UPC

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE MANRESA
Departament d' Enginyeria Minera i Recursos Naturals

MÉTODOS PLANIMÉTRICOS:

RADIACIÓN
ITINERARIO
INTERSECCIÓN

LLUÍS SANMIQUEL

Manresa, mayo 2003

Primera edición: mayo de 2003
ISBN: 978-84-694-1125-4
Manresa, 2003

ÍNDICE

1- Método de radiación 3
1.1 Trabajos de campo 3
1.2 Trabajos de gabinete 3
1.2.1 Trabajos numéricos 4
1.2.2 Trabajos gráficos 4
1.3 Ventajas e inconvenientes 4
1.4 Estudio de errores 5
1.4.1 Errores absolutos y errores relativos 5
1.4.2 Cálculo de la longitud máxima admisible 6
1.5 Aparatos 7
1.6 Ejemplos 7

2- Método de itinerario 11
2.1 Trabajos de campo 11
2.2 Trabajos de gabinete 12
2.3 Aparatos 13
2.4 Clases de itinerarios 13
2.4.1 Por los datos conocidos y la forma del itinerario 14
2.4.1.1 Itinerario cerrado 14
2.4.1.2 Itinerario encuadrado 15
2.4.1.3 Itinerario colgado 16
2.4.2 Por la forma de conducir el itinerario 16
2.4.2.1 Itinerario orinetado 17
2.4.2.2 Itinerario desorientado 17
2.4.3 Por la forma de orientar el aparato 18
2.4.3.1 Itinerario con taquímetro 18
2.4.3.2 Itinerario con brújula 19
2.4.3.3 Análisis del error angular en poligonales con taquímetro y en poligonales con brújula 19
2.5 Compensación de un itinerario 23
2.5.1 Compensación angular 24
2.5.1.1 Itinerario con taquímetro 24
2.5.1.1.1 Itinerario cerrado 24
2.5.1.1.2 Itinerario encuadrado 33
2.5.1.2 Itinerario orientado mediante brújula 37
2.5.2 Compensación lineal 38
2.5.2.1 Itinerario cerrado 39
2.5.2.2 Itinerario encuadrado 40
2.5.3 Cálculo del error máximo admisible 40
2.5.4 Ejemplos 42

3- Método de intersección 50
3.1 Intersección directa 51
3.1.1 Simple 51
3.1.1.1 Método clásico 51
3.1.1.2 Método de ecuaciones 53
3.1.1.3 Aplicaciones 54
3.1.1.4 Ejemplos 55
3.1.2 Múltiple 58
3.1.2.1 Método de los triángulos independientes 58
3.1.2.2 Método numérico-gráfico del punto aproximado 59
3.1.2.3 Método de mínimos cuadrados 65
3.1.2.4 Ejemplos 70

3.2 Intersección inversa 75
3.2.1 Simple 75
3.2.2 Múltiple 78
3.2.3 Software para calculadoras con lenguaje BASIC o compatible 81
3.2.4 Ejemplos..... 83
3.3 Intersección inversa con medida de distancias 88
3.3.1 Trabajos de campo 88
3.3.2 Trabajos de gabinete 88
3.3.3 Ventajas e inconvenientes 89
3.3.4 Ejemplos..... 90
3.4 Estudio de errores en el método de intersección 92
3.4.1 Intersección directa 92
3.4.2 Intersección inversa 94
3.4.3 Ejemplos 95

BIBLIOGRAFIA 97

1 Método de radiación

Es el método planimétrico más sencillo. Se utiliza fundamentalmente en trabajos de relleno en combinación con otros métodos

1.1 Trabajos de campo

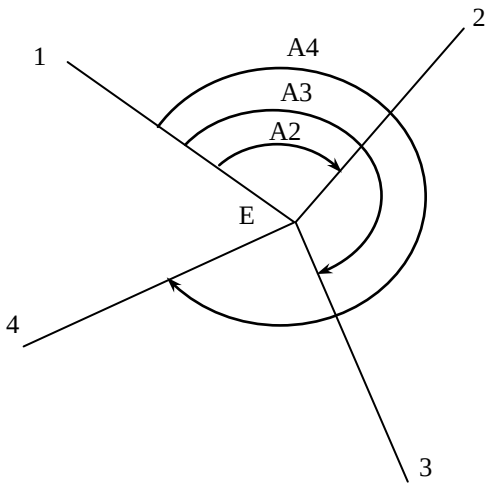


Fig. 1.1

Consisten en medir los ángulos A2, A3, A4, A5... y las distancias E1, E2, E3...

Para medir estos ángulos y distancias, tendremos que estacionar el taquímetro en el punto E, y tomar como origen de los ángulos acimutales una dirección determinada, que en el caso de la figura 1.1, es la alineación E1. Seguidamente se efectúan visuales a los diferentes puntos, midiendo los respectivos ángulos y distancias horizontales.

De este modo, los diferentes puntos visados quedan definidos por un ángulo y una distancia (coordenadas polares). La dirección de referencia, origen de los ángulos acimutales, puede ser una dirección arbitraria o una de las direcciones del norte geográfico, magnético y norte de la cuadrícula del punto de estación E.

1.2 Trabajos de gabinete

Se pueden diferenciar dos tipos de trabajos:

- Trabajos numéricos.
- Trabajos gráficos.

1.2.1 Trabajos numéricos

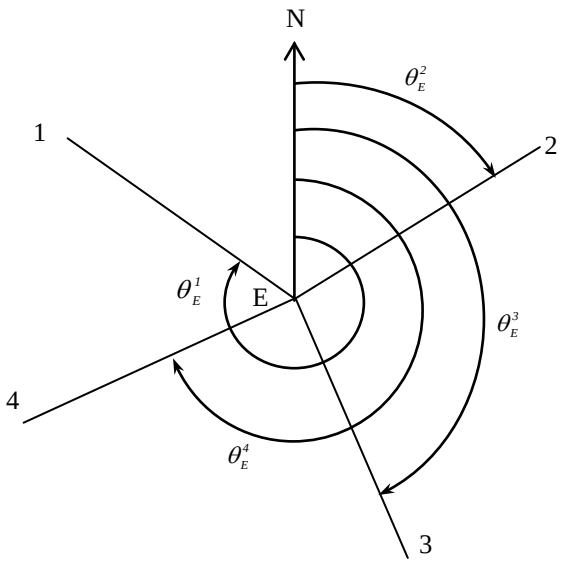


Fig. 1.2

Consisten básicamente en calcular las coordenadas planimétricas de los puntos visados. Las fórmulas que hay que usar para calcular estas coordenadas son:

$$X_1 = X_E + D_E^1 . Sin\ \theta_E^1$$
$$Y_1 = Y_E + D_E^1 . Cos\ \theta_E^1$$

Los cálculos de las coordenadas cartesianas de los puntos radiación solo se hacia en aquellos puntos que por alguna razón determinada era necesario conocerlas. Actualmente, con los ordenadores, se calculan las coordenadas de todos los puntos radiados, ya que hacerlo es mucho más sencillo y rápido. Además, los taquímetros actuales (estaciones totales) pueden dar las coordenadas cartesianas de los diferentes puntos visados, directamente en el campo.

1.2.2 Trabajos gráficos

Consisten en representar todos los puntos tomados en el campo en un plano, partiendo de sus coordenadas polares (medidas en el campo), o de sus coordenadas cartesianas (calculadas en los trabajos de gabinete numéricos, o directamente en el campo mediante estaciones totales).
Si no se dispone de un digitalizador gráfico (Plotter), el sistema más rápido para situar puntos en un plano es por coordenadas polares, aunque también cabe decir que es más impreciso.

Para situar puntos sobre el plano mediante coordenadas polares, lo primero que hay que hacer es situar el punto estación E, generalmente por coordenadas cartesianas. A continuación se coloca el transportador de ángulos centrado en el punto E, haciendo coincidir los cero grados con la dirección de referencia determinada. Seguidamente se representan las diferentes direcciones hacia los puntos radiados, y se marcan las distancias respectivas mediante un escalímetro.

1.3 Ventajas e inconvenientes

El método de radiación tiene las siguientes ventajas:

- Se puede usar en toda clase de terrenos.
- Gran rapidez.

- En un levantamiento topográfico, es el último método que se aplica, lo que implica que los errores que se produzcan solo afectan a los puntos radiados.

El método de radiación tiene los siguientes inconvenientes:

- Poca precisión, en comparación a otros métodos. Esto comporta que este método solo pueda usarse para tomar puntos de relleno que no sirvan de apoyo a otros puntos.
- Falta de homogeneidad en la precisión de una alineación que viene definida por 2 puntos levantados por el método de radiación.

1.4 Estudio de errores

1.4.1 Errores absolutos y errores relativos

En la figura 1.3 se puede observar como los puntos A y B debido a unos errores angulares y lineales quedan situados en A" y B". Por causa de un error angular el punto A queda situado en A', y el B en B', y a consecuencia de un error lineal los puntos quedan definitivamente en A" y B".
Se puede observar como en el caso concreto de la figura el error lineal producido es por exceso.

Los errores absolutos que se producen son:

$$\varepsilon a_A = A\,A'' \qquad \varepsilon a_B = B\,B''$$

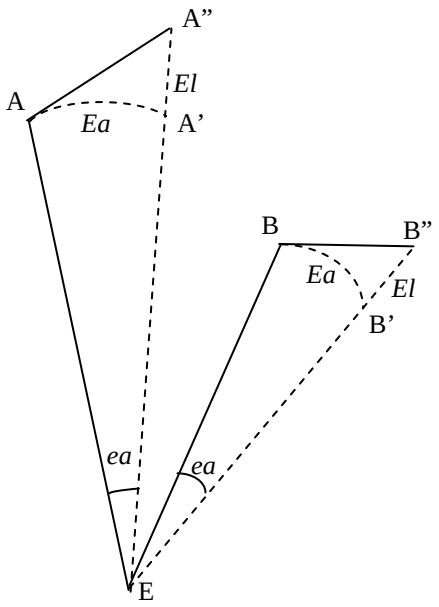


Fig. 1.3

y los errores relativos:

$$\varepsilon r_A = \frac{AA''}{EA} \qquad \varepsilon r_B = \frac{BB''}{EB}$$

El error relativo de una alineación se mantiene prácticamente constante a lo largo de toda la alineación debido a que un aumento de la distancia radiada produce un aumento proporcional similar al de su error absoluto. Esto no se cumple para todas las direcciones. Si se calcula el error absoluto y relativo de la alineación AB de la figura 1.3. se deduce lo siguiente:

$$\varepsilon a = AA'' + BB'' \qquad \varepsilon r = \frac{AA'' + B\,B''}{AB}$$

Entonces, con una disminución de la distancia AB, los errores absolutos AA" y BB" pueden continuar siendo más o menos iguales, con lo que el error relativo de la alineación AB aumenta. Esto nos lleva a la conclusión de que cuanto más alejados estén los puntos de una alineación, levantados por el método de radiación, y más pequeña sea su distancia de separación, el error relativo de la alineación considerada,

será mayor. Por lo tanto, habrá que procurar no levantar alineaciones muy cortas a grandes distancias del punto estación.

1.4.2 Cálculo de la longitud máxima admisible.

Debido a unos errores angulares y lineales, un punto A radiado desde una estación E no queda situado en el lugar que le correspondería, sino que queda situado en otro punto que en el caso de la figura 1.4 sería el A". El conjunto del error angular *Ea* y el error lineal *El*, da lugar al error de radiación *Er*. Los errores angulares y lineales *Ea* y *El* dependen del tipo de aparato, concretamente de su error angular *ea* y lineal *el*, así como también de la distancia radiada.

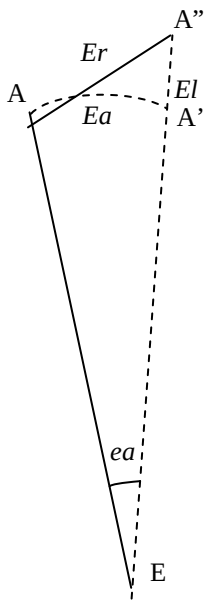


Fig 1.4

Si aumenta la distancia radiada, más grande serán los errores *Ea* y *El*. De la figura 1.4 se deducen las siguientes fórmulas:

$$Er = \sqrt{Ea^2 + El^2}$$

$$Ea = D \cdot Tgea = \frac{D \cdot ea''}{r''} \qquad r'' = 206265''$$

$$El = D \cdot el \quad \text{Donde} \quad D = \text{Distancia radiada}$$

$$Er = \sqrt{(D \cdot Tgea)^2 + (D \cdot el)^2}$$

$$X = \sqrt{(Tgea)^2 + (el)^2} \Rightarrow Er = D \cdot X$$

En un trabajo se tendrá que cumplir que *Er* sea más pequeño que una tolerancia T. Esta tolerancia muchas veces vendrá dada por el límite de percepción visual en un plano, que como ya se ha dicho anteriormente es de 0,2 mm por el denominador de la escala.

$T = 0{,}2 \cdot E$ donde E = Denominador de la escala

$$Er \leq T \Rightarrow D \leq \frac{T}{X}$$

1.5 Aparatos

Los aparatos que se utilizan actualmente son principalmente los taquímetros con medidor electrónico de distancias incorporado, y sobre todo las estaciones totales; prismas y jabalinas porta prismas.

1.6 Ejemplos

Ejemplo 1

Se han efectuado un levantamiento topográfico, con el fin de confeccionar un plano a escala 1/1000 usando una estación total que tiene las siguientes características:

Apreciación directa = 20^s
Aumentos del anteojo= 25
Sensibilidad del nivel = 30''
Error lineal del medidor electrónico de distancias = 3 mm ± 3ppm

Las lecturas angulares se han tomado dos veces, (una vez con el anteojo en posición directa y el otro en posición invertida) . Se considera que el error de estacionamiento más el de señal es de unos 2 cm. y la distancia mínima y máxima a radiar serán, respectivamente, unos 50 y 600 metros.

Se pide:

A) Calcular la longitud máxima que deberían tener las alineaciones radiadas para que los puntos radiados no tuviesen un error de situación apreciable en el plano.

****

El error angular *ea* del aparato viene dado por las fórmulas:

$$ev'' = \frac{S''}{12} \qquad ed'' = \frac{ee + ed}{DM} \cdot r''$$

$$ep'' = \frac{10''}{A} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot A}{100}\right) \qquad el'' = \frac{2}{3} \cdot ad''$$

ev = error de verticalidad. *ed*= error de dirección. *ep*= error de puntería. *el*= error de lectura. *S*= sensibilidad del nivel. *ee+es*= error de situación de la estación más error de situación de la jabalina del porta prismas. *DM*= Distancia mínima del levantamiento. *A*= aumentos del anteojo. *ad*= apreciación directa. *r''* = 206265"

Si se ha aplicado la regla de Bessel una vez, entonces *ep* y *el* se tienen que dividir por $\sqrt{2}$.
ea vendrá dado por:

$$ea = \sqrt{ev^2 + ed^2 + ep^2 + el^2}$$

Cálculo del error angular del taquímetro:

$$ev = \frac{30''}{12} = 2'',5 \qquad ed = \frac{0,02}{50} = 206265'' = 82'',5$$

$$ep = \frac{10''}{\sqrt{2} \cdot 25} \cdot (1 + \frac{4 \cdot 25}{100}) = 0'',57 \qquad el = \frac{2.20^{s}}{3 \cdot \sqrt{2}} = 9'',4$$

$$ea = \sqrt{2,5^2 + 82,5^2 + 0,57^2 + 9,4^2} = 83'',07$$

Este valor de *ea* expresado en radiantes será:

$$ea = \frac{83'',07}{206265''} \approx 0,0004\ rad$$

Cálculo del error lineal:

El error lineal máximo se produce en la medida de la distancia máxima, que en este levantamiento es de unos 600 metros. Por tanto, teniendo en cuenta que 3 ppm equivalen a 3 mm de error por cada 1000 metros, el error lineal será:

$$\in l = 3mm + \left(\frac{3 \cdot 600\,m}{1000\,m}\right) = 4,8\ mm$$

Este error lineal absoluto expresado en valor relativo para 1000 metros será:

$$\in l = \frac{0,0048\ m}{1000\,m} = 0,0000048\,rad$$

Cálculo de la longitud máxima :

$$X = \sqrt{0,0004^2 + 0,0000048^2} = 0,0004$$

$$D \leq \frac{0,02\ cm \cdot 10\ m/cm}{0,0004} = 500\ m$$

$$D \leq\ 500\ m$$

Todos los puntos radiados con una distancia superior a 500 m.(aplicando Bessel) tendrán un error de situación que será apreciable en un plano a escala 1/1000.

Ejemplo 2

Se ha efectuado un levantamiento topográfico, con el fin de confeccionar un plano a escala 1/500, usando un taquímetro y un distaciómetro que tienen las siguientes características:

Apreciación directa = 10^s
Aumentos del anteojo = 30
Sensibilidad del nivel = 30’’
Error lineal del distanciómetro = 1/2000

La distancia mínima medida es de unos 100 m. Se considera que el error d’estacionamiento más el de señal es de unos 3 cm.
Se pide:

a) Calcular la longitud máxima que deberían tener las alineaciones radiadas para que los puntos radiados no tengan un error de situación apreciable en el plano.

****

Cálculo del error angular del taquímetro:

$$ev = \frac{30''}{12} = 2'',5 = 7,7^s \qquad ed = \frac{0,03}{100} \cdot 636620^s = 190,99^s$$

$$ep = \frac{30^s}{30} \cdot (1 + \frac{4 \cdot 30}{100}) = 2,2^s \qquad el = \frac{2.10^s}{3} = 6,67^s$$

$$ea = \sqrt{7,7^2 + 190,99^2 + 2,2^2 + 6,67^2} = 191,27^s$$

Este valor de *ea* expresado en radiantes será:

$$ea = \frac{191,27^s}{636620^s} \approx 0,0003\ rad$$

. Cálculo de la longitud máxima:

$$X = \sqrt{0,0003^2 + (\frac{1}{2000})^2} = 5,83 \cdot 10^{-4}\ rad$$

$$D \leq \frac{0,02\ cm \cdot 5\ m/cm}{5,83 \cdot 10^{-4}} = 171,5\ m$$

$$D \leq\ 171\ \ m$$

Todos los puntos radiados con una distancia superior a 171 m. tendrán un error de situación que será apreciable en un plano a escala 1/500.

Ejemplo 3

Un topógrafo se ha estacionado en un punto A y ha visado a 3 puntos. Las medidas efectuadas son las siguientes:

Origen	Estación	Visado	Ángulo Hz.	Distancia Hz.
Nc	A	1	60	60
Nc	A	2	105	50
Nc	A	3	200	75

El aparato usado es un taquímetro de graduación directa y centesimal. Las coordenadas del punto de estación A son:

X_A = 1000 m. Y_A = 1000 m.

Se pide:

a) Calcular las coordenadas cartesianas de los puntos 1,2 y 3.

****

$X_1 = 1000 + 60 \cdot Sin\ 60 = 1084{,}541 m.$ $Y_1 = 1000 + 60 \cdot Cos\ 60 = 1035{,}267\ m.$

Aplicando las mismas fórmulas para los otros puntos, obtendremos los siguientes resultados:

$X_2 = 1049{,}846\ m.$ $Y_2 = 996{,}077\ m.$

$X_3 = 1000{,}000\ m.$ $Y_3 = 925{,}000\ m.$

2 Método de itinerario

Es el método planimétrico que tiene como finalidad enlazar, una serie de puntos (estaciones) que nos servirán de base para poder levantar con el método de radiación todos los detalles del terreno. El método de itinerario se ha de aplicar cuando en un terreno no se puedan levantar todos sus detalles desde una sola estación. Entonces, es necesario distribuir por el terreno unos puntos de soporte mínimos (estaciones), desde los cuales, se puedan medir todos los detalles del terreno. Además, estos puntos de soporte tienen que estar relacionados entre sí, con el fin de que todos los detalles del terreno queden referidos a un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

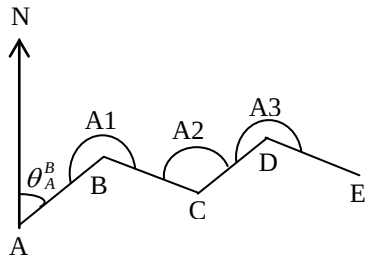


Fig. 2.1

La forma de realizar estas operaciones de manera rápida y correcta es aplicando el método de itinerario.

2.1 Trabajos de campo

Consisten en medir los ángulos A1, A2, A3... y las distancias AB, BC, CD... Para medir estos ángulos y distancias, hay que estacionar el aparato en cada uno de los vértices de la poligonal. La primera estación se efectuará en la estación A, que será la estación de la cual se conocerán sus coordenadas cartesianas y en la cual se podrá orientar el aparato. Entonces, desde esta primera estación A se medirá el acimut, orientación o rumbo hacia el segundo punto de la poligonal B y la distancia de A a B. Seguidamente, se estacionará el aparato en la segunda estación B y se medirá el ángulo A1, así como la distancia BA y BC.

Se efectuarán las mismas operaciones desde el punto C, midiendo el ángulo A2 y las distancias CB y CD; y desde los otros puntos, midiendo todos los ángulos y distancias de los diferentes ejes. Es aconsejable, que las distancias de los ejes se midan como mínimo dos veces.
La elección de la poligonal es muy importante, hay que reconocer el terreno y procurar que los lugares donde se quiere efectuar la poligonal sean lo más regulares posibles, sin obstáculos naturales o artificiales.

Es imprescindible que desde cada punto se puedan ver el punto de atrás y el de delante, es decir, desde el punto A se ha de ver el B, desde B el A y el C, desde el C el B y el D...
Hay que procurar también, que el numero de ejes sea mínimo, y que la forma de la poligonal sea lo más rectilínea posible, ya que cuanto más ejes tenga la poligonal y menos recta sea, el error será mayor.

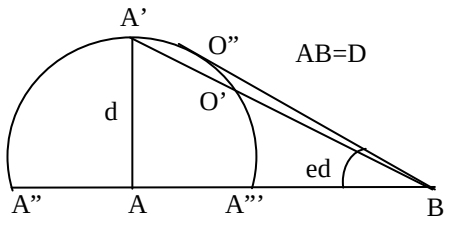


Fig. 2.2

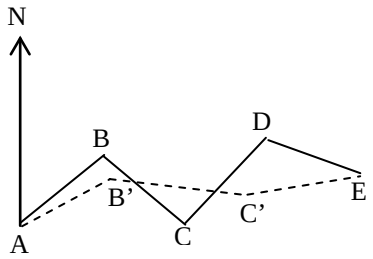


Fig. 2.3

Si fuera posible, se tendría que efectuar la poligonal A - B' - C' - E, en lugar de la A - B - C - D - E de la (Fig. 2.3) .

Para conseguir que los errores que se producen en la medida de la poligonal sean mínimos, es necesario esforzarse en la colocación lo más precisa posible del aparato y del prisma o mira sobre los diferentes puntos de la poligonal. Habrá que extremar las precauciones especialmente para los ejes de poca longitud.

Si los puntos A y B de la figura 2.2 representan dos puntos consecutivos de una poligonal, el error angular que se produce como consecuencia de situar la estación a una distancia "d" del punto estación A, viene dado por la formula:

$$T\,g\,ed = \frac{d}{D}$$

Se considera que AA' es perpendicular a la alineación AB. Un error de estacionamiento de 5 cm, con un eje de 30 m. produce un error angular de dirección ed = 5’,44".

Observando la figura 2.2, se deduce que por un error lineal de estacionamiento d, los errores angulares máximos que se producen en el eje AB se dan cuando el estacionamiento del punto A se efectúa en el tramo A'O' del círculo de error. Concretamente el error es máximo en el punto O".

El error *ed* es nulo cuando el estacionamiento se efectúa en cualquier punto de la línea A'" A A". A este error angular *ed*, le llamaremos error de dirección y se caracteriza porque su valor aumenta al hacerse menor la distancia del eje, y disminuye cuando más grande es. Por lo tanto, en una poligonal habrá que ser muy cuidadoso con los estacionamientos, y procurar que las distancias de los diferentes ejes sean tan largas como las circunstancias (aparato, terreno, trabajo...) permitan.

2.2 Trabajos de gabinete

Consisten en calcular los acimutes, orientaciones o rumbos de los diferentes ejes, y las coordenadas cartesianas de todos los puntos de la poligonal.

Si se dispone de los datos necesarios, se puede tener la comprobación angular y lineal de la poligonal. Entonces, si se ha producido un error angular y lineal inferior a la tolerancia, se podrá compensar la poligonal angularmente y linealmente.

Las fórmulas que se utilizaran para calcular los acimutes, orientaciones o rumbos de los diferentes ejes, así como las coordenadas cartesianas de todos los puntos serán análogas a las indicadas para el cálculo del acimut, orientación o rumbos del eje B-C, así como las indicadas por el cálculo de las coordenadas del punto B, las cuales son:

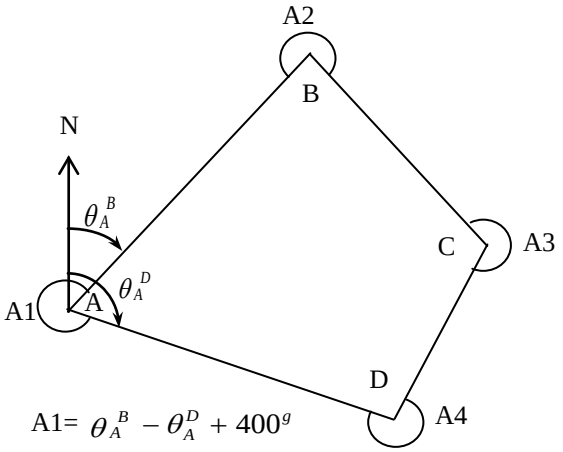


Fig. 2.4

$$\theta_B^C = \theta_A^B + A_2 - 200^g$$

$$Si\ \theta_B^C \succ 400^g \Rightarrow \theta_B^C = \theta_B^C - 400^g$$

$$Si\ \theta_B^C \prec 0^g \Rightarrow \theta_B^C = \theta_B^C + 400^g$$

$$X_B = X_A + D_A^B \cdot Sin\ \theta_A^B$$
$$Y_B = Y_A + D_A^B \cdot Cos\ \theta_A^B$$

2.3 Aparatos

Los aparatos que se utilizan actualmente son principlamente los taquímetros con medidor electrónico de distancias incorporado, y sobre todo las estaciones totales; prismas y jabalina porta prismas.

2.4 Clases de itinerarios

Los itinerarios o poligonales, se pueden clasificar en función de una serie de parámetros tales como: datos finales conocidos, forma de conducir el itinerario y forma de orientarlo. Teniendo en cuenta los parámetros mencionados, tenemos la siguiente clasificación:

- Según los datos finales conocidos:

  Cerrado:

    Angularmente y linealmente
    Angularmente

  Encuadrado:

    Angularmente y linealmente
    Angularmente

  Colgado

- Según la forma de conducir el itinerario:

  Orientado

  Desorientado

- Según la forma de orientar el aparato

A continuación, se pasa a analizar cada una de estas poligonales.

2.4.1 Por los datos conocidos y la forma del itinerario

Teniendo en cuenta los datos conocidos de la ultima estación de la poligonal y su forma, se pueden diferenciar tres tipos de itinerario: Cerrado, encuadrado y colgado.

2.4.1.1 Itinerario cerrado

El itinerario cerrado se caracteriza porque sus alineaciones entre estaciones forman una figura cerrada, ya que se han enlazado las estaciones primera y última.

En función de los datos medidos en el campo, se diferencian dos tipos de itinerarios cerrados: Cerrado angularmente y linealmente, y cerrado angularmente.

a) Cerrado angularmente y linealmente:

Esta poligonal se caracteriza por que se han medido en el campo sus lecturas horizontales entre la primera y la ultima estación, así como su distancia.

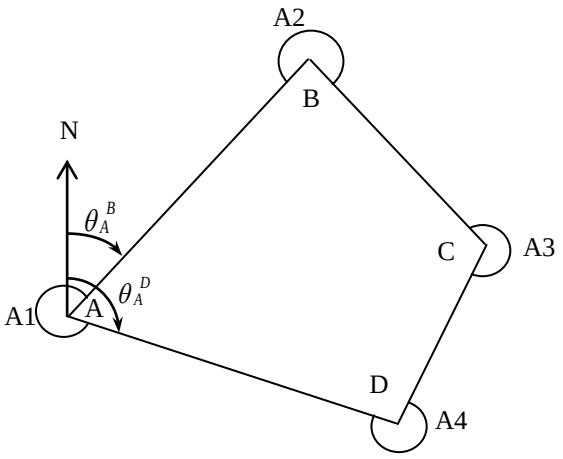


Fig. 2.5

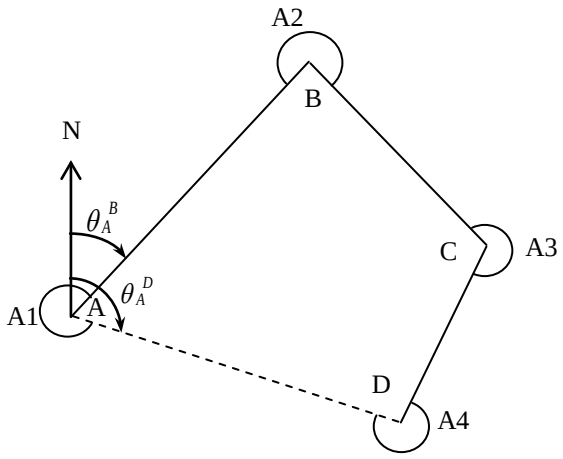


Fig. 2.6

En el caso de la figura 2.5 se habrían medido las lecturas horizontales y las distancias de las alineaciones A-D y D-A. En este tipo de itinerario se podrá tener comprobación angular y lineal.

b) Cerrado angularmente:

Esta poligonal se caracteriza porque se han medido en el campo las lecturas horizontales entre la primera y la ultima estación, pero no su distancia. En el caso de la figura 2.6 se habrían medido las lecturas horizontales A-D y D-A, pero no las distancias entre la estación primera y la final. En este tipo de itinerario se podrá tener comprobación angular, pero no, lineal.

2.4.1.2 Itinerario encuadrado

El itinerario encuadrado se caracteriza porque se conocen datos de la última estación que permiten poder tener comprobación angular, lineal o de las dos a la vez.

Se pueden distinguir tres tipos de itinerarios encuadrados: Encuadrado angularmente y linealmente, encuadrado angularmente y encuadrado linealmente.

a) Itinerario encuadrado angularmente y linealmente:

Esta poligonal se caracteriza porque se conocen las coordenadas cartesianas de la ultima estación, así como el acimut, orientación o rumbo del ultimo eje de la poligonal, (fig. 2.7.a), o de una alineación

establecida entre la última estación y una referencia (fig. 2.7.b).

En este tipo de poligonal se podrá tener comprobación angular y lineal.

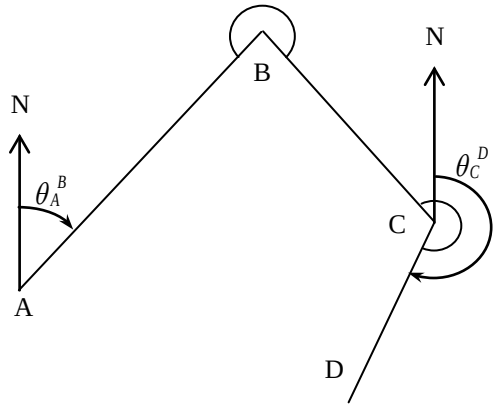


Fig. 2.7.a

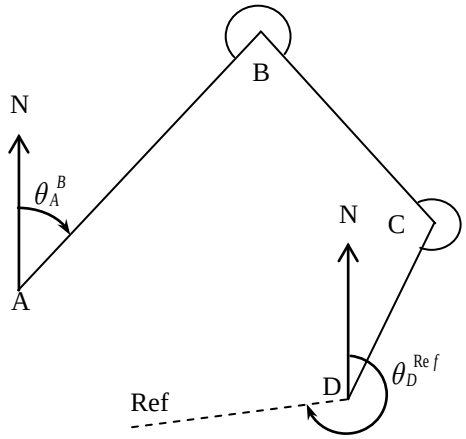


Fig. 2.7.b

b) Itinerario encuadrado angularmente:

Este itinerario es igual que el encuadrado angularmente y linealmente con la diferencia que no se conocen las coordenadas cartesianas del último punto de la poligonal, por la que no se podrá tener comprobación lineal, pero si angular.

c) Itinerario encuadrado linealmente:

Es igual que el itinerario encuadrado angularmente y linealmente con la diferencia que no se conoce ningún acimut, orientación o rumbo del último eje de la poligonal o de una alineación establecida entre el último punto de la poligonal y una referencia. Por lo tanto, no se podrá tener comprobación angular, pero si lineal.

2.4.1.3 Itinerario colgado

El itinerario colgado se caracteriza porque la primera estación no esta enlazada con la última de la poligonal. Se caracteriza también porque no se conoce ningún dato angular o lineal de la última estación, con lo que no se puede tener comprobación angular ni lineal.

2.4.2 Por la forma de conducir el itinerario

Una poligonal se puede conducir de dos maneras diferentes: orientada y desorientada.
La diferencia entre las 2 está en el origen de los ángulos horizontales que se consideran en cada estación.

2.4.2.1 Itinerario orientado

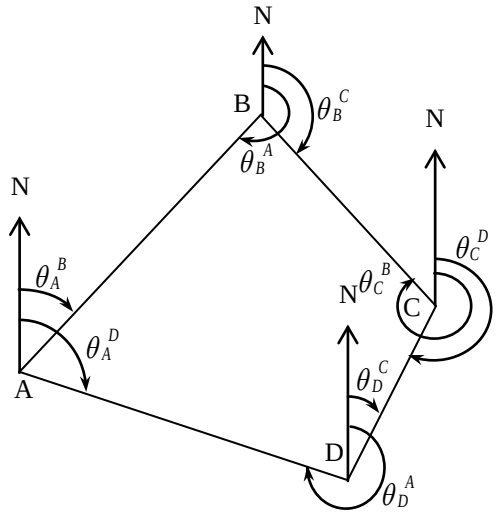


Fig. 2.8

Este itinerario se caracteriza porque en cada estación se coge como origen de ángulos horizontales la dirección del norte geográfico, norte proyección o norte magnético.

Para poder establecer el origen de los ángulos horizontales, hace falta efectuar lo siguiente:

Sea θ_A^B la orientación del eje A-B medida en el campo. Para orientar el aparato en la estación siguiente B (colocar origen de los ángulos Hz en la dirección del norte proyección) se tendría que buscar la lectura horizontal $\theta_A^B \pm 200^g$ y trasladarla al eje B-A.

Las ventajas de conducir una poligonal orientada son:

- Posibilidad de conocer el error angular en el campo si se trata de una poligonal cerrada o encuadrada angularmente.
- Simplificación de cálculos.

2.4.2.2 Itinerario desorientado

Este itinerario se caracteriza porque en cada estación menos la primera, se coge como origen de los ángulos horizontales la dirección del eje formado por la estación actual y la anterior. Así por ejemplo en la estación B de las figuras 2.5, 2.6, 2.7, se buscaría la lectura horizontal cero y se trasladaría hasta el eje B-A. Así se operaria en cada estación.

Las ventajas de conducir una poligonal desorientada son:

- Posibilidad de efectuar las estaciones desordenadas. Es decir, primero hacer la estación A y después, si por alguna razón no se puede hacer la B, se efectúa la D.
- Mayor rapidez en el campo.

2.4.3 Por la forma de orientar el aparato

Un taquímetro o teodolito se puede orientar en un punto determinado de dos formas distintas:

- A partir de una referencia, la cual puede ser la estación anterior de una poligonal, o un objeto lejano como una antena,...en el caso de la primera estación. En este caso el itinerario se puede conducir tanto de forma orientada como de forma desorientada. Estas poligonales se suelen llamar poligonales con taquímetro.

- A partir de la brújula. En estas poligonales la orientación de los ejes se efectúa independientemente de cualquiera referencia. Es decir, en un itinerario cada estación se podrá orientar independientemente de las otras. Mediante la brújula, se puede colocar el cero del limbo azimutal del taquímetro o teodolito en la dirección de la meridiana magnética que pasa por el punto estación , con lo cual el aparato queda orientado al norte magnético. Las poligonales, los ejes de los cuales se orientan mediante la brújula , se llaman poligonales con brújula.

2.4.3.1 Itinerario con taquímetro

Un itinerario con taquímetro , se caracteriza porque el azimut, orientación o rumbo se transmite de una estación a la otra, de tal modo que un error angular producido en una estación, pasará a las otras estaciones. Es decir, los errores angulares azimutales se transiten de estación a estación y por tanto se acumulan. Una conclusión importante es que cuantas más estaciones haya en la poligonal, más grande será el error angular global de todo el itinerario.

La forma de conducir el itinerario puede ser llevándolo orientado o desorientado, tal como se ha descrito en el apartado 2.4.2. Las ventajas que hay al efectuar una poligonal con taquímetro son:

- Gran precisión en la orientación de los ejes de la poligonal al norte elegido como referencia (geográfico, proyección o magnética) .

Los inconvenientes son:

- Acumulación del error angular de una estación a la otra. Así en los casos de las figuras 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 las orientaciones de los ejes BC y CD vienen dadas por:

$$\theta_B^C = \theta_A^B + A_2 - 200^g$$
$$\theta_C^D = \theta_B^C + A_3 - 200^g$$

A2 = Ángulo ABC A3 = Ángulo BCD

En estas fórmulas se puede observar como la orientación de un eje se apoya en la orientación del eje anterior, con lo que el error angular de un eje vendrá dado por el propio error que se produce y el error de la orientación precedente.

- Obligación de que los puntos de la poligonal sean siempre visibles entre sí, ya que la orientación de un eje se encuentra a partir de la orientación anterior. Así, en la figura 2.4 para encontrar la orientación del eje BC es necesario conocer la orientación del eje AB y haber medido el ángulo A2. Para medir este ángulo necesariamente se ha de visar el punto A y el C desde B.

2.4.3.2 Itinerario con brújula

Un itinerario con brújula, se caracteriza porque cada eje se orienta independientemente, con lo que el error angular que se produce en cada uno queda localizado sin transmitirlo al siguiente eje.

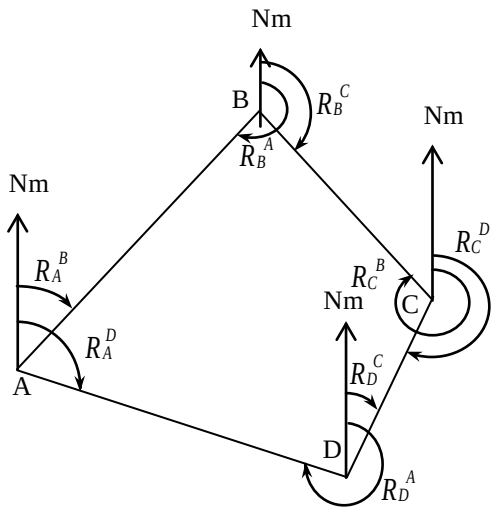


Fig. 2.9

Las ventajas de efectuar una poligonal con brújula son:

- Rapidez a la hora de hacer las medidas al campo sobretodo si se aplica el método de estaciones alternas.
- El error angular no se acumula de un eje al otro, ya que cada eje se orienta independientemente.

Los inconvenientes son:

- Poca precisión al orientar una alineación determinada al Norte magnético, con una precisión máxima de 10'-15'.
- No puede usarse la brújula en terrenos magnéticos, cuando hay perturbaciones magnéticas... Aunque la orientación de un eje sea bastante más precisa con un taquímetro que con una brújula, puede suceder que una poligonal con brújula, tenga un error angular total inferior a la misma poligonal medida con taquímetro. Esto se puede dar en poligonales formadas por un gran número de ejes cortos.

2.4.3.3 Análisis del error angular en polígonos con taquímetro y en poligonales con brújula.

1- En un itinerario con taquímetro:

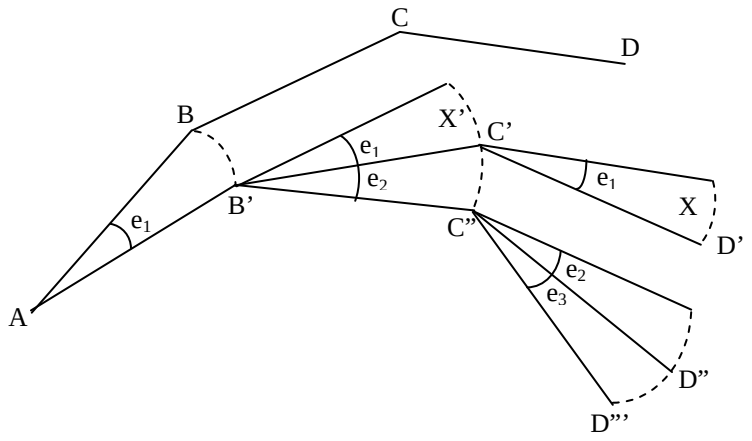


Fig. 2.10

Se considera la poligonal de la figura 2.10, formada por los puntos A,B,C,D. Si se produjera un error angular en cada estación , el punto D quedaría situado en D'''. Si tan sólo se produjera error en A y B pero no en C entonces el punto D quedaría situado D'', y si tan solo se produjera error en la estación A quedaría situado en D'.

El error angular que se produce en cada punto de la poligonal produce un giro del punto siguiente que repercute en toda la poligonal restante.

De la figura 2.10 se deducen las fórmulas siguientes:

$$DD' = CC' + X \qquad CC' = BB' + X'$$

$$Sin\, e_1 = \frac{BB'}{AB} \qquad Sin\, e_1 = \frac{X'}{BC} \qquad Sin\, e_1 = \frac{X}{CD}$$

Como que estos errores son muy pequeños se cumple que Sin $\alpha \approx \alpha$ radianes.

Entonces:

$$X = CD \cdot e_1$$

$$BB' = AB \cdot e_1 \qquad X' = BC \cdot e_1 \qquad DD' = e_1 \cdot (AB+BC+CD)$$

Se considera que todos los ejes tienen la misma longitud D, con lo que las expresiones quedan:

$$DD' = 3 \cdot D.e_1 \qquad D'D'' = 2 \cdot D \cdot e_2 \qquad D''D''' = D \cdot e_3$$

Para n alineaciones:

$$DD' = n \cdot D.e_1 \qquad D'D'' = (n-1) \cdot D.e_2 \qquad D^{n-1}\, D^n = D \cdot e_n$$

El error resultante vendrá dado por:

$$Ea = \sqrt{(n \cdot D \cdot e_1)^2 + ((n-1) \cdot D \cdot e_2)^2 + ... + (D \cdot e_n)^2}$$

Si se considera que el error angular máximo que se produce en cada estación es el error angular del aparato ea, entonces:

$$Ea = D \cdot e_a \cdot \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + ... + 1^2}$$

Esta expresión es equivalente a:

$$Ea = D \cdot e_a \cdot \sqrt{\frac{n.(n-1) \cdot (2n+1)}{6}}$$

n = número de ejes de la poligonal

Si los ángulos se han medido aplicando la regla de Bessel se ha de dividir *Ea* por n'$\cdot\sqrt{2}$, donde n' es el número de veces que se ha aplicado Bessel.

Si se considera una poligonal como la de la figura 2.10 donde se ha producido un error angular *ea* en cada eje de la poligonal , se obtendrá que el desplazamiento máximo ocasionado por aquéllos, es el que se produce en la última estación. Éste desplazamiento máximo es el error *Ea*, el cual se puede definir como un error lineal máximo derivado de los errores angulares que se producen en los distintos ejes de un itinerario.

2.- En un itinerario con brújula:

Se considera la poligonal de la figura 2.11 formada por los puntos A, B, C, D. Si se produjera un error angular en cada estación, el punto D quedaría situado en D'''. Si sólo se produjera error en A y B entonces el punto D quedaría situado en D'', y si tan solo se produjera error en la estación A aquél quedaría situado en D'. Observando la figura 2.11 se ve que a diferencia de una poligonal con taquímetro , en la poligonal con brújula si se produce un error angular en la estación A pero no en la B, la dirección del eje BC no se verá afectada por el error producido en A. Es decir, el error angular que se produce en un eje no afecta a la de los ejes siguientes. Esto es debido a que cada eje se orienta independientemente del anterior.

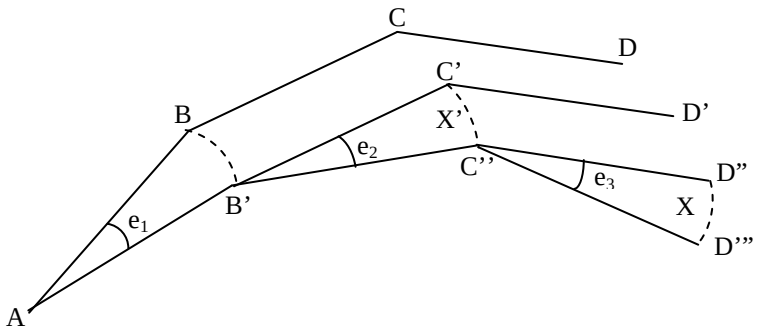


Fig. 2.11

De la figura 2.11 se deducen las siguientes fórmulas:

$$Sin\, e_1 = \frac{BB'}{AB} \qquad Sin\, e_2 = \frac{C'C''}{BC} \qquad Sin\, e_3 = \frac{D''D'''}{CD}$$

Como estos errores angulares son muy pequeños se cumple que $\sin \alpha \approx \alpha$ radianes. Entonces:

$$BB' = AB \cdot e_1 \qquad C'C'' = BC \cdot e_2 \qquad D''D''' = CD \cdot e_3$$

Se considera que todos los ejes tienen la misma longitud D. En consecuencia las expresiones quedan:

$$BB' = D \cdot e_1 \qquad C'C'' = D'D'' = D \cdot e_2 \qquad D''D''' = D \cdot e_3$$

D = Distancia de cada eje.

Para n alineaciones:

$$D^{n-1} D^n = D \cdot e_n$$

El error resultante vendrá dado por:

$$Ea = \sqrt{(D \cdot e_1)^2 + (D \cdot e_2)^2 + \ldots + (D \cdot e_n)^2}$$

Considerando que el error angular máximo que se produce en cada estación és el error angular del aparato *ea*, la fórmula anterior queda:

$$Ea = D \cdot ea \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}$$

Esta expresión es equivalente a:

$$Ea = D \cdot ea \cdot \sqrt{n}$$

n = número de ejes de la poligonal.

Si los ángulos se han medido aplicando la regla de Bessel se ha de dividir el error *Ea* por n'$\cdot\sqrt{2}$, donde n' es el numero de veces que se ha aplicado Bessel.

3.- Cálculo del numero de estaciones a partir del cual , el error angular de un itinerario con taquímetro medido se iguala con el de la poligonal con brújula:

Sean *Ea* y *ea* el error lineal total derivado del error angular ea producido en cada eje, y el error angular del aparato, respectivamente, en una poligonal con taquímetro.

Sean *Ea'* y *ea'* lo mismo que el caso anterior pero en una poligonal con brújula.

Se tendrá que cumplir que:

Ea = Ea'

$$D \cdot ea \cdot \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}} = D \cdot ea' \cdot \sqrt{n}$$

$$ea' = ea \cdot \sqrt{\frac{(n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}} = ea \cdot \sqrt{\frac{(n+1) \cdot (n+\frac{1}{2})}{3}}$$

Se considera la simplificación $n+1/2 \approx n+1$, por lo cual la expresión se reduce a :

$$ea' \approx ea \cdot \frac{n+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow n+1 \approx \frac{\sqrt{3} \cdot ea'}{ea}$$

y finalmente:

$$n \approx \frac{\sqrt{3} \cdot ea'}{ea} - 1$$

A partir de un número de ejes superior a *n*, la orientación de las estaciones será más precisa hacerla con brújula que con taquímetro.

2.5 Compensación de un itinerario

Consiste en calcular unos valores nuevos de las magnitudes angulares y lineales de la poligonal, que tendrán que cumplir una serie de condiciones, tales como:

- Que la suma de los ángulos coincida con un valor determinado.
- Que la orientación del eje final de la poligonal coincida con un valor conocido.
- Que las coordenadas cartesianas del ultimo punto de la poligonal coincidan con unas coordenadas que son conocidas.

Debido a que una poligonal está compuesta por magnitudes lineales y angulares, su compensación deberá hacerse en dos partes: una primera parte en la que se efectuará la compensación de las magnitudes angulares y una segunda parte de las lineales. A pesar de todo, no todas las poligonales pueden ser

compensadas angularmente y linealmente. Hay algunas que tan solo se pueden compensar angularmente, algunas linealmente, y algunas de ninguna de las dos formas. Esto, dependerá del tipo de poligonal.

Es importante destacar que la compensación de un itinerario solo será conveniente efectuarla cuando los errores producidos (lineal y angular) no superen las tolerancias fijadas, ya que el hecho de compensar implica repartir los errores por toda la poligonal, para que cumpla unas determinadas condiciones lineales y angulares. Una vez realizada la compensación, las magnitudes angulares y lineales corregidas cumplirán las condiciones descritas anteriormente.

2.5.1 Compensación angular

Se pueden diferenciar los siguientes casos:

- Itinerario orientado mediante taquímetro
  - Itinerario cerrado angularmente
    - Desorientado
      - Ángulos internos
      - Ángulos externos
      - Mixto
    - Orientado
  - Itinerario encuadrado angularmente
    - Orientado
    - Desorientado
- Itinerario orientado mediante brújula

2.5.1.1 Itinerario con taquímetro

2.5.1.1.1 Itinerario cerrado angularmente

Un itinerario cerrado angularmente se caracteriza porque se ha efectuado la medida de la lectura horizontal de la primera estación con la última y viceversa. En el caso de la figura 2.12, se ha efectuado la medida de las lecturas horizontales A-D y D-A.

Como ya se ha dicho anteriormente, un itinerario con taquímetro puede llevarse orientado y desorientado. El de la figura 2.12 es un itinerario que se ha conducido de forma desorientada en todas las estaciones menos en la primera (A).

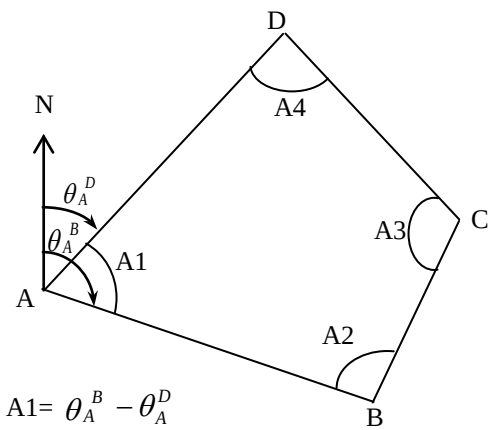


Fig. 2.12

a) Desorientado:

En la poligonal de la figura 2.12 se los ángulos horizontales que se han medido son los ángulos interiores de la figura. Teniendo en cuenta que la poligonal cerrada forma una figura geométrica, se tendrá que cumplir que la suma de todos los ángulos interiores de la figura sea:

$$S = (n - 2).200^g \quad \text{n = Número de ángulos}$$

No obstante, la suma de los ángulos horizontales medidos en el campo será:

$$S' = A1 + A2 + A3 + ... + An$$

Si no se hubiera producido ningún error se tendría que cumplir que $S'=S$, lo cual no sucederá la mayoría de las veces. El error angular vendrá dado por:

$$e_a = S - S'$$

Entonces:

$$c_a = \frac{e_a}{n} \qquad n = \text{número de ángulos}$$

$$Ai' = Ai \pm c_a$$

Ai' = Ángulo corregido *Ai = Ángulo medido*

A partir de los ángulos corregidos se calculan las orientaciones de los diferentes ejes.

La poligonal de la figura 2.13, al igual que la figura 2.12 es cerrada, pero se diferencia en que los ángulos horizontales medidos son los externos de la figura. Al igual que en el caso anterior la poligonal forma una figura geométrica, con lo que la suma de sus ángulos tendría que ser igual a:

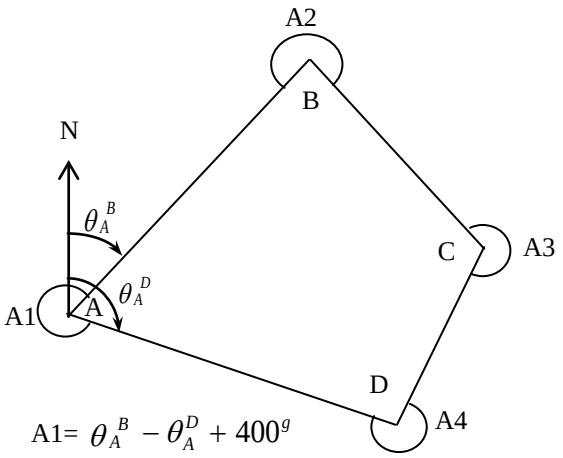


Fig. 2.13

$$S = (n+2).200^{\,g} \qquad n = Número\ \ ángulos$$

La suma de los ángulos medidos será:

$$S' = A1 + A2 + A3 + ... + An$$

Si no se hubiera producido ningún error angular, se cumpliría que $S=S'$, cosa que no pasará la mayoría de las veces, y se tendrá un error angular que valdrá:

$$e_a = S - S'$$

La corrección a aplicar a cada uno de los ángulos será:

$$c_a = \frac{e_a}{n} \qquad \text{n= número de ángulos}$$

Entonces:

$$Ai' = Ai \pm c_a$$

$$Ai' = Ángulo\ corregido \qquad Ai = Ángulo\ medido$$

A partir de los ángulos corregidos se pasará, al igual que en el caso anterior, a calcular las orientaciones de los ejes de la poligonal.

El itinerario de la figura 2.14 está constituido por un lado por ángulos interiores, y por otro por ángulos exteriores. En este caso, la suma de los ángulos de la figura debe ser:

$$S = n \,.\, 200^{g}$$

n = número de ángulos

A partir de aquí, se opera de forma análoga que en los casos anteriores.

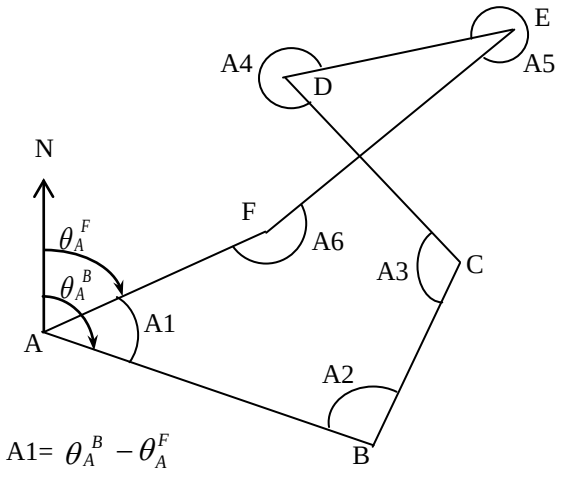


Fig. 2.14

b) Orientado:

Un itinerario como el de la figura 2.15 se caracteriza porque en el campo se han medido las orientaciones de los diferentes ejes, puesto que se ha orientado el aparato en cada estación. Con una poligonal de estas características se puede actuar de dos formas:

- Una forma consiste en calcular los ángulos de la figura a partir de las orientaciones medidas y actuar igual que en los casos anteriores de poligonales desorientadas. Una vez se tienen los ángulos compensados, se calculan las orientaciones de los diferentes ejes.

- Otra forma consiste en compensar directamente las orientaciones, con lo que se evita calcular los ángulos para luego volver a calcular las orientaciones a partir de los ángulos compensados.

Tanto si se actúa de una forma u otra, antes de calcular las orientaciones compensadas se pueden aplicar 2 criterios:

- Un criterio consiste en considerar la orientación θ_A^D más precisa que la θ_A^B. En este caso, según la figura 2.15 , las orientaciones calculadas a partir de los ángulos compensados vendrán dadas por:

$$\theta_A^{B'} = \theta_A^D - (400 - A'_1)$$
$$\theta_B^{C'} = \theta_A^{B'} + A'_2 - 200$$
$$\theta_C^{D'} = \theta_B^{C'} + A'_3 - 200$$
$$\theta_D^{A'} = \theta_C^{D'} + A'_4 - 200$$

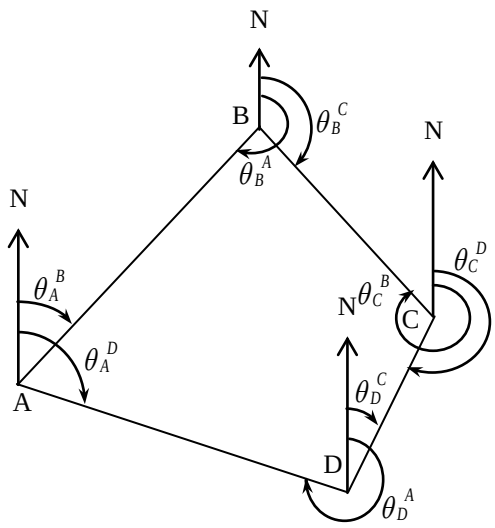


Fig. 2.15

Las orientaciones compensadas directamente, según este criterio serán:

$$\theta_A^{B'} = \theta_A^B \pm c_a \cdot 1$$
$$\theta_B^{C'} = \theta_B^C \pm c_a \cdot 2$$
$$\theta_C^{D'} = \theta_C^D \pm c_a \cdot 3$$
$$\theta_D^{A'} = \theta_D^A \pm c_a \cdot 4$$

Una vez efectuados estos cálculos, se cumplirá que:

$$\theta_D^{A'} = \theta_A^D \pm 200^g$$

- El otro criterio se basa en considerar la orientación θ_A^B más precisa que la θ_A^D, con lo cual las orientaciones compensadas, según el ejemplo de la figura 2.15, se calcularán de la siguiente forma:

$$\theta_A^{D'} = \theta_A^B + (400 - A'_1)$$
$$\theta_B^{C'} = \theta_A^B + A'_2 - 200$$
$$\theta_C^{D'} = \theta_B^{C'} + A'_3 - 200$$
$$\theta_D^{A'} = \theta_C^{D'} + A'_4 - 200$$

Las orientaciones compensadas directamente, según este criterio serán:

$$\theta_A^{D'} = \theta_A^D \mp c_a \cdot 1$$
$$\theta_B^{C'} = \theta_B^C \pm c_a \cdot 1$$
$$\theta_C^{D'} = \theta_C^D \pm c_a \cdot 2$$
$$\theta_D^{A'} = \theta_D^A \pm c_a \cdot 3$$

Una vez efectuados estos cálculos, se cumplirá que:

$$\theta_A^{D'} = \theta_D^{A'} \pm 200^g$$

Ejemplo

Un topógrafo ha realizado una poligonal con el fin de levantar una serie de puntos. Las medidas de ángulos acimutales son las siguientes:

E	***V***	***LHz***
A	Nc	0
	D	230,5060
	B	120,1050
B	A	320,1050
	C	210,5000

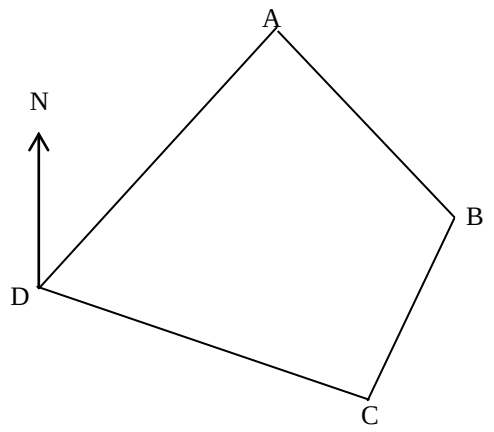
E	***V***	***LHz***
C	B	10,5000
	D	320,8000
D	C	120,8000
	A	30,5020

El aparato es de graduación directa y centesimal. Se pide:

a) Calcular las orientaciones compensadas a partir de los ángulos de la poligonal cerrada especificada para el caso en que θ_A^B sea más precisa que θ_A^D y viceversa.

****

CROQUIS



1- Se considera θ_A^B más precisa que θ_A^D:

$$A1 = 120{,}1050 - 230{,}5060 = -110{,}4010 \Rightarrow A1 = 289{,}5990$$

$$A2 = 210{,}5000 - 320{,}1050 = -109{,}6050 \Rightarrow A2 = 290{,}3950$$

$$A3 = 320{,}8000 - 10{,}5000 = 310{,}3000$$

$$A4 = 30{,}5020 - 120{,}8000 = -90{,}2980 \Rightarrow A4 = 309{,}7020$$

El sumatorio de ángulos S' da:

$$S' = 1119{,}99660^g$$

$S = (n+2) \cdot 200^g$ Como n=4 $\Rightarrow$ S = 1200^g

Los ángulos compensados son:

$$S' = 1119{,}99660^g \Rightarrow e_a = 40^s \Rightarrow c_a = 10^s$$

$$A1' = 289{,}6000 \quad A2' = 290{,}3960$$

$$A3' = 310{,}3010 \quad A4' = 309{,}7030$$

$$\theta_A^B = 120{,}1050 \qquad \theta_A^{D'} = 120{,}1050 + (\ 400\ -\ A1'\ ) = 230{,}5050$$

$$\theta_B^{C'} = \theta_A^B + A2' - 200 = 210{,}5010$$

$$\theta_C^{D'} = \theta_B^{C'} + A3' - 200 = 320{,}8020$$

$$\theta_D^{A'} = \theta_C^{D'} + A4' - 200 = 30{,}5050$$

Si en lugar de calcular los ángulos a partir de las orientaciones y compensar los ángulos y volver a calcular las orientaciones, se compensa directamente las orientaciones medidas en el campo se tiene que:

$$e_a = 230{,}5060 - (30{,}5020 + 200^g\ ) = 40^s \Rightarrow c_a = 10^s$$

$$\theta_A^B = 120{,}1050 \qquad \theta_A^{D'} = 230{,}5060 - 10^s = 230{,}5050$$

$$\theta_B^{C'} = 210{,}5000 + 10^s = 210{,}5010$$

$$\theta_C^{D'} = 320{,}8000 + 10^s \cdot 2 = 320{,}8020$$

$$\theta_D^{A'} = 30{,}5020 + 10^s \cdot 3 = 30{,}5050$$

Una vez hecha la compensación, se a cual sea la forma escogida , se tiene que cumplir que:

$$\theta_A^{D'} = \theta_D^{A'} \pm 200^g$$

$$A1' = \theta_A^B - \theta_A^{D'} \quad A3' = \theta_C^{D'} - \theta_C^{B'}$$

$$A2' = \theta_B^{C'} - \theta_B^A \quad A4' = \theta_D^{A'} - \theta_D^{C'}$$

$$\sum A' = 1200^g$$

2- Se considera θ_A^D más precisa que θ_A^B:

El cálculo de los ángulos, de la corrección angular y de los ángulos corregidos, se efectúan de una forma análoga al caso anterior. Las orientaciones corregidas serán:

$$\theta_A^D = 230{,}5060$$
$$\theta_A^{B'} = 230{,}5060 - (400 - A1') = 120{,}1060$$
$$\theta_B^{C'} = \theta_A^{B'} + A2' - 200 = 210{,}5020$$
$$\theta_C^{D'} = \theta_B^{C'} + A3' - 200 = 320{,}8030$$
$$\theta_D^{A'} = \theta_C^{D'} + A4' - 200 = 30{,}5060$$

Si en lugar de calcular los ángulos a partir de las orientaciones y compensar los ángulos y volver a calcular las orientaciones, se compensa directamente las orientaciones medidas en el campo se tiene que:

$$e_a = 230{,}5060 - (30{,}5020 + 200^g) = 40^s \Rightarrow c_a = 10^s$$

$$\theta_A^D = 230{,}5060 \qquad \theta_A^{B'} = 120{,}1050 + 10^s = 120{,}1060$$

$$\theta_B^{C'} = 210{,}5000 + 10^s \cdot 2 = 210{,}5020$$

$$\theta_C^{D'} = 320{,}8000 + 10^s \cdot 3 = 320{,}8030$$

$$\theta_D^{A'} = 30{,}5020 + 10^s \cdot 4 = 30{,}5060$$

Una vez hecha la compensación, sea cual sea la forma escogida , se tiene que cumplir que:

$$\theta_D^{A'} = \theta_A^D \pm 200^g$$
$$A1' = \theta_A^{B'} - \theta_A^{D'}$$
$$A2' = \theta_B^{C'} - \theta_B^{A'}$$
$$A3' = \theta_C^{D'} - \theta_C^{B'}$$
$$A4' = \theta_D^{A'} - \theta_D^{C'}$$
$$\sum A' = 1200^g$$

2.5.1.1.2 Itinerario encuadrado

a) Desorientado

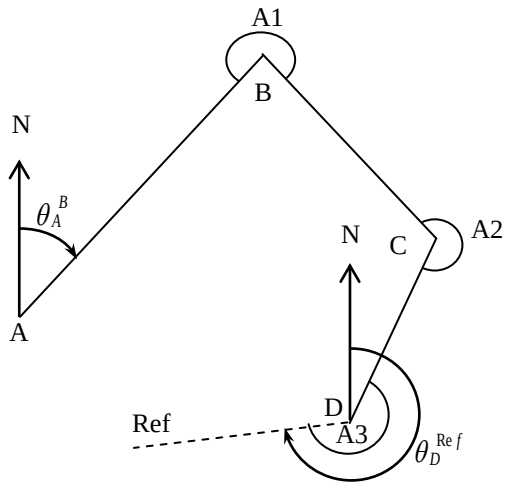


Fig. 2.16

En este caso, lo primero que se tendrá que hacer es calcular las orientaciones de todos los ejes a partir de la orientación del primer eje conocida θ_A^B y de los ángulos medidos en el campo.

Las orientaciones de la poligonal vendrán dadas por:

$$\theta_B^C = \theta_A^B + A1 - 200$$

$$\theta_C^D = \theta_B^C + A2 - 200$$

$$\theta_C^{Ref'} = \theta_C^D + A3 - 200$$

A partir de las orientaciones se actuará igual que en el caso de la poligonal encuadrada angularmente conducida de forma orientada.

Se presentan dos casos, en función de sí se considera la orientación del primer eje como la de mayor precisión que la del resto de la poligonal, o de igual precisión.

- Se considera que la orientación del primer eje es de igual precisión:

$$e_a = \theta_D^{Ref} - \theta_D^{Ref'}$$

$$c_a = \frac{e_a}{n}$$

Donde n = nº de orientaciones de la poligonal a compensar.

Como en este caso todas las orientaciones tienen igual precisión, en el caso e la figura 2.16, *n* será igual a 4. A partir de aquí se compensa cada orientación.

$$\theta_A^{B'} = \theta_A^B \pm c_a \cdot 1$$

$$\theta_B^{C'} = \theta_B^C \pm c_a \cdot 2$$

$$\theta_C^{D'} = \theta_C^D \pm c_a \cdot 3$$

$$\theta_D^{Re\,f''} = \theta_D^{Re\,f'} \pm c_a \cdot 4$$

Si los cálculos se han hecho bien se cumplirá que $\theta_D^{\mathrm{Re}\,f''} = \theta_D^{\mathrm{Re}\,f}$

- Se considera que la orientación del primer eje es de mayor precisión.

$$e_a = \theta_D^{Re\,f} - \theta_D^{Re\,f'}$$

$$c_a = \frac{e_a}{n}$$

En este caso *n* será igual a 3, ya que el primer eje no se puede compensar.

Las orientaciones compensadas serán:

$$\theta_B^{C'} = \theta_B^C \pm c_a \cdot 1$$

$$\theta_C^{D'} = \theta_C^D \pm c_a \cdot 2$$

$$\theta_D^{Re\,f''} = \theta_D^{Re\,f'} \pm c_a \cdot 3$$

Si los cálculos se han hecho bien, se cumplirá que $\theta_D^{\mathrm{Re}\,f''} = \theta_D^{\mathrm{Re}\,f}$

Ejemplo

Un topógrafo ha efectuado una poligonal encuadrada con el fin de levantar una serie de puntos. Las medidas de ángulos acimutales efectuadas en el campo son las siguientes:

E	***V***	***LHz***
A	Nc	0
	B	120,1053
B	A	0
	C	290,3947
C	B	0
	D	40,3008
D	C	0
	Ref	180,3022

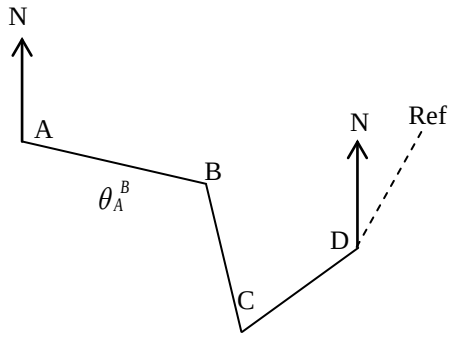
El aparato usado es de graduación directa y centesimal.

La orientación del eje D-Ref tiene un valor de $31{,}1054^g$. Se pide:

a) Calcular las orientaciones compensadas a partir de los ángulos de la poligonal para el caso en que θ_A^B tenga la misma precisión que las otras orientaciones, y para el caso en que tenga una precisión mayor.

****

CROQUIS



a) Lo primero que hay que hacer es calcular las orientaciones de todos los ejes.

$$\theta_A^B = 120{,}1053 \quad \theta_B^C = 210{,}5000$$

$$\theta_C^D = 50{,}8008 \quad \theta_D^{Ref'} = 31{,}1030$$

El error angular será:

$$e_a = 31{,}1054 - 31{,}1030 = 24^s$$

- Si se considera que la orientación del primer eje es más precisa que la del resto, la corrección angular vendrá dada por:

$$c_a = \frac{24^s}{3} = 8^s$$

Las orientaciones compensadas serán:

$$\theta_B^{C'} = 210{,}5000 + 8^s \,.\, 1 = 210{,}5008$$

$$\theta_C^{D'} = 50{,}8008 + 8^s \,.\, 2 = 50{,}8024$$

$$\theta_D^{Ref''} = 31{,}1030 + 8^s \,.\, 3 = 31{,}1054$$

- Si se considera que la orientación del primer eje tiene las mismas condiciones de precisión que el resto de orientaciones , entonces, tendremos que:

$$c_a = \frac{24^s}{4} = 6^s$$

$$\theta_A^{B'} = 120{,}1053 + 6^s \cdot 1 = 120{,}1059$$

$$\theta_B^{C'} = 210{,}5000 + 6^s \cdot 2 = 210{,}5012$$

$$\theta_C^{D'} = 50{,}8008 + 6^s \cdot 3 = 50{,}8026$$

$$\theta_D^{Ref''} = 31{,}1030 + 6^s \cdot 4 = 31{,}1054$$

2.5.1.2 Itinerario orientado mediante brújula

El método que se aplica generalmente en una poligonal orientada mediante brújula es el de estaciones conjugadas, lo que implica que se midan los rumbos, de frente y de espalda. Por tanto, lo primero que se tiene que hacer es calcular los rumbos medios de cada eje. Así, para el eje AB de la figura 2.17, el rumbo de frente medio vendrá dado por:

$$R_A^B m = \frac{R_A^B + (R_B^A \pm 200^g)}{2} \qquad R_B^C m = \frac{R_B^C + (R_C^B \pm 200^g)}{2}$$

$$R_C^D m = \frac{R_C^D + (R_D^C \pm 200^g)}{2} \qquad R_D^A m = \frac{R_D^A + (R_A^D \pm 200^g)}{2}$$

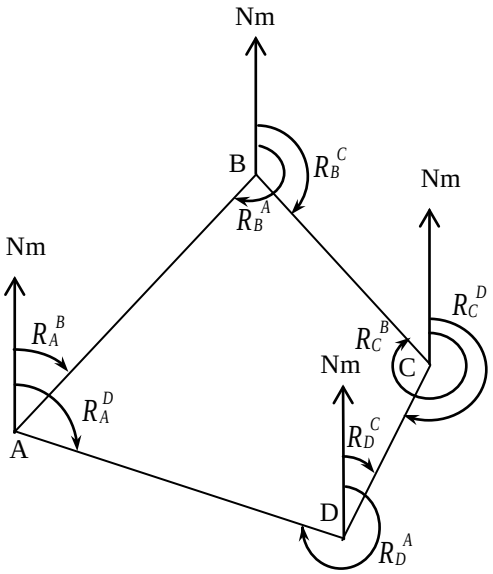


Fig. 2.17

Una vez efectuada esta operación la poligonal quedaría compensada del error angular de cierre.
Es importante destacar que la compensación de los rumbos tan solo podrá efectuarse en caso de que los errores sean tolerables, es decir, que la diferencia entre un rumbo de frente y uno de espalda no supere la tolerancia $ea \cdot \sqrt{2}$, es decir, se ha de cumplir que:

$$ei \leq ea \cdot \sqrt{2}$$

ea = error angular de la brújula.
ei = diferencia entre rumbo de frente y de espalda, corregido este de 200^g

2.5.2 Compensación lineal

La compensación lineal se realizará después de la compensación angular. Para poder llevarla a cabo es necesario calcular el error lineal que se ha producido en la poligonal. Este error lineal vendrá dado por:

$$\varepsilon l = \sqrt{ex^2 + ey^2}$$

εl = error lineal ex = error en abcisas ey = error en ordenadas

Como se puede observar en la fórmula, el error lineal de la poligonal depende de los errores que se hayan producido en abcisas y ordenadas de las coordenadas de los puntos de la poligonal. Por lo tanto, para poder calcular el error lineal, se tendrá que calcular previamente *ex* y *ey* mediante el procedimiento siguiente:

- Cálculo de las coordenadas parciales de los puntos de la poligonal.
- Cálculo de los sumatorios de abcisas y ordenadas parciales y comprobación de sí se cumplen las relaciones siguientes:

$$\sum X_p = X_1^n = X_n - X_1 \Rightarrow (X_n - X_1) - \sum X_p = 0$$

$$\sum Y_p = Y_1^n = Y_n - Y_1 \Rightarrow (Y_n - Y_1) - \sum Y_p = 0$$

(ΣX_p , ΣY_p) = Sumatorio de abcisas y ordenadas parciales
(X_1 , Y_1) = Coordenadas totales del primer punto
(X_n , Y_n) = Coordenadas totales del último punto visado
(X_1^n , Y_1^n) = Abcisas y ordenada parcial entre el primer punto y el último

Generalmente las relaciones anteriores no se cumplirán, y en lugar de dar cero darán unos residuos, que sí son inferiores a la tolerancia fijada, se compensaran. Estos residuos son ex y ey, que vendrán dados por:

$$ex = (X_n - X_1) - \sum X_p$$
$$ey = (Y_n - Y_1) - \sum Y_p$$

Una vez conocidos los errores *ex* y *ey* se podrán compensar las coordenadas parciales de los puntos de la poligonal, lo que se efectuará mediante las fórmulas siguientes:

$$X'_p = X_p \pm \frac{e_x \cdot X_p}{\sum X_p^+ + \sum ABS(X_p^-)}$$

$$Y'_p = Y_p \pm \frac{e_y \cdot Y_p}{\sum Y_p^+ + \sum ABS(Y_p^-)}$$

$$X'_p, Y'_p = Abcisas\ y\ ordenadas\ parciales\ compensadas$$

$$\sum X_p^+, \sum Y_p^+ = Sumatorio\ de\ abcisas\ y\ ordenadas\ parciales\ positivas$$

$$\sum ABS(X_p^-), \sum ABS(Y_p^-) = Sumatorio\ de\ abcisas\ y\ ordenadas\ negativas\ en\ valor\ absoluto$$

$$Si\ ex \succ 0 \Rightarrow \sum X_p \prec (X_n - X_1)$$

En este caso para compensar las coordenadas parciales se tendrá que aumentar cada una de las abcisas positivas y disminuir en valor absoluto cada una de las negativas.

$$Si\ ex \prec 0 \Rightarrow \sum X_p \succ (X_n - X_1)$$

En este caso se tendrá que aumentar en valor absoluto cada una de las abcisas negativas y disminuir cada una de las positivas.

2.5.2.1 Itinerario cerrado linealmente

Se caracteriza porque desde la primera estación se ha visado a la última, midiéndose la lectura horizontal y la distancia, y desde la ultima estación se ha hecho igual hacia la primera.

$$\sum X_p = X_1^1 = X_1 - X_1 \Rightarrow \sum X_p = 0$$

$$\sum Y_p = Y_1^1 = Y_1 - Y_1 \Rightarrow \sum Y_p = 0$$

Entonces, se tendrían que cumplir las relaciones siguientes:

Tal y como se puede comprobar, éste es un caso particular de las formulas vistas anteriormente, en la que el ultimo punto visado es el primero de la poligonal, el cual se ha visado desde la última estación.

En una poligonal cerrada, los errores *ex* y *ey* vendrán dados directamente por:

$$ex = -\sum X_p \quad ey = -\sum Y_p$$

2.5.2.2 Itinerario encuadrado linealmente

Se caracteriza porque no se ha enlazado el primer punto con el último del cual se conocen sus coordenadas totales. En este caso se tendrá que cumplir que:

$$\sum X_p = X_n - X_1 \quad \sum Y_p = Y_n - Y_1$$

Esta relación, generalmente no se cumplirá, y se tendrá que:

$$ex = (X_n - X_1) - \sum_{i=1}^{i=n} X_i \quad ey = (Y_n - Y_1) - \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$$

2.5.3 cálculo del error máximo admisible

El error máximo o tolerancia que se puede producir en una poligonal viene dado por los errores angular y lineal máximos que se pueden producir en función de las características de los aparatos utilizados y de otros parámetros.

$$T = \sqrt{E_a^2 + E_l^2}$$

T = Tolerancia
Ea = error lineal derivado del error total producido en las medidas angulares.
El= Error lineal derivado del error total producido en las medidas lineales.

Ea depende directamente del error angular *ea* del aparato. Entonces para calcular *Ea* se tendrá que calcular antes *ea*.

Igual que con el método de radiación el calculo de *ea* viene dado por las siguientes fórmulas:

$$ev'' = \frac{S''}{12} \qquad ed'' = \frac{ee + ed}{DM} \cdot r''$$

$$ep'' = \frac{10''}{A} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot A}{100}\right) \qquad el'' = \frac{2}{3} \cdot ad''$$

Si se ha aplicado la regla de Bessel una vez, entonces *ep* y *el* se tienen que dividir por $\sqrt{2}$. Entonces, el error angular del aparato *ea* vendrá dado por:

$$ea = \sqrt{ev^2 + ed^2 + ep^2 + el^2}$$

Todos los ángulos azimutales de la poligonal estarán afectados por este error angular del taquímetro, lo

que provocará un desplazamiento lineal de la poligonal de:

$$Ea = ea \cdot DM \cdot \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}}$$

DM es la distancia que se considera igual para todos los ejes de la poligonal, y se calcula dividiendo la longitud que tiene o que se prevea que tendrá el itinerario, por su número de ejes.

$$DM = \frac{L}{N}$$

L = Longitud de todo el itinerario
N= Número de ejes

Cálculo de *El*:

El es el error lineal derivado de los errores lineales que se considera que se producen en la medida de las distancias de los diferentes ejes de la poligonal debido a un error lineal del medidor electrónico de distancias. Por tanto, para poder calcular *El* previamente se ha de conocer *el* . Este valor de *el* viene dado por el fabricante del aparato.

El error lineal total de toda la poligonal será:

$$El = \frac{el \cdot DM \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n'}}$$

n= número de ejes de la poligonal. n'= número de veces que se mide la distancia de cada eje.

2.5.4 Ejemplos

Ejemplo 1

Se ha efectuado un itinerario desde un punto A hasta volver al mismo punto. Los datos de libreta son:

E	V	LHZ		DIST
		D	I	
A	D	0,0000	200,0000	230,029
	B	184,1550	84,1500	89,976
B	A	0,0000	200,0000	100,298
	C	348,6050	148,6050	100,298
C	B	0,0000	200,0000	100,296
	D	181,4160	381,4200	168,838
D	C	0,0000	200,0000	168,838
	A	385,8250	185,8300	230,029

El aparato usado es de graduación directa y centesimal. Las coordenadas del punto A son:

X_A = 1000 m. Y_A = 1000 m.

La orientación de partida A-B es de $176{,}0175^g$.

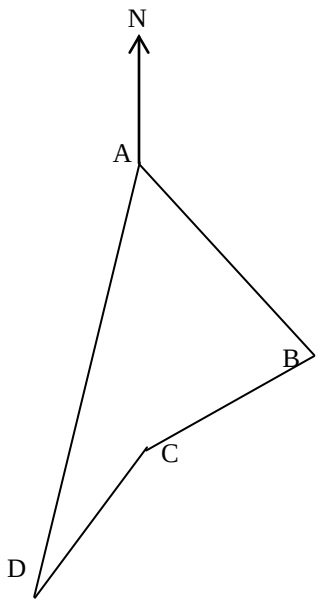
Se pide:

a) Hacer las compensaciones necesarias.
b) Calcular las coordenadas totales de los puntos.
c) Determinar si el itinerario es admisible, teniendo en cuenta que las medidas de campo se han tomado con una estación total con las características siguientes:

Número aumentos anteojo =30 Apreciación aparato = 10^s
Sensibilidad del nivel = 30” *ee* + *es* = 0,02 m

****

CROQUIS



a) Lo primero que hay que hacer es calcular las orientaciones de los ejes. Debido a que se trata de una poligonal cerrada, se podrá tener comprobación angular, la cual vendrá dada por:

$$S = (n+2).200^g$$

En el ejemplo considerado $n = 4$ y por lo tanto $S = 1200^g$
Los ángulos medidos son:

$$ABC = 348{,}6050$$
$$BCD = 181{,}4180$$
$$CDA = 385{,}8275$$
$$DAB = 284{,}1525$$

La suma de todos estos ángulos da:

$$S' = 1200{,}0030^g$$

El error y corrección angular serán:

$$e_a = S - S'$$
$$e_a = 30^s \quad c_a = 7{,}5^s$$

A partir de los ángulos compensados ya se pueden calcular las orientaciones de los diferentes ejes:

$$\theta_A^D = \theta_A^B - DAB' = 176{,}0275 - 284{,}1517 = -108{,}1242 = 291{,}8758$$

$$\theta_B^C = \theta_A^B + DAB' - 200 = 176{,}0275 + 348{,}6043 - 200 = 324{,}6318$$

$$\theta_C^D = \theta_B^C + BCD' - 200 = 324{,}6318 + 181{,}4172 - 200 = 306{,}0490$$

$$\theta_D^A = \theta_C^D + CDA' - 200 = 306{,}049 + 385{,}8268 - 200 = 491{,}8758 = 91{,}8758$$

Después de la compensación se cumple que:

$$\theta_A^{B'} = \theta_A^B \;\; y \;\; \theta_A^D = \theta_D^A - 200$$

Una vez tenemos calculadas las orientaciones de los ejes, se tiene que pasar a calcular las coordenadas parciales de los puntos de frente respecto de los de atrás. Las distancias medias de los ejes son:

AB = 89,975 m. BC = 100,397 m. CD = 168,838 m. DA = 230,029 m.

E	**V**	**Xp**	**Yp**
A	B	33,0859	-83,6709
B	C	-92,8828	37,8454
C	D	-168,0764	16,0184
D	A	228,1585	29,2755
SUMA		0,2852	-0,5316

Al tratarse de una poligonal cerrada se sabe que el sumatorio de coordenadas parciales (abcisas y ordenadas) tendría que ser cero. Por lo tanto, los errores lineales de abcisas y ordenadas serán:

$$ex = -\sum X_p \quad ey = -\sum Y_p \qquad ex = -0{,}285 \quad ey = 0{,}532\ m.$$

Se compensan las coordenadas parciales a partir de las fórmulas descritas en el apartado 2.5.2, obteniéndose los siguientes valores compensados.

E	V	Xp	Yp
A	B	33,0678	-83,4043
B	C	-92,9335	37,9660
C	D	-168,1682	16,0695
D	A	228,0339	29,3688
SUMA		0	0

b) A partir de los valores anteriores y de las coordenadas totales de partida del punto A se podrán calcular las coordenadas totales o absolutas de todos los puntos, los cuales vienen indicadas, junto con los otros valores angulares y lineales, en la tabla siguiente:

O	E	V	ANGULO	DIST	ORIEN	XP	YP	X	Y
		A						1000	1000
	A	B		89,975	176,0275	33,0678	-83,4043	1033,068	916,596
A	B	C	348,6043	100,297	324,6318	-92,9335	37,9660	940,134	954,562
B	C	D	181,4172	168,838	306,0490	-168,1682	16,0695	771,966	970,631
C	D	A	385,8268	230,029	91,8758	228,0339	29,3688	1000	1000
D	A	B	284,1517	89,975	176,0275				

c) La poligonal tiene una longitud total de unos 600 metros, por lo que la distancia por eje *DM* será de 150 metros, ya que la poligonal está formada por 4 ejes.

$$ev = \frac{30''}{12} = 2'',5 = 7,7^s \qquad ed = \frac{0,02}{150} \cdot 636620^s = 84,9^s$$

$$ep = \frac{30^s}{30 \cdot \sqrt{2}} \cdot (1 + \frac{4 \cdot 30}{100}) = 1,6^s \qquad el = \frac{2.10^s}{3 \cdot \sqrt{2}} = 4,7^s$$

$$ea = \sqrt{7,7^2 + 84,9^2 + 1,6^2 + 4,7^2} = 85,4^s$$

Este valor de *ea* expresado en radiantes será:

$$ea = \frac{85{,}4^s}{636620^s} = 0{,}00013\ rad$$

$$Ea = 150 \cdot 0{,}00013 . \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}} = 0{,}11\,m.$$

$$\in l = \frac{1}{4000} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$El = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 0{,}027\,m.$$

$$Et = \sqrt{0{,}11^2 + 0{,}027^2} = 0{,}11m.$$

El error de cierre máximo admisible para una poligonal de estas características es de 0,11 m.

A continuación se pasa a calcular los errores que se han producido realmente en la poligonal efectuada.

$$Etr = \sqrt{Ear^2 + Elr^2}$$

$$ear = \frac{30^s}{4} = 7{,}5^s$$

$$Ear = \frac{7{,}5^s}{636620^s} \cdot 150 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}} = 0{,}0097m$$

$$Elr = \sqrt{(-0{,}285)^2 + (0{,}532)^2} = 0{,}604m$$

$$Etr = \sqrt{0{,}0097^2 + 0{,}604^2} = 0{,}604m$$

Como que Ear < Ea => El itinerario efectuado es admisible angularmente.
Como que Elr > El => El itinerario efectuado no es admisible linealmente.
Como que Etr > Et => el itinerario efectuado no es admisible globalmente.

Ejemplo 2

Se ha efectuado una poligonal desde un punto A hasta un punto A. Los datos medidos al campo son las siguientes:

EST	VISAT	LECTURA HZ		DIST
		Directo	**Inverso**	
A	D	153,7060	353,7020	-
	B	65,50000	-	120,505
B	A	265,5000	65,5000	120,495
	C	171,2960	371,3040	135,510
C	B	371,3000	171,3040	135,490
	D	268,7040	68,7000	99,000
D	C	68,7020	268,7020	99,000
	A	353,7040	153,7000	-

El aparato utilizado es de regulación directa y centesimal. Las medidas azimutales se han efectuado mediante la regla de Bessel.

Las coordenadas del punto A y la orientación de partida del eje A-B son:

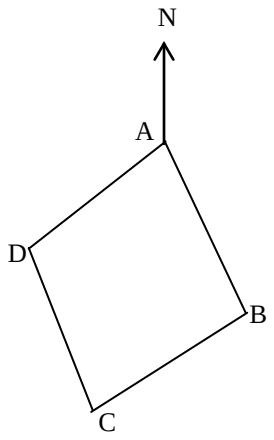
X_A = 1000 m. Y_A = 1000 m. $\theta_A^B = 65{,}5000^g$

Se pide :

a) Calcular los valores medios le las lecturas azimutales y de las distancias.
b) Calcular las orientaciones y coordenadas totales de todos los puntos después de hacer las compensaciones pertinentes.

****

CROQUIS



a) Observando las medidas de campo se puede ver que las lecturas azimutales son orientaciones, ya que se ha orientado el aparato en cada estación. Los valores medios de estas orientaciones son los siguientes:

E	**V**	**ORIENT**
A	D	153,7040
	B	65,5000
B	A	265,5000
	C	171,3000
C	B	371,3020
	D	268,7020
D	C	68,7020
	A	353,7020

Se observa que en el caso de la estación B y C no se cumple que :

$$\theta_C^B = \theta_B^C \pm 200^g$$

Esto implica que se han de corregir los valores azimutales de la estación C en 20^s, para obligar que la orientación C-B difiera exactamente en 200^g de la B-C.

Por lo tanto los valores medios de las orientaciones C-B y C-D serán:

$$\theta_C^B = 371{,}3000^g \qquad \theta_C^D = 268{,}7000^g$$

Al corregir la orientación θ_C^D se tendrá que corregir con el mismo valor las medidas azimutales de la estación D , obteniéndose los valores:

$$\theta_D^C = 68{,}7000^g \qquad \theta_D^A = 353{,}7000^g$$

Las distancias medias serán:

AB = 120,500 m. BC = 135,5000 m. CD = 99,000 m.

b) Observando las medidas efectuadas se puede deducir que se trata de una poligonal cerrada angularmente y colgada linealmente, por tanto, la única compensación que se podrá efectuar es la compensación angular.

El error y corrección angular serán:

$$ea = 153{,}7040-(353{,}7000-200) = 40^s$$

$$c_a = \frac{40^s}{4} = 10^s$$

E	V	ORIENTACIÓN MEDIDA	ca	ORIENTACIÓN COMPENSADA
A	D	153,7040	-10^S	153,7030
A	B	60,5000	-	65,5000
B	C	171,3000	$+10^S$	171,3010
C	D	268,7000	$+20^S$	268,7020
D	A	353,7000	$+30^S$	353,7030

c) A partir de las orientaciones compensadas se podrán calcular las coordenadas parciales y totales de todos los puntos, los valores de los cuales, juntamente con los otros valores calculados son:

O	E	V	ANGULO	DIST	ORIENT	XP	YP	X	Y
		A						1000	1000
	A	B		120,500	65,5000	103,2345	62,1522	1103,235	1062,152
A	B	C		135,500	171,3010	59,0358	-121,9632	1162,270	940,189
B	C	D		99,000	268,7020	-87,2750	-46,7341	1074,995	893,455
C	D	A			353,7030				

3 Método de intersección

El método de intersección es un método planimétrico que se caracteriza por:

- En el campo tan solo se toman medidas angulares.
- Gran precisión en las medidas efectuadas si se utiliza un teodolito de precisión de segundos.
- Es un método que permite levantar puntos a gran distancia (distancias kilométricas) con gran precisión.

En función de los puntos donde se efectúan las estaciones y en función de si en el campo se toman más datos a parte de los mínimos necesarios para poder calcular las coordenadas de los puntos desconocidos, el método de intersección se puede clasificar en:

· En función de los puntos de estacionamiento:

· Intersección directa
· Intersección inversa
· Intersección mixta

· En función de los datos tomados en el campo:

· Intersección simple
· Intersección múltiple

La intersección directa se caracteriza porque el estacionamiento con el teodolito se realiza en los puntos conocidos, es decir, aquellos puntos de los cuales se conocen sus coordenadas cartesianas. Desde estos puntos se visa a los puntos que se quieren calcular. Asimismo, la intersección inversa se caracteriza por lo contrario. El estacionamiento tiene lugar en los puntos que se tienen que calcular, a partir de los cuales, se visan los puntos conocidos.

La intersección simple se basa en tomar en el campo tan solo las medidas mínimas necesarias para poder resolver el problema planteado. Esto implica que se podrán calcular las coordenadas de los puntos desconocidos pero sin tener redundancia de datos, es decir, no habrá una comprobación de que los trabajos efectuados sean correctos o no.

La intersección múltiple se basa en que en el campo se toman más datos de los necesarios para poder calcular las coordenadas de los puntos a levantar, teniendo en consecuencia comprobación de los trabajos de campo.

El gran desarrollo de los medidores electrónicos de distancias, experimentado a finales de los años 80 y principios de los 90, ha provocado la utilización de un método que le llamaremos *intersección especial*, que se caracteriza por ser una intersección inversa pero con la medida de distancias.

Dentro de la intersección directa e inversa, hay distintos métodos. Estos se indican en el siguiente esquema:

· DIRECTA

· SIMPLE

· Método clásico
· Método de ecuaciones

· MÚLTIPLE

· Método de triángulos independientes
· Método numérico-gráfico del punto aproximado
. Método de mínimos cuadrados

· INVERSA

· SIMPLE

· Método de la vuelta desorientada

· MÚLTIPLE

· Método múltiple

3.1 Intersección directa

3.1.1 Simple

La intersección directa simple se caracteriza porque se tiene que efectuar estación en dos puntos de coordenadas conocidas desde los cuales se visará al punto que se tenga que calcular.

3.1.1.1 Método clásico

a) Trabajos de campo

Los trabajos de campo consisten en estacionar en dos puntos conocidos A y B. Desde cada uno de los dos puntos se visará al otro punto conocido y al punto C que se quiere calcular, midiéndose las lecturas horizontales correspondientes. Estas medidas angulares acimutales será aconsejable efectuarlas por lo menos dos veces. Una vez con el anteojo en posición directa y la otra en posición invertida, es decir, aplicando la regla de Bessel.

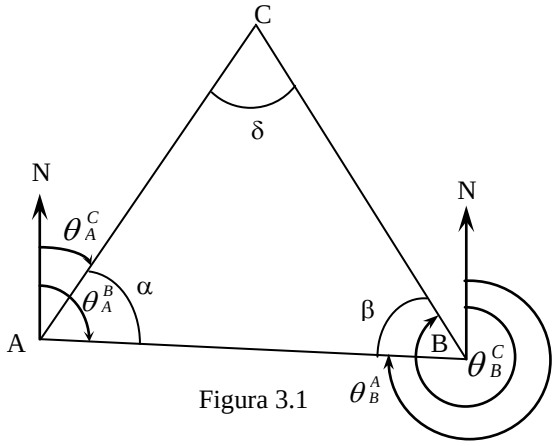


Figura 3.1

En el campo se podrá actuar de dos maneras. Una forma es orientar el aparato en cada estación, con lo cual, las lecturas horizontales serán orientaciones, rumbos o acimutes. La otra forma es no orientar el aparato en las estaciones, con lo cual las orientaciones tendrán que calcularse en el gabinete.
Debido a que los puntos conocidos son visibles entre si, orientar el aparato en cada estación será muy sencillo.

Los ángulos α y β , en el caso de no haber orientado el aparato en las estaciones, vienen dados por:

$$\alpha = L_A^B - L_A^C \qquad \beta = L_B^C - L_B^A$$

Y en el caso de haberlo orientado, por:

$$\alpha = \theta_A^B - \theta_A^C \qquad \beta = \theta_B^C - \theta_B^A$$

b) Condiciones del método:

Para poder aplicar este método correctamente es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

· Los puntos conocidos tienen que ser visibles entre ellos
· Se tienen que conocer las coordenadas de los 2 puntos donde se efectúa la estación.

c) Trabajos de gabinete

Los trabajos de gabinete consisten en resolver el triángulo ABC para poder calcular las coordenadas de C y las orientaciones de los ejes AC y BC. Para poder hacerlo previamente hay que calcular el ángulo δ. A partir del conocimiento de los 3 ángulos del triángulo, y aplicando el teorema del seno, se podrán calcular las distancias AC y BC. Seguidamente tendrán que calcularse las orientaciones de los 2 ejes. A partir de todos estos datos, se podrán encontrar las coordenadas de C.

$$\delta = 200 - \alpha - \beta$$

$$AC = \frac{AB \ . \ S\,in\,\beta}{S\,in\,\delta} \qquad BC = \frac{AB \ . \ S\,in\,\alpha}{S\,in\,\delta}$$

$$X_C = X_A + D_A^C \ . \ S\,in\ \theta_A^C$$

$$Y_C = Y_A + D_A^C \ . \ C\,os\ \theta_A^C$$

Las coordenadas del punto C también pueden calcularse a partir del punto B, a partir de las formulas:

$$X_C = X_B + D_B^C \ . \ Sin \ \theta_B^C$$

$$Y_C = Y_B + D_B^C \ . \ Cos \ \theta_B^C$$

Las coordenadas del punto C calculadas a partir de A y a partir de B tienen que dar exactamente el mismo valor. Esto no significa que haya comprobación de los trabajos efectuados en el campo, tan solo indica que los cálculos efectuados son correctos.

d) Ventajas e inconvenientes

· Ventajas: facilidad para orientar las dos estaciones al ser visibles los puntos A y B entre si.
· Inconvenientes: necesidad de que los 2 puntos A y B sean visibles, lo que complica más los trabajos de campo.

3.1.1.2 Método de ecuaciones

a) Trabajos de campo:

Los trabajos de campo son básicamente los mismos que los del método clásico. La diferencia está en que a diferencia del método anterior, en este no es necesario que los dos puntos conocidos sean visibles entre sí.

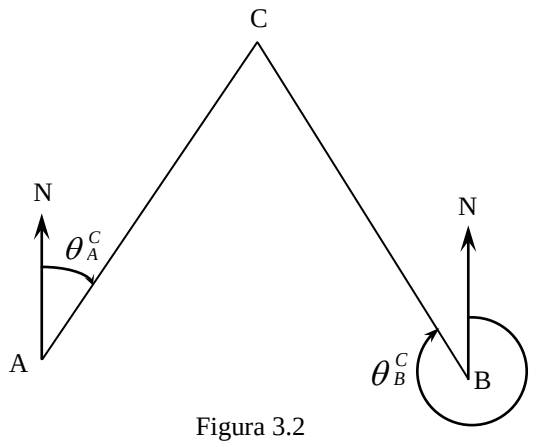


Figura 3.2

En el campo se tendrá que poder encontrar dos puntos de coordenadas conocidas A y B desde los cuales se pueda visualizar el punto C que se quiere calcular. Será necesario poder orientar la estación de los puntos conocidos donde se efectúe el estacionamiento. Por lo tanto las medidas que se tendrán que efectuar serán, una vez orientado el aparato, la orientación, acimut o rumbo hacia el punto a calcular C. Estas medidas acimutales se tendrán que efectuar aplicando Bessel una o dos veces.

b) Condiciones del método:

Para poder aplicar este método correctamente es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

- Se tienen que conocer las coordenadas de los 2 puntos donde se efectúe la estación.
- Se tiene que poder orientar el teodolito en cada una de las estaciones.

c) Trabajos de gabinete:

Los trabajos de gabinete, a diferencia del método clásico, consisten en calcular las ecuaciones de las rectas AC y BC y resolver su correspondiente intersección. Las ecuaciones de las 2 rectas se pueden calcular a partir de :

$$Y - Y_A = m_A \cdot (X - X_A)$$

$$Y - Y_B = m_B \cdot (X - X_B)$$

Donde las pendientes de las dos rectas vienen dadas por:

$$m_A = Cotg \ \theta_A^C$$

$$m_B = Cotg \ \theta_B^C$$

Teniendo en cuenta que se conocen las coordenadas de los puntos A y B, así como las orientaciones de los ejes AC y BC, se pueden calcular con las fórmulas anteriores la pendiente y la ecuación de cada recta. De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. La resolución de este sistema de ecuaciones da las coordenadas planimétricas del punto C desconocido.

d) Ventajas e inconvenientes:

Las ventajas de este método residen básicamente en que no es necesario que los 2 puntos donde se efectúa estación sean visibles entre ellos, lo que facilita los trabajos de campo.
Los inconvenientes se encuentran fundamentalmente en que se tiene que poder orientar el aparato en cada estación, ya sea en el campo o en gabinete. Esto implica que los 2 puntos A y B además de tener las coordenadas conocidas, desde cada uno de ellos se tiene que conocer la orientación, rumbo o acimut hacia una o varias referencias.

3.1.1.3 Aplicaciones

- Levantamiento de puntos de soporte con gran precisión pero sin comprobación de los trabajos de campo. En este caso debido a las circunstancias solo se ha podido efectuar estación en dos puntos conocidos desde los que se ha podido visar al punto a calcular. El punto a calcular puede ser un pararrayos de una iglesia, una antena,...es decir, un punto que no tiene por que ser accesible.

- Levantamiento de puntos de radiación inaccesibles: Una de las aplicaciones más interesantes de la intersección directa simple está en el levantamiento de puntos de radiación a los que no se puede o es muy difícil acceder. Este caso se da con cierta frecuencia en el la minería de exterior. Muchas veces se tienen que efectuar levantamientos de canteras que tienen bancos de explotación, generalmente los de montera, de muy difícil o imposible acceso. En estos casos resulta muy útil aplicar el método de intersección directa simple para poder levantar las partes altas de los bancos indicados.

Para poder efectuar estas operaciones correctamente lo que se tiene que hacer es desde dos estaciones de la poligonal que se efectúe para levantar topográficamente la cantera, visualizar a los puntos altos de los taludes que son inaccesibles. La precaución fundamental que se tiene que tener en cuenta es la de que los puntos que se visen sean detalles más o menos significativos, ya que estos puntos primero se tienen que visar desde una estación y después desde otra. Si no se hiciera así, puede pasar que al cambiar de estacionamiento, uno no se acuerde exactamente del punto que ha visado.

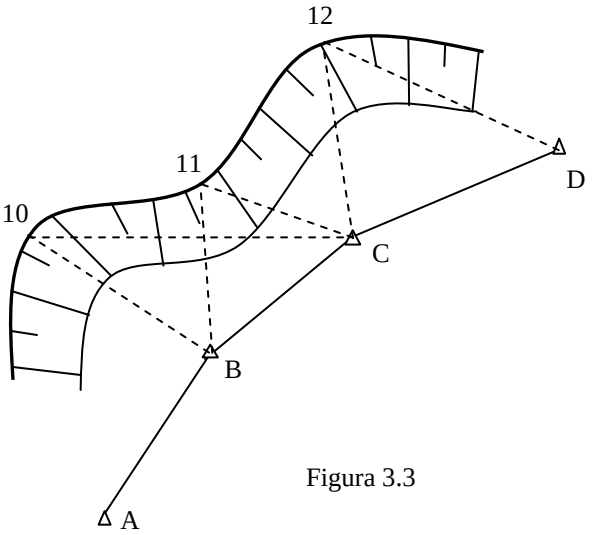


Figura 3.3

En la figura 3.3 se puede observar como desde las estaciones B y C de la poligonal A-B-C-D, se ha observado a los puntos 10 y 11, así como al punto 12 desde las estaciones C y D.

Los trabajos de gabinete consistirán en calcular previamente la poligonal, para pasar seguidamente al cálculo de cada una de las intersecciones directas simples. Habría una para cada uno de los 3 puntos a levantar. En cada caso de la figura considerada los puntos 10,11 y 12. Hay que decir que en esta aplicación concreta del método de intersección directa simple la precisión que se alcanzará será generalmente baja. Esto es debido básicamente a que los puntos que se tienen que levantar son puntos de relleno o de detalle en los que el aparato que se usará generalmente no tiene por que ser un aparato con más precisión que 1^m o 50^s. El otro factor que influye decisivamente en la precisión es el hecho de que el punto es un detalle del terreno más o menos significativo y destacable que al no haber ningún jalón, mira o prisma, hace muy difícil que cuando se vise desde la segunda estación se vise exactamente al mismo punto.

3.1.1.4 Ejemplos

Ejemplo 1

Desde 2 estaciones A y B se ha visado a un punto P. Las coordenadas de las dos estaciones son:

PUNTO	X	Y
A	10000	10000
B	15000	8350

Las medidas angulares han sido las siguientes:

ESTACIÓN	VISADO	LHZ MEDIA
A	Nc	0,0000
	B	120,2921
	P	169,8792
B	A	0,0000
	P	344,5899

El aparato usado es de graduación directa y centesimal. Se pide:

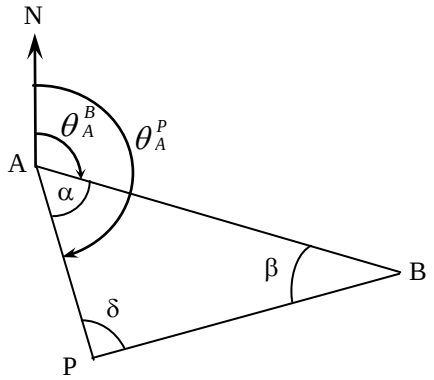
a) Calcular las coordenadas del punto P.

****

Como de la estación A se ha visado a B, y de B a A se podrá aplicar la resolución por el método clásico. Por diferencia de coordenadas se obtiene la orientación y la distancia del eje A-B, las cuáles son:

$$\theta_A^B = 120{,}2921^g \qquad D_A^B = 5265{,}216\ m$$

CROQUIS



Por diferencia de lecturas horizontales se obtiene α y β , y por diferencia de 200^g se obtiene δ .

$$\alpha = 49{,}5871 \quad \beta = 55{,}4101 \quad \delta = 95{,}0028$$

A partir de aquí ya puede aplicarse el teorema del seno para calcular las distancias AP y BP, con lo que el triángulo estará resuelto y se podrá pasar a calcular las orientaciones de todas las alineaciones del triángulo ,

así como las coordenadas del punto P.

$$AP = \frac{AB\ .\ \sin\beta}{\sin\delta} = 4038{,}080 \qquad BP = \frac{AB\ .\ \sin\alpha}{\sin\delta} = 3710{,}269$$

$$\theta_A^P = 120{,}2921 + 49{,}5871 = 169{,}8792^g \qquad \theta_B^P = 320{,}2921 - 55{,}4101 = 264{,}8820^g$$

$$X_{P1} = 10000 + 4038{,}080 \cdot Sin\ 169{,}8792 = 11840{,}074$$

$$Y_{P1} = 10000 + 4038{,}080 \cdot Cos\ 169{,}8792 = 6405{,}530$$

$$X_{P2} = 15000 + 371{,}269 \cdot Sin\ 264{,}8820 = 11840{,}074$$

$$Y_{P2} = \ \ 8350 + 3710{,}269 \cdot Cos\ 264{,}882 = 6405{,}530$$

Como se puede observar las coordenadas de P dan idénticas tanto si se calculan por el lado de A como si se hace por el lado de B. Esto solo indica que los cálculos han sido correctos.

Ejemplo 2

Desde dos estaciones A y B se ha visado a un punto P. Las coordenadas de las estaciones son:

PUNTO	X	Y
A	14533	5542
B	11545	6459

Las medidas angulares han sido las siguientes:

ESTACIÓN	VISADO	LHZ MEDIA
A	Nc	0,0000
	P	384,8815
B	Nc	0,0000
	P	55,2193

El aparato usado es de graduación directa y centesimal. Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto P.

****

Como desde la estación A no se ha visado a B y de B a A, solo se podrá aplicar el método de ecuacionesones. La pendiente será:

$$m_A = Cotg\ 384{,}8815 = -4{,}131406485 \qquad m_B = Cotg\ 55{,}2193 = 0{,}8481405913$$

Las ecuaciones serán:

$$Y_P - 5542 = -4{,}1314064588 \cdot (X_P - 14533)$$
$$Y_P - 6459 = 0{,}8481405913 \cdot (X_P - 14545)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las coordenadas de P, las cuales son:

$$X_P = 13839{,}916$$
$$Y_P = 8405{,}412$$

3.1.2 Intersección Directa Múltiple

La intersección directa múltiple se caracteriza porque se tienen que efectuar estacionamientos como mínimo en 3 puntos de coordenadas conocidas, desde los cuales se visará el punto a calcular. De esta forma habrá una redundancia de datos, pudiendo tener comprobación de los trabajos de campo.

3.1.2.1 Método de los triángulos independientes

a) Trabajos de campo:

Los trabajos de campo serán prácticamente iguales que en el método clásico. La diferencia estará en que se tendrán que efectuar por lo menos estaciones en tres puntos conocidos. Desde cada uno de los tres puntos se visará al otro punto conocido correlativo y al punto P que se quiere calcular, midiendo las lecturas horizontales correspondientes. Estas medidas angulares acimutales será aconsejable efectuarlas por lo menos dos veces. Una vez con el anteojo en posición directa y la otra en posición inversa, es decir, aplicando la regla de Bessel.

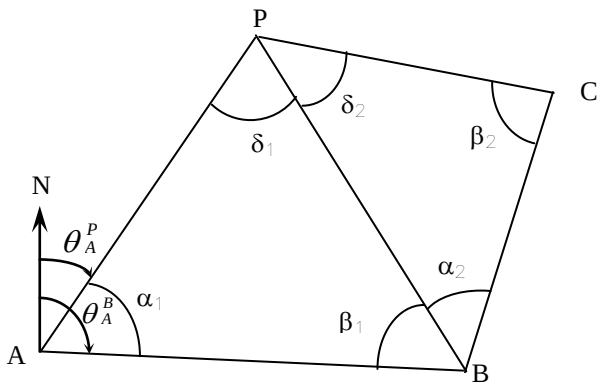


Figura 3.4

En el campo se podrá actuar de dos formas. Una forma es orientar el aparato en cada estación con lo que las lecturas horizontales serán orientaciones, rumbos o acimutes. La otra forma es no orientar el aparato en las estaciones, con lo que las orientaciones tendrán que calcularse en el gabinete. En el caso de la figura tan solo se ha orientado el aparato en la estación A. Por tanto, en este caso las medidas tomadas serán la orientación, rumbo o acimut hacia el punto P y el B desde la estación A; las lecturas horizontales hacia A y P desde la estación B; y las lecturas horizontales hacia B y P desde la estación C. Debido a que los puntos conocidos son visibles entre sí, orientar el aparato en cada estación es muy sencillo. Los ángulos α_1, α_2, β_1 y β_2 vienen dados por:

$$\alpha_1 = L_A^B - L_A^P \quad \beta_1 = L_B^P - L_B^A$$

$$\alpha_2 = L_B^C - L_B^P \quad \beta_2 = L_C^P - L_C^B$$

si no se ha orientado el aparato en ninguna estación.
Y por:

$$\alpha_1 = \theta_A^B - \theta_A^P \quad \beta_1 = \theta_B^P - \theta_B^A$$

$$\alpha_2 = \theta_B^C - \theta_B^P \quad \beta_2 = \theta_C^P - \theta_C^B$$

si se ha orientado el aparato en todas las estaciones.

b) Condiciones del método:

Para poder aplicar este método correctamente es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

- Los puntos conocidos tienen que ser visibles entre ellos.
- Se tienen que conocer las coordenadas de los puntos donde se efectúa la estación.
- Cada triángulo se tiene que resolver independientemente de los otros. Eso implica que la orientación que se tiene que tomar del eje B-P en el triángulo B-C-P, es la que venga dada por la diferencia de coordenadas entre B y C corregido del ángulo α_2 .

c) Trabajos de gabinete

Los trabajos de gabinete consistirán en resolver los triángulos que se puedan constituir entre el punto P a calcular y dos estaciones. En el caso de la figura 3.4 se podrían resolver dos triángulos diferentes. El triángulo A-B-P y el triángulo B-C-P. La condición que se tiene que cumplir para poder constituir estos triángulos, es que desde cada estación se haya visado al otro punto conocido.
Estos triángulos se resolverán idénticamente al método clásico. Por lo tanto se encontrarán varias coordenadas del punto P (unas para cada triángulo resuelto) y los resultados definitivos que se cogerán vendrán dados por la media de las coordenadas obtenidas.
En el caso de que se hubieran efectuado 4 estaciones se podrían resolver tres triángulos diferentes.

d) Ventajas e inconvenientes

Las ventajas de este método están en la facilidad para orientar las estaciones al ser visibles los puntos A y B por un lado, y B y C por el otro (caso de la figura 3.4).

Los inconvenientes están básicamente en la necesidad de que los puntos A, B, y C sean visibles entre si, lo cual complica los trabajos de campo.

3.1.2.2 Método numérico-gráfico del punto aproximado

a) Trabajos de campo:

Los trabajos de campo son básicamente los mismos que los del método de los triángulos independientes. La diferencia reside básicamente en que con este método no es necesario que los puntos conocidos sean visibles

entre ellos.

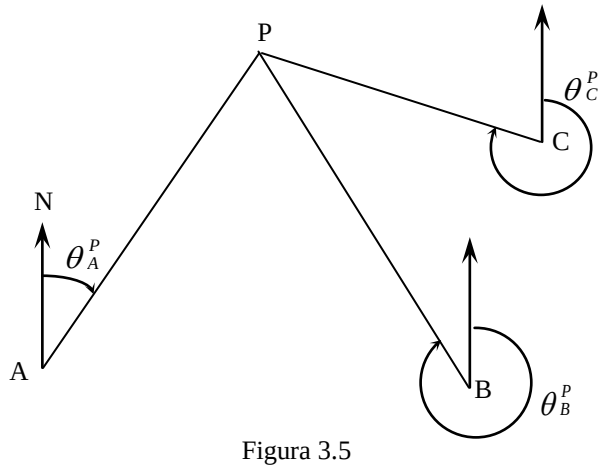


Figura 3.5

En el campo se tendrá que poder encontrar por lo menos tres puntos de coordenadas conocidas A, B, C,... desde los cuales se pueda visualizar el punto P que se quiere calcular. Será necesario poder orientar la estación en cada uno de los puntos conocidos donde se efectúe el estacionamiento.
Por lo tanto las medidas que se tendrán que efectuar serán, una vez orientado el aparato, la orientación, acimut o rumbo hacia el punto a calcular P. Estas medidas acimutales se tendrán que efectuar aplicando Bessel una vez o dos.

b) Condiciones del método:

Para poder aplicar el método correctamente es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

- Se tienen que conocer las coordenadas de los puntos donde se efectúa la estación.
- Se tiene que poder orientar el teodolito en cada una de las estaciones.

c) Trabajos de gabinete

Los trabajos de gabinete consisten primeramente en encontrar las coordenadas de un punto aproximado, es decir, un punto P' que tenga unas coordenadas tan aproximadas a las del punto P que se busca como sea posible. Para calcular estas coordenadas se podrán resolver intersecciones de rectas, tal como se ha visto en el método de ecuaciones. En el caso de la figura 3.5 se encontrarán las ecuaciones de las rectas AP, BP, y CP. Seguidamente se resolverá el sistema de ecuaciones entre dos rectas. Por ejemplo entre la recta AP y la BP y entre la AP y la CP. Las coordenadas del punto P' vendrán dadas por la media de las calculadas en los dos sistemas de ecuaciones. Estas coordenadas podrán ser redondeadas a ± 0,5 m. ya que se trata de un punto aproximado. Así mismo, para el caso de una intersección directa múltiple con 4 estaciones A, B, C y D se tendrán que resolver también dos sistemas de ecuaciones. Entre las rectas AP, BP y entre las rectas CP, DP. Se puede hacer cualquier otra combinación siempre y cuando intervengan rectas diferentes en los dos sistemas.

Una vez se tienen las coordenadas de un punto aproximado P' el siguiente paso consiste en construir el polígono de error que las visuales forman . Si no se produjera ningún error, las 3 o 4 visuales que se hubieran efectuado se cortarían todas en el mismo punto. Esto generalmente no pasa nunca y las visuales forman entre ellas un polígono de error. Cuanto más pequeño sea este polígono más precisos serán los trabajos

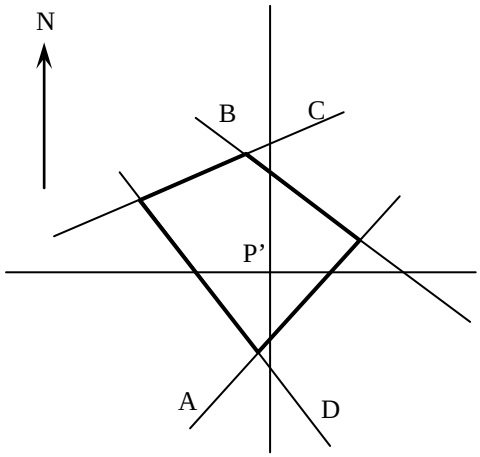


Figura 3.6

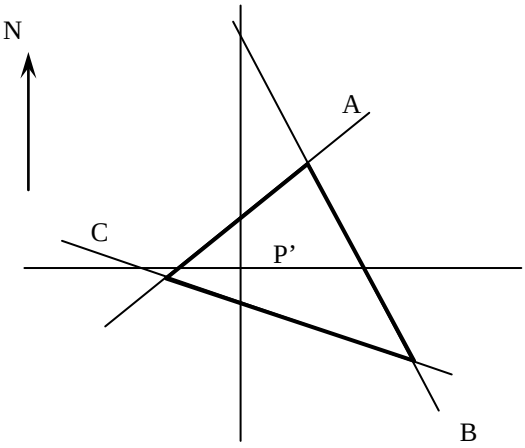


Figura 3.7

efectuados. En la figura 3.6 y 3.7 se puede observar como unas visuales efectuadas desde 4 y 3 puntos conocidos respectivamente, forman un polígono de error que en el caso de 4 visuales será generalmente un cuadrilátero y en el caso de 3 un triángulo.
Los polígonos de las figuras 3.6 y 3.7 son una representación de las rectas de las visuales efectuadas a una escala muy grande, del orden 1/1, 1/5 o 1/25. Como se ha dicho antes, cuanto más grande sea el polígono, menor precisión tendrá el trabajo efectuado. El polígono de error representa la zona del espacio donde hay más probabilidades de que se encuentre el punto P que se quiere calcular. Por lo tanto se tendrá que encontrar un sistema de cálculo gráfico que permita encontrar el punto P dentro del polígono de error.

d) Construcción del polígono de error y cálculo del punto P

Hay 2 formas de construir el polígono de error. Manualmente en papel milimetrado y informáticamente mediante un software de dibujo (AutoCad, ...)

- Manualmente

Si se amplia la zona del espacio donde cada una de las visuales intersecciona con los ejes de coordenadas del punto aproximado P' se podrá ver un croquis parecido al de la figura 3.8. En esta figura se representa una posible situación de la recta de la visual A respecto los ejes del punto P'. Para cada visual efectuada habrá una distribución diferente.

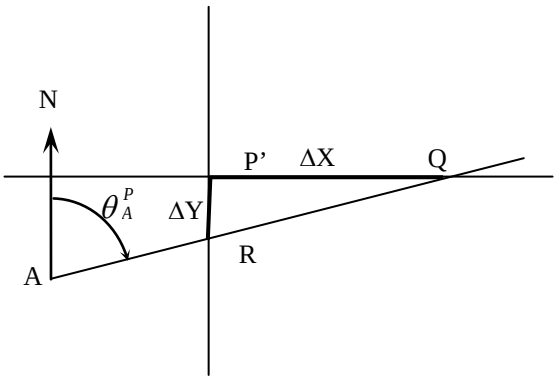


Figura 3.8

Si se pueden conocer los incrementos de X y de Y indicados en el croquis para cada visual, se podrá dibujar cada una de ellas. De la figura 3.8 se deducen las fórmulas siguientes:

$$Tg\ \theta_A^P = \frac{X_Q - X_A}{Y_{P'} - Y_A} \qquad Tg\ \theta_A^P = \frac{X_{P'} - X_A}{Y_R - Y_A}$$

Teniendo en cuenta que la orientación del eje A-P es conocida, puesto que se ha medido en el campo, y las coordenadas del punto A y del punto aproximado P' también son conocidas, se podrá calcular X_Q y Y_R a partir de las fórmulas:

$$X_Q = X_A + (Y_{P'} - Y_A).Tg\ \theta_A^P \qquad Y_R = Y_A + (X_{P'} - X_A).Cotg\ \theta_A^P$$

A partir de estos datos se podrán calcular los incrementos de X y de Y, los cuáles darán los puntos de cruce entre los ejes del punto P’ y la alineación de la visual.

$$\Delta X = X_Q - X_{P'} \qquad \Delta Y = Y_R - Y_{P'}$$

Aplicando estas fórmulas para cada alineación se calcularan los incrementos de abcisas y de ordenadas de todas las visuales, pudiéndose construir el polígono de error a una escala muy grande.

- Informáticamente:

Se trata de dibujar en la pantalla gráfica del programa de dibujo que se utilice las 3 o más rectas que intervengan en la intersección directa múltiple. Estas rectas se tienen que alargar hacia la dirección en que intersecciones con las otras rectas. Una vez se tiene dibujado el conjunto de visuales con sus respectivas intersecciones, se trata de efectuar un "ZOOM" o ampliación de la zona donde las visuales se cortan. Es muy probable que mientras no se efectúe la ampliación de dicha zona se observe como todas las rectas se cortan en un punto. Esto pasa porque la escala de visualización inicialmente es tan pequeña que no se aprecia el posible polígono de error que forman las visuales.

e) Cálculo del punto P a partir del polígono de error:

Tanto en el caso de construir el polígono de error manualmente como informáticamente, la forma de calcular el punto P en el polígono de error es la misma. El concepto que se ha de tener más claro es el de que el punto P estará tanto más cerca de una visual cuanto más corta sea ésta. Es decir, la distancia de separación del punto P a una visual será igual a una distancia proporcional a la distancia real de la visual. Por tanto, previamente debe calcularse la distancia de cada visual. Estas distancias vienen dadas por la fórmula siguiente:

$$D_A^{P'} = \sqrt{(X_A - X_{P'})^2 + (Y_A - Y_{P'})^2}$$

La fórmula indicada dará la distancia de la visual A. Para cada visual se aplicará la misma formula substituyendo las coordenadas del punto A por las de la estación de cada visual.

Una vez se tienen las distancias de las alineaciones, han de calcularse las distancias proporcionales. Estas distancias serán mucho más pequeñas (alrededor de cm. o mm.) y se cumplirá que entre ellas guardaran la misma proporción que tengan las distancias reales entre sí. A partir de las distancias proporcionales se trata de ir al polígono de error y dibujar las paralelas a cada una de las rectas a una distancia de cada recta igual a su distancia proporcional. Las paralelas se tienen que efectuar siempre hacia el lado que implique reducir el polígono de error. Seguidamente se pasa a analizar 4 casos:

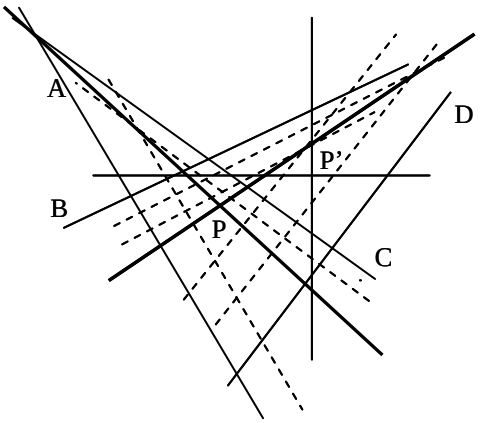


Figura 3.9

El caso de la figura 3.9 corresponde a una intersección directa múltiple con 4 alineaciones. Las 4 visuales forman el polígono de error que se observa en la figura.
Una vez se han calculado las distancias proporcionales adecuadas se pasa a efectuar las paralelas en cada alineación a la distancia proporcional correspondiente a cada visual. Observando la separación de las paralelas se puede deducir que las rectas A y D son las más largas y las rectas B y C las más cortas. El procedimiento que se ha usado consiste en encontrar la alineación media de cada dos alineaciones diferentes,

Así, para el caso considerado se ha encontrado la alineación media entre las rectas A y C y entre las rectas B y D. La forma de encontrar la media de dos alineaciones consiste en buscar dos puntos que definan la recta media. Para el caso de las rectas A y C un punto lo define su intersección, y el otro la intersección de sus respectivas paralelas. Para el caso de las rectas B y D debido a que su intersección sale fuera de los límites del dibujo, entonces se ha de buscar un primer punto de intersección de su primera paralela y un segundo punto en la intersección de la segunda paralela. La segunda paralela no necesariamente ha de hacerse a la misma distancia proporcional que la primera; mientras sea una distancia que guarde la proporción entre las dos rectas, es suficiente. El tener que realizar una segunda paralela, si el proceso se hace informáticamente, no hará falta hacerlo.
La intersección entre las dos alineaciones medias, define el punto P que se quiere calcular. Sus coordenadas se pueden deducir directamente sobre el plano, por lo que es aconsejable utilizar papel milimetrado, si estas operaciones se hacen manualmente.

Si se usa el *Autocad*, a partir de la orden *ID*, y teniendo activado el comando que detecta intersecciones, se obtienen directamente las coordenadas de la intersección de las dos rectas.

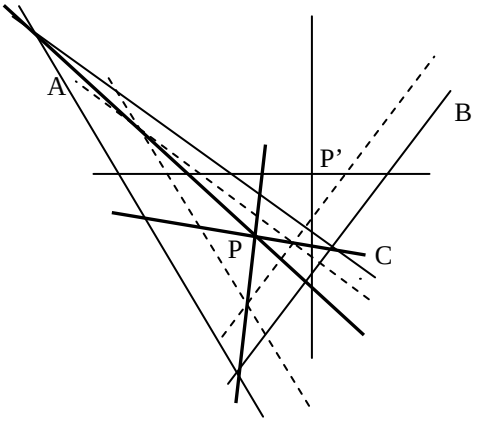


Figura 3.10

El caso de la figura 3.10 corresponde al caso de una intersección directa múltiple con 3 visuales. La forma de operar es dibujar las paralelas a las distancias proporcionales correspondientes a cada visual. Seguidamente se dibujan 3 rectas que vienen dadas por la unión entre cada vértice y el vértice correspondiente de las paralelas. La intersección entre las 3 rectas da el punto P que se busca. Si se opera correctamente las rectas siempre coinciden en un punto.

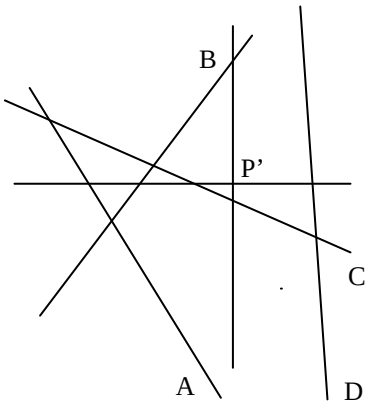


Figura 3.11

La forma más lógica de actuar en el caso de la figura 3.11 es despreciar la alineación D ,y resolver como en el caso 3.10, para encontrar el punto P que estará en el interior del triángulo de error que forman las otras 3 alineaciones.

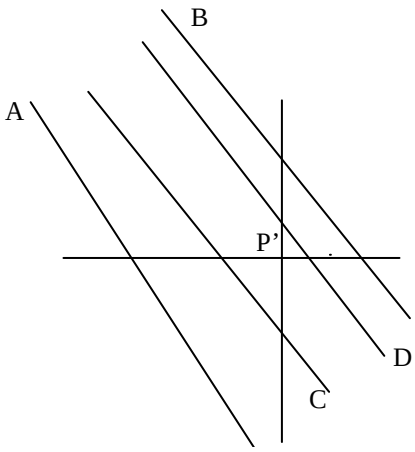


Figura 3.12

En el caso de la figura 3.12 no hay una solución adecuada debido a que las 4 visuales prácticamente son paralelas entre ellas. En el campo ha de procurar escogerse unas estaciones que no formen alineaciones con el punto P paralelas o casi paralelas.

3.1.2.3 Método de mínimos cuadrados

a) Trabajos de campo:

Los trabajos de campo son los mismos que los del método numérico-gráfico del punto aproximado. En este método se aplica un proceso de cálculo distinto al método anterior. Al igual que en el método numérico-gráfico del punto aproximado la ventaja de este método reside que las estaciones no tienen porque ser visibles entre ellas.

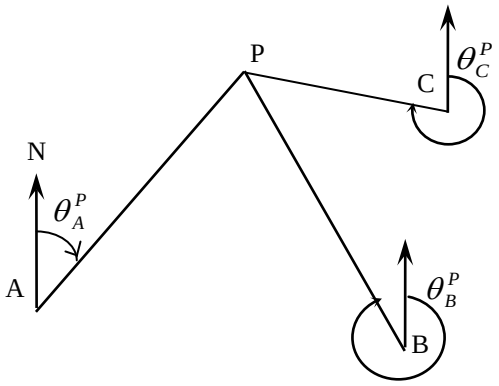


Figura 3.13

En el campo se tendrá que poder encontrar como mínimo tres puntos de coordenadas conocidas A, B y C desde los cuáles se pueda visualizar el punto P que se quiere calcular. Será necesario poder orientar la estación en cada uno de los puntos conocidos donde se efectúe estación. Por tanto, las medidas que se tendrán que tomar serán, una vez orientado el aparato; la orientación, rumbo o azimut hacia el punto P que se quiere calcular. Estas medidas acimutales será aconsejable tomarlas mediante la regla de Bessel una o dos veces.

b) Condiciones del método:

Para poder aplicar correctamente este método es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

- Se tienen que conocer las coordenadas de los puntos donde se efectúe estación.
- Se tiene que poder orientar el teodolito en cada una de las estaciones.

c) Trabajos de gabinete:

Al igual que en el método numérico-gráfico, este método necesita apoyarse en un punto aproximado. Para calcularlo, al igual que antes, se resuelven intersecciones de rectas entre sí, y se coge un valor medio de P', pudiéndolo redondear a medio metro de precisión para trabajar más cómodamente.

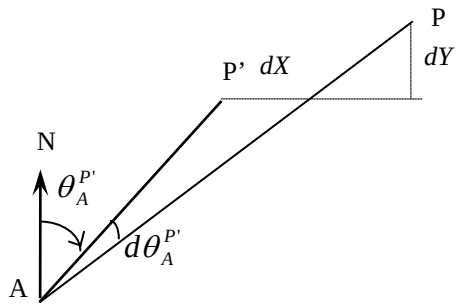


Fig. 3.14

Si P' es el punto aproximado al punto P que se quiere calcular, se tratará de ver como varía diferencialmente la orientación del eje A-P' cuando varíen las coordenadas del punto P'. De la figura se deduce que las coordenadas de P vienen dadas por:

$$X_P = X' + dX \qquad Y_P = Y' + dY$$

Para calcular las coordenadas de P se necesita conocer las coordenadas diferenciales *dX* y *dY*. Todo el proceso de cálculo que se pasará a analizar seguidamente está encaminado a calcular estas coordenadas diferenciales. Una vez se tengan calculadas, el problema estará resuelto.

De la figura 3.14 se deduce la fórmula:

$$Tg\theta_A^{P'} = \frac{X_{P'} - X_A}{Y_{P'} - Y_A} \qquad \theta_A^{P} = \theta_A^{P'} + d\theta_A^{P'}$$

Al sustituir las coordenadas de P' por las coordenadas del punto P que se quiere calcular, se producirá una variación diferencial de la orientación. Esta variación diferencial se puede obtener a partir de la derivación de la fórmula anterior. Derivando se obtiene la fórmula 1.

Se efectúa la simplificación siguiente: $X_{P'} = X' \quad y \quad Y_{P'} = Y'$

$$\frac{d\theta_A^{P'}}{\left(Cos\,\theta_A^{P'}\right)^2} = \frac{\left(Y' - Y_A\right)}{\left(Y' - Y_A\right)^2} dX - \frac{\left(X' - X_A\right)}{\left(Y' - Y_A\right)^2} dY$$

(1)

La distancia entre A y P' viene dada por:

$$D_A^{P'} = \frac{Y' - Y_A}{\left(Cos\,\theta_A^{P'}\right)}$$

Si se eleva al cuadrado y se invierte la fórmula anterior se obtiene:

$$\frac{1}{\left(D_A^{P'}\right)^2} = \frac{\left(Cos\,\theta_A^{P'}\right)^2}{\left(Y' - Y_A\right)^2}$$

(2)

Sustituyendo la expresión (2) en la fórmula (1) se obtiene el siguiente resultado:

$$d\theta_A^{P'} = \frac{\left(Y' - Y_A\right)}{\left(D_A^{P'}\right)^2} dX - \frac{\left(X' - X_A\right)}{\left(D_A^{P'}\right)^2} dY$$

(3)

Para cada una de las visuales efectuadas desde cada punto conocido se tendría que cumplir la expresión

siguiente:

$$\theta_n^{P'} + \left(\frac{(Y'-Y_n)}{(D_n^{P'})^2} dX - \frac{(X'-X_n)}{(D_n^{P'})^2} dY \right) - \theta_n^P = 0$$

(4)

Esto sería el caso ideal, es decir poder encontrar unos valores *dX* y *dY* que hiciesen que la fórmula (4) se cumpliera para cada visual. Este no será el caso y lo que se tendrá que procurar es calcular unos valores de las coordenadas diferenciales que minimicen el error total de todas las visuales al sustituir los valores diferenciales para cada visual en la expresión (4).

Para cada visual se tendrá que:

$$\theta_n^{P'} + \left(\frac{(Y'-Y_n)}{(D_n^{P'})^2} dX - \frac{(X'-X_n)}{(D_n^{P'})^2} dY \right) - \theta_n^P = u_n$$

(5)

u_n es el valor del residuo o error obtenido al aplicar unas *dX* y *dY* determinadas.

Para poder calcular *dX* y *dY* que hagan que los errores sean mínimos se utilizará la teoría de los mínimos cuadrados. Si se aplica la expresión (5) para cada una de las visuales se obtendrán unos residuos o errores para cada una. Así, para una intersección directa múltiple de 4 alineaciones se obtendrán 4 residuos o errores. A partir de la suma cuadrática de todos estos residuos se puede obtener una función F que variará en función de *dX* y *dY*.

$$F(dX, dY) = u_A^2 + u_B^2 + u_C^2 + \cdots + u_n^2$$

$$F(dX, dY) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i^2$$

$$F(dX, dY) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\theta_i^{P'} + \frac{(Y'-Y_i)}{(D_i^{P'})^2} dX - \frac{(X'-X_i)}{(D_i^{P'})^2} dY - \theta_i^P \right)$$

Por tanto, lo que se tiene que hacer es buscar los valores de *dX* y *dY* que den un valor de la función F mínimo. Para buscar este mínimo se tiene que derivar la función por cada variable, es decir, por *dX* y *dY*; para pasar seguidamente a igualar estas derivadas parciales a cero.

El resultado de derivar F en función de *dX* da:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(Y'-Y_i)^2}{(D_i^{P'})^4} dX - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(X'-X_i)\cdot(Y'-Y_i)}{(D_i^{P'})^4} dY = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(\theta_i^P - \theta_i^{P'})\cdot(Y'-Y_i)}{(D_i^{P'})^2}$$

(6)

Al derivar en función de dY se obtiene la expresión (7):

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(X'-X_i)\cdot(Y'-Y_i)}{(D_i^{P'})^4}dX-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(X'-X_i)^2}{(D_i^{P'})^4}dY=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(\theta_i^P-\theta_i^{P'})\cdot(X'-X_i)}{(D_i^{P'})^2}$$

(7)

A continuación se indican una serie de simplificaciones para que las fórmulas (6) y (7) queden expresadas de una forma más sencilla:

$$AA=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(X'-X_i)^2}{(D_i^{P'})^4} \qquad BB=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(Y'-Y_i)^2}{(D_i^{P'})^4} \qquad CC=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(X'-X_i)\cdot(Y'-Y_i)}{(D_i^{P'})^4}$$

$$DD=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(Y'-Y_i)\cdot(\theta_i^P-\theta_i^{P'})}{(D_i^{P'})^2} \qquad EE=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(X'-X_i)\cdot(\theta_i^P-\theta_i^{P'})}{(D_i^{P'})^2}$$

Cabe destacar, que para que los cálculos sean correctos los valores angulares han de expresarse en radianes.

Las ecuaciones quedan simplificadas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} BB\cdot dX-CC\cdot dY=DD \\ CC\cdot dX-AA\cdot dY=EE \end{aligned}\right\}$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La resolución de este sistema dará los valores dX y dY buscados.

$$dX=\frac{AA\cdot DD-CC\cdot EE}{AA\cdot BB-CC^2} \qquad dY=\frac{CC\cdot dX-EE}{AA}$$

A partir de estos valores ya se pueden encontrar las coordenadas de P:

$$X_P=X'+dX \qquad Y_P=Y'+dY$$

El gran inconveniente que tiene resolver una intersección directa múltiple por mínimos cuadrados es que no se sabe si hay una alineación defectuosa que se tenga que eliminar, ya que en principio no se dispone de ningún gráfico que nos permita ver la situación de las visuales. Por tanto, lo más aconsejable es dibujar el polígono de error y en función de la situación de las visuales resolver la intersección por mínimos cuadrados, con aquellas visuales que sean adecuadas. El cálculo por mínimos cuadrados da unos resultados más precisos que los otros métodos, siempre y cuando las alineaciones que intervengan en el cálculo sean correctas.

d) Programa informático para calculadoras programables en lenguaje BASIC:

Realizar mediante calculadoras normales todo el proceso de cálculo de un intersección directa múltiple mediante mínimos cuadrados es muy laborioso , siendo además muy fácil tener equivocaciones en los cálculos. Actualmente con la gran evolución de las calculadoras programables y los ordenadores, se pueden

usar programas informáticos para realizar estos cálculos de una forma sencilla, rápida y precisa.

A continuación se da el listado de un programa en lenguaje BASIC que realiza todos los cálculos descritos en el punto c de este método de intersección directa múltiple. Los datos que se han de entrar al programa son las coordenadas del punto aproximado P', así como las coordenadas de cada punto estación y las orientaciones medidas desde cada estación al punto P que se quiere calcular. El programa da como resultado las coordenadas del punto aproximado P', las orientaciones y distancias de cada estación al punto aproximado, los valores de las variables AA, BB, CC, DD y EE, los valores diferenciales dX y dY; y finalmente las coordenadas del punto P.

```
10   REM INTERSECCION DIRECTA MULTIPLE POR MINIMOS CUADRADOS
20   CLS:CLEAR
30   INPUT "X,Y Punto aproximado";X2,Y2
40   INPUT "NUMERO DE ESTACIONES";N
50   DIM X(N),Y(N),O(N),L(N),D(N)
60   FOR T=1 TO N
70   PRINT "X,Y,Orient-";T;:INPUT X(T),Y(T),O(T)
80   NEXT T
90   FOR T=1 TO N
100  X1=X(T):Y1=Y((T):GOSUB 1000
110  PRINT "Orient aprox=";INT(L(T)*1E4+.5)/1E4
120  PRINT "Dist aprox=";INT(D(T)*1E4+.5)/1E4
130  NEXT T
140  AA=0:BB=0:CC=O:DD=0:EE=0
150  FOR T=1 TO N
160  AA=AA+(X2-X(T))^2/D(T)^4
170  BB=BB+(Y2-Y(T))^2/D(T)^4
180  CC=CC+((X2-X(T))*(Y2-Y(T))/D(T)^4
190  DD=DD+(Y2-Y(T))*(O(T)-L(T))/(63.6620*D(T)^2)
200  EE=EE+(O(T)-L(T))/63.6620*(X2-X(T))/D(T)^2
210  NEXT T
220  XX=(AA*DD-CC*EE)/(AA*BB-CC^2)
230  YY=(CC*XX-EE)/AA
240  XP=X2+XX:YP=Y2+YY
250  CLS
260  PRINT "AA=";AA
270  PRINT "BB=";BB
280  PRINT "CC=";CC
290  PRINT "DD=";DD
300  PRINT "EE=";EE
310  PRINT "INC X=";INT (XX*1E3+.5)/1E3
320  PRINT "INC Y=";INT(YY*1E3+.5)/1E3
330  END
1000 REM CALCULO ORIENTACION Y DISTANCIA
1010 IF X2>X1 THEN IF Y2>Y1 THEN O=ATNABS((X2-X1)/((Y2-Y1))
1020 IF X2>X1 THEN IF Y2<Y1 THEN O=100+ATNABS((Y1-Y2)/(X2-X1))
1030 IF X2<X1 THEN IF Y2>Y1 THEN O=300+ATNABS((Y1-Y2)/(X2-X1))
1040 IF X2<X1 THEN IF Y2<Y1 THEN O=200+ATNABS((X1-X2)/(Y2-Y1))
1050 IF X2=X1 THEN IF Y2>Y1 THEN O=0
1060 IF X2=X1 THEN IF Y2<Y1 THEN O=200
1070 IF Y2=Y1 THEN IF X2>X1 THEN O=100
1080 IF Y2=Y1 THEN IF X2<X1 THEN O=300
1090 L(T)=O
1100 D(T)=SQR((X1-X2)^2+(Y1-Y2)^2)
1110 RETURN
```

3.1.2.4 Ejemplos

Ejemplo 1

* Desde los puntos A, B, C y D se ha visado a un punto P. Las coordenadas de los 4 puntos son:

PUNT	X	Y
A	10000	10000
B	15000	8350
C	12533	3542
D	9545	4459

Las medidas angulares han sido las siguientes:

EST	VISADO	LECTURA HZ MEDIA
A	Nc	0,0000
	B	120,2921
	P	169,8792
B	A	0,0000
	C	309,8850
	P	344,5899
C	B	50,0000
	D	338,7760
	P	4,7009
D	C	350,0000
	P	286,2627

El aparato usado es de graduación directa y centesimal.
Se pide:

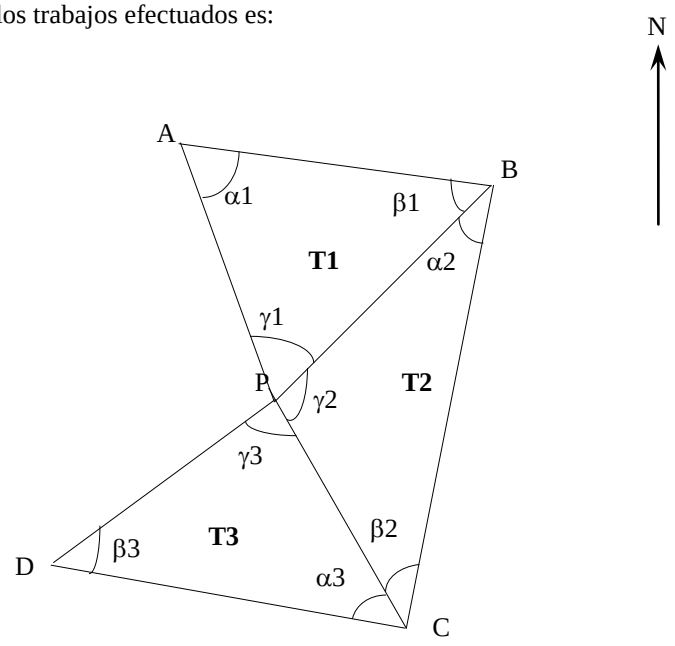
a) Calcular las coordenadas del punto P por el método de triángulos independientes.
b) Ídem por el método numérico-gráfico del punto aproximado.
c) Ídem por el método de mínimos cuadrados.

****

a) A partir de les coordenada de los 4 puntos se pueden calcular los siguientes datos:

A-B	ORIENTACIÓN	DISTANCIA HZ
A-B	120,2921	5265,216
B-C	230,1806	5403,976
C-D	318,9566	3125,545

El croquis de los trabajos efectuados es:



A partir de las medidas angulares efectuadas en el campo se pueden calcular los ángulos de cada triángulo. El ángulo γ se encuentra por diferencia de 200^g de los otros dos ángulos de cada triángulo.

TRIÁNGULO	α	β	γ
1	49,5871	55,4101	95,0028
2	34,7049	45,2991	119,9960
3	65,9249	63,7373	70,3378

TRIÁNGULO 1

A partir de la orientación del eje A-B y de los ángulos α_1 y β_1 se calculan las orientaciones de las estaciones A y B hacia el punto P.

$$\theta_A^P = 169{,}8792^g \qquad \theta_B^P = 264{,}8820^g$$

Aplicando el teorema del seno se calculan las distancias de los ejes AP y BP.

$$D_A^P = 4038{,}080 \text{ m.} \qquad D_B^P = 3710{,}269 \text{ m.}$$

Con estos datos ya se pueden calcular las coordenadas de P.

$$X_P = 10000 + 4038{,}080 \cdot \text{Sin } 169{,}8792 = 11840{,}074$$
$$Y_P = 10000 + 4038{,}080 \cdot \text{Cos } 169{,}8792 = 6405{,}530$$

$$X_P = 15000 + 3710{,}269 \cdot \text{Sin } 264{,}8820 = 11840{,}074$$
$$Y_P = 8350 + 3710{,}269 \cdot \text{Cos } 264{,}8820 = 6405{,}530$$

Se observa que el cálculo del punto P a partir de A da exactamente lo mismo que a partir de B. Esto tan solo

nos indica que los cálculos efectuados han sido correctos. No es una comprobación de la bondad de los trabajos de campo.

TRIÁNGULO 2

A partir de la orientación del eje A-B y de los ángulos α_2 y β_2 se calculan las orientaciones de las estaciones B y C hacia el punto P.

$$\theta_B^P = 264{,}8855^g \qquad \theta_C^P = 384{,}8815^g$$

Aplicando el teorema del seno se calculan las distancias de los ejes BP y CP.

$$D_B^P = 3710{,}397 \text{ m.} \qquad D_C^P = 2946{,}327 \text{ m.}$$

Con estos datos ya se pueden calcular las coordenadas de P.

$$X_P = 15000 + 3710{,}397 \cdot \text{Sin } 264{,}8855 = 11839{,}860$$
$$Y_P = 8350 + 3710{,}397 \cdot \text{Cos } 264{,}8855 = 6405{,}635$$

$$X_P = 12533 + 2946{,}327 \cdot \text{Sin } 384{,}8815 = 11839{,}860$$
$$Y_P = 3542 + 2946{,}327 \cdot \text{Cos } 384{,}8815 = 6405{,}635$$

TRIÁNGULO 3

A partir de la orientación del eje A-B y de los ángulos α_2 y β_2 se calculan las orientaciones de las estaciones C y D hacia el punto P.

$$\theta_C^P = 384{,}8815^g \qquad \theta_D^P = 55{,}2193^g$$

Aplicando el teorema del seno se calculan las distancias de los ejes CP y DP.

$$D_C^P = 2946{,}097 \text{ m.} \qquad D_D^P = 3009{,}179 \text{ m.}$$

Con estos datos ya se pueden calcular las coordenadas de P.

$$X_P = 12533 + 2946{,}097 \cdot \text{Sin } 384{,}8815 = 11839{,}916$$
$$Y_P = 3542 + 2946{,}097 \cdot \text{Cos } 384{,}8815 = 6405{,}411$$

$$X_P = 9545 + 3009{,}179 \cdot \text{Sin } 55{,}2193 = 11839{,}916$$
$$Y_P = 4459 + 3009{,}179 \cdot \text{Cos } 55{,}2193 = 6405{,}411$$

Las coordenadas de P calculadas a partir de A, B, C y D han dado sensiblemente iguales, con diferencias de pocos centímetros, cosa que nos indica que los trabajos de campo han sido correctos. En el caso considerado adoptaríamos como resultado definitivo la media aritmética de los 3 resultados.

$$X_P = \frac{11840{,}074 + 11839{,}860 + 11839{,}916}{3} = 11839{,}950$$

$$Y_P = \frac{6405{,}530 + 6405{,}635 + 6405{,}411}{3} = 6405{,}525$$

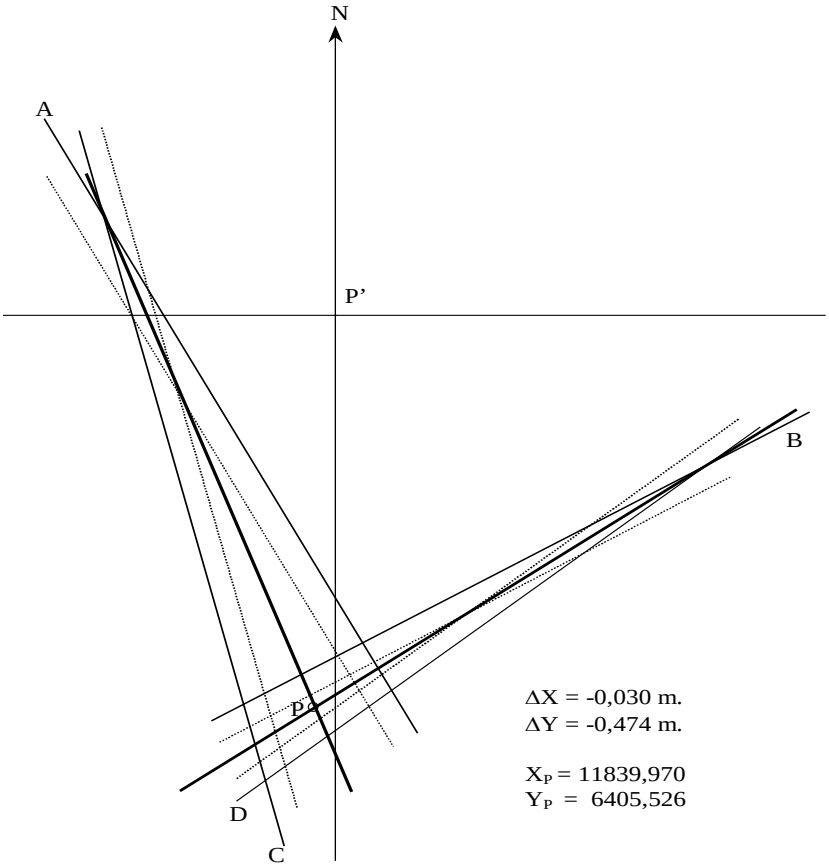
b) Como coordenadas del punto aproximado se toman las calculadas en el método anterior pero redondeadas al metro.

$X_{P'}$ = 11840 m. $Y_{P'}$ = 6406 m.

A partir de estas coordenadas de P', de las orientaciones de cada estación al punto P y de las coordenadas de las estaciones se aplican las fórmulas del método numérico-gráfico para poder encontrar los incrementos de X y de Y, de cada alineación respecto a unos ejes coordenados que pasen por el punto P'.

ESTACIÓN	X	Y	$\theta^{P}_{Estacion}$	ΔX	ΔY
A	10000	10000	169,8792	-0,167	-0,327
B	15000	8350	264,8838	0,639	-0,393
C	12533	3542	384,8815	-0,226	-0,935
D	9545	4459	55,2193	0,610	-0,517

Con estos datos se puede construir el polígono de error.



c) Con el método de mínimos cuadrados también se necesitan las coordenadas de un punto aproximado. Interesa que el punto aproximado lo sea al máximo posible, por lo que se toman las coordenadas de P' siguientes:

$$X_{P'} = 11840 \qquad Y_{P'} = 6405{,}5$$

Con estas coordenadas se calculan las orientaciones y distancias de cada punto estación a P', y seguidamente aplicando las fórmulas pertinentes se calculan las variables *AA, BB, CC, DD y EE* a partir de las cuales se resuelve el sistema de ecuaciones que permite calcular los incrementos de *X* y de *Y*. Una vez se tienen estos incrementos ya se pueden calcular las coordenadas del punto P.

$\mathbf{X_A}$ =	10000	$\mathbf{Y_A}$ =	10000	θ_A^P =	169,8792
$\mathbf{X_B}$ =	15000	$\mathbf{Y_B}$ =	8350	θ_B^P =	264,8838
$\mathbf{X_C}$ =	12533	$\mathbf{Y_C}$ =	3542	θ_C^P =	384,8815
$\mathbf{X_D}$ =	9545	$\mathbf{Y_D}$ =	4459	θ_D^P =	55,2193
$\mathbf{X_{P'}}$ =	11840	$\mathbf{Y_{P'}}$ =	6405,5		
$D_A^{P'}$ =	4038,073	$\theta_A^{P'}$ =	169,8804		
$D_B^{P'}$ =	3710,348	$\theta_B^{P'}$ =	264,8822		
$D_C^{P'}$ =	2946,164	$\theta_C^{P'}$ =	384,8837		
$D_D^{P'}$ =	3009,300	$\theta_D^{P'}$ =	55,2190		
AA =	1,36021E-7	**BB** =	2,2357950E-7		
CC =	3,56800E-8	**DD** =	-9,782381E-9		
EE =	-3,942668044E-9				
ΔX =	-0,041	**ΔY** =	0,018		
$\mathbf{X_P}$ =	11839,959	$\mathbf{Y_P}$ =	6405,518		

3.2 Intersección Inversa

La intersección inversa se basa en que nos estacionamos en el punto que se quiere calcular y se visualiza a puntos de coordenadas conocidas. Al igual que la intersección directa, la inversa puede ser simple y múltiple.

3.2.1 Intersección inversa simple:

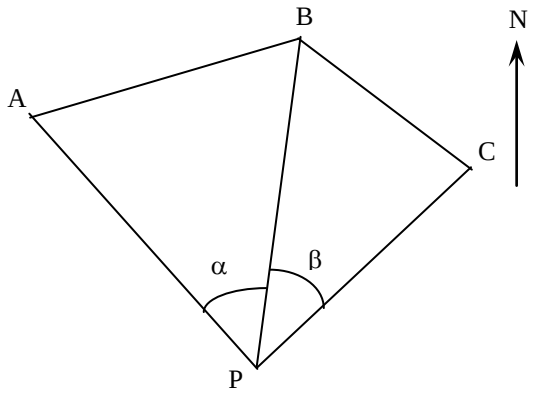


Figura 3.15

Una intersección inversa simple se caracteriza porque desde una estación situada en un punto P que se quiere calcular, se visualiza a tres puntos de coordenadas conocidas. Este es el mínimo número de puntos conocidos que han de visualizarse para poder calcular las coordenadas del punto P. Por tanto la finalidad del método es poder calcular las coordenadas de P, pero también las de calcular las orientaciones, rumbos o acimutes de las alineaciones formadas entre el punto P y los puntos A, B y C visualizados.

a) Trabajos de campo

Según la figura 3.15, los trabajos de campo consistirán en realizar estación en el punto P, y visar a los tres puntos de coordenadas conocidas, que en la figura considerada son A, B y C. Al visar a cada punto se tomará medida de la lectura horizontal. Para poder obtener el punto P con la precisión adecuada es fundamental realizar las medidas de lectura horizontal con el anteojo en forma directa e inversa, para así obtener las lecturas horizontales medias por la regla de Bessel. Así mismo, es básico utilizar un teodolito con una apreciación directa de como mínimo 10^s -20^s. A partir de las lecturas horizontales medias podremos

$$\alpha = Lhz_{mB} - Lhz_{mA}$$
$$\beta = Lhz_{mC} - LHz_{mB}$$

calcular los ángulos α y β.

Los datos de partida que son necesarios conocer para poder aplicar correctamente el método, son las coordenadas planimétricas de los tres puntos visados.

En los trabajos de campo cabe destacar que el encontrar un punto donde estacionar para poder visar a tres puntos de coordenadas conocidas no es una tarea fácil. Normalmente no se puede realizar esta operación en el punto que le interese al topógrafo, si no que tiene que realizar los trabajos desde el punto que el terreno y la situación de los vértices lo permita; para desde este punto realizar una poligonal hasta la zona donde debe realizar el levantamiento topográfico.

b) Trabajos de gabinete

Los trabajos de gabinete consistirán en la realización de todos los cálculos necesarios para poder obtener las coordenadas del punto estación. Hay diversos métodos, veremos el denominado "método de la vuelta desorientada". Este método se basa en calcular la orientación desde la estación P, al primer punto conocido visado, que en el caso de la figura 3.15 es el A. Está orientación se calcula a partir de la fórmula:

$$X = tg\theta_P^{A'} = \frac{X_A^C . cotg(\alpha + \beta) - X_A^B . cotg\alpha - Y_B^C}{Y_A^C . cotg(\alpha + \beta) - Y_A^B . cotg(\alpha) + X_B^C}$$

$$\theta_P^{A}{}' = artg\ X$$

A partir de esta orientación se puede calcular la desorientación de la vuelta de horizonte efectuada al medir las lecturas horizontales a los puntos conocidos.

$$D = \theta_p^{A}{}' - L_p^A$$

$\theta_p^{A}{}' =$ Orientación, rumbo o acimut de P al vértice A

$L_P^A =$ Lectura horizontal de P al vértice A

Todas las orientaciones de entrada las consideraremos provisionales, ya que la tangente de un ángulo de por ejemplo 130^g da igual que de un ángulo de 330^g. Esto se debe a que se cumple la siguiente relación:

$$tg\alpha = tg(\alpha + 200)$$

Por tanto, de entrada la orientación calculada puede ser que difiera en 200^g de la real. El usar a partir de aquí estas orientaciones provisionales, aunque difieran en 200^g de las reales no afectan a los cálculos de las coordenadas parciales X_A^P y Y_A^P.

Mientras se usen estas orientaciones provisionales las representaremos por primas.

Las orientaciones provisionales del punto estación P al vértice B y al vértice C vienen dadas por:

$$\theta_P^{B'} = L_P^B + D$$

$$Si \quad \theta_P^{B'} \geq 400 \Rightarrow \theta_P^{B'} = \theta_P^{B'} - 400$$

$$Si \quad \theta_P^{B'} \leq 0 \Rightarrow \theta_P^{B'} = \theta_P^{B'} + 400$$

$$\theta_P^{C'} = L_P^C + D$$

$$Si \quad \theta_P^{C'} \geq 400 \Rightarrow \theta_P^{C'} = \theta_P^{C'} - 400$$

$$Si \quad \theta_P^{C'} \leq 0 \Rightarrow \theta_P^{C'} = \theta_P^{C'} + 400$$

Una vez obtenidos las orientaciones ya se puede pasar a calcular la abcisa parcial entre el punto A y el punto estación P, mediante la expresión siguiente:

$$X_A^P = \frac{-X_A^B \cdot Sin\,\theta_P^{A'} \cdot Cos\,\theta_P^{B'} + Y_A^B \cdot Sin\,\theta_P^{A'} \cdot Sin\,\theta_P^{B'}}{Sin(\theta_P^{B'} - \theta_P^{A'})}$$

La ordenada parcial entre A y P vendrá dada por:

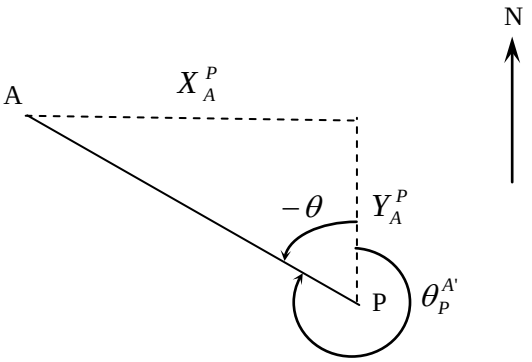


Figura 3.16

A partir de la figura 3.16 se deduce que:

$$tg\ \theta_P^{A'} = tg\ (-\theta) \Rightarrow tg\ \theta_P^{A'} = \frac{X_A^P}{Y_A^P} \Rightarrow Y_A^P = \frac{X_A^P}{tg\ \theta_P^{A'}}$$

A partir de aquí se podrá ya calcular las coordenadas de P, con las siguientes expresiones:

$$X_P = X_A + X_A^P$$
$$Y_P = Y_A + Y_A^P$$

Para acabar, solo queda comprobar que las orientaciones utilizadas para calcular X_P e Y_P son las correctas, o en cambio se han de corregir de ± 200^g.

Para comprobarlo se puede hacer de dos formas:

a) A partir de croquis:

Si conocemos de una forma aproximada la situación de los puntos A, B, C y P respecto el norte, enseguida veremos si la orientación $\theta_P^{A'}$ es la correcta o en cambio se la tiene que sumar o restar 200^g .

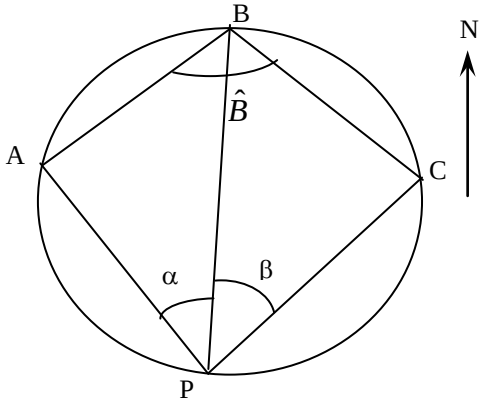
b) A partir de calcular la orientación $\theta_P^{A'}$, mediante las coordenadas de A y de P.

Si hemos de corregir $\theta_P^{A'}$ en ± 200^g , también lo tendremos que hacer con $\theta_P^{B'}$ y $\theta_P^{C'}$.
Una vez corregidas las orientaciones, si es que era necesario hacerlo, tendremos definitivamente el problema resuelto, habiendo obtenido los siguientes datos:

$$X_P \quad , \quad Y_P \quad , \quad \theta_P^A \quad , \quad \theta_P^B \quad y \quad \theta_P^C$$

c) Limitaciones

Una intersección inversa en la que los tres puntos conocidos y el punto estación queden situados aproximadamente en la línea de un círculo tal como la figura 3.17 no tendrá una solución matemática adecuada, ya que cualquier punto del círculo puede ser una posible solución a esa intersección inversa simple.



$$\hat{B} = \theta_B^A - \theta_B^C$$

Figura 3.17

Analíticamente, se puede detectar que la intersección inversa forma círculo peligroso cuando se cumple que:

$$\alpha + \beta + \hat{B} = 200^g * K \qquad \text{Donde} \quad K = 1,2,3,...$$

Se suele dejar un margen de seguridad de ± 10^g , de tal manera que es aconsejable que si la suma de los tres ángulos oscila entre 190^g y 210^g o múltiplos , se considere la intersección inversa simple como no apta, habiéndose de buscar otros puntos conocidos, u otro punto P.

3.2.2 Intersección inversa múltiple:

La intersección inversa múltiple es aquella en la que haciendo estación en un punto P que queremos calcular, visualizamos a como mínimo cuatro puntos conocidos.

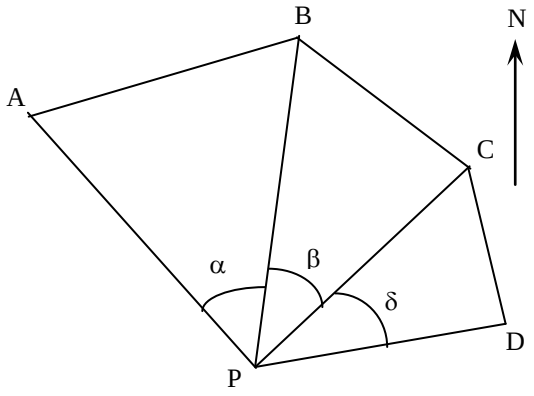


Figura 3.18

En este caso podremos resolver más de una intersección inversa simple, con lo que tendremos comprobación de los trabajos realizados en el campo. En concreto, el número de intersecciones inversas simples que se pueden resolver vienen dadas por la fórmula siguiente:

$$N = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

n = nº puntos conocidos visados.
N = nº intersecciones inversas simples que se pueden calcular.

$\forall$ n = 3 $\Rightarrow$ N = 1
$\forall$ n = 4 $\Rightarrow$ N = 4
$\forall$ n = 5 $\Rightarrow$ N = 10

Una vez calculadas las N intersecciones inversas simples, las coordenadas de P vendrán dadas a través de las coordenadas obtenidas en cada intersección simple, al igual que las orientaciones de cada visual.
Se realizará la media aritmética o ponderada en función del peso que se quiera dar a cada intersección. Así, para una intersección simple que forme círculo peligroso será aconsejable darle un peso de cero.
A continuación se dan unas pautas para saber si una intersección inversa simple es, teóricamente, más precisa que otra.

Se trata de construir un triángulo a partir de los vértices que intervienen para cada intersección simple. De esta forma para la figura 3.19, se podrán construir 4 triángulos: el A-B-C, el A-B-D, el A-C-D, y el B-C-D. Entonces una intersección inversa simple es tanto más precisa cuanta más superficie tenga su triángulo correspondiente, y de forma más regular sea, es decir, más parecido a un triángulo equilátero.

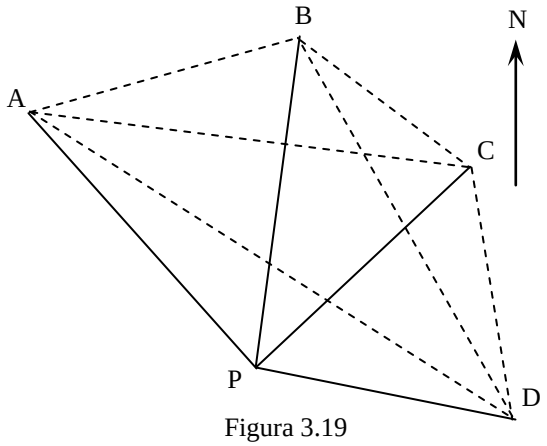


Figura 3.19

Una vez se tiene calculada cada intersección inversa simple, los resultados de cada una (orientaciones de la estación a cada vértice, y las coordenadas de la estación) se trata de hacer la media aritmética o ponderada, en función de la precisión que se considera a cada intersección inversa simple.

	A-B-C	A-B-D	A-C-D	B-C-D	Medias
θ_P^A	θ_{P1}^A	θ_{P2}^A	θ_{P3}^A	$\underline{\theta_{P4}^A}$	θ_{Pm}^A
θ_P^B	θ_{P1}^B	θ_{P2}^B	$\underline{\theta_{P3}^B}$	θ_{P4}^B	θ_{Pm}^B
θ_P^C	θ_{P1}^C	$\underline{\theta_{P2}^C}$	θ_{P3}^C	θ_{P4}^C	θ_{Pm}^C
θ_P^D	$\underline{\theta_{P1}^D}$	θ_{P2}^D	θ_{P3}^D	θ_{P4}^D	θ_{Pm}^D
X_P	X_{P1}	X_{P2}	X_{P3}	X_{P4}	X_{Pm}
Y_P	Y_{P1}	Y_{P2}	Y_{P3}	Y_{P4}	Y_{Pm}
Peso	P1	P2	P3	P4	

Así para el caso de la intersección inversa múltiple de la figura 3.18, el resumen de datos calculados están indicados en la tabla anterior. Puede observarse como en dicha tabla están las orientaciones y coordenadas obtenidas en el cálculo de cada intersección simple. La orientación que aparece subrayada es la orientación del cuarto eje que no interviene en el cálculo de una determinada intersección simple. Esta cuarta orientación, para cada caso tiene que calcularse a partir de las orientaciones calculadas en su respectiva intersección inversa simple y las lecturas horizontales efectuadas.

$\theta_{P1}^D = \theta_{P1}^C + \delta$ $\qquad$ $\theta_{P2}^C = \theta_{P2}^B + \beta$ $\qquad$ $\theta_{P3}^B = \theta_{P3}^C - \beta$ $\qquad$ $\theta_{P4}^A = \theta_{P4}^B - \alpha$

Si hay alguna orientación que supere los 400^g se le tendrá que restar 400^g, y si hay alguna que no llegue a 0^g se le tendrá que sumar 400^g.

3.2.3 Sofware para calculadoras con lenguaje BASIC o compatible

A continuación se indica el listado del programa en lenguaje BASIC, adaptado a la calculadora CASIO FX-880P y compatibles. Dicho programa calcula las orientaciones planimétricas del punto estación.
Así mismo, da información de si la intersección inversa simple forma círculo peligroso.

PROGRAMA INFORMÁTICO DE INTERSECCIÓN INVERSA SIMPLE MEDIANTE VUELTA DESORIENTADA

```
10  REM INTERSECCION INVERSA SIMPLE
20  CLS:CLEAR
30  INPUT"Coordenadas A,B,C";S,Y,X1,Y1X2,Y2
40  INPUT"Lecturas LA,LB,LC";LA,LB,LC
50  LB-LA:IF FRAC(T)=0 THEN T=T+0.0000000001
60  IF T<0 THEN T=T+400
70  V=LC-LB:IF FRAC(V)=0 THEN V=V+0.0000000002
80  IF V<0 THEN V=V+400
90  X4=X:Y4=Y:X5=X1:Y5=Y1
100 GOSUB 1000
110 O1=O2
120 X4=X2:Y4=Y2:X5=X1:Y5=Y1
130 GOSUB 1000
140 B1=01-O2
150 IF B1<0 THEN B1=B1+400 ´ B1 es el angulo B
160 J=T+V+B1
170 FOR K=200 TO 800 STEP 200
180 IF ABS(J-K)<=10 THEN 190 ELSE 200
190 CLS:BEEP:PRINT"CIRCULO PELIGROSO"
200 NEXT K
210 T1=(X2-X)*1/TAN(T+V)-(X1-X)*1/TANT-(Y2-Y1)
220 T2=(Y2-Y)*1/TAN(T+V)-(Y1-Y)*1/TANT+(X2-X1)
230 TG=T1/T2
240 OA=ATN(TG)
250 IF OA<0 THEN OA=OA+400
260 IF OA>=400 THE OA=OA-400
270 DE=OA-LA
280 OB=LB+DE
290 IF OB<0 THEN OB=OB+400
300 IF OB>=400 THEN OB=OB-400
310 OC=LC+DE
320 IF OC<0 THEN OC=OC+400
330 IF OC>=400 THEN OC=OC-400
340 P1= -(X1-X)*SINOA*COSOB+(Y1-Y)*SINOB
350 OL=OB-OA
360 IF OL<0 THEN OL=OL+400
370 IF OL>=400 THEN OL=OL-400
380 AX=P1/SINOL
390 REM COMPROVACIÓ BX=AX
400 P1= -(X2-X)*SINOA*COSOC+(Y2-Y)*SINOA*SINOC
410 OL=OC-OA
420 IF OL<0 THEN OL=OL+400
```

```
430  IF OL>=400 THEN OL=OL-400
440  BX=P1/SINOL
450  IF FRAC(OA)=0 THEN OA=OA+0.0000000000111
460  AY=AX/TANOA
470  XP=X+AX
480  YP=Y+AY
490  X5=XP:Y5=YP:X4=X:Y4=Y
500  GOSUB 1000
510  OA=O2:DA=DI
515  DE=OA-LA
520  X4=X1:Y4=Y1
530  GOSUB 1000
540  OB=O2:DB=DI
550  X4=X2:Y4=Y2
560  GOSUB 1000
570  OC=O2:DC=DI
580  CLS
590  REM IMPRESSION DE RESULTADOS
600   PRINT"TANOPA=";INT(TG*1E6+.5)/1E6
610   PRINT"OPA=";INT(OA*1EA+.5)/1E4
620   PRINT"DESORIENTACIO=";INT(DE*1E4+.5)/1E4
630   PRINT"OPB="INT(OB*1E4+.5)/1E4
640   PRINT"OPC=";INT(OC*1E4+.5)/1E4
650   PRINT"DA=";INT(DA*1E3+.5)/1E3
660   PRINT"DB=";INT(DB*1E3+.5)/1E3
670   PRINT"DC=";INT(DC*1E3+.5)/1E3
680   PRINT"XAP1=";INT(AX*1E3+.5)/1E3
690   PRINT"XAP2="INT(BX*1E3+.5)/1E3
700   PRINT"YAP2=";INT(AY*1E3+.5)/1E3
710   PRINT"XP=";INT(XP*1E3+.5)/1E3
720   PRINT"YP=";INT(YP*1E3+.5)/1E3
730   END

1000  REM CALCULO ORIENTACION O5-4 Y DISTANCIA
1010 IF X5>X4 THEN IF Y5>Y4 THEN O2=200+ATNABS((X5-X4)/(Y5-Y4))
1020 IF X5>X4 THEN IF Y5<Y4 THEN O2=300+ATNABS((Y4-Y5)/(X5-X4))
1030 IF X5<X4 THEN IF Y5>Y4 THEN O2=100+ATNABS((Y4-Y5)/(X5-X4))
1040  IF X5<X4 THEN IF Y5<Y4 THEN O2=ATNABS((X4-X5)/(Y5-Y4))
1050  IF X4=X5 THEN IF Y4>Y5 THEN O2=0
1060  IF X4=X5 THEN IF Y4<Y5 THEN O2=200
1070  IF Y4=Y5 THEN IF X5>X4 THEN O2=300
1080  IF Y5=Y4 THEN IF X5<X4 THEN O2=100
1090  DI=SQR((X4-X5)^2+(Y4-Y5)^2)
1110  RETURN
```

3.2.4 Ejemplos

Ejemplo 1

Para obtener las coordenadas de un punto B2, un topógrafo se ha estacionados en dicho punto; desde el cual ha visado a tres puntos conocidos. Las medidas realizadas son:

E	V	LH z	
		D	**I**
B2	LS	253,0990	53,0970
	ES	309,7770	109,7760
	COL	351,1460	151,1430
	LS	253,0980	53,0980

Las coordenadas de los 3 puntos conocidos son:

Nº	X	Y
LS	402542,626	4619783,271
ES	402696,830	4621458,780
COL	398727,160	4621927,290

El aparato utilizado es de graduación directa y centesimal, y las medidas angulares se han realizado en posición directa y inversa del anteojo, es decir, aplicando la regla de Bessel.
Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto estación B2, así como las orientaciones de este punto a cada vértice o punto conocido.

****

Lo primero que se ha de realizar es calcular la media de Bessel de cada lectura horizontal:

E	V	LHz		
		D	**I**	**Media**
B2	LS	253,0990	53,0970	253,0980
	ES	309,7770	109,7760	309,7765
	COL	351,1460	151,1430	351,1445
	LS	253,0980	53,0980	253,0980

A partir de las lecturas horizontales medias, como este caso no es necesario compensarlas ya se puede calcular la intersección inversa. Los resultados del cálculo son:

Hacemos la simplificación: A= LS B= ES C= COL P= B2

Los ángulos α y β dan :

$$\alpha = 309{,}7765 - 253{,}0980 = 56{,}6785^g$$
$$\beta = 351{,}1445 - 309{,}7765 = 41{,}3680^g$$

A partir de las coordenadas y de los ángulos anteriores se calculan los siguientes valores:

$$Tang \quad \theta_P^{A'} = 0{,}135063$$

$$\theta_P^{A'} = 8{,}5467$$

$$DE = -244{,}5513$$

$$\theta_P^{B'} = 65{,}2251$$

$$\theta_P^{C'} = 106{,}5932$$

$$D_P^A = 1738{,}907$$

$$D_P^B = 91{,}921$$

$$D_P^C = 4070{,}022$$

$$X_A^P = 232{,}749$$

$$Y_A^P = 1723{,}260$$

$$X_P = 402775{,}375$$

$$Y_P = 4621506{,}531$$

Con las coordenadas calculadas del punto P, hemos de comprobar si las orientaciones calculadas son correctas o no. A partir de las coordenadas del punto P y el vértice A, la orientación de la estación al primer eje será:

$$\theta_P^A = 208{,}5467^g$$

Por tanto, vemos que hay una diferencia de 200^g entre $\theta_P^{A'}$ y θ_P^A . Esto implicará que la desorientación real de la vuelta de horizonte sea de:

$$DE = -44{,}5513^g$$

Las orientaciones a cada eje definitivas serán:

$$\theta_P^A = 208{,}5467^g$$
$$\theta_P^B = 265{,}2251^g$$
$$\theta_P^C = 306{,}5932^g$$

Los resultados definitivos de la intersección inversa simple son:

$$X_{B2} = 402775{,}375$$
$$Y_{B2} = 4621506{,}531$$

$$\theta_{B2}^{LS} = 208{,}5467^g \qquad \theta_{B2}^{ES} = 265{,}2251^g \qquad \theta_{B2}^{COL} = 306{,}5932^g$$

Ejemplo 2

Para obtener las coordenadas de un punto P1, origen de una poligonal, y poderla orientar, un topógrafo se ha estacionados en dicho punto; desde el cual ha visado a 4 puntos conocidos, y al punto P2, que es el segundo punto de la poligonal. Las medidas realizadas son:

E	**V**	**LH z**	
		D	**I**
P1	A	0,0000	200,0000
	P2	17,9200	217,9150
	C	99,9520	299,9530
	D	228,1100	28,1100
	F	338,6110	138,6170
	A	0,0000	200,0010

Las coordenadas de los 4 puntos conocidos son:

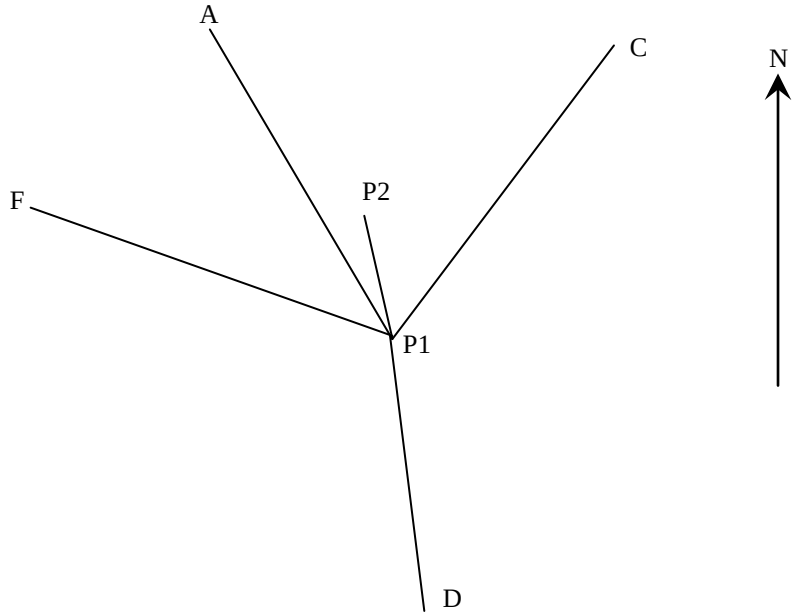
Nº	**X**	**Y**
A	406012,580	461085,041
C	412558,894	4641227,852
D	407839,311	4629367,189
F	398855,260	4639480,798

El aparato utilizado es de graduación directa y centesimal, y las medidas angulares se han realizado en posición directa y inversa del anteojo, es decir, aplicando la regla de Bessel. Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto estación P1, así como las orientaciones de este punto a cada vértice o punto conocido.
b) Calcular la orientación del punto estación P1 al punto P2.

****

CROQUIS



E	V	Lectura Hz media	Lectura Hz media corregida
P1	A	0,0000	0,0000
	P2	17,9175	17,9174
	C	99,9525	99,9523
	D	228,1100	228,1097
	F	338,6140	338,6136
	A	0,0005	0,0000

A partir de las lecturas horizontales medias compensadas se calculan los ángulos que se utilizarán para el cálculo de cada intersección inversa simple.

α= 99,9523 - 0 = 99,9523^g
β= 228,1097 – 99,9523 = 128,1574^g
δ= 338,6136 - 228,1097 = 110,5039^g

Con estos ángulos, y las coordenadas de los puntos, se calcula cada intersección inversa simple. En la tabla siguiente se indican las orientaciones y coordenadas calculadas en cada intersección simple, así como las medias definitivas.

	A-C-D	A-C-F	A-D-F	C-D-F	Medias
θ_{P1}^{A}	368,8393	368,8371	368,8410	368,8380	**368,8390**
θ_{P1}^{C}	68,7916	68,7894	68,7933	68,7903	**68,7913**
θ_{P1}^{D}	196,9490	196,9468	196,9507	196,9477	**196,9487**
θ_{P1}^{F}	307,4529	307,4507	307,4546	307,4516	**307,4526**
X_{P1}	407402,438	407402,628	407402,711	407402,266	**407402,466**
Y_{P1}	4638476,002	4638475,868	4638475,324	4638475,778	**4638475,732**
ÁREA (m^2)	38482792,0	4739570,0	43401188,0	77144409,0	
Ángulo menor	33,9531	5,9642	36,3958	61,8338	
Peso	2	1	2	3	

En función de las superficies de los triángulos que definen los 3 vértices de cada intersección simple y del ángulo menor de cada triángulo se determinan los pesos que vienen indicados en la tabla. Estos pesos son los que se utilizan para realizar la media ponderada de los resultados obtenidos. Puede observarse como la intersección simple que en principio tiene menor precisión en función de la superficie del triángulo y del ángulo menor del mismo, es la intersección A-C-F. Por el mismo criterio la de mayor precisión es la C-D-F. Por ello, a la A-C-F se le da un peso de 1, y la C-D-F de 3. Las otras 2 se les da un peso de 2.

La orientación del punto estación P1 al segundo punto de la poligonal (P2) da el siguiente valor:

$$\theta_{P1}^{P2} = \theta_{P1}^{C} - (LHz_C - LHz_{P2}) = 68{,}7913 - (99{,}9523 - 17{,}9174) = -13{,}2438 = 386{,}7564^g$$

Si los cálculos son correctos, y se calcula la orientación anterior a partir, de las otras orientaciones de la estación a cada vértice, se puede observar que todas las orientaciones que se obtienen para el eje P1-P2, son exactamente iguales. Por ejemplo si se hace a partir de la orientación al vértice A, tenemos:

$$\theta_{P1}^{P2} = \theta_{P1}^{A} + (LHz_{P2} - LHz_A) = 368{,}8390 + (17{,}9174 - 0{,}0000) = 386{,}7564^g$$

3.3 Intersección Inversa con medida de distancias

La intersección inversa con medida de distancias consiste en hacer estación en el punto que se quiere calcular y en visar a como mínimo 2 puntos de coordenadas conocidas, midiendo la lectura horizontal a cada punto, y la distancia horizontal mediante medidor electrónico. Así como en la intersección inversa simple normal para poder resolver el problema se tiene que visar a como mínimo 3 puntos conocidos, aquí, como a demás de la lectura horizontal se mide la distancia horizontal, con solo hacer medidas a 2 puntos conocidos se puede resolver el problema.

3.3.1 Trabajos de campo

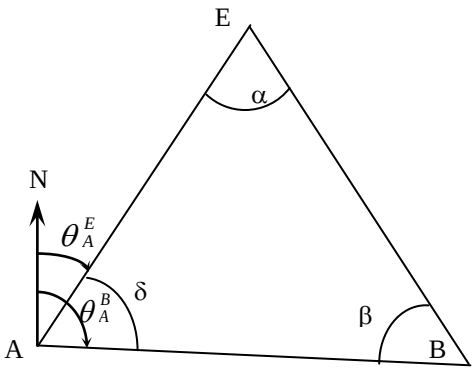


Figura 3.20

Los trabajos de campo consisten en estacionar en el punto que se quiere calcular, el E en la figura 3.20. Desde esta estación se visa a los puntos conocidos A y B, midiendo la lectura horizontal y la distancia horizontal. Las medidas angulares acimutales será aconsejable efectuarlas por lo menos dos veces. Una vez con el anteojo en posición directa y la otra en posición invertida, es decir, aplicando la regla de Bessel. Las distancias de los 2 ejes también será aconsejable medirlas 2 veces.

El ángulo α viene dado por:

$$\alpha = L_E^A - L_E^B$$

Para poder aplicar correctamente este método se tienen que conocer las coordenadas de los 2 puntos que se visan.

3.3.2 Trabajos de gabinete

Los trabajos de gabinete consisten en resolver el triángulo ABE para poder calcular las coordenadas del punto E y las orientaciones de los ejes AE y BE. Para poder hacerlo previamente hay que calcular el ángulo δ y el ángulo β a partir del teorema del seno. Con el conocimiento de los 3 ángulos del triángulo, y habiendo medido las distancias EA y EB se podrán calcular las orientaciones de todos los ejes del triángulo así como las coordenadas del punto E.

$$AB = \sqrt{EA^2 - EB^2 - 2 \cdot EA \cdot EB \cdot Cos\alpha}$$

Con la fórmula anterior se puede tener la comprobación de la distancia entre los 2 puntos conocidos, puesto que esta distancia también puede obtenerse por diferencia de coordenadas.

$$\frac{EA}{Sin\beta} = \frac{AB}{Sin\alpha}$$
$$\beta = ArcSin\left(\frac{EA \cdot Sin\alpha}{AB}\right)$$

$$\frac{EB}{Sin\delta} = \frac{AB}{Sin\alpha}$$
$$\delta = ArcSin\left(\frac{EB \cdot Sin\alpha}{AB}\right)$$

Según la figura 3.20, las orientaciones de los ejes AE y BE vendrán dadas por:

$$\theta_A^E = \theta_A^B - \delta$$
$$\theta_B^E = \theta_B^A + \beta$$

Con todos estos datos ya podremos calcular las coordenadas del punto E, desde A y desde B:

$$X_E = X_A + D_A^E . Sin\ \theta_A^E$$
$$Y_E = Y_A + D_A^E . Cos\ \theta_A^E$$

$$X_E = X_B + D_B^E . Sin\ \theta_B^E$$
$$Y_E = Y_B + D_B^E . Cos\ \theta_B^E$$

Las coordenadas del punto E calculadas a partir de A y a partir de B tienen que dar muy iguales. Darán iguales si la distancia AB calculada por el teorema del coseno coincide con la distancia obtenida por diferencia de coordenadas. Esto normalmente no ocurrirá, puesto que al error que se tiene en hacer medidas de distancias y ángulos hay que añadir el error de las propias coordenadas de los 2 puntos. Si la diferencia entre las 2 distancias e superior a la tolerancia se tendrán que repetir los trabajos de campo, o comprobar la validez de las coordenadas de los 2 puntos.

3.3.3 Ventajas e inconvenientes

La gran ventaja que tiene este método es que haciendo estación en un solo punto, y visando tan solo a dos puntos conocidos, se pueden calcular las coordenadas del punto estación y las orientaciones de este punto a los vértices visados.

Como inconveniente se tiene que es necesario medir la distancia del punto estación a los 2 puntos conocidos. Esto implica que la separación entre la estación y los vértices no pueda se superior a los 1500-2000 m, dependiendo del tipo de medidor electrónico de distancias. Por ello, se utiliza de una forma muy importante en aquellas zonas (canteras, obras,...) donde existen algunos puntos conocidos materializados en el terreno mediante hitos, y las distancias no son muy grandes. Cuando se tiene que hacer estación en un punto nuevo, visando a dos puntos conocidos, se aplica este método calculándose las coordenadas del punto nuevo y las orientaciones de este punto a los 2 vértices visados.

3.3.4 Ejemplos

Ejemplo 1

Un topógrafo para realizar un levantamiento topográfico de una cantera, se ha estacionado en un punto E, desde el que ha visado a dos puntos conocidos. Las medidas realizadas han sido las siguientes:

EST	VISAT	LHZ MITJA	DIST MITJA
E	B	0,0000	221,435
	A	170,6985	158,273

El aparato utilizado es de graduación directa y centesimal. Las coordenadas de los puntos A y B son:

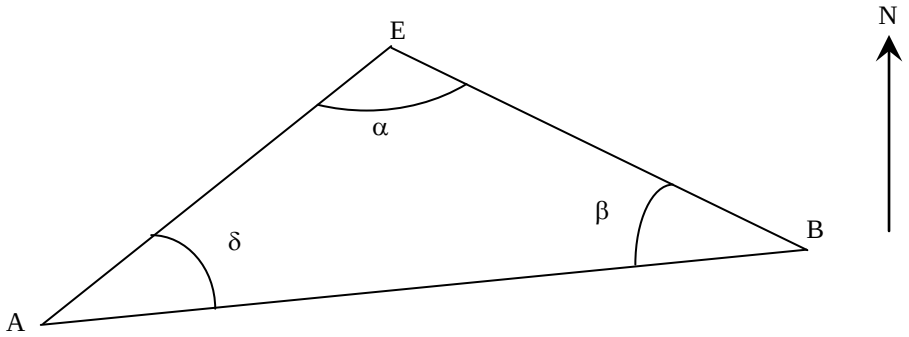
X_A = 1000,000 Y_A= 1000,000
X_B = 1350,000 Y_B= 1120,000

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto E y las orientaciones de los ejes E-A y E-B.

****

CROQUIS



Por diferencia de coordenadas se obtiene la orientación y distancia entre los 2 puntos A y B:

$$\theta_A^B = 78{,}9726^g \quad D_A^B = 370{,}000\ m$$

Aplicando El teorema del coseno se obtiene la distancia AB:

$$AB^2 = 158{,}273^2 + 221{,}435^2 - 2 \cdot 158{,}273 \cdot 221{,}435 \cdot Cos170{,}6985$$
$$AB = 369{,}978\ m$$

La diferencia entre las 2 distancias es de 12,2 cm, lo cual está dentro la tolerancia de este trabajo.

Aplicando el teorema del seno se pueden calcular los ángulos β y δ .

$$\frac{221{,}435}{Sin\delta} = \frac{369{,}978}{Sin170{,}6985} \Rightarrow \delta = 17{,}1305^g \qquad \frac{158{,}275}{Sin\beta} = \frac{369{,}978}{Sin170{,}6985} \Rightarrow \beta = 12{,}1711^g$$

$$\alpha + \beta + \delta = 200{,}0001^g$$

El hecho que los 3 ángulos sumen 200^g tan solo indica que los cálculos han sido correctos.

A partir de los ángulos se pueden obtener las orientaciones:

$$\theta_A^E = 61{,}8421^g \quad \theta_B^E = 291{,}1437^g$$

$$X_E = 1000 + 158{,}273 \cdot Sin61{,}8421 = 1130{,}684$$
$$Y_E = 1000 + 158{,}273 \cdot Cos61{,}8421 = 1089{,}287$$

$$X_E = 1350 + 221{,}435 \cdot Sin291{,}1437 = 1130{,}704$$
$$Y_E = 1120 + 221{,}435 \cdot Cos291{,}1437 = 1089{,}295$$

Como los resultados difieren muy poco, se coge la media de las 2 coordenadas:

$$X_E = 1130{,}694$$
$$Y_E = 1089{,}291$$

3.4 Estudio de errores en el método de Intersección

3.4.1 Intersección directa

La figura 3.21 representa una intersección directa simple, en la que en la situación del punto C se han producido unos errores angulares en las visuales, que han dado lugar a un polígono de error, concretamente un cuadrilátero (S-S'-R'-R). El error angular que se produce en cada visual viene dado por el error angular del aparato , y se considera que tanto puede ser en un sentido como en otro de la verdadera visual.

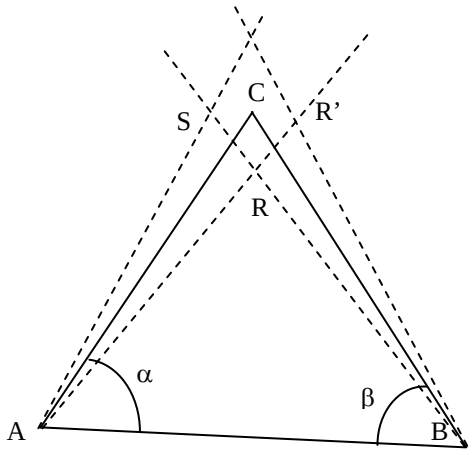


Figura 3.21

Teniendo en cuenta que el error angular del aparato es igual para todas las visuales, de que se trata de un error pequeño, y de que las visuales son grandes, en el polígono de error se puede considerar lo siguiente:

SS'=RR' y S'R'=SR

Además, si se considera que las visuales tienen la misma longitud, el polígono de error queda según la figura 3.22.

Al hacer las consideraciones anteriores, los ejes de error se pueden considerar paralelos a su respectiva visual (AC o BC). De esta forma el cuadrilátero se transforma en un rombo (figura 3.22) , en cuyo interior se puede inscribir una elipse. Según la ley de probabilidades esta elipse, representa la zona del espacio donde es más probable que se encuentre situado el punto C que se pretende calcular. La importancia de esta elipse está en que da una información muy grande del grado de precisión del levantamiento del punto C por el método de la intersección directa. Por lo tanto, conociendo el valor del semieje mayor de esta elipse, se sabrá el máximo error que teóricamente se puede llegar a producir debido a los errores accidentales.

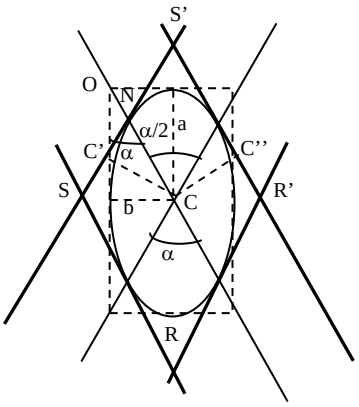


Figura 3.22

A continuación se pasa a obtener una expresión que permita calcular el semieje mayor de la elipse, que en la figura 3.22 viene indicada por la letra *a*. El valor de las semibandas, o separación entre las visuales AC y BC con sus ejes paralelos y tangentes al elipse de error, es el siguiente:

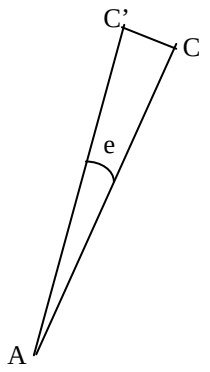


Figura 3.23

El error angular que se produce en la situación del punto C desde el punto A o B viene dado por el error angular del aparato multiplicado por $\sqrt{2}$ puesto que en la medida del ángulo α o β intervienen 2 visuales: una visual dirigida hacia el punto C y la otra hacia una referencia o el otro punto conocido. De esta forma el error angular *e* de la figura 3.23 será:

$$e = e_a \cdot \sqrt{2}$$

A partir de aquí se puede obtener la expresión para el ancho de semibanda del rombo de la figura 3.22.

$$Sin\, e = \frac{C'C}{AC} \Rightarrow C'C = AC \cdot Sin\left(e_a \cdot \sqrt{2}\right)$$

Como se hace la simplificación de considerar que las dos visuales tienen la misma longitud (L), y teniendo en cuenta que el seno de un ángulo muy pequeño es igual aproximadamente a su arco, la expresión anterior queda:

$$C'C = L \cdot e_a \cdot \sqrt{2}$$

De la figura 3.22 se deducen las expresiones siguientes:

$$Sin\alpha = \frac{C'C}{NC} \qquad NC = \frac{L \cdot e_a \cdot \sqrt{2}}{Sin\alpha}$$

$$Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{OC} \qquad OC \approx NC \cdot \sqrt{2}$$

$$Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{NC \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a \cdot Sin\alpha}{L \cdot e_a \cdot 2} \Rightarrow a = \frac{L \cdot e_a \cdot 2 \cdot Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{Sin\alpha}$$

Esta expresión del semieje mayor de la elipse *a* se puede simplificar en la siguiente:

$$a = \frac{L \cdot e_a}{Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Por lo tanto, el error máximo *a* que se puede producir en el levantamiento de un punto por intersección directa, viene dado por:

- Longitud de las visuales.
- El error angular del taquímetro o teodolito que se utilice.
- Ángulo que forman las dos visuales entre ellas. Esto es así porque para el caso de un ángulo de intersección de 100^g y de 25^g, se tiene el siguiente error:

$$\forall\ \alpha = 100^g \Rightarrow a \approx 1{,}4 \cdot L \cdot e_a$$
$$\forall\ \alpha = 25^g \Rightarrow a \approx 5 \cdot L \cdot e_a$$

Una conclusión importante de lo expuesto, es que se tendrá que procurar que el ángulo de intersección entre las dos visuales esté comprendido entre 25^g y 175^g , ya que es cuando se tiene garantía de tener un error menor. Cuanto más próximo esté el ángulo α a 100^g el error tenderá a ser menor.
En un levantamiento topográfico, normalmente el error *a* tendrá que ser inferior a una tolerancia T. Entonces se podrá calcular que longitud máxima pueden tener las visuales para tener la garantía de tener un error inferior a T.

$$a \le T \Rightarrow \frac{L \cdot e_a}{Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \le T \Rightarrow L \le \frac{T \cdot Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{e_a}$$

Donde e_a viene dado por la expresión:

$$e_a = \sqrt{ev^2 + ed^2 + el^2 + ep^2}$$

3.4.2 Intersección inversa

El error que se produce en el levantamiento de un punto por el método de intersección inversa viene dado principalmente por la precisión de las coordenadas planimétricas de los puntos conocidos o vértices, y por la precisión del aparato topográfico que se utilice. Sobre el primer aspecto, poco puede hacerse, tan solo procurar escoger, siempre que se pueda, puntos conocidos o vértices lo más precisos que se pueda. Sobre el según aspecto, tendremos que escoger un aparato con un error angular, que permita tener la precisión requerida para el levantamiento que se haga. El error angular del taquímetro o teodolito viene dado por la fórmula:

$$e_a = \sqrt{ev^2 + ed^2 + el^2 + ep^2}$$

donde:

ev= error de verticalidad
ed= error de dirección
el= error de lectura
ep= error de puntería

Normalmente, en todo trabajo hay una tolerancia o error máximo admitido. Entonces, en función de esta tolerancia se puede saber si el trabajo realizado tiene la precisión requerida, o si, antes de realizarlo el aparato puede dar esa precisión, o que distancia máxima se podrá hacer en el levantamiento, ...

$$e_s = D \cdot e_a \qquad e = \text{error de situación}$$

$$D \cdot e_a \leq T \Rightarrow D \leq \frac{T}{e_a} \qquad T = \text{tolerancia o error máximo admitido}$$

3.4.3 Ejemplos

Ejemplo 1

Calcular el error de situación de un punto P, el cual ha sido levantado desde 4 estaciones efectuadas en puntos conocidos. Las medidas angulares se han efectuado con el anteojo en posición normal y en posición invertida, es decir, se ha aplicado la regla de Bessel. La visual mínima que se ha hecho es de 1039 m y la máxima de 1634 m. El ángulo de intersección más desfavorable es de $27{,}5100^g$. Las características del aparato utilizado son:

Número de aumentos del anteojo = 30
Sensibilidad del nivel = 30”
Apreciación directa = 2^s
Error de estación más error de señal ($e_e + e_s$) ≈ 0,02 m
Distancia mínima para cálculo del error de dirección = 1039 m

****

$$ev = \frac{30''}{12} = 2{,}5''$$

$$ed = \frac{0{,}02}{1039} \cdot 206265'' = 3{,}97''$$

$$ep = \frac{10''}{30}\left(1 + \frac{4 \cdot 30}{100}\right) = 0{,}74'' \qquad ep = \frac{0{,}74''}{\sqrt{2}} = 0{,}52'' \text{ al aplicarse Bessel}$$

$$el = \frac{2}{3} \cdot 2^s = 1{,}33^s = 0{,}43'' \qquad el = \frac{0{,}43''}{\sqrt{2}} = 0{,}306'' \text{ al aplicarse Bessel}$$

$$ea = \sqrt{2{,}5^2 + 3{,}97^2 + 0{,}52^2 + 0{,}306^2} = 4{,}73'' = 2{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ radianes}$$

$$es\ máximo = \frac{1634 \cdot 2{,}29 \cdot 10^{-5}}{Sin\left(\frac{27{,}5100}{2}\right)} = 0{,}175\ m$$

$$es\ mínimo = \frac{1039 \cdot 2{,}29 \cdot 10^{-5}}{Sin\left(\frac{27{,}5100}{2}\right)} = 0{,}111\ m$$

El error que puede producirse en el levantamiento del punto P, por intersección directa, con las características descritas (aparato topográfico, ángulo de intersección,...), está comprendido entre ± 0,175 m y ± 0,111 m.

Ejemplo 2

Calcular el error de situación de un punto P, desde el cual se ha visado a 4 puntos conocidos. Se ha visado a los puntos con el anteojo en posición normal y en posición invertida, es decir, se ha aplicado la regla de Bessel. La visual mínima que se ha hecho es de 2753,400 m, y la máxima de 9111,286 m. Las características del aparato utilizado son:

Número de aumentos del anteojo = 30
Sensibilidad del nivel = 30”
Apreciación directa = 20^s
Error de estación más error de señal ($e_e + e_s$) ≈ 0,05 m
Distancia mínima para cálculo del error de dirección = 2753,405 m

****

$$ev = \frac{30''}{12} = 2{,}5''$$

$$ed = \frac{0{,}05}{2753{,}405} \cdot 206265'' = 3{,}75''$$

$$ep = \frac{10''}{30}\left(1 + \frac{4 \cdot 30}{100}\right) = 0{,}74'' \quad ep = \frac{0{,}74''}{\sqrt{2}} = 0{,}52''$$ al aplicarse Bessel

$$el = \frac{2}{3} \cdot 20^s = 13{,}3^s = 4{,}32'' \quad el = \frac{4{,}32''}{\sqrt{2}} = 3{,}06''$$ al aplicarse Bessel

$$ea = \sqrt{2{,}5^2 + 3{,}75^2 + 0{,}52^2 + 3{,}06^2} = 5{,}5'' = 2{,}66 \cdot 10^{-5}\ radianes$$

$$es\ mínimo = 2753{,}405 \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-5} = 0{,}073\ m$$
$$es\ máximo = 9111{,}286 \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-5} = 0{,}240\ m$$

El error que puede producirse en el levantamiento del punto P, por intersección inversa, con el aparato topográfico descrito, está comprendido entre ± 0,073 m y ± 0,240 m.

En el caso que se hubiera establecido una tolerancia de 0,120 m, con el teodolito de este ejemplo y haciendo las medidas angulares por Bessel; la distancia máxima de separación entre el punto estación a levantar P y el vértice más alejado, para tener la garantía de no superar el error máximo establecido debido al error angular del aparato, hubiera sido de:

$$D \leq \frac{0{,}120}{2{,}66 \cdot 10^{-5}} = 4511{,}278\ m$$

BIBLIOGRAFÍA

DOMÍNGUEZ GARCÍA TEJERO, Francisco; *Topografía general y aplicada*. Mundiprensa, Madrid, 1993

OJEDA RUIZ, José Luís; Métodos *topográficos y oficina técnica*.

VALDÉS DOMÉNECH, Francisco; *Topografía*. Ediciones CEAC ,S.A., Barcelona, 1985

MARTÍN MOREJÓN, Luís; *Topografía y replanteos 1ª parte*. Romargraf, S.A., L'hospitalet de Llobregat, 1987

CHUECA PAZOS, M; *Topografía*. Dossat, S.A., Madrid, 1982