STOCHASTICA Vol. V nº 1 (1981)

MEDIDAS Y PROBABILIDADES EN ESTRUCTURAS ORDENADAS

Maria Congost Iglesias

ABSTRACT

This paper is concerned with lattice-group valued measures for which the σ-additivity is defined by means of the order convergence properties. In the first section we treat the analogues for such order-measures with values in a Dedekind complete lattice-group of the Jordan, Lebesgue and Yosida-Hewitt decompositions. The second section deals with the construction of an integral for functions with respect to an order-measure, both taking their values in a Dedekind σ-complete lattice-ring. Analogues of the monotone-convergence, dominated-convergence and Fatou theorems are obtained.

Preliminares.

Un grupo reticulado G (ℓ-grupo) es condicionalmente completo (resp. σ-condicionalmente completo) si todo subconjunto (resp. numerable) de G superiormente acotado tiene supremo. Escribiremos abreviadamente que es c.c. (resp. σ-c.c.). En todo lo que sigue G denotará un ℓ-grupo abeliano.

Una red $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de G se dice que converge en orden (o-converge) hacia x ($x\in G$) si y sólo si existen una red $\delta_i\downarrow 0$ y un índice $i_o\in I$ ta-

les que $|x_i - x| \leqslant \delta_i$ para todo $i \geqslant i_o$. Escribiremos $x_i \overset{o}{\to} x$ ó $o\text{-}\lim x_i = x$.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de elementos $x_n \in G$ se dice que es o-convergente y que su suma es $x (x \in G)$ si $o\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} x_i = x$; en este caso escribiremos $x = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ó $x = o\text{-}\sum x_n$.

Una família $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos $x_i \in G$ se dice que es o-sumable si la red $\{S_J\}_{J \in F(I)}$ de las sumas $S_J = \sum_{i \in J} x_i$, J variando en el conjunto filtrante $F(I)$ de las partes finitas de I es o-convergente. Si $x = o\text{-}\lim S_J$, escribimos $x = o\text{-}\sum_{i \in I} x_i$. Se dice que $\{x_i\}_{i \in I}$ es absolutamente o-sumable si $\{|x_i|\}_{i \in I}$ es o-sumable.

Es útil adjuntar formalmente a G un par de elementos, indicados por $+\infty$ y $-\infty$, y extender el orden parcial y la suma a $\bar{G} = G \cup \{+\infty, -\infty\}$ de la forma natural. Cuando un conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de G no está superiormente acotado (inferiormente) definimos $\bigvee x_i = +\infty$ $(\bigwedge x_i = -\infty)$.

Introducimos la noción de norma generalizada de la forma siguiente: Si H es un grupo, una aplicación $n: H \to G_+$ se dirá que es una G-norma en H si se cumple, para todo $x, y \in H$,

(i) $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $n(x+y) \leqslant n(x) + n(y)$,

(iii) $n(-x) = n(x)$,

y diremos que (H,n) es un ℓ-grupo G-normado si H es un ℓ-grupo y n una G-norma en H compatible con la estructura reticulada, es decir, cumple además de (i), (ii) y (iii):

(iv) $|x| \leqslant |y| \Rightarrow n(x) \leqslant n(y)$.

Dar una G-norma en H equivale a dar una distancia generalizada [10] invariante por traslaciones.

En un grupo G-normado (H,n) se dice que una red $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos

$x_i \in H$ es n-convergente hacia $x \in H$, si $n(x_i - x) \xrightarrow{o} 0$. Se dice que una red $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de H es n-fundamental si existen una red $\delta_i \downarrow 0$ en G y un índice $i_o \in I$ tales que $|x_i - x_j| \leqslant \delta_i$, para todo $j \geqslant i$ y $i \geqslant i_o$. Se dice que (H,n) es n-completo si toda red n-fundamental es n-convergente. Indicaremos por T_n y T_n^σ las topologías en H que tienen por cerrados los conuntos de H estables respecto al n-límite de redes y sucesiones respectivamente.

La o-convergencia en G es la convergencia según la G-norma $n(x)=|x|$, derivada de la métrica natural. Todo ℓ-grupo c.c. es o-completo [8]. Indicaremos por T_o y T_o^σ las topologias de G determinadas por la norma natural del grupo.

En general utilizaremos la notación y terminología de [1], [2] y [3]. Si S es un subgrupo sólido de G, diremos que S es una banda (σ-banda) si para toda colección (numerable) $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos $x_i \in S$ para la que existe en G $\bigvee_{i \in I} x_i$, es $\bigvee_{i \in I} x_i \in S$.

1. Funciones de conjunto σ-aditivas en orden valoradas en un ℓ-grupo.

1.1. Definiciones y propiedades generales.

En todo lo que sigue, sea $\mathcal{a}$ un anillo de partes de un conjunto X no vacío.

<u>Definición 1.1.1.</u> Se dirá que una función de conjunto $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ es una <u>medida</u> si es finitamente aditiva. Si además $m(\cup A_n) = o\text{-}\Sigma m(A_n)$ para toda sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ de conjuntos disjuntos entre sí tal que $\cup A_n \in \mathcal{a}$, se dirá que es una medida <u>σ-aditiva en orden</u> o simplemente una <u>o-medida.</u>

Una medida $m:\mathcal{a} \to G_+$ (positiva y finita) en una álgebra $\mathcal{a}$ se dirá que es una <u>probabilidad generalizada</u> o una o-probabilidad.

Las propiedades de la convergencia en orden en G permiten probar, como en el caso de medidas reales, los siguientes resultados:

<u>Proposición 1.1.2.</u> Si $m:\mathcal{A}\to \bar{G}_+$ es aditiva, entonces es superaditiva: Si $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos mutuamente disjuntos y $A=\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{A}$, entonces $m(A)\leqslant o\text{-}\sum_{i\in I} m(A_i)$.

<u>Proposición 1.1.3.</u> Sea $m:\mathcal{A}\to\bar{G}$ una medida.

a) m es σ-aditiva en orden si y sólo si $A_n\uparrow A$ en $\mathcal{A}$ implica $m(A_n)\xrightarrow{o} m(A)$.

b) Si m es σ-aditiva en orden, entonces $m(A_n)\xrightarrow{o} 0$ cada vez que $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{A}$ y $m(A_1)\neq\pm\infty$.

c) Si m es finita y $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{A}$ implica $m(A_n)\xrightarrow{o} 0$, entonces m es σ-aditiva en orden.

El objeto de esta parte es establecer los análogos de los teoremas clásicos de descomposición de medidas, como son el de Jordan, el de Yosida-Hewitt y el de Lebesgue.

Consideremos los siguientes conjuntos de medidas definidas en $\mathcal{A}$ y a valores en G:

$$M = M(\mathcal{A};\bar{G}) = \{m:\mathcal{A}\to\bar{G};\ \text{aditivas}\}$$

$$M_F = M_F(\mathcal{A};\bar{G}) = \{m:\mathcal{A}\to G;\ \text{aditivas finitas}\}$$

$$BM = BM(\mathcal{A};G) = \{m:\mathcal{A}\to G;\ \text{aditivas, finitas y acotadas}\}$$

y los subconjuntos respectivos de las medidas σ-aditivas en orden, CM, CM_F y BCM.

1.2. Descomposición de Jordan.

Una descomposición del tipo de Jordan puede establecerse para medidas valoradas en ℓ-grupos en la forma siguiente:

<u>Teorema 1.2.1.</u> (Descomposición de Jordan). Toda medida acotada $m:\mathcal{A}\to G$ definida en un anillo de partes de un conjunto y valorada en un ℓ-grupo c.c. puede expresarse como diferencia de dos medidas positivas m_1, m_2: $m=m_1-m_2$. Si

m es σ-aditiva, entonces m_1 y m_2 también lo son.

Este resultado se obtiene a partir del estudio de la estructura aditivo-ordenada del conjunto de las medidas $BM(\mathcal{a};G)$, derivada de la correspondiente estructura de G. En el conjunto $M=M(\mathcal{a};\bar{G})$ definimos el siguiente orden parcial: si $m,n\in M$, $m\leqslant n$ si y sólo si $m(A)\leqslant n(A)$ para todo $A\in\mathcal{a}$, y la "suma", definida entre elementos $m,n\in M$ que no tomen valores impropios distintos, por $(m+n)(A)= = m(A)+n(A)$.

<u>Proposición 1.2.2.</u> Sea G un ℓ-grupo c.c.. Entonces

a) En el parcialmente ordenado $(M,\leqslant)$ existen, para cada $m\in M$, los elementos $m\vee 0$, $-(m\wedge 0)$ y $m\vee(-m)$ (por 0 denotamos la medida identicamente nula), indicadas respectivamente por m^+, m^- y $|m|$, y que satisfacen:

(i) $m^+(A) = \bigvee_{\substack{B\subseteq A\\ B\in\mathcal{a}}} m(B)$, $m^-(A) = -\bigwedge_{\substack{B\subseteq A\\ B\in\mathcal{a}}} m(B)$;

(ii) $|m|=m^+ + m^-$,
$m^+ =m + m^-$, si m no toma el valor $-\infty$,
$m^- =m^+ -m$, si m no toma el valor $+\infty$;

(iii) m^+, m^-, $|m|\in CM$ si $m\in CM$.

b) Para toda colección $\{m_\lambda\}_{\lambda\in L}\subset M$ superiormente acotada (resp. inferiormente) por una medida $m\in M$ que no tome el valor $+\infty$ (resp. $-\infty$) existe, en el parcialmente ordenado $(M,\leqslant)$, la medida $\bigvee_{\lambda\in L} m_\lambda$; si las medidas m_λ y m son σ-aditivas y $\bigwedge_{\lambda\in L} m_\lambda(A)>-\infty$ para todo $A\in\mathcal{a}$ (resp. $\bigvee_{\lambda\in L} m_\lambda(A)<+\infty$), entonces $\bigvee_{\lambda\in L} m_\lambda$ también es σ-aditiva (resp. $\bigwedge_{\lambda\in L} m_\lambda$).

Demostración. a) La función de conjunto ℓ definida por $\ell(A)=\bigvee_{B\subseteq A} m(B)$ es aditiva y verifica $\ell=m\vee 0$. De $(-m)\vee 0=-(m\wedge 0)$ se sigue la existencia de m^- y (i). Teniendo en cuenta las expresiones de (i) y que si $m(A)$ es finito entonces también lo es $m(B)$ para todo $B\subseteq A$, se ve que $m^+ + m^- = m\vee(-m)$, con lo que queda probada la existencia de $|m|$ y que $|m|=m^+ + m^-$.

Las mismas observaciones permiten establecer las otras dos relaciones en (ii). En cuanto a (iii) es suficiente ver que si m es σ-aditiva entonces m^+ también lo es. Dado que m^+ es una medida positiva, y por tanto superaditiva, es suficiente probar que si $\{A_n\}\subset \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos entre sí tal que $\cup A_n \in \mathcal{A}$, entonces $m^+(A) \leqslant \sigma\text{-}\Sigma m^+(A_n)$. Pero esta desigualdad se cumple ya que para cada $B \subseteq A$ se tiene $m(B)=\sigma\text{-}\Sigma m(BA_n)$ y $m(BA_n) \leqslant m^+(A_n)$.

b) Supongamos primero que $m_\lambda(A) \leqslant m(A) < +\infty$ para todo $\lambda \in L$ y $A \in \mathcal{A}$. Consideremos la función de conjunto $n:\mathcal{A} \to \bar{G}$ definida por

$$n(A)=\vee\{\Sigma m_{\lambda_i}(A_i);\ \{A_i\}\in D(A) \text{ y } \{\lambda_i\}\subset L\},$$

donde D(A) indica el conjunto de las particiones finitas de A en $\mathcal{A}$. Resulta, de la definición y de la aditividad de las m_λ, que n es aditiva y que $n=\bigvee_{\lambda\in L} m_\lambda$. Además, si $\bigwedge_{\lambda\in L} m_\lambda(A)>-\infty$ para cada $A\in \mathcal{A}$, entonces n es una medida finita que es σ-aditiva, como se deduce de la σ-aditividad de las m_λ y m, de $m_\lambda(A) \leqslant m(A) \leqslant m(A)$ y de 1.1.3.

De esta proposición, junto con 1.1.3, se deduce:

<u>Corolario 1.2.3.</u> Si G es un ℓ-grupo c.c., entonces

a) $(M_F,+,\leqslant)$ es un grupo ordenado c.c. del que BM y CM_F son subgrupos convexos y c.c. considerados como grupos ordenados.

b) $(BM,+,\leqslant)$ es un grupo reticulado c.c. del que BCM es un subgrupo sólido y c.c. considerado como grupo reticulado.

De este último resultado se deriva el análogo del teorema de descomposición de Jordan para medidas valoradas en ℓ-grupos c.c. enunciado al principio. Este teorema, tal como está formulado, generaliza el que, con técnicas propias de la teoría de espacios de Riesz, obtienen Fayres y Morrison [6], para medidas valoradas en espacios vectoriales c.c.

El teorema aquí obtenido no es generalizable; como teorema de descomposición, al caso de medidas σ-aditivas no finitas definidas en una σ-álgebra, como ocurre en el caso de las medidas reales. En efecto, basta considerar el

siguiente

Ejemplo 1.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra finita y $m_o:\mathcal{A} \to \bar{R}_+$ una medida positiva no finita. La función de conjunto $m:\mathcal{A} \to R^2$ definida por $m(A)=(m_o(A),-m_o(A))$, si $m_o(A)\neq+\infty$, y $m(A)=+\infty$ en caso contrario, es una medida para la que m^+ y m^- son ambas no finitas. En consecuencia m no es expresable como diferencia de dos medidas positivas.

Tampoco puede establecerse un análogo de la propiedad que tienen las medidas reales finitas σ-aditivas en una σ-álgebra de ser acotadas, como muestra el ejemplo que sigue:

Ejemplo 1.2.5. Sea X un conjunto no numerable, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra numerable-conumerable de X y G el ℓ-grupo c.c. de las funciones reales definidas en X de soporte finito o numerable. La función de conjunto $m:\mathcal{A} \to G$ definida por $m(A)=\varphi_A$, si A es numerable y $m(A)= -\varphi_{A^c}$, si A no es numerable, es una o-medida no acotada.

Con este segundo ejemplo queda probado también que en general, para medidas σ-aditivas en orden definidas en σ-álgebras, no existe conjunto de descomposición de Hahn, como ocurre en el caso de las medidas reales.

Supondremos a partir de aquí que G es un ℓ-grupo c.c.

1.3. Descomposición de Yosida-Hewitt.

La descomposición de una medida real en suma de una parte σ-aditiva y de otra puramente aditiva también puede establecerse para las medidas valoradas en ℓ-grupos c.c.

Diremos que una medida $m:\mathcal{A} \to G$ es puramente aditiva cuando la única o-medida n que satisface $0 \leqslant n \leqslant |m|$ es la medida nula. Se tiene:

Teorema 1.3.1. (Descomposición de Yosida-Hewitt). Toda medida acotada $m:\mathcal{A} \to G$ definida en un anillo de partes de un conjunto y valorada en un ℓ-grupo c.c. admite una única expresión de la forma $m=m_c + m_a$, donde m_a y m_c son me-

didas acotadas, m_c σ-aditiva y m_a puramente aditiva. Además, m_c y m_a son ortogonales ($|m_a| \wedge |m_c| = 0$).

Este resultado se obtiene del estudio de la <u>convergencia en orden</u> de medidas, inducida por la estructura ordenada que hemos considerado en $M(\mathcal{a};G)$. En particular se tiene:

<u>Proposición 1.3.2.</u> En el ℓ-grupo $BM(\mathcal{a};G)$ el o-límite de una red de o-medidas es una o-medida, esto es, $BCM(\mathcal{a};G)$ es un T_o-cerrado de $BM(\mathcal{a};G)$.

En efecto: Sea $\{m_i\}_{i\in I}$ una red de medidas $m_i \in BCM$ y sea $m \in BM$ tal que $m_i \xrightarrow{o} m$. Veamos que $m \in BCM$. Puesto que BCM es un subgrupo sólido de BM, bastará probarlo en el caso $m_i \uparrow m$. Si $A_n \uparrow A$ en $\mathcal{a}$, tendremos $m_i(A_n) \leqslant m(A_n) \leqslant m(A)$, para todo $i \in I$ y $n \in N$, de donde, siendo las m_i o-medidas positivas, $m(A) = \bigvee_{i\in I} m_i(A) = \bigvee_{i\in I} \bigvee_{n\in N} m_i(A_n) = \bigvee_{n\in N} \bigvee_{i\in I} m_i(A_n) = \bigvee_{n\in N} m(A_n) \leqslant m(A)$. Por lo tanto, según 1.1.3. a), m es σ-aditiva.

Teniendo en cuenta que BM es un ℓ-grupo c.c., de esta proposición se deduce que BCM es una banda y en consecuencia un sumando directo de BM, es decir, $BM = BCM \oplus (BCM)^{\perp}$ [2]. De ahí el teorema enunciado, toda vez que $(BCM)^{\perp}$ coincide con el conjunto de las medidas puramente aditivas.

En BM puede considerarse asimismo la <u>convergencia uniforme</u>: una red $\{m_i\}_{i\in I} \subset BM$ se dice que es uniformemente convergente hacia $m \in BM$ si existen una red $\delta_i \downarrow 0$ en G y un índice $i_o \in I$ de modo que $|m_i(A) - m(A)| \leqslant \delta_i$ para todo $A \in \mathcal{a}$ y $i \geqslant i_o$.

La convergencia en orden implica la puntual y, si $X \in \mathcal{a}$, la uniforme. La convergencia uniforme es normable por la G-norma generalizada $\|\|_o : BM \to G_+$ definida por $\|m\|_o = \bigvee\{|m(A)|;\ A \in \mathcal{a}\}$. Introduciendo las topologías $T_{\|\|_o}$ y $T^{\sigma}_{\|\|_o}$ asociadas a esta norma generalizada, se tiene

<u>Teorema 1.3.3.</u>

a) $(BM, +, \leqslant, \|\|_o)$ es un ℓ-grupo G-normado $\|\|_o$-completo.

b) Si en G la o-convergencia satisface la condición diagonal de Everett

[7] (resp. generalizada [11]), entonces BCM es $T_{|||_o}$-cerrado (resp. $T^{\sigma}_{|||_o}$-cerrado).

Demostración. a) Sólo es necesario probar que BM es $|||_o$-completo, esto es, que toda red $\{m_i\}_{i\in I}$ $|||_o$-fundamental es $|||_o$-convergente. Ahora bien, si $\{m_i\}_{i\in I}$ es $|||_o$-fundamental, entonces $\{m_i(A)\}_{i\in I}$ es o-fundamental para cada $A\in\mathcal{A}$. Como todo ℓ-grupo c.c. es o-completo [8], existirá o-lim $m_i(A)=m(A)$, para cada $A\in\mathcal{A}$. La función de conjunto m así definida resulta ser un elemento de BM para el que $m_i \xrightarrow{|||_o} m$.

b) Supongamos que en G la o-convergencia satisface la condición general de Everett generalizada (el otro caso se demostraría analogamente) y sea $\{m_i\}_{i\in I}$ una red de medidas $m_i\in$BCM tal que $m_i \xrightarrow{o} m$ para una cierta medida $m\in$BM. Veamos que $m\in$BCM. Sea $A_n\downarrow\emptyset$ an $\mathcal{A}$. Tendremos

$$0 \leqslant |m(A_n)| \leqslant |m(A_n)-m_i(A_n)|+ |m_i(A_n)|.$$

Sean $\delta_i\downarrow 0$ y $i_o\in I$ tales que

$$0 \leqslant |m(A_n)-m_i(A_n)| \leqslant \delta_i, \text{ para todo } i \geqslant i_o \text{ y } n\in N.$$

Puesto que $m_i\in$BCM, para cada $i\in I$ existe una sucesión $a^i_n\downarrow 0$ tal que

$$0 \leqslant |m_i(A_n)| \leqslant a^i_n, \text{ para todo } n\in N.$$

Por hipótesis, existirá un subconjunto I' cofinal en I, de modo que para cada $i\in I'$ habrá por lo menos un índice $n=n(i)$ de forma que $b_i=a^i_{n(i)} \xrightarrow{o} 0$. Entonces,

$$0\leqslant |m(A_n)|\leqslant \delta_i+a^i_n\leqslant \delta_i+b_i, \text{ para todo } i\in I',\ i\geqslant i_o \text{ y } n\geqslant n(i),$$

de donde se deduce que o-lim $m(A_n)=0$.

1.4. Descomposición de Lebesgue.

En este apartado obtenemos un análogo del teorema de descomposición de

Lebesgue en el caso que el grupo G es super-condicionalmente completo [7].

Definición 1.4.1. Dadas dos medidas $\ell, m: \mathcal{A} \to \bar{G}$ diremos que ℓ es m-contínua si $|m|(A)=0$ implica $\ell(A)=0$ $(A \in \mathcal{A})$; diremos que ℓ es m-singular si existe un conjunto $A_o \in \mathcal{A}$ tal que $|m|(A_o)=0$ y $\ell(A)=\ell(AA_o)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Dada una medida $m: \mathcal{A} \to \bar{G}$ indicaremos por BM_{mc} y BCM_{mc} los conjuntos de medidas m-contínuas en BM y BCM respectivamente.

Acerca de la estructura aditivo-ordenada de los conjuntos de medidas singulares ó contínuas respecto a una medida m fijada se tiene:

Proposición 1.4.2. Dadas medidas $\ell, n, m: \mathcal{A} \to \bar{G}$,

a) Si ℓ y m son m-singulares y está definida la medida $\ell+n$, entonces $\ell+n$ es m-singular.

b) Si ℓ es m-singular entonces ℓ^+, ℓ^- y $|\ell|$ también lo son.

c) Las medidas m-singulares en BM (resp. BCM) constituyen un subgrupo sólido de BM (resp. de BCM, que si $\mathcal{A}$ es σ-anillo y m σ-aditiva es una σ-banda).

Demostración. Todas las afirmaciones se deducen de las definiciones y de 1.1.3 salvo la última, esto es, que en las hipótesis señaladas, BCM es σ-banda. Para probarlo, basta ver que si $0 \leq \ell_i \uparrow \ell$ en BCM y las ℓ_i son m-singulares entonces ℓ también lo es. Para cada $n \in N$, sea $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $|m|(A_n)=0$ y $\ell(A)=\ell(AA_n)$; entonces $A_o = \cup A_n \in \mathcal{A}$, $|m|(A_o)=0$ y $\ell(A)=\bigvee_n \ell(A)=\bigvee \ell_n(AA_o)=\ell(AA_o)$.

Proposición 1.4.3. Dadas medidas $\ell, n, m: \mathcal{A} \to \bar{G}$,

a) Si ℓ y m son m-contínuas y está definida $\ell+n$, entonces $\ell+n$ es m-contínua.

b) Si ℓ es m-contínua, entonces ℓ^+, ℓ^- y $|\ell|$ también lo son.

c) Las medidas m-contínuas en BM (resp. BCM) constituyen una banda en BM (resp. BCM).

Demostración. a) es inmediato y b) se deduce de las expresiones de 1.2.2. a). En cuanto a c), teniendo en cuenta que en BM se satisfacen las identidades $\ell \vee n = \ell + (n-\ell)^+$ y $\ell \wedge n = \ell - (n-\ell)^-$ [9], resulta que las medidas m-contínuas en BM constituyen un subgrupo subreticulado convexo. Para ver que es una banda será suficiente probar que si $0 \leqslant \ell_i \uparrow \ell$ en BM siendo las ℓ_i m-contínuas, entonces ℓ también lo es. Ahora bien, si las ℓ_i son m-contínuas, de $\ell(A) = \bigvee \ell_i(A)$ se deduce que $|m|(A)=0$ implica $\ell(A)=0$. En cuanto a la afirmación relativa a BCM, basta recordar que BCM es una banda y que la intersección de bandas es una banda.

De esta última proposición se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.4. Dada una medida $m: \mathcal{A} \to \bar{G}$, toda medida acotada $\ell: \mathcal{A} \to G$ se expresa de forma única como suma de dos medidas acotadas: $\ell = \ell_m + \ell_s$, donde ℓ_m es m-contínua y ℓ_s es ortogonal a ℓ_m. Además si ℓ es σ-aditiva, entonces estas dos también lo son.

En efecto, teniendo en cuenta que BM es un ℓ-grupo c.c. de 1.4.3. c) se sigue que BM_{mc} es sumando directo de BM, es decir, que $BM = BM_{mc} \oplus (BM_{mc})^{\perp}$. Análogamente, $BCM = BCM_{mc} \oplus (BCM_{mc})^{\perp}$.

En el caso en que $G=R$ y m es σ-aditiva sobre una σ-álgebra , este resultado conduce al teorema de descomposición de Lebesgue, según el cual toda medida finita σ-aditiva se expresa de forma única como suma de una medida σ-aditiva m-contínua y de una m-singular. Esto es así, porque en este caso $(BCM_{mc})^{\perp}$ coincide con el subgrupo de las medidas m-singulares [7]. De las dos inclusiones una es clara: toda medida m-singular es de $(BCM_{mc})^{\perp}$ y ésto es cierto también para medidas valoradas en ℓ-grupos. La otra se obtiene mediante la consideración del conjunto de descomposición de Hahn asociado a una medida que en el caso general, según se ha visto, no existe. No obstante, una demostración similar a la que da [5] del teorema de descomposición de Lebesgue en el caso real, permite probar, si G es super-condicionalmente completo, que fijada una o-medida $m: \mathcal{A} \to \bar{G}$ sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$, toda o-medida acotada $\ell: \mathcal{A} \to G$ es expresable como suma de una o-medida m-contínua y de una m-singular, las dos acotadas. Este resultado, junto con el corolario anterior, que da la unicidad de tal expresión, permite enunciar:

Teorema 1.4.5. (Descomposición de Lebesgue). Sea $m:\mathcal{A} \to \bar{G}$ σ-aditiva definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ y sea G un ℓ-grupo super-condicionalmente completo. Entonces toda medida σ-aditiva acotada $\ell:\mathcal{A} \to G$ se expresa de forma única como suma de dos medidas σ-aditivas acotadas: $\ell=\ell_m + \ell_s$, donde ℓ_m es m-contínua y ℓ_s m-singular.

1.5. Construcción de o-medidas.

Acabamos esta primera parte indicando brevemente la forma de obtención de dos tipos especiales de o-medidas.

Medidas en ℓ-grupos producto. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de partes de un conjunto X no vacío, $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de ℓ-grupos σ-c.c., $G=\prod_{i\in I} G_i$ el ℓ-grupo producto, π_i la proyección i-ésima de G sobre G_i.

Toda función de conjunto $m:\mathcal{A} \to G$ queda univocamente determinada por la colección $\{m_i\}_{i\in I}$ de las funciones de conjunto $m_i=\pi_i \circ m: \mathcal{A} \to G_i$ de forma que

a) m es o-medida si y sólo si cada m_i lo es;

b) m es acotada si y sólo si cada m_i lo es y en este caso, si G es c.c. y escribimos $m=(m_i)$, se tiene

$$m^+ = (m_i^+), \quad m^- = (m_i^-) \quad y \quad |m| = (|m_i|).$$

Para ello, basta tener en cuenta 1.1.3, 1.2.2. a) y que la o-convergencia de sucesiones en el ℓ-grupo producto equivale a la o-convergencia por componentes.

Medidas discretas. Dado un conjunto X no vacío y un ℓ-grupo c.c. G,

a) Toda función $F:X \to G_+$ determina una o-medida $m:P(X) \to \bar{G}_+$ definida por $m(A)= o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$, si $A\neq\emptyset$, y $m(\emptyset)=0$. ($o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$ indica la suma en orden de la familia $F(A)=\{F(x);\ x\in A\} \subset \bar{G}_+$; si esta familia no es sumable se toma $m(A)=+\infty$).

b) Toda función $F:X \to G$ con $F(X)$ absolutamente o-sumable, determina una o-medida acotada $m:P(X) \to G$ definida, como la anterior, por $m(A)=o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$,

si $A \neq \emptyset$, y $m(\emptyset)=0$.

En este caso son las propiedades de la sumabilidad en un ℓ-grupo c.c., análogas a las de la sumabilidad en un grupo conmutativo topológico, separado y completo, [3], las que permiten probar que las funciones de conjunto así definidas son o-medidas.

2. Integración respecto a una o-medida positiva.

2.1. Construcción de la integral.

Sea $m: \mathcal{A} \to R_+$ una o-medida definida en una σ-álgebra de partes de un conjunto X no vacío, que toma valores en la parte positiva de un anillo reticulado σ-c.c. R, en el que el producto es secuencialmente o-contínuo: si $x_n \overset{o}{\to} x$ y $y_n \overset{o}{\to} y$ entonces $x_n \cdot y_n \overset{o}{\to} x \cdot y$ (en particular en todo f-anillo arquimediano lo es). En este primer apartado construimos una integral respecto a m para funciones $f: X \to R$.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones $f_n: X \to R$ y $f: X \to R$ es tal que $f_n(x) \overset{o}{\to} f(x)$ para cada $x \in X$, se dice que f_n converge puntualmente hacia f y escribimos $f_n \overset{o}{\to} f$. Si $\{f_n\}$ es monótona, escribiremos $f_n \uparrow f$ (ó $f_n \downarrow f$).

<u>Integral elemental (ε, I).</u> De forma natural queda definida la integral respecto a m de las funciones $\mathcal{A}$-simples, esto es, de las funciones $f: X \to R$ para las que existe un número finito de conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ sobre los que toma valores constantes $a_1, \ldots, a_n \in R$. La función f puede representarse en la forma $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ y se define su integral por la expresión

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(A_i).$$

El conjunto ε de las funciones $\mathcal{A}$-simples es un ℓ-submódulo de R^X (considerado aquí y en todo lo que sigue como ℓ-módulo sobre R por la izquierda) y

la integral, como aplicación que asigna a cada función $f \in \mathcal{E}$ un elemento de R es monótona y homogénea: si $f,g \in \mathcal{E}$ y $a,b \in R$, entonces

$$f \leqslant g \Rightarrow (f) \leqslant I(g),$$

$$I(af+bg) = aI(f) + bI(g).$$

A partir de esta integral sobre las funciones simples, se amplia la clase de funciones a las que se les puede atribuir una integral, de tal forma que la clase obtenida es cerrada respecto al límite puntual de funciones. Para ello consideramos dos extensiones sucesivas:

<u>Primera extensión $(L_\omega(m),I)$.</u> Por M_+ indicaremos el conjunto de las funciones $f \in R^X$ para las que existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_+$ tal que $f_n \uparrow f$. En este caso decimos que $\{f_n\}$ determina f.

El conjunto de funciones $f \in M_+$ que admiten una sucesión determinante $\{f_n\}$ de forma que $\{I(f_n)\}$ está acotada, lo designaremos por $L_\sigma(m)$. M_+ y $L_\sigma(m)$ son subsemigrupos subreticulados estables por el producto por elementos de R_+. Consideremos los conjuntos asociados $M=M_+-M_+$ y $L_\omega(m)=L_\sigma(m)-L_\sigma(m)$, ambos ℓ-submódulos de R^X. Se tiene:

<u>Proposición 2.1.1.</u> Si la integral elemental $I: \mathcal{E} \to R$ es secuencialmente contínua, entonces ésta admite una única extensión, que conserva las propiedades de monotonía, homogeneidad (positiva) y continuidad secuencial hacia arriba, $I': L_\sigma(m) \to R_+$. A su vez, I' se extiende de forma única como aplicación monótona y homogénea a $L_\omega(m)$.

Esta extensión viene dada de la forma siguiente: Si $f \in L_\sigma(m)$ y $\{f_n\} \subset \mathcal{E}_+$ es una sucesión tal que $\{I(f_n)\}$ está acotada y $f_n \uparrow f$, se define $I'(f)= \vee I(f_n)$. Si $f \in L_\omega(m)$ y es $f=g-h$ con $g,h \in L_\sigma(m)$, se toma $I'(f)=I'(g)-I'(h)$.

Esta extensión I', indicada a partir de aquí, y como es habitual, con la misma letra I, conserva de forma natural la propiedad de ser secuencialmente contínua hacia arriba. Si $L_\sigma(m)$ es estable respecto a diferencias positivas, esto es, si $L_\sigma(m)=(L_\omega(m))_+=\{f \in L_\omega(m);\ f \geqslant o\}$, entonces I también es

secuencialmente contínua hacia abajo; pero en general $(L_\omega(m))_+ \neq L_\sigma(m)$. En la siguiente proposición damos una condición suficiente para que sea $L_\sigma(m) = (L_\omega(m))_+$; ésta es que M_+ sea σ-subretículo (dada la estructura de los elementos de M_+, basta que M_+ sea δ-subretículo ($f_n \in M_+ \Rightarrow \bigwedge f_n \in M_+$) para que sea σ-subretículo). Tenemos la siguiente

Proposición 2.1.2.

a) M_+ es σ-subretículo si y sólo si $M_+ = \{f \in M;\ f \geqslant 0\}$;

b) Si M_+ es σ-subretículo, entonces $L_\sigma(m)$ es δ-subretículo;

c) $L_\sigma(m)$ es δ-subretículo si y sólo si $L_\sigma(m) = (L_\omega(m))_+$.

y podemos concluir:

Proposición 2.1.3. Si I es secuencialmente contínuo en ε y M_+ es σ-subretículo, entonces

a) La extensión $(L_\omega(m), I)$ conserva las propiedades de monotonía, homogeneidad y continuidad secuencial de (ε, I).

b) Si $f \in M$, entonces $f \in L_\omega(m)$ si y sólo si $|f| \in L_\omega(m)$ y en este caso $|I(f)| \leqslant I(|f|)$.

Para la extensión $(L_\omega(m), I)$, denominada primera extensión de la integral elemental, se cumplen en las hipótesis de 2.1.2. los teoremas clásicos de convergencia:

Teorema 2.1.4. (Teorema de convergencia monótona). Si $\{f_n\} \subset L_\omega(m)$ es una sucesión tal que $f_n \uparrow f$ y $I(f_n) \leqslant a$, para todo $n \in N$, y algún elemento $a \in R$, entonces $f \in L_\omega(m)$ y $I(f_n) \uparrow I(f)$.

Teorema 2.1.5. (Propiedad de Fatou). Dada una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset L_\omega(m)$,

a) Si existe una función $h \in L_\omega(m)$ tal que $f_n \leqslant h$ para todo $n \in N$, entonces o-lim sup $f_n \in L_\omega(m)$ y o-lim sup $I(f_n) \leqslant I(\text{o-lim sup } f_n)$.

b) Si existe una función $g \in L_\omega(m)$ tal que $f_n \geqslant g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces o-lim inf $f_n \in L_\omega(m)$ y $I(\text{o-lim inf } f_n) \leqslant \text{o-lim inf } I(f_n)$.

Teorema 2.1.6. (Teorema de convergencia dominada). Si $\{f_n\} \subset L_\omega(m)$ es una sucesión de funciones tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $g \in L_\sigma(m)$ y $f_n \overset{\circ}{\to} f$, entonces $f \in L_\omega(m)$ y $I(f) = \text{o-lim} I(f_n)$.

Supondremos a partir de ahora que I es secuencialmente contínua en ε y que M_+ es σ-subretículo.

Observaciones. 1) El proceso de extensión aquí desarrollado es aplicable a todo par (L,I) formado por un ℓ-submódulo $L \subset R^X$ y una aplicación $I: L \to R$ que sea monótona, homogénea y secuencialmente contínua, siempre que el conjunto $(L_\sigma)_+$ de las funciones $f: X \to R_+$ para las que existe una sucesión $\{f_n\} \subset L_+$ tal que $f_n \uparrow f$ sea σ-subretículo. Para la extensión así obtenida, indicado por $(L_\omega(I), I)$, se cumplen los tres teoremas de convergencia 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6.

2) Si $R = \mathbb{R}$, entonces ε es el conjunto de las funciones $\mathcal{A}$-medibles simples finitas, I es la integral ordinaria de Lebesgue respecto a m y, por tanto, I es secuencialmente contínua. En general, creemos que I puede no serlo, dado que la demostración de esta propiedad en el caso real [11] depende fuertemente del orden total de $\mathbb{R}$. Si R es totalmente ordenado, entonces ciertamente I es secuencialmente contínua ya que por ser R σ-c.c. también es arquimediano y todo anillo totalmente ordenado arquimediano es isomorfo como tal a un subanillo de $\mathbb{R}$ ([2]). No obstante, aunque R no sea totalmente ordenado I puede ser secuencialmente contínua, como se verá en el ejemplo 2.2.3 y en la sección 2.4.

Segunda extensión $({}_A(m), I)$. La reiteración del proceso que permite obtener $(L_\omega(m), I)$ a partir de (ε, I), aplicado a $(L_\omega(m), I)$, no genera nuevas funciones, según se sigue de 2.1.4. Por tanto, si se desea obtener una segunda extensión de la integral es necesario recorrer a otros métodos. La idea es hacer integrables aquellas funciones que pueden ser aproximadas, de alguna forma, por funciones que ya lo son.

Introducida la noción de conjunto nulo respecto a m en la forma usual: $A \subset X$ es m-nulo si y sólo si existe un $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$ y $m(B)=0$; la noción asociad asociada de "propiedad satisfecha casi por todo respecto a m" (notado m-c.p.t.); y la relación de equivalencia en R^X: si $f, q \in R^X$, $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ m-c.p.t., damos la siguiente

<u>Definición 2.1.7.</u> Se dirá que una función $f:X \to R$ es <u>m-integrable</u> si es m-equivalente a alguna función $g \in L_\omega(m)$. En este caso se define la integral de f respecto a m por $I(f)= I(g)$.

Por $_A(m)$ indicamos el conjunto de las funciones m-integrables y el par $(_A(m), I)$ lo denominamos segunda extensión de (ε, I).

De las propiedades de la integral $(L_\omega(m), I)$, y de la definición anterior se deduce el siguiente resultado:

<u>Proposición 2.1.8.</u>

a) $(_A(m), I)$ extiende $(L_\omega(m), I)$ y conserva las propiedades de monotonía homogeneidad y continuidad secuencial, así como los teoremas de convergencia 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 que se cumplen en $(L_\omega(m), I)$.

b) Si $f \in R^X$, $f \in {}_A(m)$ si y sólo si $|f|$ es m-equivalente a una función $g \in L_\sigma(m)$ y en este caso $|I(f)| \leqslant I(|f|)$.

Acerca de la relación entre la integral respecto a m y la m-equivalencia de funciones considerada en R^X, se tiene

<u>Proposición 2.1.9.</u>

a) Si $f, g \in R^X$, $f \sim g$ y $f \in {}_A(m)$, entonces $g \in {}_A(m)$ y $I(g)= I(f)$.

b) Si $f \in {}_A(m)$, entonces de $I(|f|)=0$ se deduce que $f=0$ m-c.p.t. si y sólo si $m(\mathcal{A})=\{m(A);\ A \in \mathcal{A}\}$ no contiene divisores de cero con codivisores positivos por la izquierda.

Demostración. a) se deduce de la definición. En b) la condición es necesaria, puesto que si $a,b>0$ son tales que $b.a=0$ y $a=m(A)$, entonces la función

$f=bX_A \in \varepsilon_+$, que no es m-equivalente a la función nula, es tal que $I(|f|)=0$. La suficiencia de la condición se demuestra primero para las funciones de ε y luego para las de $L_\omega(m)$ y $_A(m)$.

Dada la compatibilidad de la integral con la relación de equivalencia, se puede definir la integral en el cociente $L_A(m)= {}_A(m)/_\sim$ a través de los representantes: si $\bar{f}$ indica la clase de la función $f\in {}_A(m)$ se define $I(\bar{f})$ por $I(f)$. Podemos extender asimismo la noción de integrabilidad a aquellas funciones $f:X \to \bar{R}$ que coincidan m-c.p.t. con una función de $L_\omega(m)$. En el caso en que $R= R$, $L_A(m)$ resulta coincidir con el espacio $L'(m)$ de las funciones reales m-integrables Lebesgue.

2.2. Una caracterización de las funciones m-integrables.

En el caso real, las funciones integrables Lebesgue respecto a una medida μ pueden caracterizarse de la forma siguiente [4]: Considerando el conjunto L_δ de las funciones $f:X \to R_+$ para las que existe una sucesión $\{f_n\} \subset \varepsilon_+$ tal que $f_n \downarrow f$, resulta que una función f es μ-integrable si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existen funciones $g\in L_\delta$ y $h\in L_\delta(\mu)$ tales que $g \leqslant |f| \leqslant h$ μ-c.p.t. y $\int(h-g)d\mu<\varepsilon$. Naturalmente esta condición no representará en el caso general una caracterización de las funciones integrables; puede darse no obstante una condición análoga a ésta, en el sentido de que caracteriza las funciones integrables positivas como aquellas que pueden encajarse entre funciones de $L_\sigma(m)$ y L_δ. Tenemos:

<u>Proposición 2.2.1.</u> Si $m(a)$ no contiene divisores de cero con codivisores positivos por la izquierda, entonces una función $f:X \to R$ es m-integrable si y sólo si existen sucesiones $\{g_n\}\subset L_\delta$ y $\{h_n\} \subset L_\sigma(m)$ tales que

a) $g_n \leqslant |f| \leqslant h_n$ m-c.p.t., para todo $n\in N$;

b) $I(h_n-g_n) \overset{\circ}{\to} 0$.

La demostración de esta proposición se basa en el lema que sigue. Si

$f \in R^X$ y $A \subset X$ e indicamos por f_A la función definida por $f_A(x)$, si $x \in A$, y $f_A(x)=0$, si $x \notin A$:

Lema 2.2.2.

a) Si $f \in L_\omega(m)$ y $A \in \mathcal{A}$, entonces $f_A \in L_\omega(m)$ y si $m(A)=0, I(f_A)=0$.

b) Si $f,g \in L_\omega(m)$ y $f \leqslant g$ m-c.p.t., entonces $I(f) \leqslant I(g)$.

Demostración de la proposición. La necesidad es consecuencia de las definiciones de $_A(m)$, $L_\sigma(m)$ y de que $\varepsilon + \subset L_\delta$. En cuanto a la suficiencia, resulta de a) que $g = \bigvee g_n$ y $h = \bigwedge h_n$ son funciones de $L_\sigma(m)$ tales que $g \leqslant |f| \leqslant h$ m-c.p.t. El lema anterior permite deducir que $I(g) \leqslant I(h)$ y la condición b) concluir que $I(g) = I(h)$. Entonces, según 2.1.9 b), $g \sim h$ y por tanto $f \in {}_A(m)$.

En esta última proposición, la condición sobre los divisores de cero es una condición suficiente para la validez de la caracterización; no obstante el siguiente ejemplo muestra que no es necesaria:

Ejemplo 2.2.3. Sea $m: P(N) \to R_+$ una o-medida a valores en un anillo reticulado σ-c.c. con el producto secuencialmente o-contínuo. La caracterización de las funciones m-integrables descrita en 2.2.1. es válida independientemente de si $m(P(N))$ contiene divisores de cero con codivisores positivos por la izquierda o no.

Veamos que se cumplen las condiciones que permiten construir la integral respecto a m. En primer lugar, veamos que la integral respecto a m, indicado por $\int f dm$, es secuencialmente contínua en ε. Para ello, consideremos el par (L,I) formado por el ℓ-submódulo de R^N, $L=\{f: N \to R;\ supp(f)\ finito\}$, y la aplicación $I: L \to R$ definida por $I(f) = \sum_{n \in N} f(n).m(\{n\})$.

El conjunto $(L_\sigma)_+$ de las funciones $f: N \to R_+$ para las que existe una sucesión $\{f_n\} \subset L_+$ tal que $f_n \uparrow f$ coincide con el conjunto de las funciones $f: N \to R_+$ y es por lo tanto σ-subretículo. Además I es secuencialmente contínua en L, de forma que aplicando el proceso de extensión indicado en la observación 2 de la sección 2.1, (L,I) admite una única extensión $(L_\omega(I), I)$. Puesto que $\varepsilon \subset L_\omega(I)$ y $\int f dm = I(f)$ para las funciones $f \in \varepsilon$, en virtud del teorema de conver-

gencia dominada 2.1.6. válido en $(L_\omega(I),I)$, la integral $\int$ respecto a m resulta ser secuencialmente contínua en ε.

Como $M_+=\{f: N \to R_+\}$, M_+ es σ-subretículo , y por tanto podemos considerar la extensión $({}_A(m),\int)$ de la integral elemental respecto a m.

Veamos que la caracterización descrita en 2.2.1. es válida:

Sea $f: N \to R$ una función para la que existan sucesiones $\{g_n\}\subset L_\delta$ y $\{h_n\} \subset L_\sigma(m)$ tales que $g_n \leqslant |f| \leqslant h_n$ m-c.p.t., para todo $n\epsilon N$ y $\int(h_n-g_n) \overset{o}{\to} 0$. Hay que probar que $f\epsilon\ {}_A(m)$. Consideremos las funciones $g,h\epsilon L_\sigma(m)$, $g=\bigvee g_n$ y $h=\bigwedge h_n$, para las que $g \leqslant |f| \leqslant h$ m-c.p.t. y $\int g dm = \int h dm$. Sea $A\epsilon \mathcal{a}$ tal que $g \leqslant |f| \leqslant h$ en A y $m(A^c)=0$; entonces $g_A \leqslant |f|_A \leqslant h_A$. Puesto que para una función $K: N \to R_+$, es $K\epsilon L_\sigma(m)$ si y sólo si la serie $\sum_{n\epsilon N} K(n)m(\{n_n\})$ es o-convergente y, según 2.2.2, $h_A\epsilon L_\sigma(m)$, resulta que $|f|_A\epsilon L_\sigma(m)$ y, en consecuencia, que $f\epsilon\ {}_A(m)$.

En todo lo que sigue indicaremos la integral de $f\epsilon\ {}_A(m)$ respecto a m por $\int f dm$.

2.3. La integral indefinida y el problema de la derivación.

Así como en el caso de una medida real μ, la ecuación $\lambda(A)=\int_A f d\mu=\int f_A d\mu$ define para cada función μ-integrable Lebesgue f una nueva medida en $\mathcal{a}$ que es absolutamente contínua respecto a μ, podemos enunciar el siguiente

<u>Teorema 2.3.1.</u> Para cada función $f\epsilon\ {}_A(m)$ la función de conjunto $\ell_F: \mathcal{a} \to R$ definida por $\ell(A)=\int_A f dm=\int f_A dm$ es una medida σ-aditiva acotada m-contínua.

Demostración. Se ve primero que es cierto para las funciones $f\epsilon\varepsilon_+$ y luego para las funciones de $L_\sigma(m)$ y ${}_A(m)$, teniendo en cuenta que BCM y BCM_{mc} son bandas de BM.

Este teorema permite hablar pues de la <u>integral indefinida</u> ℓ_f de una función $f\epsilon\ {}_A(m)$. Si $f\epsilon\ {}_A(m)$ y $f \sim g$ entonces f y g definen la misma integral indefinida. Por tanto el teorema anterior permite asociar a cada función $f\epsilon L_A(m)$

una o-medida acotada m-contínua ℓ_f. ¿Sería posible establecer un análogo del teorema de Radon-Nikodym?. Es decir, ¿para cada o-medida $\ell:\mathcal{A} \to R$, acotada y m-contínua existe alguna función f m-integrable tal que $\ell(A)=\int_A f dm$ para todo $A\in\mathcal{A}$?. Y en caso de existir, ¿ésta es única?.

En cuanto a la existencia de la función, el siguiente ejemplo muestra, como era de preveer, que el teorema no se cumple:

Ejemplo 2.3.2. Sea $X=\{a,b\}$ un conjunto de dos elementos, $\mathcal{A}=P(X)$. Consideremos las medidas $\ell,m:\mathcal{A} \to R^2$ definidas por $m(a)=\ell(b)=(1,0)$ y $m(b)=\ell(a)=(0,1)$; ℓ es m-contínua y no existe ninguna función $f:X \to R^2$ tal que $\ell(A)=\int_A f dm$ en $\mathcal{A}$, ya que de existir, sería $(1,0)=\ell(b)=\int_{\{b\}} f dm=f(b)m(b)=(0,f(b))$.

La unicidad de la posible derivada de Radon-Nikodym, suponiendo que exista, tampoco se puede asegurar; por ejemplo si $m(\mathcal{A})$ contiene divisores de cero con codivisores positivos por la izquierda no hay unicidad: la función f considerada en la demostración de 2.1.9. b) sería una derivada no nula de la medida nula.

2.4. La integral respecto a una o-medida $m:\mathcal{A} \to R^I$.

En este apartado se estudia la integral respecto a una o-medida $m:\mathcal{A} \to R^I$ definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Como era de esperar, la integral se reduce a la integración por componentes. Además, bajo ciertas hipótesis, toda o-medida m-contínua es una integral indefinida y la derivada es única.

Sea I un conjunto de índices cualquiera, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de partes de un conjunto X. Toda medida positiva $m: \mathcal{A} \to R^I$ σ-aditiva en orden queda determinada por la colección $\{m_i\}_{i\in I}$ de medidas σ-aditivas reales $m_i=\pi_i \circ m:\mathcal{A} \to R_+$.

Para cada función $F:X \to R^I$, sea $F_i=\pi_i \circ F (i\in I)$; escribamos $m=(m_i)$ y $F=(F_i)$. Indiquemos por N el σ-ideal de los conjuntos m-nulos de $\mathcal{A}$ y por N_i el de los m_i-nulos $(i\in I)$; es $N=\bigcap_{i\in I} N_i$.

Lema 2.4.1. Sea I numerable y consideremos dos funciones $F=(F_i)$ y $G=(G_i)$. De

la m-equivalencia de F_i con G_i para cada $i\in I$ se sigue la m-equivalencia de F y G si y sólo si $N_i=N_j$ para todo $i,j\in I$.

En efecto. Suficiencia: si $A_i\in N_i$ es tal que $F_i=G_i$ en A_i^c, entonces $A=\cup A_i\in N$ y $F=G$ en A^c. Necesidad: Supongamos que para unos índices $i_o,j\in I$ es $N_{i_o}-N_j\neq\emptyset$ y sea $A\in N_{i_o}-N_j$. Entonces la función $G=(G_i)$ definida por $G_{i_o}=a\chi_A$ y $G_i=0$ para todo $i\neq i_o$ es tal que $G_i=0$ m_i-c.p.t. para todo $i\in I$ y sin embargo $G\neq 0$ m-c.p.t.

En este lema es esencial que I sea numerable. En efecto, sea $X=I=[0,1]$ y consideremos la función $F:[0,1]\to R^{[0,1]}$ definida por $F(x)=x\delta_x$ y la o-medida $m:\mathcal{A}\to R^{[0,1]}$ cuyas componentes m_y sean la medida de Lebesgue de la longitud en $\mathcal{A}=B_{[0,1]}$. Entonces $N_y=N_z$ para todo $y,z\in[0,1]$ y $F_y=y\delta_y\sim 0$ para cada $y\in[0,1]$. Sin embargo $F\not\sim 0$ puesto que $[F\neq 0]=[0,1]$.

<u>Proposición 2.4.2.</u> Si I es numerable y $N_i=N_j$ para todo $i,j\in I$, entonces una función $F\in L_A(m)$ si y sólo si $F_i\in L'(m_i)$ para todo $i\in I$ y en este caso $\int F dm = (\int F_i dm_i)$.

Demostración. De las definiciones se sigue que si $F\in\varepsilon$, entonces $F_i\in\varepsilon$ para cada $i\in I$ y $\int F dm=(\int F_i dm_i)$; de ahí se deduce que la integral respecto a m es secuencialmente contínua en ε y que si $F\in L_\sigma(m)$, entonces $F_i\in L_\sigma(m_i)$ para todo $i\in I$ y $\int F dm=(\int F_i dm_i)$. Si I es numerable, M_+ es σ-subretículo y está por tanto definida la integral respecto a m en $_A(m)$. Además si $F\in L_A(m)$, será $F_i\in L'(m_i)$ para cada $i\in I$ y seguirá siendo cierto que $\int F dm=(\int F_i dm_i)$.

Veamos que reciprocamente, si $F_i\in L'(m_i)$ para todo $i\in I$, entonces $F\in L_A(m)$. Podemos suponer que $F\geqslant 0$ m-c.p.t. Para cada $i\in I$ consideremos una función $G_i\in L_\sigma(m_i)$ tal que $G_i=F_i$ m_i-c.p.t. De la numerabilidad de I se deduce que $G=(G_i)\in L_\sigma(m)$ y, si además $N_i=N_j$ para todo $i,j\in I$, entonces, según el Lema 1, $G=F$ m-c.p.t. y por tanto $F\in L_A(m)$.

<u>Lema 2.4.3.</u> Sean $\ell,m:\mathcal{A}\to R^I$ dos medidas en un anillo $\mathcal{A}$.

a) Si ℓ_i es m_i-contínua para todo $i\in I$, entonces ℓ es m-contínua.

b) De la m-continuidad de ℓ se deduce la m_i-continuidad de ℓ_i para cada $i\in I$ si y sólo si $N_i=N_j$ para todo $i,j\in I$.

En efecto: a) es inmediato. En b) también es inmediata la suficiencia de la condición. En cuanto a la necesidad, basta considerar las medidas m y ℓ del ejemplo 2.3.2: ℓ es m-contínua y ni ℓ_1 es m_1-contínua ni ℓ_2 es m_2-contínua.

Finalmente, podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 2.4.4. Sea $m: \mathcal{A} \to R^I$ una o-medida positiva en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de un conjunto X, y $\ell: \mathcal{A} \to R^I$ una o-medida acotada m-contínua. Si I es numerable y $N_i = N_j$ para todo $i,j \in I$, entonces existe una única función $F \in L_A(m)$ tal que $\ell(A) = \int_A F\, dm$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Siendo $N_i = N_j$ para todo $i,j \in I$, cada ℓ_i será m_i-contínua. Sea $F_i \in L'(m_i)$ una función tal que $\ell_i(A) = \int_A F_i dm_i$. Podemos suponer que $F_i \in L_\omega(m_i)$. Entonces, siendo I numerable, $F = (F_i) \in L_\omega(m)$ y $\int_A F\, dm = \int F_A dm = (\int (F_A)_i dm) =$ $= (\int (F_i)_A dm) = (\ell_i(A)) = \ell(A)$, es decir, F es una derivada de ℓ. Veamos que es única: si $G = (G_i)$ es otra derivada de ℓ, será $\int_A F_i dm_i = \int_A G_i\, dm_i = \ell_i(A)$, para todo $i \in I$ y $A \in \mathcal{A}$, de modo que tendremos, dada la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym de las medidas reales, $F_i = G_i$ m_i-c.p.t. para todo $i \in I$. De ahí se deduce, según el Lema 2.4.1, que F=G m-c.p.t.

Referencias

[1] ASH, R.B.:"Real Analysis and Probability". Academic Press. Londres,1972.

[2] BIGARD, A., KEIMEL, K., WOLFENSTEIN, S.:"Grupes et anneaux réticulés". Lectures Notes in Math. 608, Springer Verlag. Berlín-Heildelberg-N.Y., 1977.

[3] BOURBAKI: "Eléments de Mathématique". Topologie Générale. Hermann. Paris, 1971.

[4] DESCOMBES, R.: "Intégration". Hermann. Paris, 1972.

[5] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.: "Linear Operators (part I)". Interscience. New-York, 1967.

[6] FAYRES, B., MORRISON, T.J.: "The Jordan Descomposition of vector-valued measures". Amer. Math. Soc. Vol. 60 (139-143), 1976.

[7] LUXEMBURG, W., ZAANEN, A.: "Riesz Spaces". North Holland. Amsterdam, 1971.

[8] PAPANGELOU, F.: "Order convergence and topological completion of commutative lattice-groups". Math. Annalen 155, (81-107), 1964.

[9] RIBENBOIM, R.: "Théorie des groupes ordonnés", Univ. Nac. del Sur. Bahía Blanca, 1959.

[10] TRILLAS, E.: "Sobre distancias estadísticas". Tesis doctoral. Publ.Univ. Barcelona, 1972.

[11] WILLARD: "General topology". Addison. Wesley. Reading, 1970.

Dpt. de Matemàtiques i Estadística.
E.T.S. d'Arquitectura.
Universitat Politècnica de Barcelona.
Diagonal 649. Barcelona (28).