Adoptando Z_{11} habría de situarse al final un transformador igual de valor $1/\sqrt{10}$, lo cual nos daría una resistencia terminal de 10Ω . Obsérvese que a 10Ω le corresponde el mismo t que a 0,1.

Mediante la adopción de y_{11} , y el correspondiente transformador final de relación $\sqrt{10}$, obtenemos la red de la figura 6.

Las dos secciones en L, con los valores de sus componentes, solución del problema, se dan en la figura 7.

5. UTILIZACION DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYCHEW

Utilizando como función de pérdida la dada por la expresión

$$\frac{P_{20}}{P_2} = t + \delta V_n^2(\gamma) \quad (5)$$

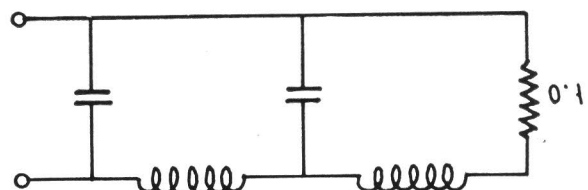


FIGURA 6

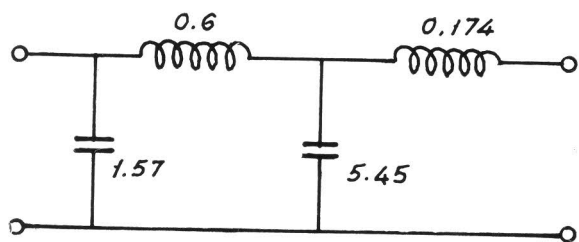


FIGURA 7

donde V_n es el polinomio de Chebyscher de orden n , y δ una constante de diseño, habrá varios valores de a a los que se logra una perfecta adaptación de impedancias. Estos valores están comprendidos entre -1 y 1 .

Si efectuamos la transformación de frecuencia

$$\eta = b - a w^2 = a s^2 + b$$

eligiendo adecuadamente a y b , podemos lograr que la adaptación de impedancias tenga lugar entre dos pulsaciones determinadas w_1 y w_2 (y entre $-w_1$ y $-w_2$). Véase la figura 8.

Para ello hacemos:

$$\begin{aligned} 1 &= b - a w_1^2 \\ -1 &= b - a w_2^2 \end{aligned}$$

de donde

$$a = \frac{2}{w_2^2 - w_1^2} \quad b = \frac{w_2^2/w_1^2 + 1}{w_2^2/w_1^2 - 1} \quad (6)$$

En la expresión (5) δ se determina según el rizado que se tolere en la banda de paso y n (número de células en L a utilizar), con la condición de que el origen ($w = 0$) $\frac{P_{20}}{P_2}$ valga la unidad. A esta pulsación, pues,

$$\frac{P_{20}}{P_2} (w = 0) = 1 = t + \delta V_n^2(b) \quad (7)$$

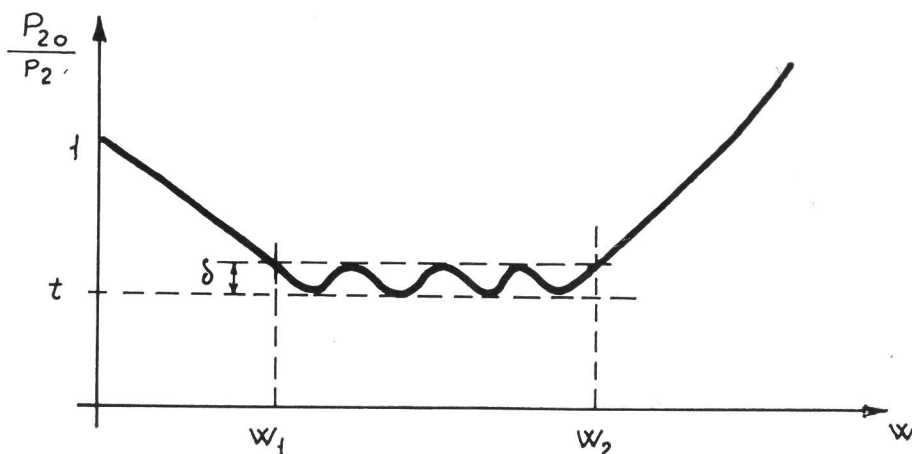


FIGURA 8

y con esta ecuación se determina n por exceso (advuértase que n es un entero). Este n ha de ser tal que

$$V_n(b) \geq K = \sqrt{\frac{1-t}{\delta}}$$

Este n adoptado, con b calculado anteriormente, no cumple generalmente (7), y por tanto de (7) ha de calcularse un b de forma que dicha ecuación se verifique exactamente. Se obtiene:

$$b' = \frac{1}{2} \left[(k + \sqrt{k^2 - 1})^{\frac{1}{n}} + (k + \sqrt{k^2 - 1})^{-\frac{1}{n}} \right]$$

y $b' \leq b$ y de (6) se advierte que

$$\frac{w_2}{w_1} \leq \frac{w_2'}{w_1'}$$

con lo cual la anchura de banda queda aumentada. Ahora a hemos de valorarlo de modo que el nuevo ancho de banda se encuentre en el margen deseado (obsérvese que b depende únicamente de la razón de las frecuencias límites y a es quien les proporciona su exacta dimensión).

De (6) podemos deducir que

$$\left(\frac{w_2'}{w_1'} \right)^2 = \frac{b' + 1}{b' - 1}$$

al tiempo que

$$a = \frac{2/w_1'^2}{\left(\frac{w_2'}{w_1'} \right)^2 - 1} = \frac{2/w_2'^2}{1 - \left(\frac{w_1'}{w_2'} \right)^2}$$

Para la adopción de a podemos seguir tres criterios principales:

a) Tomar $w_1 = w_1'$, con lo que

$$a = \frac{b' - 1}{w_1'^2}$$

b) Permanece $w_2 = w_2$, y por tanto:

$$a = \frac{b' + 1}{w_2^2}$$

c) Distribuir el aumento de anchura de banda obtenido en partes iguales a las bajas y altas frecuencias. Según esto:

$$\begin{aligned} w'_2 &= w_2 + \Delta w \\ w'_1 &= w_1 - \Delta w \end{aligned}$$

y tomando

$$r = \frac{w'_2}{w'_1} = \sqrt{\frac{b' + 1}{b' - 1}} = \frac{w_2 + \Delta w}{w_1 - \Delta w}$$

obtenemos

$$\Delta w = \frac{r \cdot w_1 - w_2}{1 + r}$$

que siempre será positivo. Con ello:

$$w'_2 = \frac{r}{1+r} (w_1 + w_2) \quad w'_1 = \frac{1}{1+r} (w_1 - w_2)$$

y de (6):

$$a = \frac{r + 1}{r - 1} \frac{2}{(w_1 + w_2)^2}$$

Así, pues, determinados t , δ , n , a y b tendremos ya determinada

$$\frac{P_{20}}{P_2}$$

con lo cual podremos proseguir con la síntesis de Darlington.

Ejemplo. Diseñar una red adaptadora con un $t = 0,5$, un rizado tolerable de 0,79 dB y frecuencias límites mínimas normalizadas 1 y 2.

Así tenemos que

$$10 \log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) = 0,79$$

de donde $\delta = 0,1$, y con ello:

$$K = \sqrt{\frac{1-t}{\delta}} = \sqrt{5} = 2,236$$

Calculemos también

$$b = \frac{4 + 1}{4 - 1} = \frac{5}{3}$$

y procedemos a la estimación de n , a saber:

$$V_1(b) = \frac{5}{3} < K$$

$$V_2(b) = 2 \left(\frac{5}{3} \right)^2 - 1 = \frac{41}{9} > k$$

por tanto, hemos de tomar $n = 2$. Con ello, el valor de b' será:

$$b' = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{5} + \sqrt{5-1})^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{5} + \sqrt{5-1})^{-\frac{1}{2}} \right] = 1,273$$

Adoptando un reparto equitativo en el ancho de banda:

$$r = \sqrt{\frac{b' + 1}{b' - 1}} = 2,88$$

$$w'_2 = \frac{r}{1+r} (w_1 + w_2) = 2,23$$

$$w'_1 = \frac{w'_2}{r} = 0,77$$

$$a = \frac{r + 1}{r - 1} \frac{2}{(w_1 + w_2)^2} = 0,456$$

Con lo cual la transformación es:

$$\eta = 0,456 s^2 + 1,273$$

Así,

$$\frac{P_{20}}{P_2} = 0,5 + 0,1 V_2^2(\eta)$$

donde:

$$V_2(\eta) = 2\eta^2 - 1$$

Por tanto,

$$|\rho|^2 = 1 - 0,5 \frac{1}{0,5 + 0,1 V_2^2} = \frac{0,1 V_2^2}{0,5 + 0,1 V_2^2}$$

Calculemos las raíces del denominador. Lo haremos, en primer lugar, en términos de η , y mediante la ecuación de la transformación obtendremos las raíces según s .

Según sabemos, dichas raíces son:

$$\eta = \pm \cos \frac{\pi}{4} Ch y_2 \pm j \sin \frac{\pi}{4} Sh y_2 \quad (8)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} Ch y_2 \\ Sh y_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\sqrt{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

y

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{t}{\delta}} = \sqrt{5} = 2,236$$

Nótese en (8) que η no es la frecuencia generalizada ($\lambda = j\eta$).

Operando:

$$Ch y_2 = 1,313 \quad Sh y_2 = 0,861$$

con lo que

$$\eta = 0,707 (\pm 1,313 \pm j 0,861) = \pm 0,928 \pm j 0,602$$

Así,

$$0,466 s^2 + 1,273 = \pm 0,928 \pm j 0,602$$

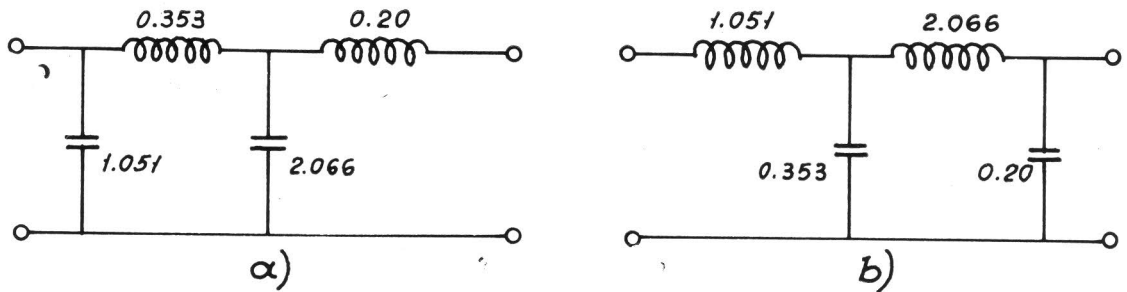


FIGURA 9

y

$$0,456 s^2 = -2,201 \pm j 0,602$$

$$0,456 s^2 = -0,345 \pm j 0,602$$

de donde

$$s^2 = -4,829 \pm \pm j 1,320$$

$$s^2 = -0,756 \pm \pm j 1,320$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$s = \pm 0,335 \pm j 2,211$$

$$s = \pm 0,616 \pm j 1,608$$

Así,

$$= \frac{\left(\frac{1}{0,456}\right)^2 (0,456 + 1,273)^2 - 1}{(s + 0,335)^2 + 2,211^2 (s + 0,616)^2 + 1,608^2} =$$

$$= \frac{s^4 + 5,582 s^2 + 5,375}{s^4 + 1,903 s^3 + 7,346 s^2 + 7,183 s + 7,6}$$

con lo que

$$Z \text{ o } Y = \frac{2 s^4 + 1,903 s^3 + 12,928 s^2 + 7,183 s + 12,975}{1,903 s^3 + 1,764 s^2 + 7,183 s + 2,225} =$$

$$= 1,051 s + \frac{1}{0,353 s + \frac{1}{2,066 s + \frac{1}{0,2 s + 0,17}}}$$

Las redes, según la impedancia de carga normalizada sea 0,17 o 5,83 (ambas correspondientes a $t = 0,5$), se dan, respectivamente, en la figura 9 a) y b).

CONCLUSION

El estudio realizado hasta aquí no pretende, ni con mucho, ser exhaustivo. Más bien se limita a presentar ideas que puedan servir de base a profundizaciones posteriores. En este sentido, el lector puede tratar de aplicar la transformación

$$\eta = a s^2 + b$$

a las funciones de Butterworth. No es un asunto difícil.

De los métodos presentados el más completo es el de la sección precedente, aunque no siempre hay que recurrir a él, pues una simple célula en L cumple perfectamente en muchos casos.

Las configuraciones filtro paso bajo o paso alto aquí tratadas no son las únicas posibles para la adaptación de impedancias, aunque sí las más sencillas y prácticamente las únicas utilizadas.

Aunque en el presente trabajo no se ha hecho explícito, el método propuesto puede ser utilizado en el diseño de adaptadores en cuarto de longitud de onda para microondas. La llave de dicha utilización es la transformada de Richards.

BIBLIOGRAFIA

Sobre la síntesis de Darlington, así como las propiedades de los polinomios aquí utilizados, puede consultarse:
 W. WARZANSKYJ: "Redes". Tomo II. Redes selectivas.
 Departamento Publicaciones E. T. S. I. T. Madrid.