



JORNADA DE PRESENTACIÓ DE RESULTATS DELS PROJECTES DE MILLORA DE LA DOCÈNCIA

**Implementació i validació de les tècniques de modelització matemàtica  
com a eina d'ensenyament/aprenentatge: una experiència de treball  
cooperatiu**

*Joan Gómez i Urgellés*

**Universitat Politècnica de Catalunya**

joang@mat.upc.es

DURSI2002

**RESUM**

Es presenta una metodologia de millora de la qualitat docent en l'àrea de matemàtiques que consisteix en la modelització matemàtica com a eina d'ensenyament/aprenentatge. Aquesta tipologia de pràctiques ja fa més de cinc anys que es desenvolupa a l'EPSEVG. En concret es ratifica la validació de la metodologia i la viabilitat en el procés d'ensenyament/aprenentatge, fent una aposta per la incorporació d'aquestes eines en els currículums universitaris. Es mostra una proposta d'avaluació i de validació de la metodologia que la fan realment eficient. El procés seguit a estat la selecció de situacions properes al futur enginyer destacant la component interdisciplinària (epistemologia). També reconsidera continguts i metodologies i replanteja la forma d'avaluar als estudiants. L'experiència a ofert resultats de qualitat i augmenta el rendiment acadèmic dels estudiants.

Arran de l'experiència s'ha creat un grup de modelització matemàtica interuniversitari (Universitats Politècnica de Valencia, Ramon Llull i Catòlica del Maule –Talca,Xile) i una web que conté els fonaments teòrics i material docent: <http://www-ma4.upc.es/~modelitzacio/>

**PARAULES CLAU**

modelització, aprenentatge, matemàtiques

**EL PROJECTE**

**1. Introducció**

*“ Ensenyar bé és ajudar a descobrir allò que es vol transmetre ”*

*G. Pólya*

Als inicis de l'any 1998 es van encetar experiències innovadores en l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques amb resultats òptims. L'experimentació consisteix en implementar tècniques de PBL usant la modelització matemàtica. El present document aporta com s'ha organitzat la metodologia a l'EPSEVG i en concret en una assignatura concreta: Anàlisi Vectorial i de Fourier de l'especialitat d'electrònica industrial a l'EPSEVG els cursos 2003 (extensible d'altres assignatures). Descriurem els continguts i l'organització docent de com s'ha desenvolupat. L'experiència es concreta en el treball en projectes a partir de la modelització matemàtica com a eina d'ensenyament/aprenentatge. Aquesta tipologia de pràctiques ja fa més de cinc anys que es desenvolupa a l'EPSEVG. En concret es ratifica la validació de la metodologia i la viabilitat en el procés d'ensenyament/aprenentatge, fent una aposta per la incorporació d'aquestes eines en els currículums universitaris. Es mostra una proposta d'avaluació i de validació de la metodologia que la fan realment eficient. El procés seguit a estat la selecció de situacions properes al futur enginyer destacant la component interdisciplinària (epistemologia) per tal de contextualitzar els continguts i millorar la qualitat docent.

La metodologia emprada a servit de patró docent en assignatures de matemàtiques que s'imparteixen en diverses universitats, en particular: Universitat Politècnica de València i Ramon Llull, i de l'exterior del país: Universitat Catòlica del Maule (Xile). La característica principal és contribuir a millorar la docència en matemàtiques a la UPC.

La inquietud parteix de la pregunta: Què es pot fer perquè una matèria com la matemàtica sigui significativa i profitosa per la formació dels enginyers? Per això cal plantejar una articulació de contingut de la matemàtica que afavoreixi la perspectiva interdisciplinària i el pensament creatiu, utilitzant i descobrint coneixements matemàtics mitjançant el plantejament de problemes reals, usant PBL i noves tecnologies. També implica un canvi substancial en la metodologia, que adquireix una vessant heurística alhora que fa servir tècniques de modelatge matemàtic (formular un problema real en termes matemàtics: resoldre'l, interpretar el resultat), utilitza nous recursos i replanteja els processos d'avaluació. La realització pressuposa un canvi fonamental en la concepció del rol del professor i del seu perfil formatiu, i la preparació contextual i emergent de material. Utilitza i crea recursos interactius per comprendre més l'aplicabilitat dels conceptes que transmetem en la formació dels estudiants i com usar les tècniques apreses en un context real per millorar els estudis presencials i rendiment acadèmic.

## 2. Descripció

### 2.1. Localització

Assignatura: Anàlisi Vectorial i de Fourier Especialitat: Electrònica Industrial

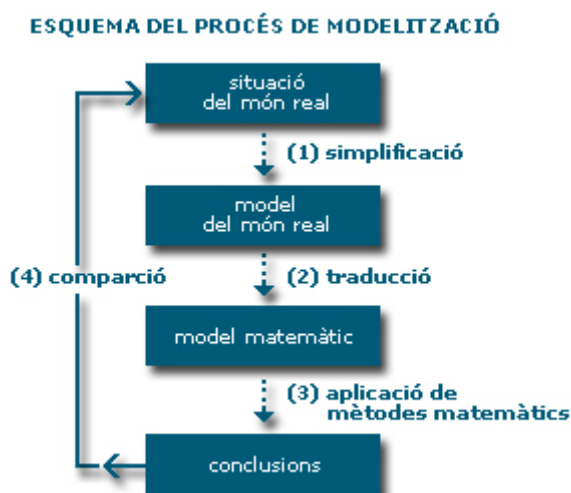
Cursos: 2002-2004

L'assignatura consta d'un **taller de modelització matemàtica** (treball en grup interdisciplinari) i de **sessions expositives tradicionals** per part del professor.

### 2.2. Modelització matemàtica: Metodologia i Projectes

Tal com afirma Mogen Niss: "*La modelització matemàtica és l'art d'aplicar les matemàtiques a la vida real*". Entendrem per model matemàtic un patró d'una

situació usual del context quotidià, és a dir: una expressió matemàtica que simbolitzi un fenomen real. La construcció de models forma part de la tasca curricular i professional del futur tècnic. Considerem adient que l'estudiant es familiaritzi amb les tècniques de modelització i contextualitzi les matemàtiques en el seu entorn curricular i professional. Per això suggerim el següent esquema per la construcció i validació de models.



El treball de modelització es realitzarà mitjançant el que anomenem projectes. Els projectes són treballs realitzats en grup (entre dues i quatre persones) on s'estudiarà una situació contextualitzada a la titulació. Es presentaran per part del professor diferents temes i/o se'n proposaran d'altres per part dels mateixos alumnes. Durant el quadrimestre cada grup realitzarà diverses reunions entre ells (mínim tres reunions) i redactaran "un acta" de la reunió. Cada equip anirà treballant en el seu problema i exposarà la darrera setmana de mes -a classe- l'estat en el què es troba el seu desenvolupament. Es valorarà les interpel·lacions que facin els companys i les actuacions a classe. D'aquesta manera els alumnes no només tindran informació sobre el treball de modelització del seu problema sinó també del dels seus companys.

Finalment, la darrera setmana del quadrimestre serà exposat i defensat públicament el projecte definitiu. Les exposicions són enregistrades en vídeo. Un cop finalitzada l'exposició del projecte els estudiants tenen que lliurar al professor el següent material: 1. El treball complimentat en suport paper i magnètic. 2. Una presentació en power point. 3. Un article d'extensió màxima de 5 fulls, molt divulgatiu, del tema que han estudiat. 4. Una valoració personal de les seves impressions sobre l'assignatura, les matemàtiques i la metodologia empleada.

El format de presentació de la memòria del projecte a de contenir els següents ítems:

1. Portada: títol i nom dels estudiants.
2. Índex.
3. Explicació detallada de la situació i presentació del problema a estudiar.

4. Resolució de les qüestions proposades (si n'hi ha). Construcció del model i interpretació.
5. Llistat de conceptes utilitzats i inventari del conceptes matemàtics involucrats.
6. Conclusions: ha d'incloure el resum dels descobriments fets, reflexions i els comentaris sobre les limitacions del treball.
7. Referències bibliogràfiques utilitzades (llibre, adreces URL,...).

Es important –i recomanable- que per efectuar un projecte l'estudiant es familiaritzi amb algun programa de càlcul simbòlic com a eina de treball o software adient de suport. La UPC disposa de llicències, entre d'altres, de Matlab i Maple.

### 2.3. Avaluació de l'assignatura

L'avaluació contemplarà diferents aspectes, distribuïts en un 50% cada apartat:

1. L'actuació a classe:
  - a. Una memòria, que serà lliurada a final de curs, on es recullin els apunts de l'assignatura ampliats i enriquits amb comentaris. Es valorarà que estiguin complementats amb elements i exemples d'aplicació interdisciplinària. A cada tema tractat a classe es pot afegir un exemple d'aplicació.
  - b. L'entrega d'exercicis efectuats individualment a classe desenvolupats amb l'ajut dels apunts, habitualment es realitzen dues entregues per quadrimestre
  - c. Cada mes els estudiants han d'entregar les "actes" dels dies que s'han reunit, d'aquesta manera es garanteix que s'han trobat per treballar l'assignatura
2. Taller de modelització:
  - a. Les exposicions a classe i el seguiment del treball durant el curs. Especialment la defensa pública del treball que es realitzarà la darrera setmana lectiva.
  - b. La memòria del projecte, seguint els ítems establerts, en suport paper i magnètic.

La següent graella mostra els criteris objectius per avaluar l'exposició final:

### CRITERIS I GRAELLA D'AVALUACIÓ

		molt baix    baix			
mitjà	alt				
A. DISSENY GLOBAL		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1. Recerca d'informació				<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Extensió i aprofundiment		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
B. CONTINGUT CONCEPTUAL				<input type="checkbox"/>	
3. Plantejament d'aspectes de matemàtiques		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Rigor del llenguatge		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Habilitat en la resolució i interpretació		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



## Superposició de dos sons

### 2.6.2. Fourier i els electrocardiogrames

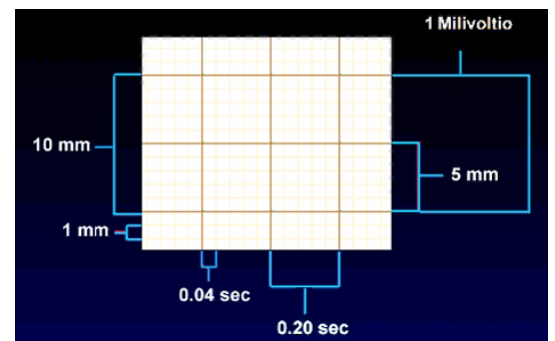
Aquest projecte mostra com a partir del desenvolupament de Fourier i els harmònics, el comportament d'un cor sa i d'un cor malalt són diferents. L'estudiant va mostrar transparències amb gràfiques reals d'un electrocardiograma d'un cor sa i d'un cor malalt.



Electro persona sana de 40 anys

Característiques del paper

$.2 \sin(5.714285714 \pi t + .2702702703 \pi) - .1$	$-t \leq 0 \text{ and } t < .08$
$-2.5 t + .25$	$.08 - t \leq 0 \text{ and } t < .1$
$0$	$.1 - t \leq 0 \text{ and } t < .14$
$-3 t + .42$	$.14 - t \leq 0 \text{ and } t < .15$
$27.6 t - 4.17$	$.15 - t \leq 0 \text{ and } t < .2$
$-35 t + 8.35$	$.2 - t \leq 0 \text{ and } t < .23$
$-27.5 t + 6.625$	$.023 - t \leq 0 \text{ and } t < .24$
$.55 t - .108$	$.24 - t \leq 0 \text{ and } t < .33$
$2.91 t - .8850$	$.33 - t \leq 0 \text{ and } t < .39$
$.2 \sin(9.280742459 \pi t + .6493506494 \pi) + .1$	$.39 - t \leq 0 \text{ and } t < .44$
$2 \sin(1.428571429 \pi t + .7369196758 \pi) + 2.075$	$.44 - t \leq 0 \text{ and } t < .53$
$.35 t - .114$	$.53 - t \leq 0 \text{ and } t < .6$
$-.25 t + .25$	$.6 - t \leq 0 \text{ and } t < .8$

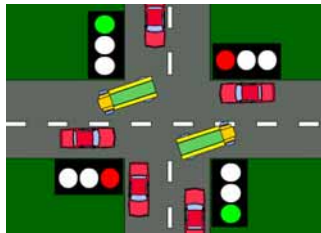


Simulació del gràfic utilitzant càlcul simbòlic

El grup d'estudiants (d'enginyeria electrònica) que va desenvolupar aquest projecte va efectuar diverses visites a cardiòlegs per tal d'obtenir mostres d'electrocardiogrames reals. La realització d'aquest treball ha suposat conèixer el funcionament dels aparells, les característiques del paper, l'ús de programes de matemàtiques de càlcul simbòlic per avaluar simulacions,... Les principals produccions matemàtiques van ser l'aprenentatge de funcions periòdiques i llur interpretació, aproximacions trigonomètriques, aprenentatge del MAPLE,...

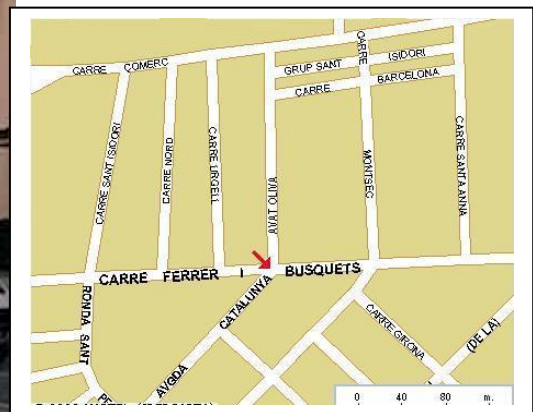
### 2.6.3. Modelització d'una cruïlla regulada per semàfors

El projecte va consistir en estudiar una cruïlla regulada per semàfors de la ciutat de Mollerusa (Lleida) amb l'objectiu d'avaluar d'una manera òptima el flux de vehicles. Els principals objectius del projecte van ser: 1. Explicació del mecanisme d'una intersecció regulada per semàfors. 2. Recollida de dades experimentals. 3. Raonament del funcionament a partir de dades experimentals. 4. Deducció d'equacions matemàtiques que modelen el funcionament. 5. Explicació del funcionament de la intersecció. Els ítems del treball han estat: i) Escollir una intersecció real regulada per semàfors per estudiar l'evolució del trànsit. En aquest cas de la ciutat de Mollerusa (Lleida). ii) Analitzar la densitat de tràfic realitzant mesures experimentalment del flux de vehicles. iii) Construcció d'una maqueta física i simulació de vehicles.



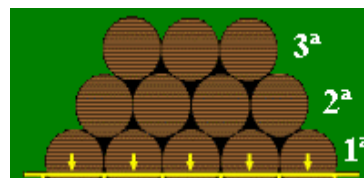
- a) Establir l'analogia entre els elements clàssics de la teoria de circuits i les característiques del tràfic que circula per la cruïlla. Treballar les lleis de Kirchoff
- b) Mostrar resultats com una primera aproximació al problema de la gestió del tràfic. S'ha treballat amb dades reals extretes de les mesures realitzades a la cruïlla.

La intersecció està ubicada a la N-II al seu pas per Mollerussa (Lleida). Els carrers són Ferrer i Busquets, Avinguda Catalunya, i per últim c/ Abat Oliva. Adjunto foto corresponent a la intersecció:



#### 2.6.4. Mètode de la Solera

L'anomena't "mètode de la solera" consisteix en l'elaboració del vi de Xerès i és una situació que ens remet a l'estudi de les sèries numèriques. El vi més vell està situat a la fila inferior de barrils i el més nou en el pis de més amunt. Cada any, la meitat del contingut dels barrils que toquen a terra es posa en ampolles com a vi de xerès i s'omple amb vi de la fila immediata superior. El procés es completa afegint vi novell als barrils de la filera de més amunt. El



problema és la recerca d'un model matemàtic que ens determini la quantitat de vi de n anys que s'extreu de k fileres de barrils (*Larson,2003. Càlculol*) .

Els alumnes varen deduir que l'expressió que determina la quantitat de vi de n anys que s'extreu de k fileres de barrils és:

$$f(n,k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \quad \text{per } k < n$$

Aquest és un altre exemple de modelització que ens permet presentar els temes de matemàtiques de manera diferent a la tradicional i que mostra la component epistemològica de les mateixes.

### **3. Resultats**

#### A nivell d'innovació

La innovació metodològica de l'ensenyament de les matemàtiques aconseguit és:

- a) Contextualitzar les matemàtiques en l'entorn curricular i professional
- b) Presentar una nova forma d'adquisició de coneixements: la modelització matemàtica com a eina d'ensenyament/aprenentatge
- c) Experimentar noves eines d'avaluació
- d) Estudiar l'eficàcia a partir de l'experimentació interuniversitària
- e) Oferir una nova visió de les matemàtiques i del seu caràcter formatiu
- f) Afavorir la creativitat
- g) Realitzar un taller de matemàtiques implementant maquetes i càlcul simbòlic
- h) Una àmplia projecció exterior de la metodologia i promoció a d'altres parcel·les universitàries i alhora una extensió a altres àrees de coneixement.

#### A nivell d'estudiants i departament

1. Millorar el rendiment acadèmic dels estudiants i els seus resultats i dels estudis presencials amb l'ajut de noves tecnologies.
2. Fomentar el debat, el treball en grup i la interdisciplinarietat
3. Que a nivell de professorat es fomenti el debat replantejant continguts i metodologies. Revisar el "concepte" d'avaluació com el "que saben" i no



com el que “no saben” : Avaluar no és penalitzar. Més implicació del professorat en potenciar el treball en equip. Destaco que la metodologia no és necessàriament compartida per d'altres professors degut al seu caire més tradicional. En particular el Departament de Matemàtica Aplicada IV de la UPC no a mostrat gaire interès en la continuïtat d'aquesta tipologia de pràctiques.

4. Potenciar la interdisciplinarietat al sí de l'ensenyament universitari , en el sentit de mostrar els continguts curriculars lligats a d'altres àrees de coneixement i al futur professional dels estudiants.
5. Obrir noves línies de recerca en l'àmbit de la innovació docent, destacant les components epistemològiques, heurístiques i cognitives. Fomentar la creació d'un grup de recerca en innovació metodològica en matemàtiques.
6. Engrescar a la comunitat universitària en implicar-se en iniciatives de millora de la qualitat docent.

A nivell més general de l'experimentació puc afirmar que s'ha assolit:

1. Els estudiants assumeixin una actitud creativa i un grau de motivació pels estudis que cursa.
2. Desenvolupar la seva habilitat en les aplicacions de les matemàtiques i motivar-los per les seves finalitats acadèmiques i professionals.
3. Capacitar als estudiants en les tècniques de modelització.
4. Proporcionar una imatge de les matemàtiques i del seu ensenyament diferent al tradicional.
5. Ajudar a l'estudiant a adquirir i comprendre tècniques i conceptes matemàtics a partir de les seves aplicacions.
6. Que l'estudiant descobreixi a partir de situacions reals la utilitat de les matemàtiques.
7. Presentar les matemàtiques com una ciència aplicada, en el sentit de que les matemàtiques són *"la reina i alhora servent de les altres àrees de la ciència"*.
8. Mostrar la inclusió de les tècniques del modelatge matemàtic com a forma d'aprenentatge diferent al tradicional.
9. Implicació de les noves tecnologies (ús de processador de textos i de software de càlcul simbòlic: Maple).
10. Adquisició de coneixements d'altres àrees de coneixement i de la vida quotidiana.

#### **4. Conclusions**

1. És una activitat multidisciplinar que fa que el coneixement en matemàtiques i ciències sigui profitós, ja que els conceptes de les diverses ciències s'apliquen en el marc de l'enginyeria, sense les divisions artificials que l'ensenyança tradicional estableix. Destaquem i potenciem d'aquesta manera el caràcter formatiu de les matemàtiques, lligades al món quotidià de l'enginyer.
2. Involucra protocols de treball nous, que estan absents en la docència tradicional com són el treball en grup, la verificació d'hipòtesi, el maneig de bibliografia, la defensa oral, l'ús de les noves tecnologies, etc.,
3. Presenta noves formes d'avaluació, continuada i formativa.

4. A nivell de produccions matemàtiques: aprenentatge de sèries de Fourier, grafs, sèries de potències, transformades....
5. Perspectives de futur:
  - a) Millorar la web  
Més interactivitat .Autoavaluació de l'aprenentatge. Incloure aplets
  - b) Projecció exterior : Avançar en el sentit d'implicar més departaments i més assignatures a nivell de revisar continguts i metodologies. Consolidar l'experiència a d'altres universitats. Comparar resultats d'aprenentatge entre les universitats que hi ha actualment implicades.
  - c) Participar en els congressos i trobades que es realitzaran durant el 2005 i dissenyar una jornada de modelització a l'EPSEVG que es realitzarà el proper abril del 2005.
  - d) Configurar material docent en aquesta línia, tant en suport digital com en suport paper.

## 5. Referències/Més informació

1. Alsina,C. Burgués,C. Fortuny. 2001.“Ensenyar Matemàtiques”. Graó
2. Alsina, C. 1998. Contar bien para vivir mejor.Rubes
- 3.Aravena;M<sup>a</sup>.2001. “Evaluación de proyectos en un curso de álgebra universitaria.Un estudio basado en la modelización polinómica”.Tesis Doctoral.UB
4. Cabrera,G:1998. ”Semiología del electrocardiograma, Análisis e interpretación”, Ed. Grupo Aula médica
- 5.Caamaño,C. 2001.“Bases para una formación integrada de álgebra y geometría en ingeniería:El caso de las cuádricas”.Tesis Doctoral. UB.
6. COMAP .2000. “Matemáticas y vida cotidiana”. Addison-Wesley.
- 7.Garcia,L.M.1998. “Proyectos de Matemática Aplicada para ingeniería”.Publicaciones UPV.
8. Gómez, J. 2000. Tesi doctoral.“Per un nou ensenyament de les matemàtiques”. Edit. CEAC
9. Gómez, J. 2002.“De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas” Edit. Piados
10. Guzmán,M. Página web: [www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.html](http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.html)

11. Puig Adam, P. "Cálculo Integral". Edición 1972.

12. Web de modelización: <http://www-ma4.upc.es/~andreu/>

En general tots els Congressos d'innovació docent més recents i les jornades JAC.