



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Geometria diferencial de corbes i superfícies →

Pere Pascual Gainza



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC



UPCGRAU

Geometria diferencial de corbes i superfícies →

Pere Pascual Gainza

Primera edició: març de 2017

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila
Maquetació: Mercè Aicart

- © Pere Pascual Gainza , 2017
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2017
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B.6779-2017
ISBN: 978-84-9880-644-1

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.



Índex

Introducció	7
1. Corbes al pla i a l'espai	11
1.1. Corbes a l'espai	11
1.2. La curvatura d'una corba plana	13
1.3. El trípode de Frenet d'una corba a l'espai	15
1.4. El teorema fonamental	17
1.5. Exercicis	19
2. Superfícies	29
2.1. Què és una superfície?	29
2.2. Funcions diferenciables	34
2.3. El pla tangent	36
2.4. La primera forma fonamental	38
2.5. Exercicis	41
3. Curvatura	47
3.1. Superfícies orientables	47
3.2. L'aplicació de Gauss: curvatura	49
3.3. La segona forma fonamental	50
3.4. Corbes sobre una superfície	53
3.5. El teorema egregi de Gauss	57
3.6. El teorema fonamental de la teoria local de superfícies	60
3.7. Exercicis	61



4. Algunes superfícies notables	67
4.1. Superfícies de revolució	67
4.2. Superfícies reglades	71
4.3. Superfícies minimalis	76
4.4. Exercicis	80
5. Geodèsiques	85
5.1. Derivada covariant i transport paral·lel	85
5.2. Geodèsiques	91
5.3. L'aplicació exponencial: propietats minimalis de les geodèsiques	95
5.4. El teorema de Hopf-Rinow	104
5.5. Exercicis	107
6. El teorema de Gauss-Bonnet	115
6.1. Algunes qüestions preliminaris	115
6.2. Una expressió per a la curvatura geodèsica	118
6.3. El teorema local de Gauss-Bonnet	119
6.4. El teorema de Gauss-Bonnet	120
6.5. L'índex d'un camp vectorial amb singularitats aïllades	125
6.6. Exercicis	128
7. Curvatura constant	133
7.1. Introducció: geometries no euclidianes	133
7.2. Un recíproc del teorema egregi	136
7.3. Superfícies de revolució de curvatura constant	137
7.4. Superfícies de curvatura constant positiva	142
7.5. Superfícies de curvatura constant nul·la	144
7.6. Superfícies de curvatura constant negativa: el pla hiperbòlic	147
7.7. Exercicis	154
Bibliografia	157



Introducció

Aquestes notes corresponen aproximadament als temes que s'han exposat els darrers cursos a l'assignatura Geometria Diferencial del Grau en Matemàtiques de la UPC. Configuren un curs bàsic de la geometria de les corbes i les superfícies de l'espai, i segueixen de prop alguns dels textos excel·lents que se citen a les referències, adaptant-ne els continguts i la presentació al programa de l'assignatura.

Podem dividir el text en dues parts ben diferenciades. Als quatre primers capítols, s'estudien les propietats locals bàsiques de les corbes i les superfícies; la teoria local de les corbes amb el tríedre de Frenet com a element clau i la teoria de les superfícies, desenvolupada al voltant de la curvatura de Gauss, i culminen amb el *teorema egregium*. Aquesta part, juntament amb les dues primeres seccions del capítol 5, conforma el contingut fonamental del curs.

El capítol 5 està dedicat a les geodèsiques. A les primeres seccions, es defineixen les geodèsiques i se'n donen alguns exemples, particularment de les superfícies de revolució. A partir de la secció 5.3, s'analitzen les propietats minimal de les geodèsiques, per a la qual cosa s'introdueix l'aplicació exponencial i les seves propietats fonamentals. Podríem dir que és a partir d'aquesta secció que s'inicia l'estudi de la geometria intrínseca de les superfícies, encara que no se'n faci cap menció explícita. El tema 6 està dedicat al teorema de Gauss-Bonnet i algunes de les seves conseqüències, entre les quals cal destacar el teorema de l'índex de Poincaré-Hopf, la demostració del qual hem obviat a les classes presencials. L'estudi de les superfícies finalitza al capítol 7, on s'analitzen alguns resultats de les superfícies de curvatura constant. Els objectius del capítol són demostrar el teorema de rigidesa de l'esfera, introduir el pla hiperbòlic i presentar breument les superfícies completes de curvatura constant com a models de les geometries no euclidianes; tanmateix, hi hem afegit, sense analitzar-ne completament la demostració, les caracteritzacions de les superfícies completes de curvatura zero o el teorema de Hilbert sobre les superfícies de curvatura constant negativa.

La idea inicial era incloure-hi un darrer capítol que inclogués una introducció de les varietats diferencials de dimensió superior i la seva geometria. Amb tot, crec que és un



aspecte que està molt ben recollit a la bibliografia i, a partir de la base que li dóna aquest llibre, el lector interessat té l'oportunitat de descobrir les tècniques i els resultats corresponents, alhora que explora algun dels magnífics textos de les referències.

Una part essencial de l'aprenentatge matemàtic la formen els exercicis, on es contrasten i s'afermen els coneixements adquirits al text. És per això que cada capítol conté una llista d'exercicis que s'han d'interpretar com a part important del seu contingut. Algun dels exercicis presentats requereix un treball que va una mica més enllà de l'aplicació directa d'un o un altre resultat, establint resultats nous o donant demostracions alternatives de resultats demostrats en el text principal.

Vull expressar el meu agraïment als professors Eva Miranda, Agustí Roig i Miguel Rodríguez Olmos, amb els quals he compartit l'assignatura, pel seu suport. Més particularment, a l'Eva per la seva col·laboració en el disseny de la col·lecció de problemes i les nombroses converses mantingudes sobre el contingut de l'assignatura. Faig extensiu el meu agraïment a l'estudiant Juan Carlos Flores per l'elaboració dels dibuixos que il·lustren aquest text. Finalment, vull reconèixer el meu deute al professor i amic Francisco Guillén, amb qui he compartit moltes converses i neguits al voltant d'un curs bàsic de Geometria Diferencial com aquest al llarg dels anys, tant a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona com, més recentment, a les facultats de Matemàtiques de la UPC i de la UB.

Barcelona, novembre de 2016



→ 1



Corbes al pla i a l'espai

En aquest capítol, analitzem la teoria local de les corbes diferenciables planes i de l'espai mitjançant el trèdre de Frenet associat a cada punt de la corba, i introduint-hi les nocions de curvatura i de torsió.

1.1. Corbes a l'espai

Definim les corbes a partir de la idea intuïtiva que descriuen la trajectòria, a l'espai ordinar, d'una partícula entre dos instants $a \leq t \leq b$. En aquesta secció, l'espai és \mathbb{R}^n , encara que a les seccions posteriors ens restringirem a $n = 2, 3$.

1.1.1. Definició. Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Una *corba parametritzada* és una aplicació diferenciable (usualment, suposem C^∞)

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Diem que $t \in I$ és el *paràmetre* de la corba. Direm que α és una *corba parametritzada regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot $t \in I$.

1.1.2. Exemples. 1. Una aplicació constant $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ defineix una corba parametritzada, però no és una corba parametritzada regular. És a dir, un punt de l'espai és una corba parametritzada, no regular.

2. Donats un punt $p \in \mathbb{R}^n$ i un vector no nul $v \in \mathbb{R}^n$, les rectes $\alpha(t) = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$, són corbes parametritzades regulars. Observem que la imatge d'una corba parametritzada regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ està continguda en una recta si, i només si, $\alpha'(t)$ i $\alpha''(t)$ són linealment dependents.

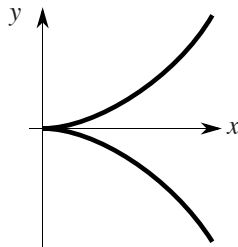
3. La corba parametritzada

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R},$$



és regular en els punts en què $t \neq 0$. Al punt $t = 0$, la corba no és regular; diem que aquest és un *punt singular*.

Fig. 1.1
Cúspide amb un punt singular.

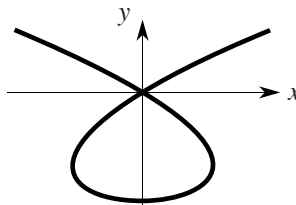


4. La corba parametrizada

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in \mathbb{R},$$

és regular en tots els seus punts. Observem que $\alpha(2) = \alpha(-2)$, és a dir, que la corba passa per l'origen en dos instants diferents. \square

Fig. 1.2
Corba regular amb autointersecció.



Si recorrem la trajectòria descrita per la corba α a una altra velocitat, diem que hem reparametrizat la corba. Més concretament:

1.1.3. Definició. Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ dos intervals. Anomenem *aplicació de canvi de paràmetre* tota aplicació bijectiva $h : J \rightarrow I$, diferenciable i amb inversa diferenciable.

Diem que la corba

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

és una *reparametrizació* de α . Diem que la reparametrizació *conserva l'orientació* si $h'(s) > 0$ per a tot $s \in J$; en cas contrari ($h'(s) < 0$), diem que la reparametrizació *inverteix* l'orientació.

Observem que la traça de β és la mateixa que la traça de α (és a dir, que $\beta(J) = \alpha(I)$) i que es té

$$\alpha \text{ regular} \iff \beta \text{ regular.}$$

1.1.4. Definició. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada i $t_0, t_1 \in I$. Es defineix la longitud de α entre t_0 i t_1 per

$$\ell(\alpha; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt.$$

Observem que, si α és una corba regular amb $|\alpha'(t)| = 1$ a tots els punts, aleshores la longitud de la corba entre dos instants t_0, t_1 ve donada per

$$\ell(\alpha; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(u)| du = t_1 - t_0.$$

És a dir, si la velocitat és 1, el paràmetre (el temps) es correspon amb la longitud recorreguda. En aquest cas, diem que el paràmetre t és el paràmetre arc i el denotem per s .

1.1.5. Teorema. Tota corba parametritzada regular admet una reparametrització pel paràmetre arc.

Demostració. Sigui $t_0 \in I$; definim la funció arc $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ segons

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du.$$

Aquesta funció és derivable i, com que la corba és regular, té derivada positiva i no nul·la

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0.$$

Per tant, és una funció monòtona creixent, $J = s(I) \subset \mathbb{R}$ és un interval i es té un difeomorfisme $s : I \rightleftharpoons J : t$ amb

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

Així, la reparametrització $\beta(s) = \alpha(t(s))$ satisfà $|\beta'(s)| = 1$, és a dir, és una reparametrització per l'arc. ■

1.2. La curvatura d'una corba plana

En aquesta secció, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota una corba parametritzada regular del pla, que suposem que està parametritzada per l'arc $\alpha(s)$.

1.2.1. Definició. Es defineix el *vector (unitari) tangent* de α per $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ i el *vector normal* de α com l'únic vector unitari $\mathbf{n}(s)$ tal que $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ formen una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^2 .



Com que $\mathbf{t}(s)$ és unitari, en resulta $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ i, per tant, $\mathbf{t}'(s)$ és linealment dependent de $\mathbf{n}(s)$.

1.2.2. Definició. Es defineix la *curvatura* $\kappa(s)$ de $\alpha(s)$ com la funció $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ determinada per

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

1.2.3. Exemple. Considerem la circumferència de radi R , $\alpha(s) = (R\cos \frac{s}{R}, R\sin \frac{s}{R})$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right), \\ \mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) &= \left(-\frac{1}{R}\cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin \frac{s}{R}\right) \Rightarrow \mathbf{t}'(s) = \frac{1}{R}\mathbf{n}(s) \Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{R}. \quad \square \end{aligned}$$

Euler definia la curvatura com la taxa de variació de la direcció tangent $\mathbf{t}(s)$ respecte del paràmetre arc. Més concretament, es té:

1.2.4. Proposició. Sigui $\theta(s)$ una determinació diferenciable de l'angle orientat entre el vector e_1 i $\mathbf{t}(s)$. Aleshores,

$$\kappa(s) = \theta'(s).$$

Demostració. Els vectors tangent i normal a la corba són

$$\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \mathbf{n}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

i, per tant,

$$\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\sin \theta(s), \theta'(s)\cos \theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s) \Rightarrow \kappa(s) = \theta'(s). \quad \blacksquare$$

1.2.5. Corol·lari (Teorema fonamental de les corbes planes). Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Aleshores, existeix una corba plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametritzada per l'arc i amb curvatura $\kappa(s) = f(s)$. A més, α és única, llevat de moviments directes.

Demostració. Imposem l'equació diferencial que se segueix de la proposició anterior

$$\theta'(s) = \kappa(s) = f(s) \Rightarrow \theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds,$$

d'on resulta que

$$\alpha'(s) = \mathbf{t}(s) = \left(\cos \left(\theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds \right), \sin \left(\theta(s_0) + \int_{s_0}^s f(s) ds \right) \right),$$

i, tornant a integrar,

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{t}(s) ds.$$

Observem que les constants d'integració determinen una translació de vector $\alpha(s_0)$ i un gir d'angle $\theta(s_0)$, d'on resulta la unicitat llevat de moviments directes del pla. ■

1.3. El trièdre de Frenet d'una corba a l'espai

En aquesta secció, fixem una corba regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametritzada per l'arc. Direm que α és *biregular* si $\alpha''(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$.

1.3.1. Definició. Es defineix la *curvatura* de α com la funció no negativa

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|.$$

Si la corba és biregular, $\kappa(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$, es defineix el *vector normal* per

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}.$$

Observem que, en cas de corbes planes, aquesta darrera definició correspon al valor absolut de la curvatura definida a la secció anterior i que, per tant, per a aquestes corbes hi ha una certa ambigüitat quan parlem de curvatura. El context permetrà saber a quina de les dues definicions ens referim.

1.3.2. Definició. Suposem que α és biregular. Es defineix el *vector binormal* per

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

El trièdre $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ l'anomenem *trièdre de Frenet* de la corba.

1.3.3. Proposició. *Suposem que α és biregular. Aleshores, α és continguda en un pla si, i només si, el vector binormal $\mathbf{b}(s)$ és constant.*

Demostració. La implicació directa és immediata. Per a la recíproca, suposem que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$ és constant; només cal veure que la funció $f(s) = \langle \alpha(s), \mathbf{b}_0 \rangle$ és constant, ja que aleshores la corba estarà continguda en un pla normal a \mathbf{b}_0 . En efecte, calculem la derivada

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

1.3.4. Definició. En les condicions anteriors, es defineix la *torsió* de α com la funció

$$\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle.$$



Així, la darrera proposició ens diu que, per a les corbes biregulars,

$$\alpha \text{ és continguda en un pla} \iff \tau \equiv 0.$$

1.3.5. Fórmules de Frenet. *Sigui α una corba biregular parametrizada per l'arc. Aleshores, el trièdre de Frenet satisfà les equacions*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

1.3.6. Atès que tota corba regular pot reparametritzar-se pel paràmetre arc, és possible definir els conceptes locals desenvolupats en aquesta secció per a corbes parametrizadas biregulars qualssevol, $\alpha(t)$. Deixem com a exercici provar que el trièdre de Frenet en funció del paràmetre t és

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}, \quad i \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t),$$

i la curvatura i la torsió vénen donades per

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

Així, si $c(t) = |\alpha'(t)|$ és la *celeritat* de la corba, les fórmules de Frenet s'escriuen

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(t) &= \kappa(t)c(t)\mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}'(t) &= -\kappa(t)c(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)c(t)\mathbf{b}(t) \\ \mathbf{b}'(t) &= -\tau(t)c(t)\mathbf{n}(t) \end{aligned}$$

1.3.7. Els plans generats pels parells de vectors del trièdre de Frenet reben els noms següents:

pla osculador: generat pels vectors \mathbf{t}, \mathbf{n} ,

pla normal: generat pels vectors \mathbf{n}, \mathbf{b} ,

pla rectificador: generat pels vectors \mathbf{t}, \mathbf{b} .

1.3.8. Forma canònica local. Les fórmules de Frenet permeten aproximar les projeccions d'una corba $\alpha(s)$ als plans osculador, normal i rectificador en un punt. En efecte, suposem que la corba està parametrizada per l'arc, fixem s_0 i considerem la fórmula de Taylor de grau 3 de $\alpha(s)$ en s_0 (que, per comoditat, suposarem que és $s_0 = 0$):

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)}{2}s^2 + \frac{\alpha'''(0)}{6}s^3 + R_4.$$

De les fórmules de Frenet, en deduïm

$$\alpha'(s_0) = \mathbf{t}_0, \quad \alpha''(s_0) = \kappa_0 \mathbf{n}_0, \quad \alpha'''(s_0) = \kappa'_0 \mathbf{n}_0 - \kappa_0^2 \mathbf{t}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0,$$

on el subíndex 0 indica que les funcions corresponents estan avaluades en 0. Substituint aquests valors a la fórmula de Taylor, n'obtenim

$$\alpha(s) - \alpha_0 = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6} s^3 \right) \mathbf{t}_0 + \left(\frac{\kappa_0}{2} s^2 + \frac{\kappa'_0}{6} s^3 \right) \mathbf{n}_0 + \left(\frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 \right) \mathbf{b}_0 + R_4.$$

Així, els termes dominants en cadascuna de les projeccions són:

- sobre el pla osculador, $s\mathbf{t}_0 + (\kappa_0/2)s^2\mathbf{n}_0$, que és una paràbola,
- sobre el pla normal, $(\kappa_0/2)s^2\mathbf{n}_0 + (\kappa_0\tau_0/6)s^3\mathbf{b}_0$, que és una cúspide,
- i sobre el pla rectificador, $s\mathbf{t}_0 + (\kappa_0\tau_0/6)s^3\mathbf{b}_0$, expressió que indica que travessem aquest pla quan $\tau_0 \neq 0$.

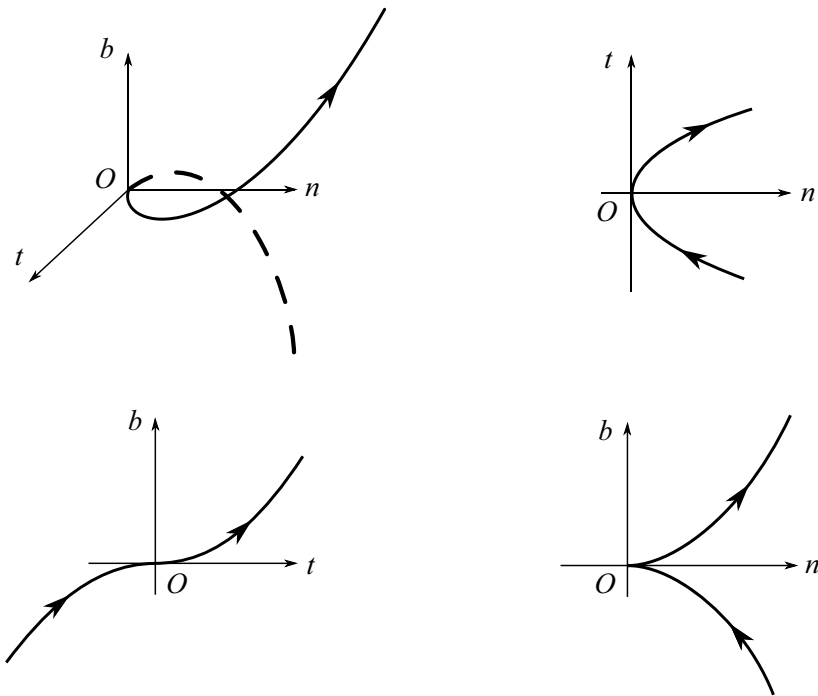


Fig. 1.3 Projeccions locals d'una corba.

1.4. El teorema fonamental

La curvatura i la torsió d'una corba la determinen llevat de moviments, en el sentit que especifica el resultat següent:



1.4.1. Teorema. *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions C^∞ , amb $f(s) > 0$ per a tot $s \in I$. Aleshores, existeix una corba biregular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $s \in I$ és el paràmetre arc i $f(s) = \kappa(s)$ i $g(s) = \tau(s)$ són la curvatura i la torsió de α , respectivament. A més, aquesta corba és única llevat de moviments directes de \mathbb{R}^3 .*

Demostració. Les fórmules de Frenet i el paràmetre arc imposen condicions que ha de satisfer la corba α que estem buscant

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= f(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -f(s)\mathbf{t}(s) + g(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -g(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Observem que obtenim així un sistema de 12 equacions diferencials lineals amb 12 funcions per determinar. Per tant, del teorema d'existència i unicitat se segueix que, fixades les condicions inicials, hi ha una única solució, que és vàlida per a tots els $s \in I$ (ja que es tracta d'un sistema lineal). Prenem $s_0 \in I$ i en fixem les condicions inicials

$$\alpha(s_0) = \mathbf{0}, \mathbf{t}(s_0) = \mathbf{e}_1, \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{e}_2, \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{e}_3,$$

i sigui $\alpha(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ l'única solució del sistema amb aquestes condicions inicials.

Observem que el trèdre $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ és ortonormal per a tot $s \in I$. En efecte, considerem el sistema d'equacions diferencials lineals que satisfan les sis funcions determinades pels productes escalars d'aquests vectors. Per exemple,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle \\ &= \langle f(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), -f(s)\mathbf{t}(s) + g(s)\mathbf{b}(s) \rangle \\ &= -f(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + f(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + g(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle. \end{aligned}$$

El sistema resultant és

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2f & 0 & 2g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2g \\ -f & f & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & f \\ 0 & -g & g & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix}$$

Aquest sistema lineal admet la solució constant $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ i, pel teorema d'existència i unicitat, resulta que és l'única solució, és a dir, $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ formen una base ortonormal. A més, com que en les condicions inicials el determinant és positiu, ho serà per continuïtat per a tot s , és a dir, és una base ortonormal directa.

Pel que fa a la dependència de les condicions inicials de α , sigui β una altra solució del sistema i considerem la matriu ortogonal inversa de la formada pels vectors (columna) del trèdre de Frenet de β en s_0 ,

$$A = (\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0))^{-1},$$

i $p = -A\beta(s_0)$. Aleshores, el moviment directe $F(x) = Ax + p$ transforma β en α , ja que la corba $\tilde{\beta}(s) = F(\beta(s))$ satisfà

$$\tilde{\beta}(s_0) = 0, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})_{\tilde{\beta}}(s_0) = (e_1, e_2, e_3),$$

i, per la unicitat de les solucions amb condicions inicials fixades, resulta que $\tilde{\beta} = \alpha$. ■

El paràmetre arc s i les funcions $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ s'anomenen *equacions intrínseques* de la corba $\alpha(s)$.

1.4.2. Observació. La teoria exposada en aquest capítol es pot estendre a l'estudi de les corbes de l'espai $\mathbb{R}^n, n \geq 4$, fent-ne els ajustos corresponents.

En efecte, la curvatura d'una corba en un punt mesura la desviació de la corba respecte de la recta tangent, i la torsió mesura la desviació de la corba respecte del pla osculador; per a les corbes a \mathbb{R}^n , necessitem una altra curvatura que mesuri la desviació de la corba respecte d'una subvarietat lineal de dimensió 3, i així successivament.

D'aquesta forma, donat un paràmetre s , les corbes de \mathbb{R}^n que el tenen per paràmetre arc vénen determinades per bases ortonormals $e_1(s), \dots, e_n(s)$, $n - 1$ curvatures, $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$ i les fórmules de Frenet corresponents. Per a més detalls, consulteu [S].

1.5. Exercicis

- (a) *Cicloide.* Considerem un punt a la vora d'un disc de radi $r > 0$ que roda (sense lliscament) al llarg d'una recta. Parametritzeu la corba descrita per la trajectòria d'aquest punt i calculeu la longitud del tros corresponent a una volta completa. Calculeu-ne els punts singulars.

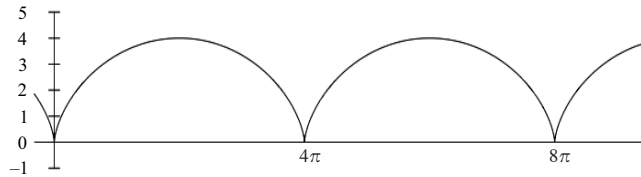


Fig. 1.4
Cicloide.

- (b) *Epicycloide i hipocicloide.* Supposeu ara que el disc roda a l'exterior o a l'interior d'un cercle de radi R (en lloc d'una recta). Parametritzeu la corba descrita pel moviment del punt.

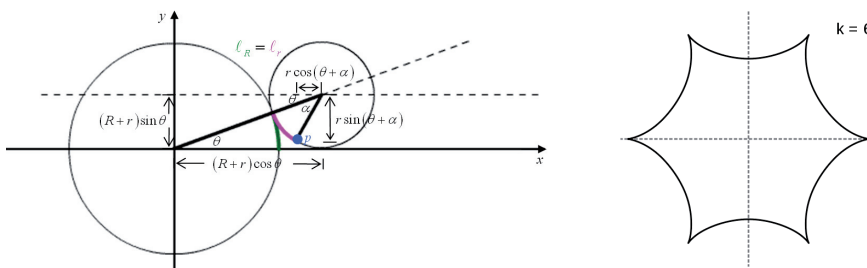


Fig. 1.5
Epicycloide i hipocicloide.

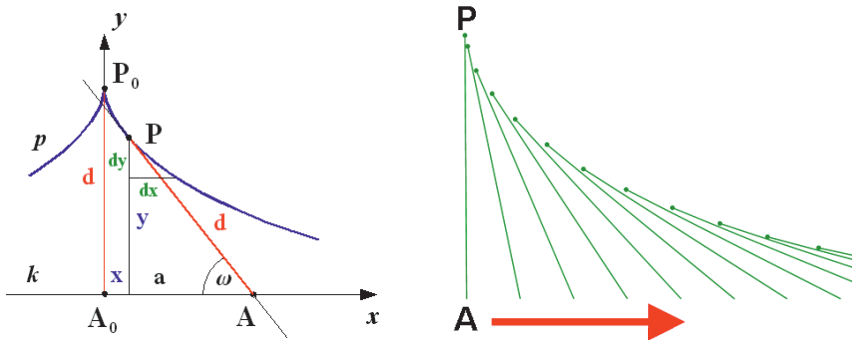


2. *Tractriu*. Sigui $\gamma: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la corba definida per

$$\gamma(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$$

on t és l'angle que l'eix OY determina amb el vector $\gamma'(t)$. Estudieu els punts singulars γ . Demostreu que la longitud del segment de la tangent a la tractriu entre el punt de tangència i l'eix OY és constant igual a 1.

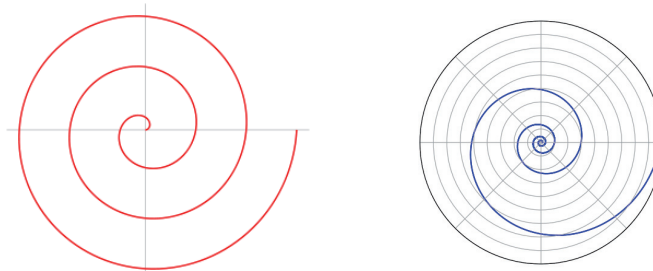
Fig. 1.6
Tractriu, rotada 90 graus
(font: Wikipedia).



3. *L'espiral d'Arquimedes*. Una recta L que passa per l'origen O del pla XY gira entorn de O amb una velocitat angular constant. Simultàniament, un punt P sobre la recta L es desplaça al llarg de la recta amb una velocitat uniforme. La trajectòria que descriu el punt P és una corba que s'anomena *espiral d'Arquimedes*.

- Proveu que la seva equació en coordenades polars és $\rho = a\theta$.
- Escriviu-ne l'equació en coordenades cartesianes.

Fig. 1.7
Espiral d'Arquimedes i
espiral logarítmica
(font: Wikipedia).



4. *L'espiral logarítmica*. Una recta L que passa per l'origen O del pla XY gira entorn de O amb una velocitat angular constant positiva. Simultàniament, un punt P sobre la recta L es desplaça al llarg de la recta, apropant-se a l'origen, amb una velocitat proporcional a la seva distància a l'origen. La trajectòria que descriu el punt P és una corba que s'anomena *espiral logarítmica*. Diem que O és el seu punt asimptòtic.

- Proveu que l'equació d'aquesta corba en coordenades polars és $\rho = ae^{b\theta}$, amb $a > 0$ i $b < 0$. Què obteniu si canvieu els signes de a o de b ?

- b) Proveu que l'espiral logarítmica talla amb un angle constant les semirectes que surten de l'origen.
- c) Proveu que, recíprocament, si una corba talla amb angle constant les semirectes que surten de l'origen, llavors és una espiral logarítmica.
- d) Proveu que la longitud d'una espiral logarítmica entre t_0 i ∞ és finita.

5. Sigui $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferenciable. Suposem que existeix una successió de punts t_n a (a, b) amb $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_\infty \in (a, b)$ i tal que $\alpha(t_n) = x_0$, per a tot n (és a dir, que la corba té infinites autointerseccions a x_0). Proveu que la corba α no és regular i deduïu que una corba regular a x_0 té un nombre finit d'autointerseccions en aquest punt.
6. *Les rectes són les corbes més curtes entre dos punts.* Sigui $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferencial parametritzada i $p = \alpha(a), q = \alpha(b)$.

- a) Proveu que, per a tot vector unitari \mathbf{u} , se satisfà

$$\langle q - p, \mathbf{u} \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), \mathbf{u} \rangle dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

- b) Sigui $\mathbf{u} = \frac{q - p}{|q - p|}$. Proveu que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

és a dir, que la corba de mínima distància entre p i q és la recta que els uneix.

7. Sigui α una corba plana, no necessàriament parametritzada per l'arc. Proveu que la curvatura ve donada per la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t))}{|\dot{\alpha}(t)|^3}.$$

8. Sigui α una corba plana parametritzada per l'arc, continguda en un disc de radi R . Suposem que la corba toca la vora del disc per t_0 (i.e. $|\alpha(t_0)| = R$). Proveu que

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}.$$

(Indicació: Al punt t_0 , el mòdul $|\alpha(t)|$ atansa un màxim.)

9. Sigui $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ una corba plana donada en coordenades polars.

- a) Proveu que la longitud d'arc de la corba ve donada per la integral

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta.$$



b) Proveu que la curvatura és

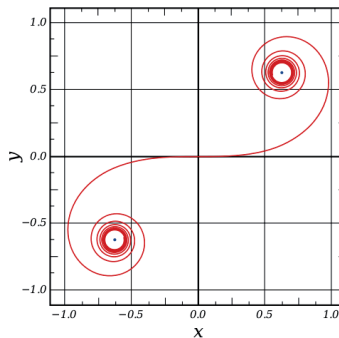
$$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}.$$

10. La *clotoide* és la corba donada per la parametrització regular

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{\pi} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \sqrt{\pi} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \right).$$

Proveu que el mòdul de la curvatura a cada punt coincideix amb la longitud del segment de la corba des del punt considerat fins a l'origen. (Nota: La clotoide s'utilitza com a corba de transició en els traçats de carreteres i línies ferroviàries.)

Fig. 1.8
Clotoide.



11. Sigui α la corba donada per $\alpha(u) = (e^u \cos u, e^u \sin u, e^u)$, $u \in \mathbb{R}$. Trobeu la longitud del segment entre els plans $z = \lambda_1$ i $z = \lambda_2$ amb $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Proveu que la curvatura i la torsió són inversament proporcionals a e^u .

12. Trobeu la curvatura i la torsió de la corba $\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3)$.

13. Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $\kappa(s) = s$ i torsió $\tau(s) = 0$, que passi per l'origen quan $s = 0$ i, en aquest punt, tingui trièdre de Frenet

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{b} = (0, 0, -1).$$

14. *Corbes esfèriques*. Sigui α una corba tal que $\tau(s) \neq 0$ i $\kappa'(s) \neq 0$. Demostreu que una condició necessària i suficient perquè la corba estigui sobre una esfera és que

$$R^2 + (TR')^2 = a^2,$$

on a és constant i on $R = 1/\kappa$ i $T = 1/\tau$.

15. *Vector de Darboux*. Sigui $\alpha(s)$ una corba biregular parametritzada per l'arc. S'anomena *vector de Darboux* de α el vector $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$. Proveu que el vector de Darboux satisfà

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}, \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{d} \wedge \mathbf{n}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{d} \wedge \mathbf{b}.\end{aligned}$$

16. *Hèlices circulars.* Considerem l'hèlice circular

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}s \right),$$

amb $a^2 + b^2 = c^2$.

- Proveu que α està parametritzada per l'arc.
- Calculeu la curvatura, la torsió, el vector normal i el vector binormal.
- Calculeu l'equació del pla osculador.
- Proveu que la recta pel punt $\alpha(s)$ en la direcció del vector normal talla a l'eix OZ perpendicularment.
- Proveu que el vector tangent forma un angle constant amb el vector unitari en la direcció de l'eix OZ.

17. *Hèlices generalitzades.* S'anomena *hèlice generalitzada* a una corba tal que, en qual-sevol punt, la seva tangent forma un angle constant a una direcció fixa de l'espai que s'anomena *eix de l'hèlice*.

Proveu que, per a una corba biregular α , són equivalents:

- α és una hèlice generalitzada.
- La raó entre torsió i curvatura és constant.
- El vector de Darboux $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t}_\alpha + \kappa \mathbf{b}_\alpha$ és paral·lel a una direcció fixada.

(Nota: L'equivalència entre (a) i (b) es coneix com a *teorema de Lancret*, 1802.)

18. Proveu que la corba:

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int_{s_0}^s \sin(\theta(t)) dt, \frac{a}{c} \int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) dt, \frac{b}{c}s \right)$$

amb $s_0 \in [0, 1]$, $c^2 = a^2 + b^2$ i $a, b \neq 0$ i $\theta'(s) > 0$ és una hèlice generalitzada.

19. a) Sigui α una hèlice generalitzada (parametritzada per l'arc) i \mathbf{u} un vector director (unitari) de l'eix de α , ($\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle = \cos \theta$). Proveu que la corba plana que s'obté projectant α sobre el pla ortogonal a l'eix que passa per $\alpha(0)$ ve donada per

$$\beta(s) = \alpha(s) - (s \cos \theta) \mathbf{u}$$

i que les curvatures estan relacionades per

$$\kappa_\beta = \kappa_\alpha \operatorname{cosec}^2 \theta.$$



b) Demostreu que les hèlices traçades sobre un con de revolució i amb el mateix eix del con es projecten sobre un pla perpendicular a l'eix en espirals logarítmiques. Deduïu que les equacions intrínseques d'aquestes hèlices còniques es poden escriure com $R = as$, $T = bs$, amb a i b constants (R i T denoten els radis de curvatura i torsió, vegeu el problema 14).

20. a) Trobeu la curvatura de l'epicicloide: si a, b són els radis de les circumferències generadores (vegeu el problema 1), proveu que

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{R^2}{B^2} = 1,$$

$$\text{on } A = \frac{4b(a+b)}{a} > B = \frac{4b(a+b)}{a+2b} > 0 \text{ i } R = 1/\kappa.$$

b) Proveu que una hèlice esfèrica es projecta sobre un pla normal a l'eix en un arc d'epicicloide.

21. Demostreu que les corbes següents són hèlices generalitzades i determineu-ne l'eix.

- a) $\alpha(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at)$;
 b) $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$;
 c) $\alpha(t) = (2t, \log t, t^2)$.

22. Donada $\alpha(s)$ una corba biregular parametritzada per l'arc i tal que $\tau(s) \neq 0$, defineix:

$$\beta(s) = \int_0^s \tau(t)n(t)dt.$$

- a) Proveu que β és una corba esfèrica.
 b) Quina és la torsió de les corbes α tals que s també és el paràmetre arc per β ?
 c) Proveu que β és plana si, i només si, α és una hèlice generalitzada.
 d) Identifiqueu β si $\alpha(t) = (2e^t \cos(t), 2e^t \sin(t), e^t)$.

23. *Indicatriu tangencial.* Sigui $\alpha(s)$ una corba biregular parametritzada per l'arc. Es defineix la indicatriu esfèrica tangencial de α com la corba $\beta(s) = \mathbf{t}(s)$. Proveu que la curvatura i la torsió de la indicatriu esfèrica satisfan

$$\kappa_\beta^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}, \quad \tau_\beta^2 = \frac{\tau\kappa' - \kappa\tau'}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

Deduïu que la indicatriu tangencial de α és una corba plana si, i només si, α és una hèlice.

24. Proveu que, si totes les normals d'una corba regular passen per un punt fix, aleshores la corba està continguda en una circumferència.

- 25.** Proveu que, si tots els plans osculadors d'una corba biregular passen per un punt fix, la corba és plana. Concloeu-ne que la trajectòria d'una partícula que es mou per l'acció d'un camp de forces central és plana. Utilitzeu aquest resultat per provar que les òrbites dels planetes són planes.
- 26.** *Corbes de torsió constant.* a) Sigui α una corba biregular amb torsió constant $\tau = c$. Proveu que $\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}''$ són linealment independents i

$$\alpha(t) = \frac{1}{c} \int_{t_0}^t \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{b}'(s) ds.$$

b) Recíprocament, sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació C^∞ amb $|\gamma(t)| = 1$, tal que $\gamma, \gamma', \gamma''$ són linealment independents. Sigui $0 \neq a \in \mathbb{R}$; proveu que

$$\alpha(t) = a \int_{t_0}^t \gamma(s) \wedge \gamma'(s) ds$$

és regular i té torsió constant $\tau = 1/a$.

- 27.** *Corbes de Bertrand.* Sigui $\alpha(t)$ una corba biregular (no necessàriament parametritzada per l'arc) amb curvatura i torsió no nul·les a tots els punts. Es diu que α és una *corba de Bertrand* si existeix una altra corba regular $\beta(t)$ tal que les rectes normals en punts corresponents són iguals, és a dir, $\mathbf{n}_\alpha(t) = \pm \mathbf{n}_\beta(t)$. $\beta(t)$ l'anomenem una *corba de Bertrand associada* a α .

- a) Proveu que la distància entre punts corresponents de dues corbes de Bertrand associades α i β és constant, és a dir, $|\alpha(t) - \beta(t)| = cnt$. (Proveu, primer, que hi ha una funció diferenciable $r(t)$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + r(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$ i proveu que aquesta funció és constant.)
- b) Proveu que l'angle entre els vectors tangents de dues corbes de Bertrand associades α i β en punts corresponents és constant.
- c) Proveu que α és una corba de Bertrand si, i només si, existeixen constants $A, B \neq 0$, tals que $A\kappa + B\tau = 1$.
- d) Proveu que α és una hèlice si, i només si, té dues corbes de Bertrand associades. Proveu que, en aquest cas, en té infinites.
- e) Siguin α, β corbes de Bertrand associades. Proveu que $\tau_\alpha \tau_\beta = cnt > 0$.
- f) *Corbes planes.* Esteneu la noció de corba de Bertrand a corbes planes, $\tau = 0$. Proveu que dues circumferències del pla amb el mateix centre són corbes de Bertrand associades. Proveu que tota corba plana, parametritzada per l'arc, és de Bertrand.

(Per saber-ne més, cf. A. González, J. Núñez, "Algunas aplicaciones de las curvas de Bertrand", *Matemáticas*, vol. XVI (1), (2007), pp. 11-22.)

- 28.** *Corbes de Salkowski, corbes de curvatura constant.* Per a $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$ definim les corbes de Salkowski per



$$\gamma_m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)t) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)t) - \frac{1}{2} \sin t, \right. \\ \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)t) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)t) + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{4m} \cos(2nt) \right),$$

on $n = m/\sqrt{1+m^2}$.

a) Trobeu el tríedre de Frenet de γ_m i proveu, en particular, que

$$\kappa \equiv 1, \quad \tau = \operatorname{tg}(nt).$$

b) Sigui α una corba regular parametritzada per l'arc i tal que $\kappa \equiv 1$. Proveu que hi ha una direcció fixa \mathbf{u} tal que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = \cos \theta = cnt$ si, i només si, $\tau = \pm s/\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta - s^2}$.

c) Sigui α una corba regular amb $\kappa \equiv 1$ que satisfà les condicions de l'apartat anterior. Proveu que α és una corba de Salkowski.

29. *Corbes de Salkowski i torsió constant.*

a) Sigui α una corba biregular parametritzada per l'arc i

$$\beta(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{b}_\alpha(u) du.$$

Proveu que, els paràmetres $s \in I$ tals que $\tau_\alpha(s) \neq 0$, es té

$$\kappa_\beta = |\tau_\alpha|, \quad \tau_\beta = \kappa_\alpha, \\ \mathbf{t}_\beta = \mathbf{b}_\alpha, \quad \mathbf{n}_\beta = \mathbf{n}_\alpha, \quad \mathbf{b}_\beta = -\mathbf{t}_\alpha.$$

b) Deduïu que les corbes β_m associades a les corbes de Salkowski γ_m són corbes de torsió constant igual a 1.

c) Deduïu que les corbes β_m són les corbes amb $\tau \equiv 1$ tals que les seves normals fan un angle constant amb una direcció fixada.

(Per saber-ne més, cf. J. Monterde, "Salkowski curves revisited". *Computed Aided Geometric Design* 26(3), (2009), pp. 271-278.)

30. *Índex de gir d'una corba tancada plana.* Sigui $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular tancada. Considerem la corba $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ donada per $\beta(t) = \mathbf{t}(t)$ i definim l'índex de gir de α per

$$n_\alpha = \operatorname{deg} \beta.$$

a) Proveu que, si reparametritzem la corba segons $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(-t)$, aleshores $n_{\tilde{\alpha}} = -n_\alpha$.

- b) Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ diferenciable amb $\gamma(a) = (\cos t_0, \sin t_0)$. Proveu que la funció diferenciable

$$\tilde{\gamma}(t) = t_0 + \int_a^t (\gamma_1 \gamma_2' - \gamma_1' \gamma_2) du = t_0 + \int_a^t \det(\gamma, \gamma') du,$$

defineix un aixecament $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ i deduïu que

$$\deg \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \det(\gamma, \gamma') du.$$

- c) Proveu que, si α està parametritzada per l'arc, aleshores

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \kappa ds.$$

- 31.** Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Recordeu que aquesta funció és C^∞ a tota la recta i que $f^{(n)}(0) = 0$ per a tot $n \geq 0$. Considerem la corba $\alpha(t)$ definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, f(t), 0), & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (t, 0, f(t)), & t > 0. \end{cases}$$

- Proveu que $\alpha(t)$ defineix una corba regular.
- Proveu que $\kappa(0) = 0$.
- Proveu que $\tau(s) = 0$ en els punts on està definida la torsió i observeu que la corba no és plana. És això una contradicció?

→ 2



Superfícies

En aquest capítol, s'introdueix la nocions de superfície, de pla tangent i de vector normal en un punt. Tot i que estem interessats majoritàriament en superfícies de l'espai \mathbb{R}^3 , les nocions esmentades no depenen de la dimensió de l'espai ambient, per la qual cosa ens situem a l'espai euclidià \mathbb{R}^n . Veurem com calcular la longitud d'una corba d'una superfície des de la superfície (a partir d'una parametrització) o com calcular l'angle en què dues corbes es tallen.

2.1. Què és una superfície?

De forma similar al cas de les corbes, partim de la idea que una superfície correspon a la deformació a l'espai d'una regió del pla.

2.1.1. Definició. Una *superfície parametritzada* de \mathbb{R}^n és una aplicació C^∞

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

on $U \subset \mathbb{R}^2$ és un obert del pla. Diem que φ és una superfície parametritzada *regular* si

$$\text{rang } d\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall (u,v) \in U.$$

2.1.2. Exemples. (1) La definició de superfície parametritzada inclou els casos en què $\varphi = \text{cni}$ o en què φ no depèn d'una de les variables. Aquestes superfícies no són regulars; de fet, són superfícies parametritzades *degenerades*, en el sentit que corresponen a un punt o a una corba.

(2) La superfície parametritzada

$$\varphi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), v \geq 0,$$

que correspon a la part $z \geq 0$ del con $x^2 + y^2 = z^2$, és regular a tots els punts llevat del que correspon a $v = 0$.



D'altra banda, la superfície

$$\psi(u, v) = (u^2, u^3, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

parametriza el cilindre sobre la cúspide plana $x^3 = y^2$; és regular a tots els punts, llevat dels que genera la singularitat de la cúspide, és a dir, llevat dels punts $(0, v)$.

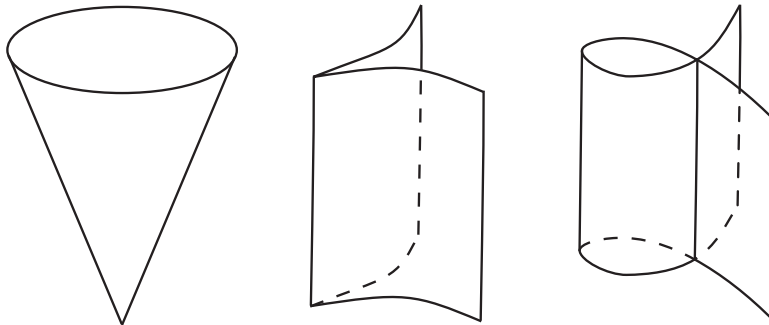
Aquests dos exemples són paradigmàtics, cosa que podríem enunciar, en un sentit imprecís, d'aquesta forma: una superfície parametritzada amb punxes o arestes deixa de ser regular en aquests punts.

(3) La superfície parametritzada

$$\varphi(u, v) = (u^3 - 4u, u^2 - 4, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

és regular en tots els punts. Observem que aquesta superfície és el cilindre sobre la corba plana $\alpha(u) = (u^3 - 4u, u^2 - 4)$ i que, per tant, té una autointersecció al llarg de la recta generada per l'origen, és a dir, en els punts $u = 0$. Tot seguit, donem una definició més restrictiva de superfície regular que elimina les autointerseccions, tot i que al llarg del curs serà interessant comptar, en algunes situacions, amb la possibilitat de tenir autointerseccions.

Fig. 2.1
Exemples de superfícies parametritzades.



(4) Els exemples anteriors corresponen a superfícies parametritzades de \mathbb{R}^3 . En aquest capítol, la dimensió de l'espai ambient \mathbb{R}^n no juga cap paper, per la qual cosa la deixem indeterminada, encara que posteriorment ens centrarem en el cas $n = 3$.

Disposar de $n \geq 4$ ens permet incloure alguns exemples que no s'encabeixen a \mathbb{R}^3 , com per exemple l'ampolla de Klein, el pla projectiu, o el producte de dues corbes. Així, si $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ són dues corbes planes regulars, el producte defineix una superfície parametritzada regular

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4, \\ (u, v) &\mapsto (\alpha(u), \beta(v)). \end{aligned}$$

En particular, obtenim així el tor de \mathbb{R}^4 com a producte de dues circumferències. \square

2.1.3. Definició. Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ amb la topologia induïda. Diem que S és una *superfície regular* si, per a tot $p \in S$ existeixen oberts $U \subset \mathbb{R}^2$ i $V \subset S$ i una aplicació diferenciable (C^∞)

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset S,$$

tal que

- a) φ és un homeomorfisme, és a dir, φ és bijectiva i la inversa φ^{-1} és contínua.
- b) φ defineix una superfície parametritzada regular, és a dir,

$$\text{rang } d\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall (u,v) \in U.$$

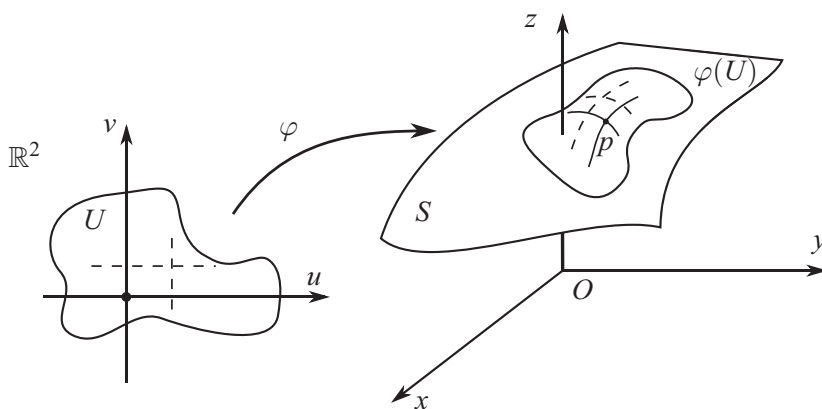


Fig. 2.2
Parametrizació d'una superfície.

2.1.4. Exemples. (1) La gràfica d'una funció de dues variables és una superfície regular: sigui $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable definida en un obert $U \subset \mathbb{R}^2$ i

$$S = \{(x,y,z) \mid z = h(x,y), (x,y) \in U\},$$

aleshores, $\varphi(x,y) = (x,y,h(x,y))$ és una parametrització que val per a tots els punts, amb inversa $\varphi^{-1}(x,y,z) = (x,y)$, que és la restricció a S de la projecció de \mathbb{R}^3 al pla xy i que, per tant, és contínua.

(2) Considerem l'esfera de radi $R > 0$, $S \subset \mathbb{R}^3$, definida per $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Aleshores, S és una superfície regular: en efecte, prenem el punt $p = (0,0,1) \in S$; podem aïllar z de l'equació que defineix S , prenent l'arrel positiva per tal de mantenir-nos al voltant de p ,

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

amb la qual cosa veiem que a l'obert $V = S \cap \{z > 0\}$, S és la gràfica de la funció $h(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i, per tant, satisfà les condicions de la definició anterior. Considerant l'arrel negativa, cobrim la part de S corresponent a $z < 0$. Finalment, aïllant les altres variables de l'equació que defineix S , veiem que tot punt de S té un entorn parametritzat regular.



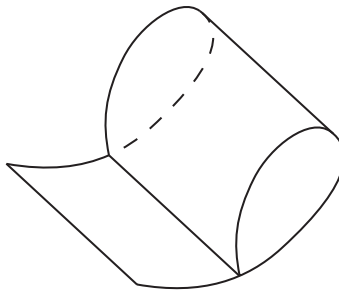
(3) El con de \mathbb{R}^3 , S , definit per $x^2 + y^2 = z^2$, no és una superfície regular en $p = (0,0,0)$, ja que tot entorn de p a S es desconnecta en treure-li el punt p , contràriament al que succeeix en els entorns d'un punt de \mathbb{R}^2 .

(4) La superfície parametritzada regular $\varphi : (-1, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida per

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{3u}{1+u^3}, \frac{3u^2}{1+u^3}, v \right),$$

no és una superfície regular en el sentit de la darrera definició, ja que $V = \varphi((-1, 1) \times (-1, 1))$ no és un obert de la superfície. En efecte, observeu que tot entorn de $\varphi(0,0) = (0,0,0)$ conté punts $\varphi(u, v)$ per a u prou gran, que no són de V . \square

Fig. 2.3
Superfície parametritzada regular que no és una superfície regular.



Mentre no diguem el contrari, el terme *superfície regular* farà referència a la noció establerta a la darrera definició. Els dos primers exemples del punt anterior són paradigmàtics en el sentit que, genèricament, les equacions defineixen superfícies i que les superfícies són, localment, gràfiques. Precisem aquesta observació en els dos resultats següents, que són conseqüència dels dos teoremes fonamentals del càlcul diferencial: el teorema de la funció implícita i el teorema de la funció inversa.

2.1.5. Teorema del valor regular. *Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ un obert, $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable (C^∞) i*

$$S = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Si rang $df_p = 1$, per a tot $p \in S$, aleshores S és una superfície regular.

Demostració. En efecte, sigui $p \in S$. Per hipòtesi, una de les tres derivades

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

és diferent de zero. Suposem que ho és la tercera, $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$.

Pel teorema de la funció implícita, hi ha una funció diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, on $U \subset \mathbb{R}^2$ és un obert, i un obert $W' \subset W$ que conté p , tal que

$$S \cap W' = \{(x, y, z) \mid z = h(x, y)\}.$$

És a dir, en un entorn de $p \in S$, el conjunt S és la gràfica d'una funció diferenciable. Com que p és un punt arbitrari, deduïm que S és una superfície regular. ■

2.1.6. Hem enunciat el resultat anterior a \mathbb{R}^3 . És clar que s'estén sense dificultat a \mathbb{R}^n : sigui $W \subset \mathbb{R}^n$ un obert, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ una funció vectorial C^∞ i $S = \{x \in W \mid f(x) = 0\}$. Si rang $df_p = n - 2$, per a tot $p \in S$, aleshores S és una superfície regular.

2.1.7. Proposició. *Localment, tota superfície regular és la gràfica d'una funció diferenciable.*

Demostració. Fem la prova per a superfícies de \mathbb{R}^3 , tot i que el raonament és vàlid, amb les modificacions evidents, per a superfícies en un espai euclidià de dimensió arbitrària.

Abans d'entrar en la demostració, precisem una mica millor l'enunciat: si $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície regular i $p \in S$, aleshores existeix un entorn obert $W \subset S$ de p que admet una parametrització com a gràfica d'una funció C^∞ .

Segui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular i $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular al voltant del punt $p \in S$, amb $\varphi(q) = p$. Com que el rang de $d\varphi_q$ és dos, un dels tres menors

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q), \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(q), \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q),$$

és diferent de zero. Suposem que ho és el primer. Aleshores, l'aplicació diferenciable

$$\psi : U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2$$

té jacobiana no nul a $q \in U$. Si $q' = \psi(q)$, pel teorema de la funció inversa existiran entorns oberts U' i V' de q i q' , respectivament, i una funció diferenciable $\psi^{-1} : V' \rightarrow U'$, que és inversa de ψ .

El conjunt $W = \varphi(U')$ és un entorn obert de p , ja que φ^{-1} és contínua.

Finalment, l'aplicació $\varphi\psi^{-1} : V' \rightarrow W \subset S$ defineix una parametrització en un entorn de p que és la gràfica de la funció $f(x,y) = \pi_3(\varphi(\psi^{-1}(x,y)))$. ■

En les parametritzacions locals φ que intervenen en la definició de superfície regular es demana que l'aplicació inversa φ^{-1} sigui contínua, cosa que pot resultar feixuga de comprovar. El resultat següent indica que, si sabem a priori que S és una superfície, la continuïtat de φ^{-1} està garantida per les altres propietats de φ .

2.1.8. Proposició. *Segui $S \subset \mathbb{R}^n$ una superfície regular, $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert i $\varphi : U \rightarrow S$ una aplicació diferenciable que satisfà*

- a) φ és injectiva,
- b) rang $d\varphi_{(u,v)} = 2$, per a tot $(u,v) \in U$.

Aleshores, $\varphi(U) \subset S$ és un obert de S i $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ és contínua.



Demostració. Un cop més, per comoditat, prenem $n = 3$. Sigui $p \in \varphi(U)$ i $q \in U$, amb $\varphi(q) = p$. Volem veure que p és interior a $\varphi(U)$ i que φ^{-1} és contínua en p . Per la proposició anterior, existeixen oberts $p \in W \subset S$, $V \subset \mathbb{R}^2$ i una funció diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tals que W és la gràfica de f , és a dir, $\psi : V \rightarrow W$, definida per $\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, és una parametrització regular.

Sigui $U' \subset U$ l'obert $U' = \varphi^{-1}(W)$ i definim $h : U' \rightarrow V$ com la composició $h = \pi\varphi$, on π és la projecció ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el pla xy . Per la regla de la cadena, es té

$$dh_q = d\pi_p d\varphi_q$$

i, per tant, $\det dh_q \neq 0$. Pel teorema de la funció inversa, existiran oberts $q \in U'' \subset U'$, $h(q) \in V'' \subset V$, tals que h induïx un difeomorfisme $h : U'' \rightarrow V''$. Sigui $h^{-1} : V'' \rightarrow U''$ l'aplicació inversa, que és diferenciable.

Finalment observem que $\varphi(U'') = \pi^{-1}(h(U'')) \cap S$, per la qual cosa és un entorn obert de p , en el qual es té

$$\varphi|_{\varphi(U'')} = h^{-1}\pi,$$

que, com a composició d'aplicacions contínues, és contínua. ■

2.2. Funcions diferenciables

Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una superfície regular, $p \in S$ i $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció.

2.2.1. Definició. Diem que f és una *funció diferenciable en p* si existeix una parametrització local $\varphi : U \rightarrow S$, $\varphi(q) = p$, tal que $f\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable (C^∞) en q .

Per tal que aquesta definició sigui efectiva, la diferenciabilitat de f en p no ha de dependre de la parametrització local φ . Això serà conseqüència del resultat següent, que anomenarem el *teorema de canvi de paràmetres*.

2.2.2. Teorema. Siguin $\varphi : U \rightarrow S$ i $\psi : V \rightarrow S$ dues parametritzacions locals d'una superfície S a l'entorn d'un punt $p \in S$, $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$. Aleshores, l'aplicació

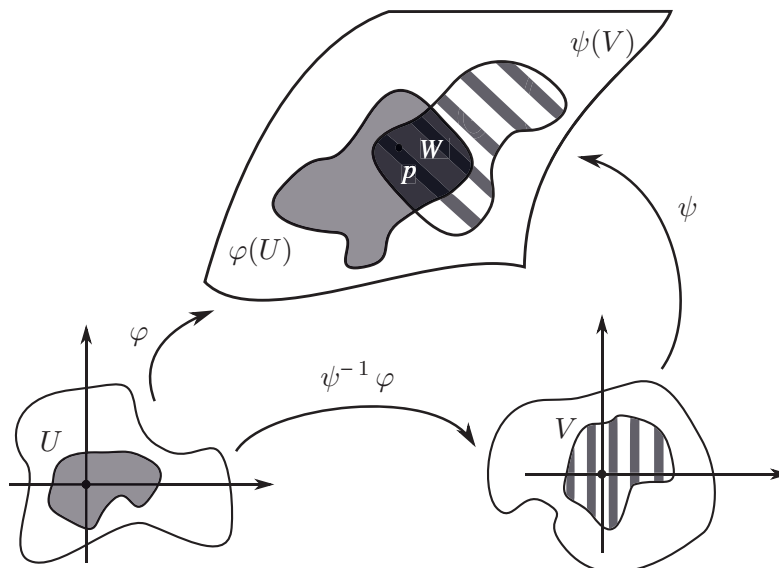
$$\psi^{-1}\varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$$

és diferenciable, amb inversa diferenciable $(\psi^{-1}\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi$. A $\psi^{-1}\varphi$ l'anomenarem l'aplicació de canvi de paràmetres.

Demostració. Per comoditat, suposem que la superfície és a \mathbb{R}^3 .

Notem $h = \psi^{-1}\varphi$ i $q \in U$, $r \in V$, amb $\varphi(q) = p$, $\psi(r) = p$, amb la qual cosa $h(q) = r$. Com que ψ és una parametrització local, la diferencial és de rang 2 en r ; suposem que

Fig. 2.4
Canvi de paràmetres.



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(r) \neq 0.$$

Definim $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ per $g(u,v,t) = \psi(u,v) + (0,0,t)$; aleshores

$$\text{Jac } g(r,0) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(r) \neq 0,$$

i, pel teorema de la funció inversa, existeix un entorn W' de $p = g(r,0)$ i una funció diferenciable $g^{-1} : W' \rightarrow V \times \mathbb{R}$, inversa de g .

Per la continuïtat de φ^{-1} , existeix un entorn obert U' de q amb $\varphi(U') \subset W'$ i observem que, en aquest entorn, h és una composició d'aplicacions diferenciables

$$h|_{U'} = \psi^{-1} \varphi|_{U'} = g^{-1} \varphi|_{U'},$$

i, per tant, és diferenciable. ■

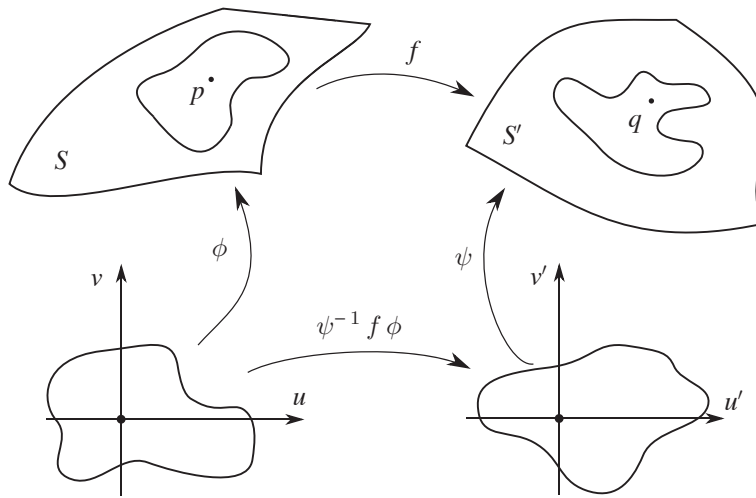
Deduïm ara la independència de la definició de funció diferenciable de l'entorn coordinat utilitzat:

2.2.3. Corollari. *Siguin $\varphi : U \rightarrow S$ i $\psi : V \rightarrow S$ dues parametritzacions locals d'una superfície regular S a l'entorn d'un punt $p = \varphi(q) = \psi(q') \in S$, i $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, $f\varphi$ és diferenciable en q si, i només si, $f\psi$ és diferenciable en q' .* ■

Ara és clar com definir la diferenciabilitat d'aplicacions vectorials $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ mitjançant la diferenciabilitat de les seves components, cosa que permet definir les aplicacions diferenciables entre superfícies: si $S \subset \mathbb{R}^n$ i $S' \subset \mathbb{R}^m$ són dues superfícies regulars, una aplicació $f : S \rightarrow S'$ és diferenciable en un punt $p \in S$ si la composició $S \xrightarrow{f} S' \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable.



Fig. 2.5
Expressió local d'una
funció diferenciable.



2.2.4. Definició. Una aplicació $f : S \rightarrow S'$ és un *difeomorfisme* si és diferenciable, bijectiva i amb inversa diferenciable. Diem que dues superfícies regulars són *difeomorfes* si existeix un difeomorfisme entre elles.

Observem que, si $\varphi : U \rightarrow S$ és una parametrització local, aleshores $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ és diferenciable en el sentit que acabem de definir i, de fet, és un difeomorfisme.

2.2.5. Exemple. Sigui S l'obert de l'esfera unitat \mathbb{S}^2 complementari dels punts $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, i S' l'obert del cilindre $x^2 + y^2 = 1$, determinat per $-1 < z < 1$. Considerem l'aplicació $f : S \rightarrow S'$ definida de la forma següent: si $p \in S$ i r és el semiradi que parteix de l'eix z paral·lel al pla xy i que passa per p , definim $f(p) = r \cap S'$. Aleshores, f és diferenciable i, de fet, un difeomorfisme. \square

2.3. El pla tangent

Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una superfície regular, $p \in S$.

2.3.1. Definició. Diem que un vector $w \in \mathbb{R}^n$ és *tangent a S en p* si existeix una corba parametritzada $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ amb $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = w$. Denotem per $T_p S$ el conjunt de vectors tangents a S en p .

2.3.2. Exemple. Si $\varphi : U \rightarrow S$ és una parametrització local en p amb $\varphi(0, 0) = p$, aleshores els vectors

$$\varphi_u(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0), \quad \varphi_v(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0)$$

són els vectors tangents a les corbes coordenades $v = 0$ i $u = 0$, respectivament. \square

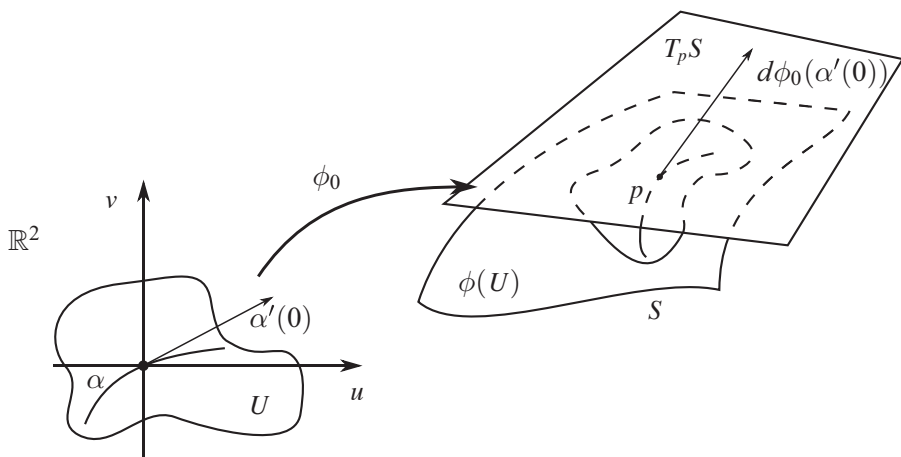


Fig. 2.6
Definició de vector
tangent.

2.3.3. Proposició. *Amb les notacions de l'exemple anterior,*

$$T_p S = \text{Im } d\varphi_0$$

i, en particular, $T_p S$ és un espai vectorial de dimensió 2, que anomenem el pla tangent a S en p .

Demostració Considerem un vector $v \in \mathbb{R}^2$. Aleshores, hi ha un $\varepsilon > 0$ amb $tv \in U$ per a $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ i, per a aquests valors de t , estarà definida la corba de S , $\alpha_v(t) = \varphi(tv)$. Per a α_v , es té $\alpha_v(0) = p$ i $\alpha'_v(0) = d\varphi_0(v)$; per tant, $\text{Im } d\varphi_0 \subset T_p S$.

Recíprocament, sigui $w = \alpha'(0) \in T_p S$. La composició $\alpha_w = \varphi^{-1}\alpha$ defineix una corba diferenciable a U , per a la qual es té

$$d\varphi_0(\alpha'_w(0)) = \frac{d(\varphi\alpha_w)}{dt}(0) = \alpha'(0) = w,$$

d'on resulta l'altra inclusió $T_p S \subset \text{Im } d\varphi_0$. ■

2.3.4. Proposició. *Suposem que S està definida per una equació implícita, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$, amb rang $df_p = 1$, per a tot $p \in S$. Aleshores,*

$$T_p S = \ker df_p.$$

Demostració. Sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular en un entorn de p , amb $\varphi(0) = p$. Aleshores, $f\varphi = 0$ i, per tant, $df_p d\varphi_0 = 0$. És a dir, $T_p S \subset \ker df_p$. Com que ambdós espais vectorials són de dimensió dos, en resulta la igualtat. ■

2.3.5. Definició. Sigui $f : S \rightarrow S'$ una aplicació diferenciable i $p \in S$. Definim l'*aplicació diferencial de f en p* per

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\longrightarrow T_{f(p)} S' \\ w = \alpha'(0) &\longmapsto (f\alpha)'(0). \end{aligned}$$



2.3.6. Proposició. *L'aplicació diferencial df_p està ben definida i és una aplicació lineal.*

Demostració. Descrivim df_p en un sistema local de coordenades i, com a resultat de l'expressió que n'obtidrem, en resulta la proposició.

Siguin $\varphi : U \rightarrow S$ i $\psi : V \rightarrow S'$ sengles sistemes de coordenades al voltant de p i $f(p)$, i $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$ l'expressió de f en aquestes coordenades.

Si $w = \alpha'(0) = a\varphi_u + b\varphi_v$, aleshores la corba $\beta(t) = f(\alpha(t))$ és igual a $\beta(t) = \psi \circ h \circ \varphi^{-1}(t)$ i, segons la definició de l'aplicació diferencial

$$df_p(w) = \beta'(0) = d\psi(dh(a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.3.7. L'aplicació diferencial permet transferir resultats del càlcul diferencial a les aplicacions diferenciables entre superfícies. Així, per exemple, són vàlids la regla de la cadena o el teorema de la funció inversa, que enunciem a continuació.

2.3.8. Teorema de la funció inversa. *Siguin $f : S \rightarrow S'$ una aplicació diferenciable i $p \in S$. Si $\det df_p \neq 0$, aleshores existeixen entorns oberts $p \in V \subset S$ i $f(p) \in W \subset S'$ tals que $f : V \rightarrow W$ és un difeomorfisme.* \blacksquare

2.4. La primera forma fonamental

En aquesta secció, analitzem els aspectes mètrics de les superfícies que es deriven del producte escalar ordinari de l'espai \mathbb{R}^n .

Siguin $S \subset \mathbb{R}^n$ una superfície regular i $p \in S$. Denotem per $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ el producte escalar definit al pla tangent $T_p S$ pel producte escalar ordinari de \mathbb{R}^n .

2.4.1. Definició. La *primera forma fonamental* de S en p , $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, és la forma quadràtica associada al producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$,

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p \geq 0, \quad \forall w \in T_p S.$$

Calculem el producte escalar i la primera forma fonamental en un sistema de coordenades: sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular al voltant de p . Aleshores, φ_u, φ_v una formen base de l'espai tangent i la matriu del producte escalar en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \\ \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p \end{pmatrix}$$

Diem que E, F, G són els *coeficients de la primera forma fonamental* en la parametrització φ . Observeu que aquests coeficients defineixen funcions diferenciables $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$.

2.4.2. Longitud de corbes. Sigui $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ una corba sobre la superfície S . En funció de la parametrització φ , la corba s'escriu $(u(t), v(t))$ i la longitud entre $a, b \in I$ segons

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

Aquesta expressió s'acostuma a escriure també en la forma

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

i es diu que ds^2 és l'*element de longitud* de S .

Per exemple, la longitud de les corbes $v = cnt$, parametritzades per $u(t) = t$, ve donada per

$$\ell(v = cnt) = \int_a^b \sqrt{E} dt$$

i, per tant, estan parametritzades per l'arc si, i només si, $E \equiv 1$. Anàlogament, les corbes $u = cnt$ estan parametritzades per l'arc si, i només si, $G \equiv 1$.

2.4.3. Angle entre dos vectors tangents. Siguin $v, w \in T_p S$ dos vectors unitaris tangents a S en p . L'angle entre v i w està determinat per

$$\cos \theta = \langle v, w \rangle_p,$$

i, per tant, en una parametrització pot expressar-se en funció dels coeficients de la primera forma fonamental. En particular, l'angle en què es tallen les corbes $u = cnt$ i $v = cnt$, que correspon a l'angle entre φ_u i φ_v , és

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Així, les corbes coordenades de φ són ortogonals si, i només si, $F = 0$.

2.4.4. Observació. Si fixem el punt $p \in S$, sabem que $T_p S$ admet una base ortonormal per al producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. No és cert, però, que en general puguem escollir una parametrització φ en un entorn de $p \in V$ en la qual la base (φ_u, φ_v) sigui ortonormal per a tot $q \in V$. És a dir, en general no és cert que existeixi un sistema de coordenades per al qual $E, G \equiv 1, F \equiv 0$.

Malgrat tot, sí que podem aconseguir que les corbes coordenades siguin ortogonals, és a dir, es té el resultat següent que enunciem sense demostració: *per a tot punt $p \in S$, existeix una parametrització regular $\varphi : U \rightarrow S$, $p \in \varphi(U)$, tal que $F \equiv 0$ (vegeu [dC]).*

2.4.5. Àrea d'una regió continguda en un entorn coordinat. Seguint amb les notacions d'aquesta secció, sigui $D \subset S$ una regió de la superfície S continguda en un entorn coordinat $D \subset \varphi(U)$ de manera que la funció $\sqrt{EG - F^2}$ és integrable en $\varphi^{-1}(D)$. Aleshores, l'àrea de D ve donada per



$$A(D) = \int_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Observem que, per a superfícies de \mathbb{R}^3 , podem utilitzar el producte vectorial per escriure

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2 = EG - F^2,$$

cosa que permet interpretar l'expressió de l'element d'àrea $dA = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$ com l'àrea del paral·lelogram definit pels vectors $\Delta u \varphi_u, \Delta v \varphi_v$.

Isometries

Recordem que una aplicació lineal entre espais euclidians, $F : E \rightarrow E'$, és diu que és una isometria si és compatible amb els productes escalars, és a dir, si

$$\langle v, w \rangle_E = \langle F(v), F(w) \rangle_{E'},$$

per a qualssevol $v, w \in E$.

2.4.6. Definició. Siguin $f : S \rightarrow S'$ una aplicació diferenciable entre superfícies regulars i $p \in S$. Diem que f és una *isometria local en p* si existeix un entorn $p \in V$ tal que df_q és una isometria lineal per a tot $q \in V$. Diem que f és una *isometria (global)* si és un difeomorfisme i una isometria local a tots els punts.

2.4.7. Observació. (1) Una aplicació $f : S \rightarrow S'$ diferenciable que és bijectiva i una isometria local a cada punt és una isometria global.

(2) Les isometries conserven aquelles mesures que depenen de la primera forma fonamental, és a dir, la longitud de corbes, els angles de vectors tangents i les àrees. En general, diem que una propietat és *intrínseca* si es conserva per isometries.

2.4.8. Proposició. Sigui $f : S \rightarrow S'$ una aplicació diferenciable entre superfícies regulars, $p \in S$, i suposem que existeix una parametrització $\varphi : U \rightarrow S$ en un entorn de p tal que $\psi = f\varphi : U \rightarrow S'$ defineix una parametrització regular en un entorn de $f(p)$. Denotem per E, F, G i E', F', G' els coeficients de la primera forma fonamental en les parametritzacions φ, ψ , respectivament. Aleshores,

$$f : \varphi(U) \rightarrow \psi(U) \text{ és una isometria } \iff E = E', F = F', G = G'.$$

Demostració. Donat que $\psi = f\varphi$, es té

$$\psi_u = df_q(\varphi_u), \quad \psi_v = df_q(\varphi_v).$$

Així, si df_q és una isometria, per a tot $q \in \varphi(U)$, en resulta $E = E', F = F', G = G'$.

Recíprocament, suposem que $E = E', F = F', G = G'$. Sigui $w = a\varphi_u + b\varphi_v \in T_q S$, $q \in \varphi(U)$, $q' = f(q)$. Aleshores, $df_q(w) = a\psi_u + b\psi_v$ i, per tant,

$$I_q(df_q(w)) = a^2E' + 2abF' + b^2G' = a^2E + 2abF + b^2G = I_q(w),$$

amb la qual cosa s'acaba la prova. ■

2.5. Exercicis

Alguns dels exercicis següents presenten superfícies que seran tractades de forma més completa al capítol 4.

1. Proveu que un obert d'una superfície regular és una superfície regular. I un tancat?
2. Proveu que el pla $\pi : \{x = -y\}$ és una superfície regular. Determineu si $\varphi(u, v) = (u^5, -u^5, v)$ és una parametrització regular de π i, si no ho és, doneu-ne una.

3. Proveu que el con circular $S = \{x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha\}$, amb α constant entre 0 i $\pi/2$, és una superfície regular a tots els punts, llevat del vèrtex O , i que

$$\varphi(u, v) = u(\sin \alpha \cos v, \sin \alpha \sin v, \cos \alpha), \quad u \neq 0, \quad 0 < v < 2\pi,$$

és una parametrització regular de $S \setminus \{O\}$. Proveu que tots els plans tangents passen pel vèrtex i que les rectes normals tallen l'eix OZ amb angle constant.

4. Sigui S el paraboloid hiperbòlic definit per $z = x^2 - y^2$.
 - a) Demostreu que S és una superfície regular.
 - b) Demostreu que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, és una parametrització de S i dibuixeu-ne les línies coordenades.
 - c) Sigui $\psi : U = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$. Proveu que parametriza una part de S . Dibuixeu-ne les línies coordenades.

5. *Helicoide recte*. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$.
 - a) Demostreu que $S = \{(x, y, z), f(x, y, z) = 0\}$ és una superfície regular, que s'anomena *helicoide recte*.
 - b) Proveu que $\varphi(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u)$ és una parametrització que cobreix tota la superfície S .
 - c) Proveu que les interseccions de S amb els plans horitzontals $z = cnt$ són rectes que tallen l'eix OZ .
 - d) Demostreu que els plans tangents a S en els punts d'una d'aquestes rectes contenen la recta.
 - e) Proveu que la tangent de l'angle que forma el pla tangent en un punt amb l'eix OZ és proporcional a la distància del punt de tangència a l'eix OZ .
 - f) Demostreu que les interseccions de S amb els cilindres $x^2 + y^2 = r^2$ són hèlices circulars, i trobeu-ne el pendent.



6. Sigui \mathbb{S}^2 l'esfera i sigui A l'aplicació antipodal. Proveu que A és un difeomorfisme.
7. *Quàdriques de \mathbb{R}^3 :*
- a) Proveu que un el·lipsoide és una superfície regular difeomorfa a l'esfera.
 - b) Proveu que un hiperboloide d'un full i un cilindre són superfícies regulars difeomorfes.
 - c) Proveu que el paraboloid $z = x^2 + y^2$ és difeomorf a un pla.
8. Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan diferenciable i S el cilindre de \mathbb{R}^3 de secció C i generatriu l'eix OZ . Proveu que S és una superfície regular difeomorfa al cilindre $x^2 + y^2 = 1$.
9. Sigui α, β dues corbes regulars. Definim la superfície parametritzada $\varphi(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$. Proveu que els plans tangents al llarg d'una corba coordinada són paral·lels a una recta fixada.
10. Sigui $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable sobre una superfície regular connexa S . Si $d_p f = 0, \forall p \in S$, demostreu que f és constant sobre S .
11. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular parametritzada per l'arc. Definim la superfície parametritzada $\varphi(u, v) = \alpha(v) + u\alpha'(v), u > 0, v \in I$.
- a) Proveu que, si α és biregular, aleshores φ defineix una superfície parametritzada regular.
 - b) Proveu que els plans tangents al llarg de $\{v = v_0\}$ coincideixen.
12. *Superfícies de revolució.* Es considera una corba regular simple al pla XZ , $\gamma(u) = (r(u), 0, z(u))$, amb $r(u) > 0$, per a qualsevol u . Sigui S el conjunt de punts de \mathbb{R}^3 determinats per la rotació de la corba γ al voltant de OZ . Proveu que S és una superfície regular, doneu una parametrització local de S i determineu geomètricament les corbes coordinades. Identifiqueu les quàdriques de revolució, el tor i les catenoides (obtingudes en girar una catenària).
13. *Superfícies reglades.* Sigui $\alpha, \mathbf{w} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciables, amb $\mathbf{w}(u) \neq 0, \forall u \in I$. Es defineix la *superfície reglada associada a la corba α i les direccions \mathbf{w}* com la superfície parametritzada

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

Les rectes L_u que passen per $\alpha(u)$ i són paral·leles a $\mathbf{w}(u)$ les anomenem *generatrius* de la superfície i la corba α l'anomenem *directriu* de φ .

- a) Proveu que l'helicoid, l'hiperbolide d'un full i el paraboloid hiperbòlic admeten una parametrització com a superfícies reglades.

- b) Sigui $\psi(u, v)$ una superfície parametritzada amb $\psi_v(u, 0) \neq 0$. Proveu que és reglada si, i només si, $\psi_{vv} = 0$.
- c) Considerem la circumferència C i les rectes r_1 i r_2 definides per

$$C = \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}, \quad r_1 = \{x = 0, z + a = 0\}, \quad r_2 = \{y = 0, z = a\}, \quad a \neq 0.$$

Determineu la superfície reglada amb suport en aquestes dues rectes i a C .

- 14.** Proveu que, si totes les rectes normals d'una superfície regular tallen una recta fixa, la superfície està continguda en una superfície de revolució.
- 15.** Proveu que, si totes les rectes normals d'una superfície regular connexa passen per un punt fix, la superfície està continguda en una esfera.
- 16.** *Superfície tubular.* Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba biregular parametritzada per l'arc. Sigui Π_u el pla normal a la corba al punt $\alpha(u)$. Sobre Π_u considerem una circumferència C_u de centre $\alpha(u)$ i radi $r > 0$. La reunió $S = \cup_{u \in I} C_u$ d'aquestes circumferències s'anomena *superfície tubular* o *tub* al voltant de la corba α amb radi r .
- a) Proveu que $\varphi(u, v) = \alpha(u) + r(\cos v \mathbf{n}(u) + \sin v \mathbf{b}(u))$ és una parametrització de S , on $\mathbf{n}(u)$ i $\mathbf{b}(u)$ denoten els vectors normal i binormal de la corba α .
- b) Proveu que, si $0 < r < \min\{\frac{1}{\kappa(u)}, u \in I\}$, aleshores φ és una parametrització regular. A partir d'ara, assumim aquesta hipòtesi.
- c) Trobeu els coeficients de la primera forma fonamental de S associada a φ .
- d) Demostreu que l'àrea de S no depèn de la torsió τ de α i expresseu-la en funció de la longitud de α .
- 17.** Sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular d'una superfície regular S tal que $E = G = u^2 + v^2$, $F \equiv 0$. Calculeu la longitud de la corba sobre S definida per l'equació $u = v$ des de $\varphi(1, 1)$ fins a $\varphi(2, 2)$.
- 18.** Considerem l'helicoide $\varphi(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$, $u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi$.
- a) Calculeu la primera forma fonamental.
- b) Calculeu l'àrea, les longituds dels costats i els angles del triangle definit per

$$0 < u < \sinh v, \quad 0 < v < a.$$

- 19.** Sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització local d'una superfície regular S . Proveu que el vector tangent $a\varphi_u + b\varphi_v$ biseca l'angle format entre les corbes coordenades si, i només si,

$$\sqrt{G}(aE + bF) = \sqrt{E}(aF + bG).$$



Prenem la superfície donada per la parametrització $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Trobeu un vector tangent a S que bisequi l'angle entre les corbes coordenades al punt $(1, 1, 0)$.

20. Sigui S la superfície parametritzada per $\varphi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \ln \cos(v) + u)$, amb $u \in \mathbb{R}$ i $v \in (-\pi/2, \pi/2)$. Per a cada valor de $c \in (-\pi/2, \pi/2)$, considerem la corba donada per $\alpha_c(u) = \varphi(u, c)$. Proveu que la longitud de α_c de $u = u_0$ a $u = u_1$ és independent de c .
21. S'anomenen *línies de rumb o loxodromes*¹ les corbes d'una superfície de revolució que tallen els meridians amb un angle constant.
- Demostreu que les loxodromes d'angle θ del con circular $x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2$ tenen equació $u = Ae^{\pm v \sin \alpha \cotan \theta}$.
 - Calculeu la longitud d'una loxodroma d'angle $\theta \in (0, 2\pi)$ sobre l'esfera, des de l'equador fins al pol.
22. Demostreu que l'aplicació $\varphi(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$ és un difeomorfisme local del semiplà $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ sobre un con circular amb vèrtex a l'origen i semiangle $\alpha \in (0, \pi/2)$ al vèrtex. És una isometria local?
23. Proveu que un catenoide i un helicoide recte són localment isomètrics (calculeu-ne la primera forma fonamental i busqueu una parametrització tal que les primeres formes fonamentals siguin les mateixes).
24. Observeu que una isometria de \mathbb{R}^3 que deixa invariant una superfície regular indueix una isometria de la superfície. En particular, en una superfície de revolució, les rotacions al voltant de l'eix són isometries. Doneu una isometria d'una superfície que no sigui restricció d'una isometria de \mathbb{R}^3 .
25. Considerem el conjunt $S \subset \mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 + t^2 = 1.$$

- Proveu que S és una superfície regular.
- Trobeu una parametrització de S al voltant del punt $p = (1, 0, 1, 0)$ i calculeu-ne la primera forma fonamental.
- Sigui \mathbb{T} el tor de \mathbb{R}^3 que s'obté en girar una circumferència de radi r al voltant d'una recta que està a distància $a > r$ del centre de la circumferència. Proveu que \mathbb{T} és una superfície, trobeu-ne una parametrització i calculeu-ne la primera forma fonamental.
- Trobeu un difeomorfisme $f : S \rightarrow \mathbb{T}$. És una isometria?

¹Segons el diccionari de l'IEC, les corbes de rumb s'anomenen *loxodromies*. Hem optat per mantenir el barbarisme amb el qual es coneixen a l'entorn matemàtic, és a dir, *loxodromes*. La mateixa circumstància es dona en atres llengües com, per exemple, el castellà.

26. *Projecció estereogràfica.* Considerem S l'esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ i $N = (0, 0, 2)$ el seu pol nord. Es defineix la projecció estereogràfica $\pi : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ fent correspondre, a un punt $p \in S, p \neq N$, el punt intersecció del pla XY amb la recta determinada per N i p .

- a) Calculeu l'expressió de π en coordenades. Proveu que és un difeomorfisme.
- b) Proveu que

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

- c) Proveu que π és conforme, és a dir, que conserva angles.

→ 3



Curvatura

En aquest capítol, fixem $n = 3$, és a dir, l'espai ambient és \mathbb{R}^3 , donat que definim la curvatura a partir de la variació del vector normal. Els resultats que n'establím suposaran que la superfície és orientable; com que localment tota superfície és orientable, els resultats s'apliquen localment a qualsevol superfície regular.

3.1. Superfícies orientables

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular.

3.1.1. Definició. Diem que S és *orientable* si existeix un camp vectorial N normal a S i no nul, això és, si existeix una aplicació diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(p) \neq 0$ i $N(p) \perp T_p S$, per a tot $p \in S$. Diem que una superfície orientable S està *orientada* si hem escollit un camp normal no nul N .

Com que el camp N que orienta una superfície és no nul a tots els punts, podem normalitzar-lo, de manera que l'orientabilitat de S és equivalent a l'existència d'un camp normal *unitari*, que defineix una aplicació diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

3.1.2. Exemples. (1) Si la superfície S està definida implícitament per l'equació

$$f(x, y, z) = 0, \quad \nabla f(p) \neq 0, \forall p \in S,$$

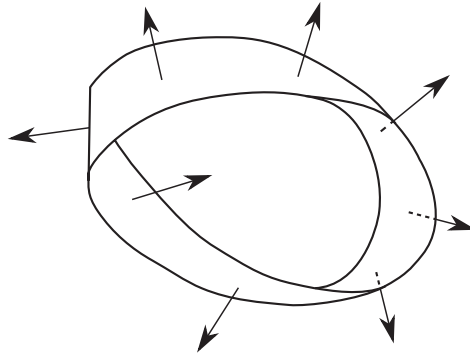
aleshores el camp vectorial $N = \nabla f$ és un camp vectorial normal i no nul; per tant, S és orientable.

(2) Si hi ha una parametrització $\varphi : U \rightarrow S$ que cobreix S , és a dir, tal que $S = \varphi(U)$, aleshores el camp vectorial $\varphi_u \wedge \varphi_v$ és un camp normal i no nul; per tant, S és orientable.

(3) La cinta de Möbius (vegeu la figura) no és orientable. \square



Fig. 3.1
La cinta de Möbius no és orientable.



El segon exemple mostra que *localment* tota superfície és orientable: per a qualsevol superfície parametritzada regular S i qualsevol punt $p \in S$, hi ha un entorn coordinat V de p en S tal que V és una superfície orientable.

En general, si $\varphi(U), \psi(V)$ són oberts coordinats de S , aleshores als punts de la intersecció se satisfà

$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \pm \frac{\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}}{|\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}|}.$$

Observem que el signe positiu correspon al fet que les bases $(\varphi_u, \varphi_v), (\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$ defineixin la mateixa orientació de $T_p S$, cosa que és equivalent que $\det d(\psi^{-1}\varphi)_0 > 0$, si $\varphi(0) = p$. Però, en aquest cas, el camp normal definit per ambdues parametritzacions s'estén a un camp normal a $\varphi(U) \cup \psi(V)$. Aquesta és essencialment la idea de la prova de la caracterització de l'orientabilitat següent, els detalls de la qual deixem com a exercici.

3.1.3. Proposició. *Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ és orientable si, i només si, existeix un recobriment per entorns coordinats $S = \cup_i \varphi_i(U_i)$ tal que els jacobians dels canvis de coordenades són positius, $\det d(\varphi_j^{-1}\varphi_i) > 0, \forall i, j$.* ■

Observem que aquesta caracterització de l'orientabilitat no fa referència a l'espai ambient \mathbb{R}^3 i, per tant, que permet definir l'orientabilitat d'una superfície en general. En el nostre cas, donat que estem sempre a \mathbb{R}^3 , només cal disposar del camp normal unitari.

3.1.4. Per a la resta del capítol, suposarem que les superfícies són orientables. Com hem assenyalat, això sempre és així localment, per la qual cosa els conceptes que introduïrem s'aplicaran localment a totes les superfícies de l'espai.

Si S és una superfície orientada pel camp normal N , diem que el sistema de coordenades $\varphi : U \rightarrow S$ és *positiu o compatible amb l'orientació* si satisfà les condicions equivalents

$$\det(\varphi_u, \varphi_v, N) > 0 \iff N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}.$$

3.2. L'aplicació de Gauss: curvatura

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada pel camp normal N . L'aplicació diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ l'anomenem *aplicació de Gauss de S* .

Observem que $T_p S = T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ i que, per tant, la diferencial de l'aplicació de Gauss en un punt $p \in S$ defineix una aplicació lineal

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S.$$

La diferencial dN_p codifica la variació del vector normal en totes les direccions tangents a S en p , i aquesta variació es llegeix al propi espai tangent. Podem observar aquest mateix fet de la forma següent: si $\alpha(t)$ és una corba de S que passa per p , aleshores

$$\langle N(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle = 1 \implies \langle (N\alpha)'(0), N(\alpha(0)) \rangle = 0,$$

és a dir, la variació de N al llarg de α és ortogonal a N i, per tant, tangent a S .

L'aplicació lineal $-dN$ l'anomenem *aplicació de Weingarten de S* . (Es pren el signe negatiu per raons que veurem més endavant.)

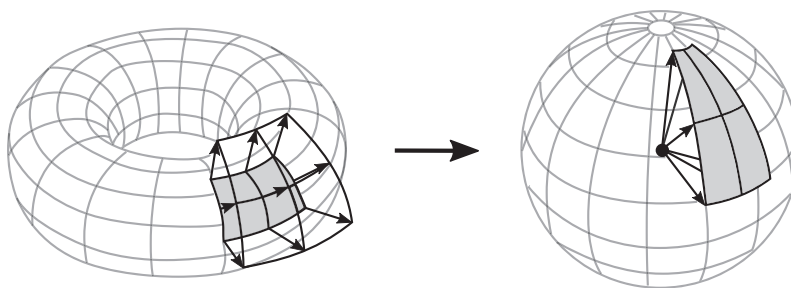


Fig. 3.2
Aplicació de Gauss.

Els invariants d'una aplicació lineal ens donen informació sobre la pròpia aplicació. En particular, el determinant i la traça.

3.2.1. Definició. Es defineixen la *curvatura de Gauss* i la *curvatura mitjana* de S en p segons

$$K(p) = \det dN_p, \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{tr } dN_p.$$

3.2.2. Teorema. L'endomorfisme $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ és un endomorfisme simètric. En particular, dN_p diagonalitza en una base ortonormal.

Demostració. Que dN sigui simètric significa que, per a qualssevol vectors $v, w \in T_p S$, se satisfà

$$\langle dN(v), w \rangle = \langle v, dN(w) \rangle.$$



És suficient comprovar aquesta igualtat per als vectors d'una base: fixem un sistema de coordenades positiu φ al voltant de p i considerem la base de l'espai tangent associada, (φ_u, φ_v) . Només cal veure que $\langle dN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, dN(\varphi_v) \rangle$.

Derivant la igualtat $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ respecte de u , trobem

$$\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0 \implies \langle dN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle.$$

De forma similar, trobem

$$\langle \varphi_u, dN(\varphi_v) \rangle = -\langle N, \varphi_{vu} \rangle,$$

i, com que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, pel teorema de Schwarz, acabem la prova. ■

Definició. Els vectors propis e_1, e_2 de $-dN_p$ i les direccions del pla tangent que determinen, els anomenem *direccions principals*. Els valors propis de $-dN_p$ els denotem per k_1, k_2 i els anomenem *curvatures principals* de S en p .

De la definició de K i H i les curvatures principals, en resulta que $K = k_1 k_2$ i $H = (k_1 + k_2)/2$, amb la qual cosa es té:

3.2.4. Corol·lari. *Les curvatures principals són les solucions de l'equació*

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

i, per tant,

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Observem que K, H, k_1 i k_2 defineixen funcions diferenciables a S .

3.3. La segona forma fonamental

Seguim amb les notacions de la secció anterior. A tot endomorfisme simètric, se li associa una forma quadràtica:

3.3.1. Definició. La *segona forma quadràtica de S en p* és la forma quadràtica $\mathbb{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definida per

$$\mathbb{I}_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle, \quad \forall w \in T_p S.$$

La matriu de \mathbb{I}_p en una base w_1, w_2 de $T_p S$ ve donada per

$$-\begin{pmatrix} \langle dN_p(w_1), w_1 \rangle & \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle \\ \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle & \langle dN_p(w_2), w_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Els sistemes de coordenades donen bases naturals de l'espai tangent, (φ_u, φ_v) ; calculem la matriu de \mathbb{I}_p corresponent: sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular positiva amb $p \in \varphi(U)$, i denotem per

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle dN_p(\varphi_u), \varphi_u \rangle & \langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle \\ \langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle & \langle dN_p(\varphi_v), \varphi_v \rangle \end{pmatrix}$$

la matriu de la segona forma fonamental en aquesta base.

3.3.2. Proposició. *Amb les notacions anteriors, se satisfà*

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= -\langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g &= -\langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Demostració. La demostració d'aquestes igualtats és immediata. Provem, per exemple, la corresponent a f :

$$\langle N, \varphi_v \rangle = 0 \text{ i derivant } \frac{\partial}{\partial u} \implies \langle N, \varphi_{uv} \rangle + \langle N_u, \varphi_v \rangle = 0.$$

La darrera igualtat se segueix del fet que $N = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \sqrt{EG - F^2}$. ■

Veiem, doncs, que tant la segona forma fonamental com la primera forma fonamental es calculen fàcilment a partir de les equacions que defineixen un sistema de coordenades. Podem utilitzar aquest fet per calcular explícitament la matriu de l'aplicació de Weingarten en la base φ_u, φ_v . En efecte, si l'aplicació dN té matriu

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v, \\ N_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \end{aligned}$$

segons la proposició anterior, trobem

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{12}F & -f &= a_{21}E + a_{22}F \\ -f &= a_{11}F + a_{12}G & -g &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned} \quad \text{i}$$

és a dir,

$$- \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Transposant aquesta darrera igualtat i aïllant la matriu de dN , trobem les equacions de Weingarten.



3.3.3. Equacions de Weingarten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Observem que podem resumir les equacions anteriors en la forma

$$dN = -I^{-1} \cdot II,$$

amb el benentès que aquesta és una igualtat de matrius.

3.3.4. Corol·lari. De les equacions de Weingarten es dedueix que

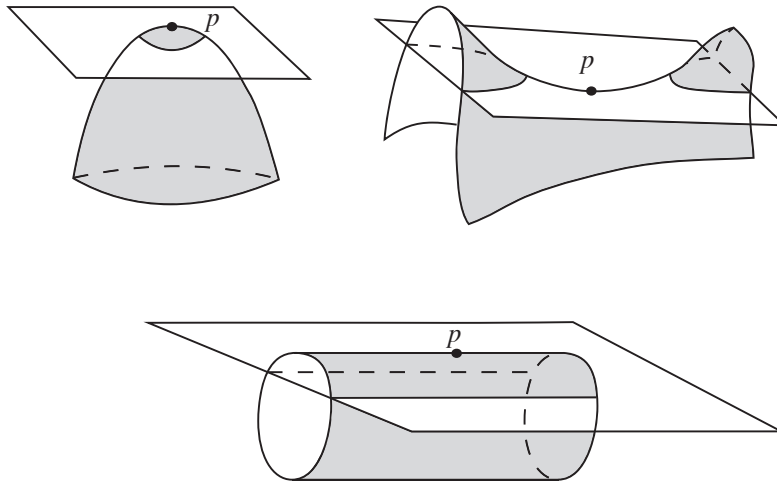
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}.$$

Acabem aquesta secció donant la classificació dels punts de la superfície S segons els valors de les curvatures principals.

3.3.5. Definició. Diem que $p \in S$ és

- *el·líptic*, si $K(p) > 0$. Equivalentment, si $k_1(p), k_2(p) \neq 0$, amb el mateix signe.
- *hiperbòlic*, si $K(p) < 0$. Equivalentment, si $k_1(p), k_2(p) \neq 0$, de signes oposats.
- *parabòlic*, si $K(p) = 0, H(p) \neq 0$. Equivalentment, si $k_1(p) \neq 0, k_2(p) = 0$.
- *pla*, si $K(p) = 0, H(p) = 0$. Equivalentment, $k_1(p), k_2(p) = 0$.

Fig. 3.3
Classificació local dels punts d'una superfície.



3.3.6. La classificació anterior té l'origen en la cònica del pla tangent a S en p associada a la segona forma fonamental

$$II_p(w) = \pm 1, \quad w \in T_p S,$$

que s'anomena la *indicatriu de Dupin* de S en p . Observem que, si e_1, e_2 són les direccions principals de S en p , és a dir, formen la base ortonormal en la qual dN_p diagonalitza, i $w = xe_1 + ye_2$, aleshores la indicatriu de Dupin és

$$k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1.$$

Així, si k_1, k_2 tenen el mateix signe, en resulta una el·lipse; si tenen signes oposats, en resulten dues hipèrboles; o, si $k_2 = 0$, en resulten dues rectes paral·leles.

3.4. Corbes sobre una superfície

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada per un camp normal unitari N i $p \in S$. Una manera d'analitzar la curvatura de S en p és estudiar la curvatura de les corbes que s'obtenen tallant S per un pla que passa per p . Aquesta era la manera de procedir abans de la introducció de la curvatura de Gauss. Més generalment, analitzem la curvatura d'una corba qualsevol de S en p , en relació amb els elements característics de la superfície, el pla tangent i el vector normal.

Sigui $\alpha : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una corba regular, parametritzada per l'arc, amb $\alpha(0) = p$. Per la definició de la curvatura de α , $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$. Descomponem aquest vector en les seves components normal i tangencial

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} = \kappa \langle \mathbf{n}, N \rangle N + \kappa \langle \mathbf{n}, N \wedge \mathbf{t} \rangle N \wedge \mathbf{t}.$$

3.4.1. Definició. Es defineixen les *curvatures normal i geodèsica* de α en p per

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa \langle \mathbf{n}, N \rangle, \\ \kappa_g &= \kappa \langle \mathbf{n}, N \wedge \mathbf{t} \rangle. \end{aligned}$$

Observem que ambdues curvatures tenen signe, com succeïa amb la curvatura de corbes planes, i que aquest signe depèn de l'orientació de la superfície, això és, del vector normal N . Per la pròpia definició, es té

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

3.4.2. Proposició. Si α està parametritzada per l'arc, aleshores

$$\kappa_n = II_p(\alpha'(0)).$$

Demostració. Com que $\alpha'(s)$ és un vector tangent, es té $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$. Derivant, avaluant a $s = 0$ i, utilitzant les fórmules de Frenet, obtenim

$$\langle dN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle + \langle N(\alpha(0)), \kappa \mathbf{n}(0) \rangle = 0$$

que és el que volíem provar. ■



Si el paràmetre no és l'arc, podem calcular la curvatura normal de α en p de la forma

$$\kappa_n = \mathbb{I}_p \left(\frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) = \frac{\mathbb{I}_p(\alpha'(0))}{I_p(\alpha'(0))}.$$

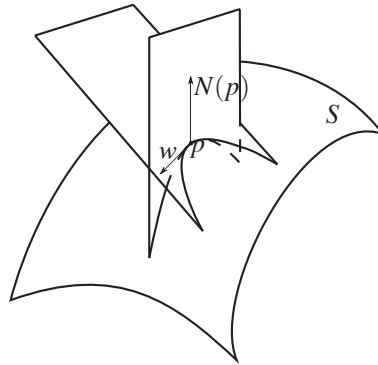
De la proposició anterior se segueix que la curvatura normal no depèn de la corba α sinó només del vector tangent $w = \alpha'(0)$. En altres paraules:

3.4.3. Teorema de Meusnier. *Dues corbes de S que passen per p , i tenen el mateix vector tangent, tenen la mateixa curvatura normal en p .* ■

Observem que la curvatura normal en la direcció tangent $w \in T_p S$ és la curvatura de la secció de S tallada pel pla $p + [w, N]$. Podem interpretar aquest resultat dient que la curvatura normal mesura la part de la curvatura de la corba produïda per la curvatura de la superfície, mentre que, com veurem més endavant, la curvatura geodèsica mesurarà la curvatura de la corba *dins* de la superfície.

Un altre resultat clàssic que es deriva immediatament de la darrera proposició és la fórmula d'Euler.

Fig. 3.4
Seccions tangents a una superfície.



3.4.4. Fórmula d'Euler. *Siguin k_1, k_2 les curvatures principals de S en p , i e_1, e_2 les direccions principals corresponents. Si $w = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \in T_p S$, aleshores*

$$\kappa_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Demostració. A la base ortonormal e_1, e_2 , l'aplicació lineal $-dN$ diagonalitza, amb valors propis k_1, k_2 , per la qual cosa

$$\kappa_n(w) = \mathbb{I}_p(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad \blacksquare$$

3.4.5. Corol·lari. *Amb les notacions anteriors, suposem que $k_1(p) \geq k_2(p)$. Aleshores,*

$$k_1 = \max \{ \kappa_n(w) \mid w \in T_p S, |w| = 1 \},$$

$$k_2 = \min \{ \kappa_n(w) \mid w \in T_p S, |w| = 1 \}.$$

Acabem la secció analitzant dues famílies distingides de corbes sobre una superfície: les línies de curvatura i les línies asimptòtiques. En tot el que segueix, $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície regular orientada i $\varphi : U \rightarrow S$ és una parametrització regular positiva.

Línies de curvatura

3.4.6. Definició. Diem que $\alpha : I \rightarrow S$ és una *línia de curvatura* si $\alpha'(t)$ és una direcció principal per a tot $t \in I$.

D'aquesta definició es desprèn el resultat següent:

3.4.7. Teorema de Rodrigues. $\alpha(t)$ és línia de curvatura de S si, i només si, existeix una funció diferenciable $\lambda(t)$ tal que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Demostració. Hem escrit $N'(t)$ per $(N\alpha)'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$. La prova resulta immediatament de la definició. Per exemple, si α és una línia de curvatura, $\alpha'(t)$ és una direcció principal per a tot $t \in I$, i existeix $\lambda(t)$ amb $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$. ■

3.4.8. Definició. Diem que un punt $p \in S$ és *umbilical* si $k_1(p) = k_2(p)$.

Un punt umbilical té les curvatures principals iguals i, per tant, les curvatures normals en aquest punt són totes iguals a un cert valor k . És a dir, la diferencial de l'aplicació de Gauss és una homotècia, $dN_p = k \cdot \text{id}$. Així, si tots els punts de S són umbilicals, totes les corbes són línies de curvatura. Aquesta situació només es dona al pla o a les esferes, com mostrem a continuació.

3.4.9. Proposició. *Suposem que S és connexa i que tots els punts són umbilicals. Aleshores, S és un tros de pla o d'esfera.*

Demostració. Situem-nos a l'entorn coordinat φ . Com que dN és una homotècia a tots els punts, existeix una funció $\lambda(u, v)$ tal que

$$N_u = \lambda\varphi_u, \quad N_v = \lambda\varphi_v.$$

Derivant respecte de v i u , trobem

$$0 = N_{uv} - N_{vu} = \lambda_v\varphi_u - \lambda_u\varphi_v,$$

i, com que φ_u, φ_v formen base del pla tangent, trobem que $\lambda_u = 0 = \lambda_v$. Així, si l'obert U és connex, λ és constant. Per la connexió de S , deduïm que λ és constant a tota la superfície S .

En distingim ara dos casos, segons que $\lambda = 0$ o $\lambda \neq 0$.



$\lambda = 0$: en aquest cas, $N_u = \lambda \varphi_u = 0$ i, anàlogament, $N_v = 0$. Així, utilitzant novament la connexió, N és un vector constant i S està continguda en un pla ortogonal a N .

$\lambda \neq 0$: considerem la funció $\psi(u, v) = \varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda}N$. Derivant i utilitzant la connexió de S , veiem que ψ és constant, ja que

$$\psi_u = \varphi_u - \frac{1}{\lambda}N_u = \varphi_u - \frac{1}{\lambda}\lambda\varphi_u = 0,$$

i, anàlogament, $\psi_v = 0$. Sigui $q = \psi(u, v)$ el punt de \mathbb{R}^3 que determina. Aleshores, S està continguda a l'esfera de centre q i radi $1/\lambda$, ja que $|\varphi(u, v) - q| = 1/\lambda$. ■

Per acabar amb les línies de curvatura, estudiem l'equació diferencial que satisfan les seves components $(u(t), v(t))$ en el sistema coordinat φ .

3.4.10. Equació diferencial de les línies de curvatura. $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ és una línia de curvatura si, i només si, satisfà l'equació diferencial

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Demostració. Pel teorema de Rodrigues, α és una línia de curvatura si, i només si, els vectors

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

són linealment dependents. Recordem que la matriu de dN pot calcular-se a partir de les matrius de la primera i la segona formes fonamentals d'acord amb les equacions de Weingarten, de manera que

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa trobem, després de fer un càlcul elemental, que els vectors $dN(\alpha'), \alpha'$ són linealment dependents si, i només si,

$$\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & eu' + fv' \\ Fu' + Gv' & fu' + gv' \end{vmatrix} = 0.$$

El lector pot comprovar sense dificultat que l'equació que en resulta és equivalent a la descrita a l'enunciat d'aquesta proposició. ■

3.4.11. Corollari. (1) Si $F = f = 0$, aleshores les corbes coordenades són línies de curvatura.

(2) Si S no té punts umbilicals i les corbes coordenades són línies de curvatura, aleshores $F = 0 = f$. ■

Línies asimptòtiques

3.4.12. Definició. Diem que una corba regular $\alpha : I \rightarrow S$ és una línia asimptòtica si $\kappa_n = 0$ a tots els punts.

Per tal que una superfície contingui línies asimptòtiques, cal que hi hagi punts on $K \leq 0$, és a dir, si tots els punts de S són el·líptics, aleshores S no conté línies asimptòtiques. D'altra banda, en una regió d'una superfície en què tots els punts són plans, tota corba és asimptòtica.

Observem també que tota recta continguda en S és una línia asimptòtica.

Com que la curvatura normal de α es calcula mitjançant la segona forma fonamental, de la definició de línia asimptòtica es desprèn immediatament:

3.4.13. Proposició. Sigui $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular; són equivalents:

- (1) α és una línia asimptòtica.
- (2) $\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle = 0$, per a tot $t \in I$.
- (3) $\langle \alpha''(t), N(t) \rangle = 0$, per a tot $t \in I$. ■

3.4.14. Equació diferencial de les línies asimptòtiques. $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ és una línia asimptòtica si, i només si, satisfà l'equació diferencial

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0. \quad \blacksquare$$

3.4.15. Corollari. Les corbes coordenades són línies asimptòtiques si, i només si, $e = 0 = g$. ■

3.5. El teorema egregi de Gauss

En aquesta secció, provem el celebrat teorema egregi de Gauss segons el qual la curvatura de Gauss d'una superfície és invariant per isometries, és a dir, és una propietat intrínseca de la superfície. Observem que aquest fet no és immediat i que fins a cert punt és sorprenent, ja que la curvatura s'ha definit a partir de la variació del vector normal i, per tant, aparentment depèn de la immersió de la superfície a l'espai \mathbb{R}^3 .

La demostració d'aquest resultat se segueix de l'anàlisi de la variació del trèdre associat a una parametrització regular a l'estil del que havíem fet en el cas de les corbes i les fórmules de Frenet. Aquesta anàlisi la completarem a la secció següent, establint el teorema fonamental de la teoria local de les superfícies.

3.5.1. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada i $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització positiva. Als punts de $\varphi(U)$, considerarem el trèdre associat

$$\varphi_u, \varphi_v, N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|},$$



que és una base positiva de \mathbb{R}^3 en cada punt. Volem analitzar la variació d'aquest trèdre en funció dels paràmetres (u, v) i, per fer-ho, analitzarem les derivades corresponents $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}, N_u, N_v$. Escrivint aquests vectors en termes del trèdre associat, hi ha funcions Γ_{ij}^k tals que

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN$$

$$N_u = a_{11} \varphi_u + a_{12} \varphi_v,$$

$$N_v = a_{21} \varphi_u + a_{22} \varphi_v.$$

Les funcions Γ_{ij}^k les anomenem *símbols de Christoffel* de la parametrització φ .

Observem que les components normals de $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ són e, f, g per la pròpia definició de la segona forma fonamental, i que els coeficients a_{ij} es calculen a partir de la primera i la segona formes fonamentals mitjançant les equacions de Weingarten.

3.5.2. Proposició. *Els símbols de Christoffel són intrínsecs, és a dir, es poden calcular a partir dels coeficients de la primera forma fonamental.*

Demostració. Si multipliquem escalarment per φ_u, φ_v les equacions que defineixen els símbols de Christoffel, trobem tres sistemes lineals (amb coeficients determinats per la primera forma quadràtica)

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v$$

tots ells amb determinant $EG - F^2 > 0$, amb la qual cosa són sistemes compatibles i determinats, és a dir, determinen els símbols Γ_{ij}^k unívocament. ■

3.5.3. És clar que podem donar fórmules explícites, mitjançant la regla de Cramer, per resoldre els sistemes lineals de la prova de la proposició anterior:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}.$$

Un cas en el qual ens és útil disposar de fórmules explícites és aquell en què les corbes coordenades són ortogonals, és a dir, $F = 0$. En aquest cas, trobem

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, & a_{11} &= -\frac{e}{E}, \quad a_{12} = -\frac{f}{G}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, & a_{21} &= -\frac{f}{E}, \quad a_{22} = -\frac{g}{G}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}, \end{aligned}$$

3.5.4. El teorema de Schwarz segons el qual les derivades parcials d'una funció diferenciable no depenen de l'ordre en què s'hagin fet aquestes derivades imposa determinades relacions entre els símbols de Christoffel. En efecte, se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned} (\varphi_{uu})_v &= (\varphi_{uv})_u, \\ (\varphi_{vv})_u &= (\varphi_{uv})_v, \\ (N_u)_v &= (N_v)_u, \end{aligned}$$

igualtats que anomenem *equacions de compatibilitat*. Escrivint aquestes igualtats en el tríedre associat,

$$\begin{aligned} (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u &= A_1 \varphi_u + B_1 \varphi_v + C_1 N = 0, \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{uv})_v &= A_2 \varphi_u + B_2 \varphi_v + C_2 N = 0, \\ (N_u)_v - (N_v)_u &= A_3 \varphi_u + B_3 \varphi_v + C_3 N = 0, \end{aligned}$$

en resulten nou equacions, $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, 1 \leq i \leq 3$. Utilitzant les definicions i les equacions de Weingarten, és un exercici comprovar que cadascuna d'aquestes nou equacions admet una expressió en termes de la primera forma fonamental, dels símbols de Christoffel i de la segona forma fonamental. En particular, l'equació $B_1 = 0$ es converteix en la fórmula de Gauss.

3.5.5. Fórmula de Gauss.

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

I, com que $E \neq 0$, en resulta

$$K = -\frac{1}{E} ((\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2).$$

És a dir, veiem que la curvatura de Gauss K es calcula a partir de la primera forma fonamental i les seves derivades, d'on resulta:

3.5.6. Teorema egregi de Gauss. *La curvatura de Gauss és intrínseca.* ■



Podem precisar el teorema egregi de la forma següent:

3.5.7. Teorema. *Sigui $f : S \rightarrow S'$ una isometria local entre superfícies regulars orientables de \mathbb{R}^3 . Aleshores, els punts corresponents tenen la mateixa curvatura, això és*

$$K_S(p) = K_{S'}(f(p)). \quad \blacksquare$$

Remarquem que el recíproc no és cert, és a dir, existeixen aplicacions diferenciables $f : S \rightarrow S'$ tals que $K_S(p) = K_{S'}(f(p))$, però que no són isometries locals. Tanmateix, als propers capítols veurem resultats positius quan les curvatures siguin constants.

Com a conseqüència del teorema egregi, si una superfície S és localment isomètrica a una regió del pla, aleshores la curvatura de Gauss de S ha de ser idènticament nul·la. Per tant, no hi ha cap isometria local entre una regió de l'esfera i una regió del pla. En altres paraules, els cartògrafs han de conviure amb el fet que no és possible dibuixar mapes geogràfics que conservin les distàncies (ni que les conservin llevat d'un factor d'escala).

3.5.8. Anotació històrica. Gauss va publicar les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* l'any 1827. Aquest treball va significar un canvi de paradigma en l'estudi de la geometria de superfícies, en introduir-hi la curvatura i demostrar, entre d'altres, el teorema egregi. Gauss no escriu els símbols de Christoffel, sinó que troba la fórmula que duu el seu nom per càlcul directe. En el treball original, trobem l'expressió següent d'aquesta fórmula:

$$\begin{aligned} 4(EF - F^2)K = & E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_v) \\ & + G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) \\ & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}), \end{aligned}$$

a partir de la qual escriu:

Formula itaque articuli praecedentis sponte perducit ad egregium

THEOREMA. Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

3.6. El teorema fonamental de la teoria local de superfícies

Continuem l'anàlisi de les equacions de compatibilitat; les equacions $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$ són:

3.6.1. Equacions de Codazzi-Mainardi.

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{aligned}$$

Aquestes equacions admeten una expressió més simple si les corbes coordenades són línies de curvatura, és a dir, si $F = 0 = f$:

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

El resultat següent, conegut també com a teorema de Bonnet, demostra que la resta d'equacions de compatibilitat se segueixen de les tres ja establertes, la fórmula de Gauss i les dues de Codazzi-Mainardi.

3.6.2. Teorema fonamental de la teoria de superfícies. *Siguin E, F, G, e, f, g funcions diferenciables en un obert $V \subset \mathbb{R}^2$ tals que*

$$E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$$

i que satisfan les equacions de Gauss i de Codazzi-Mainardi. Aleshores, per a tot $q \in V$, existeixen un entorn $q \in U \subset V$ i un difeomorfisme

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3,$$

tal que $S = \varphi(U)$ és una superfície regular que té les funcions E, F, G, e, f, g com a coeficients de la primera i la segona formes fonamentals.

A més, si U és un obert connex i $\psi : U \longrightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^3$ és una altra solució del problema, aleshores hi ha un moviment directe de \mathbb{R}^3 que transforma $\psi(U)$ en $\varphi(U)$.

No reproduïm aquí la demostració d'aquest resultat. Podeu veure-la als llibres referenciats a la bibliografia.

3.7. Exercicis

1. Sigui S una superfície de revolució i $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'aplicació de Gauss. Proveu que la imatge per N d'un paral·lel de S és un paral·lel de l'esfera i que la imatge d'un meridià de S és part d'un meridià de l'esfera.

Com a aplicació, determineu la imatge de l'aplicació de Gauss de les superfícies de revolució següents:

- a) Cilindre: $x^2 + y^2 = r^2$.
- b) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
- c) Paraboloides: $z = x^2 + y^2$.
- d) Hiperboloides: $x^2 + y^2 = z^2 + 1$
- e) Tor: $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2, y \geq 0$.

2. *No-orientabilitat de la cinta de Möbius.* Sigui S la cinta de Moebius obtinguda a partir de les parametritzacions $\varphi, \psi : U = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definides per



$$\varphi(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

$$\psi(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{2u + \pi}{4}\right) \cos u, \left(-2 + v \sin \frac{2u + \pi}{4}\right) \sin u, v \cos \frac{2u + \pi}{4} \right),$$

$S = \varphi(U) \cup \psi(V)$. Proveu que S no és orientable.

3. Sigui $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'homotècia $h(p) = cp$, en què $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i sigui S una superfície regular a \mathbb{R}^3 . Proveu que $S' = h(S)$ també és una superfície, i relacioneu K i H d'ambdues superfícies.
4. Calculeu les curvatures de Gauss, mitjana i principals d'una gràfica $z = h(x, y)$.
5. Trobeu la curvatura normal de la corba $u = t^2, v = t$ de la superfície parametritzada per $(u, v, u^2 + v^2)$ al punt $t = 1$.
6. Trobeu les curvatures principals en un punt qualsevol de la superfície de revolució donada per la parametrització $x = u \cos v, y = u \sin v, z = f(u)$.
7. Proveu que la *pseudoesfera de radi R* donada per

$$\varphi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R(\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)),$$

té curvatura de Gauss constant igual a $-\frac{1}{R}$.

8. Proveu que la catenoide

$$\varphi(u, v) = (R \cosh u \cos v, R \cosh u \sin v, u)$$

té curvatura mitjana constant igual a zero.

9. Trobeu l'equació diferencial de les línies de curvatura dels conoides $x = u \cos v, y = u \sin v, z = f(u)$ i, en particular, integreu-les el cas que $f(v) = av$, que correspon a l'helicoide recte.
10. Proveu que la curvatura mitjana d'una superfície satisfà

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_p^1} k_n(v) dv,$$

en què S_p^1 és el conjunt de vectors tangents a S en p de mòdul 1.

11. Supposem que el pla osculador d'una línia de curvatura d'una superfície $C \subset S$, que no és mai tangent a una direcció asimptòtica, forma un angle constant amb el pla tangent a S al llarg de la corba C . Proveu que C és una corba plana.

12. Calculeu les corbes asimptòtiques de l'hiperboloide d'un full $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
13. Demostreu que, si una superfície és tangent a un pla al llarg d'una corba continguda en aquesta superfície, llavors els punts d'aquesta corba són parabòlics o plans.
14. Suposem que la superfície S_1 talla la superfície S_2 en una corba regular C . Proveu que la curvatura κ de C a $p \in C$ ve donada per l'equació:

$$k^2 \sin^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta$$

en què λ_1 i λ_2 són les curvatures normals a p de S_1 i S_2 , respectivament, i θ és l'angle format per les normals a S_1 i S_2 a p .

15. *Teorema de Joachimsthal.* Siguin S_1, S_2 dues superfícies que es tallen al llarg d'una corba regular C . Suposem que C és una línia de curvatura de S_1 . Proveu que és una línia de curvatura de S_2 si, i només si, l'angle entre S_1 i S_2 al llarg de C és constant.
16. *Teorema de Beltrami-Enneper.* Proveu que, si una corba biregular $\alpha(t)$ és una línia asimptòtica d'una superfície S , aleshores

$$|\tau| = \sqrt{-K}.$$

17. Proveu que els punts de la superfície parametritzada per $(u, v, u^2 + v^3)$ són el·líptics si $v > 0$, hiperbòlics si $v < 0$ i parabòlics si $v = 0$.
18. Classifiquen, segons la curvatura de Gauss, els punts de l'el·lipsoide, l'hiperboloide de dues fulles, el cilindre i els paraboloides el·líptic i hiperbòlic.
19. Demostreu que, en unes coordenades locals, els punts umbilicals d'una superfície S són caracteritzats per la condició

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}.$$

Escriviu l'equació dels punts umbilicals de la superfície definida per la gràfica d'una funció diferenciable $z = h(x, y)$ i determineu els punts umbilicals de les superfícies següents:

a) Paraboloides el·líptic: $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$.

b) Paraboloides hiperbòlic: $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$.

20. Demostreu que, si tots els punts d'una corba continguda en una superfície regular són plans, aleshores la corba és plana.



- 21.** Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientable compacta. Proveu que existeix un punt $p \in S$ amb $K(p) > 0$. (*Indicació:* la funció distància de S a l'origen té un màxim en un punt $p \in S$; proveu que $T_p S = T_p S_R$, on S_R és l'esfera de radi R , i feu servir el problema 8 del tema 1 per deduir que, per a tota corba de S per p , es té $k_n(p) > 1/R$; vegeu també el lema 7.4.2.)
- 22.** Considerem les superfícies S, S' corresponents a les gràfiques de les funcions $z = x^4 + y^4$ i $z = x^3 - 3y^2x$. Proveu que l'origen és un punt pla d'ambdues superfícies, però que mentre que S queda en un dels semiespais determinats per $T_0 S$, S' talla els dos semiespais determinats per $T_0 S'$.
- 23.** Sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització positiva d'una superfície orientada $S \subset \mathbb{R}^3$. Proveu que

$$N_u \wedge N_v = K \varphi_u \wedge \varphi_v.$$

- 24.** Proveu que si $H = 0$ i S no té punts plans, aleshores l'aplicació de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ compleix la propietat:

$$\langle d_p N(w_1), d_p N(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle.$$

per a qualsevol $p \in S$ i $w_1, w_2 \in T_p(S)$.

Proveu que aquesta condició implica que els angles formats per dues corbes i les seves transformades per l'aplicació de Gauss coincideixen, llevat del signe.

- 25.** Proveu que dues corbes α, β són isomètriques si, i només si, tenen la mateixa longitud.
- 26.** Proveu que un difeomorfisme entre dues superfícies $F : S_1 \rightarrow S_2$ és una isometria si, i només si, la longitud de qualsevol corba α sobre S_1 és igual a la longitud de la corba $\phi \circ \alpha$ a S_2 .
- 27.** Justifiqueu que l'esfera, el cilindre i el paraboloid hiperbòlic no són superfícies localment isomètriques.
- 28.** Demostreu que els cilindres $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = 1$ no són globalment isomètrics, però l'aplicació

$$\varphi(R \cos \theta, R \sin \theta, t) = (\cos R\theta, \sin R\theta, t)$$

és una isometria local del primer en el segon.

- 29.** *Xarxa de Txebixev.* Demostreu que, si φ és una parametrització d'una superfície que satisfà $E = G = 1$ i $F = \cos \theta$, aleshores

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}.$$

- 30.** *Contraexemple del recíproc del teorema egregium.* Considereu les superfícies $\varphi, \psi : U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, definides per

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$$

$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

Proveu que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(U)$ preserva la curvatura de Gauss, però no és una isometria.

- 31.** *Equació de Gauss en coordenades ortogonals.* Demostreu que, si φ és una *parametrització ortogonal* d'una superfície (és a dir, que $F \equiv 0$), aleshores

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

- 32.** Demostreu que no hi ha cap superfície amb una parametrització φ tal que $E = G = e = 1$, $F = f = 0$ i $g = -1$. Existeix alguna superfície amb una parametrització φ tal que $E = g = 1$, $F = f = 0$ i $G = e = \cos^2 u$?
- 33.** Sigui S una superfície que admet una parametrització tal que $E = 2$, $F = 0$, $e = 1$, $g = 1$, i tal que les corbes de les famílies $\{u + v = \text{constant}\}$, $\{u - v = \text{constant}\}$ es tallen ortogonalment. Determineu G , f i K .
- 34.** Proveu que les equacions de compatibilitat donen les variacions següents de l'equació de Gauss:

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1,$$

$$FK = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1,$$

$$GK = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2.$$

→ 4



Algunes superfícies notables

En aquest capítol, presentem tres famílies notables de superfícies de l'espai \mathbb{R}^3 : les superfícies de revolució, les superfícies reglades i les superfícies minimal. Algunes d'aquestes superfícies ja han aparegut als capítols anteriors i a les sessions de problemes, on s'han realitzat bona part dels càlculs que ara reproduïm. Els recollim aquí per fer-ne referència als capítols següents.

4.1. Superfícies de revolució

Una superfície de revolució és una superfície que s'obté en fer girar una corba plana C al voltant d'una recta del pla que no la talla. Per precisar aquesta definició, suposarem que el pla és el pla XZ i que l'eix de gir és l'eix OZ .

Sigui $\alpha(v)$ una corba plana regular, sense autointerseccions, tal que $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$ és un homeomorfisme (cosa que resumirem dient que α és un *arc de Jordan*). Suposem que α no talla l'eix OZ :

$$x = r(v), \quad z = z(v), \quad a < v < b, \quad r(v) > 0.$$

4.1.1. Definició. La *superfície de revolució* definida per la corba α en girar al voltant de l'eix OZ és

$$S = \{(r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)) \mid a < v < b, 0 \leq u \leq 2\pi\}.$$

Les corbes $u = \text{cnt}$ les anomenem *meridians*, mentre que les $v = \text{cnt}$ les anomenem *paral·lels* de S .

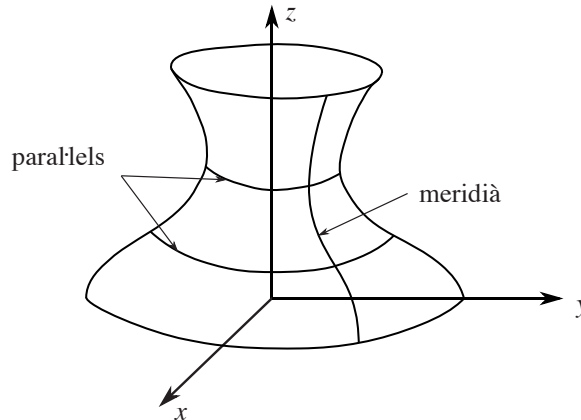
Ens proposem veure que una superfície de revolució és una superfície regular. Per fer-ho, considerem les aplicacions



$$\varphi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)), \quad 0 < u < 2\pi, \quad a < v < b,$$

$$\psi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)), \quad -\pi < u < \pi, \quad a < v < b.$$

Fig. 4.1
Superfície de revolució.



4.1.2. Lema. φ, ψ són parametritzacions regulars que cobreixen S i, per tant, S és una superfície regular.

Demostració. És clar que φ i ψ cobreixen S , per la qual cosa només cal veure que són parametritzacions regulars per concloure que S és una superfície regular.

Comprovem-ho per φ , ja que l'anàlisi per a ψ és totalment anàloga. Per definició, φ és diferenciable, hem de provar que (i) és un homeomorfisme amb la seva imatge i que (ii) el rang de la diferencial és 2 a tots els punts de la variació dels paràmetres.

(i) Comencem observant que φ és injectiva ja que, elevant al quadrat les dues primeres components i tenint present que $r > 0$,

$$\varphi(u, v) = \varphi(u', v') \implies r(v) = r(v'), \quad z(v) = z(v') \implies v = v',$$

ja que la corba α no té autointerseccions. Però, aleshores, $\cos u = \cos u', \sin u = \sin u'$ i, com que $u, u' \in (0, 2\pi)$, trobem que $u = u'$.

Pel que fa a la continuïtat de la inversa, φ^{-1} , observem que, si $u \neq \pi/2$, aleshores

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \implies u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

mentre que a prop de $u = \pi/2$ podem recuperar u en la forma

$$u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pel que fa a v , es té $(r(v), z(v)) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$, i podem recuperar v de forma contínua, ja que α és un arc de Jordan.

(ii) Si calculem els vectors tangents a les corbes coordenades, trobem

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r(v) \sin u, r(v) \cos u, 0), \\ \varphi_v &= (r'(v) \cos u, r'(v) \sin u, z'(v)),\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r(v)z'(v) \cos u, r(v)z'(v) \sin u, -r(v)r'(v)).$$

Veiem que aquest vector no s'anul·la mai, ja que $r(v) > 0$ i $r'(v), z'(v)$ no s'anul·len simultàniament perquè $\alpha(v)$ és una corba regular. ■

4.1.3. Observació. En el raonament anterior, hem considerat corbes $\alpha(v) = (r(v), z(v))$ que són arcs de Jordan del pla. A més, hem pogut completar el raonament perquè hem suposat que la corba no té punts en comú amb l'eix de gir. Podem ampliar l'espectre de corbes que defineixen superfícies de revolució segons els dos criteris següents:

(1) Corbes tancades de Jordan que no tallen l'eix de gir, com per exemple una circumferència situada en un dels semiplans definits per l'eix de gir. En aquest cas, només cal cobrir la corba amb dos arcs de Jordan i raonar sobre les superfícies generades per cadascun dels arcs. S'obté així, per exemple, el tor quan es fa girar una circumferència de radi r centrada al punt $(a, 0)$ del pla, amb $0 < r < a$.

(2) Si la corba talla l'eix de gir i és simètrica respecte d'aquest eix, aleshores es pot veure que la superfície de revolució corresponent és regular. Així, per exemple, si fem girar una circumferència al voltant d'un diàmetre, n'obtenim una esfera.

4.1.4. Proposició. *La primera i la segona formes fonamentals de la superfície de revolució S en la parametrització φ vénen donades per*

$$\begin{aligned}I &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (r')^2 + (z')^2 \end{pmatrix}, \\ II &= \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}} \begin{pmatrix} -rz' & 0 \\ 0 & r''z' - r'z'' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Demostració. Aquestes expressions es calculen fàcilment a partir de les fórmules per la primera i la segona formes fonamentals presentades al capítol anterior, i que deixem com a exercici. ■

Com que $F = 0 = f$, es dedueix:

4.1.5. Corollari. *Els meridians i els paral·lels d'una superfície de revolució són línies de curvatura de la superfície.* ■

4.1.6. A més, podem calcular fàcilment les curvatures principals, la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana, que en resulten:



$$k_{\text{meridians}} = \frac{g}{G} = \frac{r''z' - r'z''}{((r')^2 + (z')^2)^{3/2}},$$

$$k_{\text{paralels}} = \frac{e}{E} = -\frac{z'}{r((r')^2 + (z')^2)^{1/2}},$$

$$K = -\frac{z'(r''z' - r'z'')}{r((r')^2 + (z')^2)^2}$$

$$H = -\frac{r(r'z'' - z'r'') + z'((r')^2 + (z')^2)}{2r((r')^2 + (z')^2)^{3/2}}.$$

4.1.7. Observacions. El vector normal a la superfície de revolució és

$$N = \frac{1}{\sqrt{r'(v)^2 + z'(v)^2}}(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -r'(v)).$$

(1) Observeu que, al llarg dels meridians, se satisfà $\mathbf{n} = \pm N$ i que la curvatura d'aquests meridians no és altra que la curvatura de la corba plana $\alpha(v)$.

(2) Pel que fa als paral·lels, el vector normal N fa un angle constant al llarg dels paral·lels amb l'eix de gir, OZ .

4.1.8. Les fórmules anteriors se simplifiquen notablement si la corba $\alpha(v)$ està parametritzada per l'arc. En aquest cas, $(r')^2 + (z')^2 = 1$ i, derivant aquesta expressió, veiem que $z'z'' = -r'r''$; així, en resulten les expressions

$$K = -\frac{r''}{r},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{-z' + r(z'r'' - z''r')}{r}.$$

4.1.9. Exemples. (1) En el tor corresponent a $r(v) = a + r \cos v, z(v) = r \sin v, 0 < r < a$, la curvatura de Gauss ve donada per

$$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)},$$

d'on se segueix que la curvatura és zero al llarg dels paral·lels $v = \pi/2, 3\pi/2$, els punts dels quals seran parabòlics. Veiem també que $K < 0$ a la regió $\pi/2 < v < 3\pi/2$, que estarà formada per punts hiperbòlics, i que $K > 0$ a la resta de punts, que són punts el·líptics.

(2) La *catenoide* és la superfície de revolució que s'obté quan fem girar una catenària al voltant d'una recta. La catenària té equacions

$$x = r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad z = z$$

i, substituint a les fórmules anteriors, trobem que

$$K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{z}{a}\right)}, \quad H = 0.$$

De l'expressió anterior, deduïm que la curvatura és mínima per a $z = 0$, $K = -1/a^2$, i que tendeix a zero quan ens allunyem de l'origen, $z \rightarrow \pm\infty$.

(3) La *pseudoesfera* és la superfície de revolució generada per la tacteriu. Més concretament, la superfície de revolució generada per la corba

$$(r(v), z(v)) = (\sin v, \cos v + \ln(\operatorname{tg} \frac{v}{2})), \quad 0 < v < \pi/2.$$

Substituint a la fórmula de la curvatura de Gauss de 4.1.6, trobem $K \equiv -1$. És a dir, és una superfície regular de curvatura constant negativa. \square

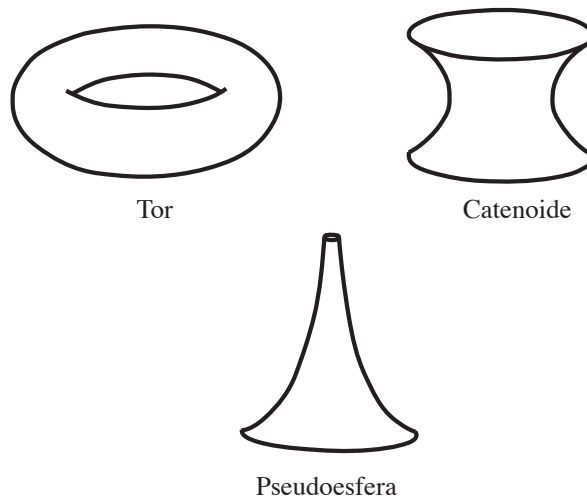


Fig. 4.2
Un tor, una catenoide i una pseudoesfera.

Observem que, suposant que la corba està parametritzada per l'arc, les superfícies de revolució de curvatura constant satisfan l'equació diferencial

$$r'' + Kr = 0.$$

Analitzant les diferents solucions d'aquesta *edo* lineal d'ordre 2 segons si K és positiva, negativa o zero, podem classificar totes les superfícies de revolució de curvatura constant. Ho farem amb detall al capítol 7.

4.2. Superfícies reglades

Les superfícies reglades són generades per una família (uniparamètrica) de rectes que es recolzen en una corba $\alpha(u)$. Per exemple, la superfície generada per les rectes que passen pel punt $(0, 0, 1)$ i es recolzen en la circumferència $z = 0, x^2 + y^2 = 1$ generen un con de \mathbb{R}^3 . En aquest exemple, veiem que, generant superfícies mitjançant una família de rectes, es poden produir singularitats, com el vèrtex del con, per la qual cosa considerem la definició de superfície reglada demanant tant sols que sigui una superfície *parametritzada*, no necessàriament regular. Més concretament:



4.2.1. Definició. Siguin $\alpha(u)$, $a < u < b$, una corba regular i $\mathbf{w}(u)$ una família de vectors no nuls que depenen de u . La *superfície reglada* associada a α i \mathbf{w} és la superfície parametritzada definida per l'aplicació

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u), \quad a < u < b, v \in \mathbb{R}.$$

Les corbes coordenades $u = \text{cnt}$ (és a dir, les rectes L_{u_0} de punt de pas $\alpha(u_0)$ i vector director $\mathbf{w}(u_0)$) són les *generatrius* de la superfície reglada, i α n'és la *directriu*.

4.2.2. Observació. Observem que en una superfície reglada se satisfà

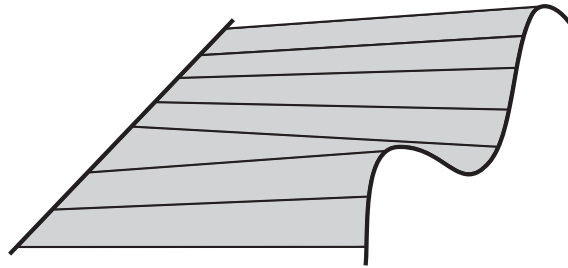
$$\varphi_{vv} = 0, \quad \mathbf{w}(u) = \varphi_v(u, 0), \quad \alpha(u) = \varphi(u, 0).$$

Recíprocament, si una superfície parametritzada φ satisfà

$$\varphi_{vv} = 0 \text{ i } G(u, 0) \neq 0, \quad \forall u,$$

aleshores, prenent $\alpha(u) = \varphi(u, 0)$ i $\mathbf{w}(u) = \varphi_v(u, 0)$, φ és una superfície reglada.

Fig. 4.3
Generatrius d'una
superfície reglada.



4.2.3. Exemple. El cilindre $x^2 + y^2 = 1$ és la superfície reglada generada per les rectes paral·leles a l'eix OZ que passen pels punts de la circumferència unitat del pla XY .

Més generalment, diem que una superfície reglada és *cilíndrica* si totes les generatrius són paral·leles a una direcció fixa. Deixem com a exercici provar que

$$\text{una superfície reglada és cilíndrica si, i només si, } \mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = 0. \quad \square$$

Diem que una superfície reglada és *no cilíndrica* si $\mathbf{w}(u) \wedge \mathbf{w}'(u) \neq 0$ per a tot u . Observem que això significa negar la condició de cilíndrica a tots els punts, per la qual cosa la propietat no cilíndrica no és exclouent amb la propietat cilíndrica: hi ha superfícies reglades que no són cilíndriques ni tampoc no cilíndriques com per exemple la superfície $\varphi(u, v) = v(u^2, 1, 0)$, per a la qual $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = (0, 0, 2u)$.

4.2.4. Exemples. (1) Les quàdriques reglades són exemples de superfícies reglades. Així, el paraboloid hiperbòlic, l'hiperboloide de revolució o el con són superfícies reglades no cilíndriques.

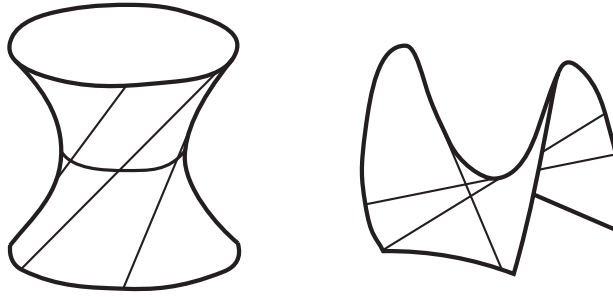


Fig. 4.4
L'hiperboloide i el
paraboloide hiperbòlic.

(2) L'*helicoid*e recte és la superfície reglada generada per una recta ortogonal a l'eix OZ que es recolza en una hèlice:

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

És una superfície reglada no cilíndrica. \square

4.2.5. Proposició. *Sigui $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u)$ una superfície reglada no-cilíndrica amb $|\mathbf{w}(u)| = 1$. Aleshores, existeix una corba $\beta(u)$ sobre la superfície tal que*

- (1) $\langle \beta'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = 0$, per a tot $u \in I$.
- (2) $\beta(u)$ no depèn de la directriu $\alpha(u)$ escollida.

A més, $\beta(u)$ està definida per

$$\beta(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u).$$

Demostració. (1) Si considerem una corba $\beta(u) = \alpha(u) + v(u)\mathbf{w}(u)$ i imposem la condició enunciatada en aquest punt, trobem

$$\langle \beta'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = \langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle + v(u)\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle = 0 \implies v(u) = -\frac{\langle \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}.$$

(2) Suposem que utilitzem una altra directriu $\bar{\alpha}(u)$ per parametritzar la superfície reglada i sigui $\bar{\beta}(u)$ la corba corresponent del punt (1). Tindrem

$$\alpha(u) + v\mathbf{w}(u) = \bar{\alpha}(u) + \bar{v}\mathbf{w}(u),$$

per la qual cosa resulta

$$\begin{aligned} \beta(u) - \bar{\beta}(u) &= \alpha(u) - \bar{\alpha}(u) + \frac{\langle \bar{\alpha}'(u) - \alpha'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u) \\ &= \alpha(u) - \bar{\alpha}(u) + \frac{\langle (\bar{v} - v)\mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(u), \mathbf{w}'(u) \rangle} \mathbf{w}(u) \\ &= (\bar{v} - v)\mathbf{w}(u) - (\bar{v} - v)\mathbf{w}(u) = 0. \end{aligned}$$

\blacksquare



La corba $\beta(u)$ caracteritzada a la proposició anterior l'anomenem *línia d'estricció* de la superfície reglada; els seus punts els anomenem *punts centrals* de la superfície. Observem que cada recta generatriu de la superfície reglada té un únic punt central.

En les condicions de la proposició, es té

$$\left. \begin{array}{l} \langle \mathbf{w}', \mathbf{w} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{w}', \beta' \rangle = 0 \end{array} \right\} \implies \beta'(u) \wedge \mathbf{w}(u) = \lambda(u) \mathbf{w}'(u),$$

amb

$$\lambda(u) = \frac{\langle \beta'(u) \wedge \mathbf{w}(u), \mathbf{w}'(u) \rangle}{|\mathbf{w}'(u)|^2}$$

Diem que $\lambda(u)$ és el *paràmetre de distribució* de la superfície reglada φ .

4.2.6. Lema. *Si, en les hipòtesis anteriors, reparametritzem la superfície de manera que la directriu sigui la línia d'estricció, tenim*

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \lambda \mathbf{w}' + v \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w},$$

i, per tant,

$$N = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \frac{\mathbf{w}'}{|\mathbf{w}'|} + \frac{v}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \frac{\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{w}'|}. \quad \blacksquare$$

D'aquest lema, se segueixen immediatament les propietats següents:

4.2.7. Proposició. *Sigui $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{w}(u)$ una superfície reglada no cilíndrica, amb línia d'estricció $\alpha(u)$, $|\mathbf{w}| = 1$, i paràmetre de distribució $\lambda(u)$. Aleshores:*

- (1) *Els punts singulars de la superfície són els punts de la línia d'estricció tals que $\lambda(u) = 0$.*
- (2) *La curvatura de Gauss de la superfície en els punts regulars és*

$$K = -\frac{\lambda(u)^2}{(\lambda(u)^2 + v^2)^2} \leq 0.$$

- (3) *La curvatura de Gauss K s'anul·la al llarg de les rectes generatrius amb punt central singular.*
- (4) *En els punts regulars de la línia d'estricció, la curvatura K atansa el valor màxim al llarg de la recta generatriu corresponent i tendeix a zero quan ens desplacem al llarg de la generatriu ($u = \text{cnt}, v \rightarrow \infty$).* ■

Podem enunciar les conclusions anteriors en termes del vector normal a la superfície S :

4.2.8. Corollari. *En les condicions de la proposició anterior, se satisfà:*

- (1) *El vector normal a S en els punts regulars de la línia d'esticció és el vector $\pm \mathbf{w}' / |\mathbf{w}'|$.*
- (2) *Si $\lambda(u_0) = 0$, el vector normal al llarg de la generatriu $u = u_0$ és constant, és igual a $\pm (\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}) / |\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}|$.*
- (3) *Al llarg de les generatrius amb $\lambda(u) \neq 0$, es té*

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} N(u, v) = \pm \frac{\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}|}. \quad \blacksquare$$

Veiem també que, si $\theta(u, v)$ denota l'angle entre els vectors $N_0(u) = \mathbf{w}'(u)$ i $N(u, v)$, aleshores

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{\lambda(u)},$$

resultat degut a Chasles:

4.2.9. Teorema de Chasles. *La tangent de l'angle orientat format pel pla tangent en un punt p d'una generatriu d'una superfície reglada (amb $K \neq 0$) i el pla central és proporcional a la distància del punt p al punt central de la generatriu.*

Superfícies desenvolupables

D'entre les superfícies reglades, les anomenades superfícies desenvolupables mereixen un estudi particular.

4.2.10. Definició. Una superfície reglada $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$ es diu que és *desenvolupable* si la recta normal és constant al llarg de les generatrius.

4.2.11. Proposició. *Una superfície reglada és desenvolupable si, i només si, $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0$.*

Demostració. Comencem observant que el determinant $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ no depèn de la directriu α escollida ni de l'expressió del vector \mathbf{w} . En particular, podem suposar que $|\mathbf{w}| = 1$ i, en el cas de les superfícies no cilíndriques, que α és la línia d'esticció.

Fixem un punt $u_0 \in I$ i en distingim dos casos, segons que $\mathbf{w}'(u_0)$ s'anulli o no:

- Si $\mathbf{w}'(u_0) = 0$, aleshores el determinant $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ s'anulla en u_0 . D'altra banda, el vector normal $\varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge \mathbf{w}$ no depèn de v al llarg de la generatriu $u = u_0$, és a dir, és constant al llarg de la generatriu u_0 . Així, es compleixen les dues condicions simultàniament.
- Si $\mathbf{w}'(u_0) \neq 0$, existeix un entorn de $u_0 \in I$ on $\mathbf{w}' \neq 0$; per tant, podem suposar que φ és no cilíndrica. Però aleshores $\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}') = \lambda(u)$ és el paràmetre de distribució, i podem aplicar el lema 4.2.6 per deduir el resultat. \blacksquare



4.2.12. Corol·lari. Si S és una superfície desenvolupable, aleshores $K = 0$.

4.2.13. Exemples. (1) Les superfícies cilíndriques són desenvolupables.

(2) Diem que una superfície reglada és *cònica* si totes les seves generatrius passen per un punt. Les superfícies còniques són desenvolupables.

(3) *Superfícies tangencials.* Sigui α una corba regular. La superfície de les rectes tangents

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$$

s'anomena *superfície tangencial* de α . Aquestes superfícies són desenvolupables. \square

De fet, els exemples anteriors exhaureixen (gairebé) totes les superfícies desenvolupables, en el sentit que precisem en el següent resultat:

4.2.14. Proposició. Sigui φ una superfície reglada no cilíndrica amb línia d'esticció la corba regular α . Aleshores, φ és una superfície desenvolupable si, i només si, φ és la superfície tangencial de α .

Demostració. Suposem que φ és desenvolupable, $\lambda = 0$. Normalitzant \mathbf{w} , podem suposar que $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$ amb $|\mathbf{w}| = 1$. Per la definició del paràmetre de distribució, $\alpha' \wedge \mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} = 0$; aleshores, \mathbf{w} és paral·lel a α' , per la qual cosa φ és la superfície tangencial de α . \blacksquare

4.2.15. Justificació del nom de les superfícies desenvolupables. El terme *desenvolupable* fa referència al fet que la superfície es pot desenvolupar sobre un pla, és a dir, que és localment isomètrica a un pla (observem que, efectivament, aquesta afirmació és compatible amb el teorema egregi de Gauss ja que la curvatura d'una superfície desenvolupable és zero). Analtzarem aquest resultat més detalladament al capítol 7, quan establím el teorema de Minding per a superfícies regulars de curvatura constant.

4.3. Superfícies minimals

4.3.1. Definició. Sigui S una superfície regular de \mathbb{R}^3 . Diem que S és una *superfície minimal* si $H = 0$.

4.3.2. Exemples. Els exemples clàssics de superfícies minimals són els següents:

(1) Un pla és una superfície minimal.

(2) L'helicoide

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

és una superfície reglada minimal.

(3) La catenoide és una superfície de revolució minimal, com hem vist a 4.1.9. \square

Per interpretar geomètricament la condició de minimalitat, analitzem la variació de l'àrea d'una regió compacta de S per una deformació ortogonal: considerem una parametrització regular $\varphi : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ i $D \subset U$ un domini tal que $\overline{D} \subset U$ és compacte. Donada una funció $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua i diferenciable a l'interior, definim la variació normal de $\varphi(\overline{D})$ determinada per h com l'aplicació $\overline{\varphi} : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$\overline{\varphi}(u, v, t) = \varphi(u, v) + th(u, v)N(u, v).$$

D'aquesta manera, per a cada valor del paràmetre t s'obtenen superfícies parametritzades

$$\varphi^t : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

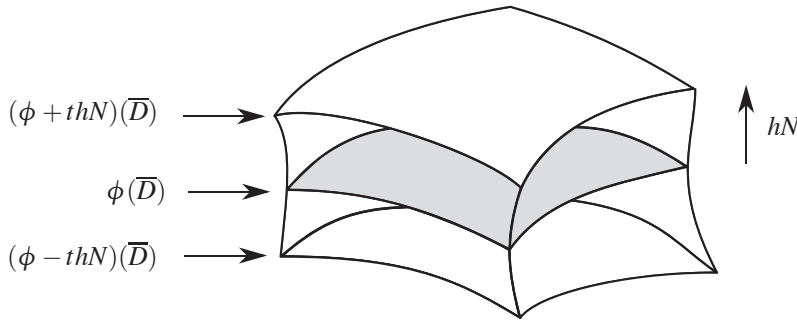


Fig. 4.5 Variació ortogonal de l'àrea.

4.3.3. Proposició. Per a ε suficientment petit, φ^t defineix una parametrització regular, d'àrea

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \sqrt{1 - 4hH + \overline{R}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

on $\overline{R} = R/(EG - F^2)$ i R és tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$.

Demostració. Calculant l'element d'àrea de φ^t , trobem

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge)t + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 2tH) + R, \end{aligned}$$

d'on se segueix la proposició. ■

Derivant $A(t)$ en el zero, trobem

$$A'(0) = - \int_{\overline{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

d'on es dedueix la interpretació de la minimalitat que buscàvem:

4.3.4. Proposició. φ és minimal si, i només si, $A'(0) = 0$ per a tota funció $h(t)$ i tota regió D amb $\overline{D} \subset U$ compacte.



4.3.5. Corol·lari. *Si la parametrització φ minimitza la variació normal de l'àrea, aleshores φ és minimal.* ■

Sembla natural demanar-se si, recíprocament, les superfícies minimals minimitzen l'àrea. Per exemple, per precisar una mica més aquesta qüestió, donada una corba tancada simple de l'espai C i una superfície minimal S que la té per frontera, minimitza S l'àrea entre les superfícies que tenen frontera C ? No sempre és així; el lector interessat pot consultar el capítol 7 del llibre d'Oprea [O] i les referències que s'hi mencionen.

4.3.6. Exemple. *Superfícies minimal de revolució.* Hem vist als exemples 4.3.2 que un pla o una catenoide són superfícies minimal. De fet, aquests dos exemples cobreixen totes les superfícies minimal de revolució, en el sentit que

Tota superfície minimal de revolució (i connexa) és part d'un pla o d'una catenoide.

En efecte, si la corba que genera la superfície de revolució és una recta ortogonal a l'eix de gir, aleshores la superfície és part d'un pla. En cas contrari, podem suposar que la corba admet una parametrització en la forma $\alpha(s) = (r(s), s)$. De les fórmules obtingudes a 4.1.6, se segueix que perquè la superfície sigui minimal s'ha de satisfer

$$H = 0 \implies k_{\text{meridians}} = -k_{\text{paralels}}$$

$$\implies \frac{r''}{(1 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{1}{r(1 + (r')^2)^{1/2}} \implies rr'' - (r')^2 - 1 = 0.$$

Com que n'hem exclòs el pla, existeix un v_0 amb $r'(v_0) \neq 0$, valor que es manté $\neq 0$ en un entorn de v_0 . En aquest entorn, l'equació anterior és equivalent a l'obtinguda multiplicant ambdós costats per $2r'(v)$,

$$\frac{2rr''}{1 + (r')^2} = \frac{2r'}{r}.$$

Integrant en ambdós costats d'aquesta igualtat, resulta

$$\ln(1 + (r')^2) = \ln(r^2) + c \implies 1 + (r')^2 = k^2 r^2 \implies \frac{r'}{\sqrt{k^2 r^2 - 1}} = 1$$

i integrant aquesta darrera equació trobem, finalment,

$$r = \frac{1}{k} \cosh(kv + c),$$

és a dir, la corba α és una catenària i, consegüentment, la superfície és part d'una catenoide. □

4.3.7. Exemple. *Superfícies minimal reglades.* Considerem ara les superfícies minimal reglades. El pla i l'helicoide són exemples coneguts i, de fet, es té el resultat següent, conegut com a *teorema de Catalan*:

Tota superfície minimal reglada (i connexa) és part d'un pla o d'un helicoide.

Comencem la prova observant que podem parametritzar la superfície en la forma $\varphi = \alpha + v\mathbf{w}$ amb

$$|\alpha'(u)| = 1, |\mathbf{w}(u)| = 1, \langle \alpha'(u), \mathbf{w}(u) \rangle = 0.$$

Només la darrera igualtat necessita justificació: si $\beta + v\mathbf{w}$ és una parametrització de la superfície reglada, busquem una corba $\alpha(u) = \beta(u) + v(u)\mathbf{w}(u)$ que satisfaci $\langle \alpha', \mathbf{w} \rangle = 0$. Imposant aquesta condició, trobem que $\langle \beta', \mathbf{w} \rangle + v' = 0$ i, integrant aquesta darrera equació, veiem que efectivament podem determinar una corba α com la demanada.

Si calculem ara la primera i la segona formes fonamentals, trobem

$$E = 1 + v\langle \alpha', \mathbf{w}' \rangle + v^2\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$e = \frac{\langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v^2\langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle}{\sqrt{E}}, \quad f = ?, \quad g = 0,$$

i, per tant, la condició de minimalitat $H = e/2E = 0$ es converteix en l'equació

$$\langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + v\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle + v^2\langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Com que l'expressió de l'esquerra de l'equació és un polinomi en v , la seva anul·lació equival a l'anul·lació dels seus coeficients; així, aquesta equació és equivalent a les equacions

$$\begin{aligned} \langle \alpha'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0, \\ \langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{w}'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Denotem per $\Pi(-, -)$ el pla generat per dos vectors. De la primera equació, en deduïm que $\alpha'' \in \Pi(\alpha', \mathbf{w})$ i, per les condicions d'ortogonalitat imposades, que $\alpha'' \parallel \mathbf{w}$. Més encara, com que ambdós vectors són unitaris, de la definició de curvatura de α se segueix que $\alpha'' = \pm\kappa\mathbf{w}$; en particular, veiem que $\langle \alpha'', \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$.

Així, la segona igualtat es redueix a $\langle \mathbf{w}'', \alpha' \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$, la qual cosa combinada amb la tercera igualtat, ens permet concloure que

$$\mathbf{w}'' \in \Pi(\alpha', \mathbf{w}) \cap \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w}).$$

Distingim ara dues possibilitats segons que els plans $\Pi(\alpha', \mathbf{w}), \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$ coincideixin o es tallin al llarg de la recta generada per \mathbf{w}'' .

Suposem que $\Pi(\alpha', \mathbf{w}) = \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$. Aleshores, \mathbf{w}'' no és paral·lel a \mathbf{w} en un punt i, per tant, tampoc en un entorn d'aquest punt. De les condicions d'ortogonalitat imposades, se segueix que $\alpha' = a\mathbf{w}'$, però aleshores

$$N = \frac{(1 \pm av)(\alpha' \wedge \mathbf{w})}{|1 \pm av|\alpha' \wedge \mathbf{w}} = \pm\alpha' \wedge \mathbf{w},$$



ja que $|\alpha' \wedge \mathbf{w}| = 1$. Si derivem respecte de u , trobem

$$N_u = \alpha'' \wedge \mathbf{w} + \alpha' \wedge \mathbf{w}' = \kappa \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} + a \mathbf{w}' \wedge \mathbf{w}' = 0,$$

ja que $\alpha'' = \pm \kappa \mathbf{w}$ i $\alpha' = a \mathbf{w}'$. És a dir, el vector normal N és constant, i S és part d'un pla.

Suposem ara que $\langle \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}'' \rangle = \Pi(\alpha', \mathbf{w}) \cap \Pi(\mathbf{w}', \mathbf{w})$, amb la qual cosa $\mathbf{w}'' \parallel \mathbf{w}$. En aquest cas, comprovem que la curvatura i la torsió de α són constants i, en conseqüència, que α és una hèlice circular. Derivant respecte del paràmetre u la igualtat $\kappa = \kappa \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \alpha'', \mathbf{w} \rangle = -\langle \alpha', \mathbf{w}' \rangle$, n'obtenim

$$\kappa' = -\langle \alpha'', \mathbf{w}' \rangle - \langle \alpha', \mathbf{w}'' \rangle = 0.$$

ja que α'', \mathbf{w}'' són paral·lels a \mathbf{w} i α' és ortogonal a \mathbf{w} . És a dir, la curvatura de α és constant. Un raonament anàleg, que deixem com a exercici, permet provar que la torsió també és constant.

En definitiva, llevat d'un moviment positiu, podem parametritzar α en la forma $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, bu)$ amb $a^2 + b^2 = 1$. Com que \mathbf{w} és unitari i paral·lel a α'' , $\mathbf{w}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, amb la qual cosa

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0) = ((a + v) \cos u, (a + v) \sin u, bu),$$

que és la parametrització d'un helicoide recte. \square

4.3.8. Observació. És interessant observar que l'helicoide i la catenoide són superfícies localment isomètriques.

Durant molts anys, fins a principis del segle XIX, el pla, l'helicoide i la catenoide van ser les úniques superfícies minimal conegudes, cosa que no resulta sorprenent en vista de les caracteritzacions dels exemples anteriors. La primera superfície minimal diferent d'aquestes la va introduir Scherk l'any 1835. Assenyalarem que, per a l'estudi de les superfícies minimal, són de gran utilitat les funcions complexes a partir de les representacions de Weierstrass-Enneper, (vegeu [O]).

4.4. Exercicis

1. Sigui S una superfície de revolució de \mathbb{R}^3 i C una corba generatriu de S . Suposant que la corba C ve parametritzada per l'arc s , sigui $\rho(s)$ la distància des de l'eix de rotació fins al punt de paràmetre s .

- (1) Demostreu el teorema de Pappus: l'àrea de S és

$$2\pi \int_0^\ell \rho(s) ds,$$

on ℓ és la longitud de C .

- (2) Utilitzant el teorema de Pappus, calculeu l'àrea d'un tor de revolució.



2. Proveu que les rectes normals a una superfície reglada no desenvolupable al llarg d'una generatriu formen un paraboloid hiperbòlic.
3. Proveu que una corba α sobre una superfície regular S és una línia de curvatura si, i només si, la superfície generada per les normals a la superfície al llarg d'aquesta corba és una superfície desenvolupable.
4. S'anomena *conoide* la superfície generada per una recta mòbil amb suport a una recta fixa, anomenada *eix* i que forma un angle constant amb l'eix. El conoide s'anomena *recte* si aquest angle és recte. Proveu que tot conoide té com a línia d'esticció l'eix. Determineu quan és desenvolupable.
5. Siguin una circumferència C i les rectes r_1 i r_2 : $C = \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$, $r_1 = \{x = 0, z + a = 0\}$, $r_2 = \{y = 0, z = a\}$, amb $a \neq 0$.
 - a) Determineu la superfície reglada amb suport en aquestes dues rectes i C .
 - b) Determineu la línia d'esticció i proveu que és una hèlice generalitzada que es projecta sobre una corba astroide.
6. Donades les circumferències:

$$C_1 = \{x^2 + y^2 = R^2, z = h\}, C_2 = \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$

trobeu la superfície desenvolupable amb suport en aquestes dues corbes.

7. Sigui γ una corba parametritzada regular amb curvatura no nul·la. Proveu que γ és la línia d'esticció de la superfície generada per les seves binormals, essent el pla rectificat de la corba el pla central de la superfície i essent el paràmetre de distribució igual a $\frac{-1}{\tau}$.
8. Estudieu la superfície d'equació

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Determineu si conté rectes i, en cas que així sigui, estudeu-la com a superfície reglada.

9. Es consideren les superfícies desenvolupables amb generatrius formant un angle recte amb l'eix OZ i tallant la paràbola d'equacions $y^2 = 2px$, $z = 0$. Determineu les equacions d'aquestes superfícies i les seves línies d'esticció.
10. Demostreu que, si φ és una *parametrització isoterma* d'una superfície (és a dir, φ satisfà $F \equiv 0$ i $E(u, v) = G(u, v) = \lambda(u, v)$), aleshores

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta(\log \lambda),$$



en què $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ és l'operador laplaciana. Utilitzeu aquesta fórmula per demostrar que, si la primera forma fonamental d'una superfície ve donada per

$$E = G = \frac{1}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}, F \equiv 0,$$

llavors la curvatura de Gauss és constant.

- 11.** Sigui φ una parametrització isoterma d'una superfície regular S . Proveu que se satisfà:

- a) $\langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = 0 = \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle$.
 b) φ és minimal si, i només si, $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$.

- 12.** *Superfície d'Enneper.* Sigui S la superfície parametritzada

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right).$$

- a) Calculeu la primera i la segona formes fonamentals de φ .
 b) Calculeu les curvatures principals, la curvatura de Gauss K i la curvatura mitjana H .
 c) Calculeu les línies de curvatura i les línies asimptòtiques de S .

- 13.** Demostreu que una superfície és minimal si, i només si, les direccions asimptòtiques són ortogonals.

- 14.** *Extret de [O], p. 139, i per fer amb Maple o amb una eina similar.*

- a) Determineu el paràmetre a per tal que la catenària $y = a \cosh(x/a)$ passi pels punts $(-0.6, 1), (0.6, 1)$.
 b) Calculeu l'àrea del catenoide generat quan aquesta catenària gira al voltant de l'eix OX i comproveu que és més gran que l'àrea de dos discs de radi 1.
 c) Deduïu que la catenoide és una superfície minimal però que no minimitza l'àrea entre les superfícies que tenen per vora dues circumferències de radi 1 perpendiculars a l'eix OX i centrades en els punts $(-0.6, 1), (0.6, 1)$.

- 15.** Sigui S una superfície desenvolupable sense punts umbilicals i sigui $\alpha(s)$ una línia de curvatura, parametritzada per l'arc, no asimptòtica.

- a) Proveu que $\alpha(s)$ és ortogonal a les generatrius.
 b) Parametritzem S per $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{w}(s)$, amb $|\mathbf{w}(s)| = 1$. Proveu que $\mathbf{w}'(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$ per a una determinada funció λ .
 c) Proveu que, si $\lambda \equiv 0$, aleshores S és un cilindre.

- d) Proveu que, si $\lambda = cnt \neq 0$, totes les generatrius tenen un punt en comú, que és la línia d'estricció de S .
- e) Proveu que, si $\lambda, \lambda' \neq 0$, aleshores S és una superfície tangencial.

16. *Una prova del teorema de Catalan fent servir corbes de Bertrand* (cf. problema 27 del capítol 1).

- a) Siguin S una superfície i $p \in S$, amb $K(p) < 0, H(p) = 0$. Proveu que per p passen dues direccions asimptòtiques ortogonals.
- b) A partir d'ara, S és una superfície reglada minimal que no és un pla. Proveu que hi ha un obert W de punts hiperbòlics.
- c) Proveu que, per un punt de W , passen dues línies asimptòtiques ortogonals, una de les quals és la generatriu per aquest punt.
- d) Proveu que, existeix un punt $p \in W$ tal que l'altra línia asimptòtica té torsió no nul·la a p .
- e) Proveu que, per a les línies asimptòtiques no generatrius, el vector normal és paral·lel a la generatriu pel punt corresponent.
- f) Deduïu que hi ha un obert en el qual les línies asimptòtiques que no són rectes comparteixen les mateixes normals i que, per tant, són corbes de Bertrand.
- g) Feu servir els resultats del problema 27 del capítol 1 per deduir que aquestes corbes són hèlices i que, com que τ és constant, S és un helicoid.

→ 5



Geodèsiques

En aquest capítol, estudiem les geodèsiques d'una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ i n'analitzem les propietats fonamentals. Aquestes corbes són, en un sentit que anirem precisant al llarg del capítol, l'equivalent del que representen les rectes al pla. Ara bé, les rectes del pla tenen diverses propietats que les caracteritzen que, en canvi, no són equivalents per a les geodèsiques. El quadre següent resumeix les propietats a les quals ens referim i dóna la referència corresponent per a les geodèsiques.

	<i>recta</i>	<i>geodèsica</i>
PR1	acceleració zero	definició 5.2.1
PR2	$\kappa = 0$	$\kappa_g = 0$: proposició 5.2.3
PR3	corba de mínima distància entre dos punts	propietat local: teorema 5.3.15
PR4	dos punts determinen una única recta	existència: teorema 5.4.2

Comencem definint les geodèsiques com a corbes d'acceleració tangencial zero, per a la qual cosa introduïm la derivada covariant d'un camp vectorial.

5.1. Derivada covariant i transport paral·lel

En tota aquesta secció, $S \subset \mathbb{R}^3$ serà una superfície regular orientada per un camp normal N . Recordem que localment tota superfície és orientable i que, per tant, les nocions que introduïrem s'apliquen a tota superfície parametritzada.

Volem definir l'acceleració tangencial d'una trajectòria de S . Més generalment, derivarem un camp vectorial al llarg de la trajectòria. Sigui $\alpha : I \rightarrow S$ una corba diferenciable.

5.1.1. Definició. Un *camp vectorial (tangent) sobre α* és una aplicació diferenciable $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$.

Un *camp vectorial (tangent) de S* és una aplicació diferenciable $w : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $w(p) \in T_pS$.



Observem que un camp vectorial $w(p)$ sobre S defineix un camp vectorial sobre tota corba α de S , $w(t) = w(\alpha(t))$.

Per exemple, el camp vectorial constant $w = (0, 0, 1)$ defineix un camp vectorial sobre el paral·lel $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ de l'esfera unitat, ja que aquest vector és tangent a l'esfera a tots els punts de la corba. Aquest camp constant, però, no defineix un camp sobre tota l'esfera.

5.1.2. Definició. Es defineix la *derivada covariant del camp vectorial w al llarg de α* com el component tangencial de $w'(t)$, és a dir,

$$\frac{Dw(t)}{dt} := \frac{dw(t)}{dt} - \left\langle \frac{dw(t)}{dt}, N \right\rangle N.$$

5.1.3. Exemples. (1) Si S és el pla \mathbb{R}^2 , la derivada covariant d'un camp vectorial $w(t)$ al llarg d'una corba $\alpha(t)$ no és altra cosa que el camp $w'(t)$.

(2) Sigui S l'esfera unitat de \mathbb{R}^3 orientada pel normal exterior. Parametritzem S amb coordenades esfèriques

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

i sigui $w = \varphi_v$ el camp vectorial tangent als meridians (corbes coordenades $u = cnt$),

$$w = \varphi_v = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v).$$

Si considerem l'equador $v = 0$, és a dir, la corba $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$; aleshores, $w(t) = (0, 0, 1)$. Aquest camp vectorial és constant i, per tant, la derivada covariant al llarg de l'equador és:

$$\frac{dw(t)}{dt} = 0 \implies \frac{Dw(t)}{dt} = 0.$$

Si β és ara el paral·lel corresponent a $v = \pi/4$, trobem:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \implies w(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\implies \frac{Dw(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dt} - \langle w'(t), N \rangle N \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, 0 \right). \end{aligned}$$

Finalment, sigui $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$ el meridià corresponent a $u = \pi/2$; aleshores, $w(t) = (0, -\sin t, \cos t)$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} &= w'(t) - \langle w'(t), N \rangle N \\ &= (0, -\cos t, -\sin t) - \langle (0, -\cos t, -\sin t), (0, \cos t, \sin t) \rangle (0, \cos t, \sin t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

No hi ha res d'especial en el meridià $u = \pi/2$; de fet, la derivada covariant d'aquest camp vectorial al llarg de qualsevol meridià és zero, com es comprova fàcilment. \square

5.1.4. El càlcul de la derivada covariant en un punt $t = 0$ parteix del càlcul de $w'(0)$, que es realitza a \mathbb{R}^3 : en efecte, per la definició de derivada

$$w'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t) - w(0)}{t},$$

i la diferència $w(t) - w(0)$ es calcula a l'espai i no a la superfície, ja que els vectors $w(0)$ i $w(t)$ pertanyen a plans tangents diferents i, per tant, aquesta diferència no defineix, en general, una direcció tangent a S . Pensant en els vectors tangents com a vectors de la varietat afí tangent (és a dir, situant-los en el punt de tangència de la superfície), la definició de derivada covariant en un punt $t = 0$ s'ajusta a l'esquema següent:

– Traslladem paral·lelament (a l'espai \mathbb{R}^3) els vectors $w(t)$ de $T_{\alpha(t)}S$ fins al punt $p = \alpha(0)$. Aquests vectors traslladats no seran necessàriament tangents a la superfície.

– Centrats tots els vectors en el punt p , calculem (a \mathbb{R}^3)

$$w'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t) - w(0)}{t}.$$

– Projectem ortogonalment aquest vector sobre el pla tangent T_pS .

Observeu que, en el segon pas, hem utilitzat un canvi de referència (de l'origen de la referència, per ser més precisos) de l'espai afí \mathbb{R}^3 , que interpretem com un trasllat paral·lel del vector $w(t_0)$ centrat al punt $\alpha(t_0)$ fins al vector $w(t_0)$ centrat ara en el punt p , cosa que podem realitzar mitjançant un camp vectorial: el camp constant definit per $\bar{w}(t) = w(t_0)$ al llarg de la corba α . Essent un camp constant, la seva derivada és zero, $\bar{w}'(t) = 0$. La noció corresponent per a una superfície és la següent:

5.1.5. Definició. *Diem que $w(t)$ és un camp paral·lel al llarg de α si*

$$\frac{Dw(t)}{dt} = 0.$$

Així, els components d'un camp $w(t)$ paral·lel al llarg de α satisfan el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$w'(t) - \langle w'(t), N(t) \rangle N(t) = 0.$$

5.1.6. Exemples. Si reprenem els exemples anteriors, trobem:

(1) Els camps paral·lels al llarg d'una corba del pla són els camps constants.

(2) El camp de vectors tangents als meridians d'una esfera és paral·lel al llarg de l'equador o dels meridians (casos α, γ), però no ho és al llarg d'un paral·lel que no sigui l'equador (cas β). \square



5.1.7. Proposició. *Sigui $p \in S$ un punt de S , $w_0 \in T_p S$ un vector tangent a S en p i $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular amb $\alpha(0) = p$. Aleshores, existeix un únic camp vectorial $w(t)$, $t \in I$, que és paral·lel al llarg de α i que satisfà la condició inicial $w(0) = w_0$.*

Demostració. Volem trobar un camp vectorial $w(t)$ tangent a S i que sigui paral·lel al llarg de α . Observem que, si apliquem el teorema d'existència i unicitat de les equacions diferencials ordinàries a l'equació anterior, obtindrem un camp vectorial $w(t)$ a \mathbb{R}^3 que no sabem si, per a tot t , es mantindrà tangent a la superfície. Per tal d'aconseguir aquesta tangència, variem les equacions imposant que $w(t)$ sigui un camp tangent, és a dir, tal que $\langle w(t), N(t) \rangle = 0$: es té

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} &= w'(t) - \langle w'(t), N(t) \rangle N(t) \\ &= w'(t) - ((\langle w(t), N(t) \rangle)' - \langle w(t), N'(t) \rangle) N(t) \\ &= w'(t) + \langle w(t), N'(t) \rangle N(t) - (\langle w(t), N(t) \rangle)' N(t), \end{aligned}$$

així, si imposem que $\langle w(t), N(t) \rangle = 0$, el camp $w(t)$ serà paral·lel si, i només si,

$$w'(t) + \langle w(t), N'(t) \rangle N(t) = 0. \quad (\dagger)$$

Ara sí, apliquem el teorema d'existència i unicitat de les *edos* lineals a aquesta darrera equació per tal d'obtenir una única solució tal que $w(0) = w_0$. Per comprovar que el camp resultant és tangent a S , només cal veure que $\langle w(t), N(t) \rangle$ és constant, ja que aquesta funció val zero per a $t = 0$, i això se segueix de

$$\begin{aligned} (\langle w(t), N(t) \rangle)' &= \langle w'(t), N(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle \\ &= -\langle \langle w(t), N'(t) \rangle N(t), N(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle \quad \text{per ser solució de } (\dagger) \\ &= -\langle w(t), N'(t) \rangle + \langle w(t), N'(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

5.1.8. Definició. Siguin $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular, $p = \alpha(0)$ i $q = \alpha(1)$. Es defineix el *transport paral·lel de p a q al llarg de α* com l'aplicació

$$\tau_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$$

que a tot vector tangent $w_0 \in T_p S$ associa el vector $w(1) \in T_q S$, essent $w(t)$ l'únic camp paral·lel al llarg de α amb condició inicial $w(0) = w_0$.

Atès que el sistema d'*edos* que defineix els camps paral·lels és lineal, aquesta aplicació τ_α és una aplicació lineal.

5.1.9. Proposició. *Si w, \bar{w} són dos camps paral·lels al llarg d'una corba α , aleshores el producte escalar $\langle w(t), \bar{w}(t) \rangle$ és constant.*

Demostració. En efecte, es té

$$\frac{d}{dt} \langle w(t), \bar{w}(t) \rangle = \langle w'(t), \bar{w}(t) \rangle + \langle w(t), \bar{w}'(t) \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} w(t), \bar{w}(t) \right\rangle + \left\langle w(t), \frac{D}{dt} \bar{w}(t) \right\rangle = 0,$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat la hipòtesi que els camps són paral·lels. ■

5.1.10. Corollari. (1) *El mòdul d'un camp paral·lel al llarg d'una corba α es manté constant.*

(2) *L'angle entre dos camps paral·lels al llarg d'una corba α es manté constant.* ■

I, en particular:

5.1.11. Corollari. *El transport paral·lel al llarg de α , $\tau_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$, és una isometria d'espais vectorials euclidians.* ■

Veiem, doncs, que la derivada covariant dóna lloc al transport paral·lel. Recíprocament, si es coneix el transport paral·lel es pot recuperar la derivada covariant seguint l'esquema de 5.1.4 però ara mantenint-nos en el pla tangent:

5.1.12. Proposició. *Sigui $w(t)$ un camp vectorial sobre una corba α de S i $p = \alpha(0)$. Denotem per $\tau_t : T_{\alpha(t)} S \rightarrow T_p S$, el transport paral·lel al llarg de α ; aleshores*

$$\frac{Dw(t)}{dt} \Big|_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t(w(t)) - w(0)}{t}.$$

Demostració. Siguin e_1, e_2 vectors de $T_p S$ que formen una base ortonormal, i denotem per $e_1(t), e_2(t)$ els camps paral·lels al llarg de α que generen. El camp vectorial $w(t)$ s'expressa de la forma

$$w(t) = a(t)e_1(t) + b(t)e_2(t),$$

on les funcions $a(t), b(t)$ són diferenciables, ja que $a(t) = \langle w(t), e_1(t) \rangle, b(t) = \langle w(t), e_2(t) \rangle$. Com que el transport paral·lel és lineal i els camps $e_1(t), e_2(t)$ són paral·lels, es té

$$\tau_t(w(t)) = a(t)\tau_t(e_1(t)) + b(t)\tau_t(e_2(t)) = a(t)e_1 + b(t)e_2,$$

i, per tant,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t(w(t)) - w(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(t)e_1 + b(t)e_2 - a(0)e_1 - b(0)e_2}{t} = a'(0)e_1 + b'(0)e_2.$$

Calculem ara la derivada covariant de $w(t)$ al llarg de α :

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{D(a(t)e_1(t) + b(t)e_2(t))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= a'(0)e_1 + a(0) \frac{De_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} + b'(0)e_2 + b(0) \frac{De_2(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= a'(0)e_1 + b'(0)e_2, \end{aligned}$$

i retrobem el càlcul anterior, amb això s'acaba la prova. ■



Derivada covariant i transport paral·lel en coordenades locals

Per tal de calcular la derivada covariant en coordenades locals, fixem $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular positiva (és a dir, amb $N = \varphi_u \wedge \varphi_v / |\varphi_u \wedge \varphi_v|$), en la qual la corba α correspon a $(u(t), v(t))$ i el camp vectorial w s'escriu $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$.

5.1.13. Proposició. *La derivada covariant de w al llarg de la corba α ve donada per*

$$\begin{aligned} \frac{Dw(t)}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\varphi_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v. \end{aligned}$$

Demostració. Calculem $w'(t)$ a partir de l'expressió $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$,

$$\begin{aligned} w'(t) &= (a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v)' \\ &= a'(t)\varphi_u + a(t)[\varphi_{uu}u' + \varphi_{uv}v'] + b'(t)\varphi_v + b(t)[\varphi_{uv}u' + \varphi_{vv}v'] \\ &= a'(t)\varphi_u + a(t)[(\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v')\varphi_u + (\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v')\varphi_v] \\ &\quad + b'(t)\varphi_v + b(t)[(\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{12}^2 v')\varphi_u + (\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v')\varphi_v] \\ &\quad + [a(t)(e + f) + b(t)(f + g)]N. \end{aligned}$$

Per tant, el component tangencial de $w'(t)$ és el que apareix a l'enunciat de la proposició.

D'aquí se segueix que l'equació diferencial dels camps paral·lels ve donada per les equacions que enunciem a continuació.

5.1.14. Equació dels camps paral·lels. En una parametrització regular φ , un camp $w = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ és paral·lel al llarg de la corba $(u(t), v(t))$ si, i només si, satisfà les equacions diferencials

$$\begin{aligned} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' &= 0, \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' &= 0. \end{aligned}$$

5.1.15. Observació. Les fórmules locals que hem trobat demostren que *la derivada covariant i la noció de camp paral·lel al llarg d'una corba són conceptes intrínsecs*, ja que estan determinats pels símbols de Christoffel que, com sabem, depenen al seu torn de la primera forma fonamental.

5.1.16. Exemples. (1) L'aplicació $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ estableix una isometria local entre un obert del pla i el cilindre de radi 1. Coneixem el transport paral·lel al pla i, per l'observació anterior, sabem calcular el transport paral·lel en el cilindre. Anàlogament, es calcula el transport paral·lel sobre un con mitjançant la isometria local, que consisteix a tallar el con al llarg d'una generatriu i desplegar la superfície resultant sobre un pla. Animem el lector a calcular-ne diferents exemples.

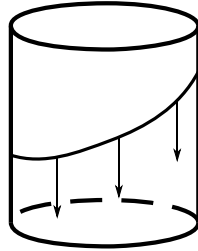


Fig. 5.1
Transport paral·lel en un cilindre.

(2) Considerem la corba següent de l'esfera: partim del pol nord, seguim per un meridià fins a l'equador, seguim per l'equador fins a completar una longitud (angle) θ i tornem al pol nord pel meridià d'aquesta longitud. Sigui w un vector unitari tangent al primer meridià del recorregut en el pol nord. Hem comprovat en exemples anteriors que el camp tangent a un meridià és paral·lel, per la qual cosa el transport paral·lel de w fins a trobar l'equador és el vector tangent $(0, 0, -1)$, però hem vist també que el camp constant $(0, 0, -1)$ és paral·lel al llarg de l'equador; per tant, només queda transportar aquest vector al llarg del segon meridià. Un cop més, en resulta el camp tangent a aquest meridià i, en definitiva, veiem que el vector $\tau(w)$ és un vector tangent al pol nord que fa un angle θ amb w .

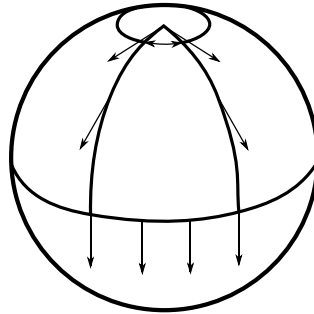


Fig. 5.2
Transport paral·lel sobre una esfera.

Observem que, en aquest exemple, el transport paral·lel depèn de l'angle θ escollit. En general, el transport paral·lel depèn de la corba α ; no és així en el pla, el cilindre o el con. De fet, es pot demostrar que, si el transport paral·lel sobre una superfície S és independent del camí utilitzat per realitzar-lo, aleshores $K \equiv 0$. \square

5.2. Geodèsiques

En aquesta secció, definim la noció de geodèsica, establim un teorema d'existència i en donem els primers exemples. Com a la secció anterior, fixem $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular orientada i $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular.

5.2.1. Definició. Diem que α és una *geodèsica* si el camp tangent $\alpha'(t)$ és un camp paral·lel al llarg de α . És a dir,

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0.$$



En termes físics, la definició de geodèsica correspon a aquelles corbes que tenen acceleració tangencial nul·la. Així, segons la segona llei de Newton, serien les trajectòries de les partícules sobre les quals no actua cap força (tangencial).

5.2.2. Exemples. (1) Les geodèsiques del pla són les rectes recorregudes linealment. En efecte, si $(u(t), v(t))$ és una geodèsica de \mathbb{R}^2 , satisfarà

$$\alpha''(t) = (u''(t), v''(t)) = 0 \implies \alpha(t) = (at + b, ct + d).$$

(2) Atenent la definició de la derivada covariant per a $\alpha'(t)$, $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), N \rangle N$, veiem que

$$\alpha''(t) = 0 \implies \alpha \text{ geodèsica}$$

i, per tant, tota recta, recorreguda linealment, continguda en una superfície S és una geodèsica de S .

(3) Per a una corba parametritzada per l'arc, $\alpha''(s) = \kappa n$ i, per tant, si $\kappa \neq 0$,

$$\alpha \text{ geodèsica} \iff n = \pm N.$$

Això ens permet estudiar algunes geodèsiques de les superfícies de revolució: donada una corba regular $(r(v), 0, z(v))$, amb $r(v) > 0$, considerem la superfície de revolució

$$\varphi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)).$$

És immediat comprovar que els meridians $u = u_0$ (parametritzats per l'arc) són geodèsiques, ja que per als meridians $n = \pm N$. Pel que fa als paral·lels $v = v_0$, seran geodèsiques aquells per als quals el vector normal a la superfície coincideix amb la direcció normal a la corba, que no és altra que la del radi de revolució. Per tant, els paral·lels que són geodèsiques són aquells en què la tangent a la corba $\alpha(v)$ en el punt v_0 és paral·lela a l'eix de gir.

En particular, veiem que en un cilindre tots els paral·lels són geodèsiques, mentre que a l'esfera només el paral·lel corresponent a l'equador és una geodèsica i no hi ha paral·lels geodèsics en un paraboloid de revolució.

Més endavant analitzarem altres geodèsiques de les superfícies de revolució. \square

5.2.3. Proposició. $\alpha(t)$ és una geodèsica si, i només si, t és un múltiple del paràmetre arc de α i $\kappa_g = 0$.

Demostració. Suposem que α és una geodèsica. Pel corollari 5.1.10, el mòdul de $\alpha'(t)$ és constant al llarg de α , $|\alpha'(t)| = c$. Per tant, si s és el paràmetre arc, es té

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^s |\alpha'(t)| dt = c \implies s = ct.$$

Calculem ara la derivada del vector tangent \mathbf{t} respecte de s ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Per hipòtesi, α és una geodèsica, és a dir, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ és ortogonal a S i, per tant, també ho és $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$. De la definició de curvatura geodèsica, se segueix que $\kappa_g = 0$.

El recíproc, que es demostra de forma similar, el deixem com a exercici per al lector. ■

Si la corba $\alpha(t)$ no està parametritzada per l'arc i $c(t) = |\alpha'(t)|$, és un exercici demostrar que se satisfà

$$\alpha''(t) = c'(t)\mathbf{t} + \kappa_g c^2(t)(N \wedge \mathbf{t}) + \langle \alpha''(t), N \rangle N.$$

(Indicació per a la prova: de $\langle \alpha', \alpha' \rangle = c^2$ se segueix que $\langle \alpha'', \mathbf{t} \rangle = c'(t)$ i ara només cal emprar la fórmula de la curvatura d'una corba quan el paràmetre no és l'arc per veure que $\langle \alpha'' \wedge \mathbf{t}, N \rangle = c^2 \kappa_g$.)

Aquesta expressió dóna una altra prova de la proposició anterior, ja que perquè el component tangencial de $\alpha''(t)$ sigui zero s'ha de donar simultàniament que $c'(t) = 0$ (és a dir, t és múltiple del paràmetre arc) i $\kappa_g = 0$.

5.2.4. Equacions de les geodèsiques. En una parametrització regular φ , el camp vectorial $\alpha'(t)$ té components (u', v') ; així, les equacions diferencials del camp paral·lel $\alpha'(t)$ s'escriuen

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0, \end{aligned}$$

que és un sistema d'equacions diferencials ordinàries d'ordre dos. Observem que aquest sistema no és lineal.

Del teorema d'existència i unicitat, es dedueix:

5.2.5. Proposició. *Donats un punt $p \in S$ i un vector tangent $w \in T_p S$, existeix una única geodèsica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = w$.* ■

D'altra banda, les equacions de les geodèsiques depenen tan sols dels símbols de Christoffel, per la qual cosa les geodèsiques són intrínseques, cosa que enunciem de la forma següent.

5.2.6. Teorema. *Sigui $f : S \rightarrow S'$ una isometria local entre dues superfícies regulars i $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular. Aleshores, α és una geodèsica de S si, i només si, $f\alpha$ és una geodèsica de S' .* ■



5.2.7. Exemples. (1) Les geodèsiques del pla són les rectes. Considerant la isometria local habitual del pla al cilindre, deduïm del teorema anterior que les geodèsiques del cilindre són les imatges de les rectes, que no són sinó les hèlices circulars.

(2) *Geodèsiques de les superfícies de revolució.* Reprenem l'exemple de les superfícies de revolució

$$\varphi(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v)).$$

Dels càlculs efectuats al capítol 4, deduïm que les equacions de les geodèsiques són

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2rr'}{r^2}u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{rr'}{(r')^2 + (z')^2}(u')^2 + \frac{r'r'' + z'z''}{(r')^2 + (z')^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ja hem vist que els meridians són geodèsiques. Analitzem-ho ara mitjançant aquestes equacions diferencials: fent $u = cnt$, les equacions esdevenen

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ v'' + \frac{r'r'' + z'z''}{(r')^2 + (z')^2}(v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

La primera equació se satisfà trivialment, mentre que la segona reflecteix que hem de recórrer la corba amb un paràmetre particular, que sigui múltiple del paràmetre arc. En efecte, si la corba $u = cnt$ està parametritzada per un múltiple de l'arc, satisfà

$$((r')^2 + (z')^2)(v')^2 = cnt \implies (v')^2 = \frac{c}{(r')^2 + (z')^2}$$

i, derivant respecte de t ,

$$2v'v'' = -\frac{2(r'r'' + z'z'')}{((r')^2 + (z')^2)^2}v' \implies v'' = -\frac{(r'r'' + z'z'')}{(r')^2 + (z')^2}(v')^2,$$

ja que $v' \neq 0$. És a dir, satisfà també la segona equació.

Si considerem ara els paral·lels $v = cnt$, les equacions diferencials es redueixen a

$$\begin{aligned} u'' &= 0, \\ -\frac{rr'}{(r')^2 + (z')^2}(u')^2 &= 0. \end{aligned}$$

per la qual cosa seran geodèsiques aquells paral·lels tals que $r'(v_0) = 0$, com es dedueix de la segona equació, ja que $r(v_0)$ i u' no s'anul·len. És a dir, aquells paral·lels tals que la tangent a la corba $(r(v), z(v))$ sigui paral·lela a l'eix de gir, com ja havíem vist anteriorment.

Analitzem ara les geodèsiques en una direcció que no sigui coordinada. Observem que, si la multipliquem per r^2 , la primera equació es pot escriure de la forma

$$(r^2 u')' = 0, \text{ és a dir, } r^2 u' = c,$$

on c és una constant. D'altra banda, si $\theta(s)$ és l'angle que forma la geodèsica amb els paral·lels que va tallant, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, es té

$$\cos \theta = \frac{|\langle \varphi_u, u' \varphi_u + v' \varphi_v \rangle|}{\sqrt{E}} = |ru'|,$$

per la qual cosa l'equació anterior s'escriu de la forma

$$r \cos \theta = |c| \text{ (= } cnt \text{)}.$$

Aquesta relació es coneix com a *teorema de Clairaut*.

El teorema de Clairaut té la interpretació mecànica següent: les geodèsiques són les trajectòries de les partícules sobre les quals no actuen altres forces que la normal, que les obliga a mantenir-se a la superfície. En una superfície de revolució, la força normal en un punt p està en el pla que conté l'eix de gir i , per tant, el seu moment al voltant d'aquest eix és zero i, en conseqüència, el moment angular d'aquesta partícula és constant. Però, si la partícula es mou amb velocitat constant al llarg de la geodèsica, el component de la velocitat al llarg del paral·lel que passa per p és $\cos \theta$ i, per tant, el moment angular és proporcional a $r \cos \theta$. \square

En general, no és possible resoldre les equacions de les geodèsiques de forma explícita. En el cas de les superfícies de revolució, es pot demostrar que aquestes equacions es poden resoldre per quadratures (integrals); amb el teorema de Clairaut, hem vist com, en alguns casos, podem extreure informació geomètrica de les equacions sense resoldre-les completament.

5.2.8. Als exemples anteriors, hem vist que les equacions no són independents. Per exemple, en el cas dels meridians, hem vist que una equació se satisfà automàticament mentre que l'altra reflecteix que el paràmetre és un múltiple de l'arc. Aquest fet és general (en deixem la prova com a exercici per al lector): *si α està parametritzada per l'arc i no és una corba coordinada, la segona equació de les geodèsiques és conseqüència de la primera.*

5.3. L'aplicació exponencial: propietats minimal de les geodèsiques

L'aplicació exponencial que definim en aquesta secció ens permetrà introduir sistemes de coordenades locals especialment útils per a l'anàlisi de les propietats de les geodèsiques.

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular orientada i $p \in S$. Si $w \in T_p S$, denotem per $\gamma_w : (-\varepsilon_w, \varepsilon_w) \rightarrow S$ l'única geodèsica de S tal que $\gamma_w(0) = p$ i $\gamma_w'(0) = w$. Sigui

$$\mathcal{E}_p = \{w \in T_p S \mid \gamma_w(t) \text{ està definida en } t = 1\}.$$

5.3.1. Definició. Es defineix l'*aplicació exponencial de S a p* segons

$$\begin{aligned} \exp_p : \mathcal{E}_p &\longrightarrow S \\ w &\longmapsto \gamma_w(1) \end{aligned}$$



Abans d'establir les propietats de l'exponencial, observem que, reescalant la geodèsica en la direcció de w , podem suposar que està definida a $t = 1$. Més concretament,

5.3.2. Lema. Si $0 \neq c \in \mathbb{R}$, aleshores la geodèsica $\gamma_{cw}(t)$ està definida a l'interval

$$\gamma_{cw} : \left(-\frac{\varepsilon_w}{c}, \frac{\varepsilon_w}{c}\right) \longrightarrow S,$$

i satisfà

$$\gamma_{cw}(t) = \gamma_w(ct).$$

Demostració. Considerem la corba $\bar{\gamma}_w(t) := \gamma_w(ct)$. Aleshores, $\bar{\gamma}_w(0) = p$ i $\bar{\gamma}'_w(0) = c\gamma'_w(0) = cw$. A més, $\bar{\gamma}$ és una geodèsica, ja que

$$\frac{D\bar{\gamma}'_w(t)}{dt} = c^2 \frac{D\gamma'_w(t)}{dt} = 0.$$

Del teorema d'existència i unicitat, se segueix que $\bar{\gamma}_w(t) = \gamma_{cw}(t)$. ■

5.3.3. Exemples. (1) Si S és el pla XY , aleshores el pla tangent a un punt p és el propi pla i les geodèsiques per p són les rectes $p + t\mathbf{v}$, on \mathbf{v} és un vector del pla. Així,

$$\exp_p(\mathbf{v}) = p + \mathbf{v}.$$

Observem que, si en lloc de prendre tot el pla XY considerem la superfície definida per un disc obert de radi R al voltant de p , l'aplicació exponencial es defineix per la mateixa expressió, però ara estarà definida només per als vectors \mathbf{v} amb $|\mathbf{v}| < R$.

(2) Sigui $p = (0, 0, 1)$ el pol nord de l'esfera \mathbb{S}^2 . El pla tangent de l'esfera a p és el pla $z = 0$ i les geodèsiques que passen per p són els meridians de l'esfera, amb la qual cosa, si $\mathbf{v} \neq 0$, l'exponencial és l'aplicació

$$\exp_p(v) = \cos(|\mathbf{v}|) \cdot p + \sin(|\mathbf{v}|) \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Observeu que l'exponencial està definida per a tot \mathbf{v} , però que no és injectiva. □

5.3.4. Observacions. (1) El lema anterior assegura que l'exponencial està definida en totes les direccions del pla tangent; només cal ajustar-ne la velocitat. A més, en resulta que \mathcal{O}_p és un conjunt estrellat respecte de l'origen ja que, si \exp_p està definida a w , també ho estarà per a tw , $0 \leq t \leq 1$.

(2) La geodèsica per p en la direcció w serà

$$\gamma_w(t) = \exp_p(tw) = \gamma_{tw}(1).$$

D'aquesta manera, es produeix una dualitat *direcció tangent-geodèsica*: analitzar el comportament de la geodèsica respecte de t és equivalent a analitzar el comportament de $\gamma_{tw}(1)$ respecte del vector tangent tw .

(3) Es té

$$\gamma_w(1) = \gamma_w\left(\frac{|w|}{|w|}\right) = \gamma_{\frac{w}{|w|}}(|w|)$$

i, per tant, la longitud de la geodèsica γ_w entre p i $q = \exp_p(w)$ és $|w|$. És a dir, la imatge del vector w per l'aplicació exponencial és el punt que s'obté en recórrer la geodèsica radial del vector tangent w una longitud de magnitud $|w|$.

5.3.5. Propietats de l'aplicació exponencial. *El conjunt \mathcal{E}_p i l'aplicació \exp_p satisfan:*

- (1) $\mathcal{E}_p \subset T_pS$ és un entorn obert estrellat de 0.
- (2) L'aplicació $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow S$ és diferenciable en un entorn obert de p .
- (3) La diferencial $d(\exp_p)_0 : T_pS \rightarrow T_pS$ és un isomorfisme (de fet, és la identitat) i, per tant, \exp_p és un difeomorfisme local a p .

Demostració. Les propietats (1) i (2) són conseqüència del teorema de dependència de les solucions d'una *edo* de les condicions inicials. En efecte, aquest resultat, aplicat al cas de les geodèsiques, assegura l'existència de $\varepsilon, \delta > 0$ i una aplicació diferenciable

$$\begin{aligned} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta(0) &\longrightarrow S \\ (t, w) &\longmapsto \gamma_w(t) \end{aligned}$$

Si prenem $c = \varepsilon/2$, aleshores $\gamma_{cw}(t) = \gamma_{\frac{c}{2}w}(t) = \gamma_w(\frac{c}{2}t)$ està definida per

$$|t| < 2, \quad |w| < \delta.$$

Així, \mathcal{E}_p conté p a l'interior i l'exponencial està definida i és diferenciable en el disc obert $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ de T_pS .

Per demostrar (3), considerem la corba del pla tangent donada per $\alpha(t) = tw$. Aleshores,

$$\exp_p(\alpha(t)) = \exp_p(tw) = \gamma_w(t),$$

i, per tant, segons la definició d'aplicació diferencial, trobem

$$d(\exp_p)_0(w) = \frac{d}{dt} \exp_p \alpha(t)|_{t=0} = \gamma'_w(0) = w,$$

és a dir, $d(\exp_p)_0 = id$. ■

5.3.6. Definició. Anomenem *geodèsiques radials per p* les imatges de les rectes (de fet, segments de recta) tw de T_pS per l'aplicació exponencial \exp_p , i *cercles geodèsics* les imatges de les circumferències de centre 0 de T_pS .

Observeu que, malgrat el nom, els cercles geodèsics no són corbes geodèsiques. Donat $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset \mathcal{E}_p$, denotem per $B_\delta(p)$ el disc geodèsic imatge de $B_\delta(0) \subset T_pS$



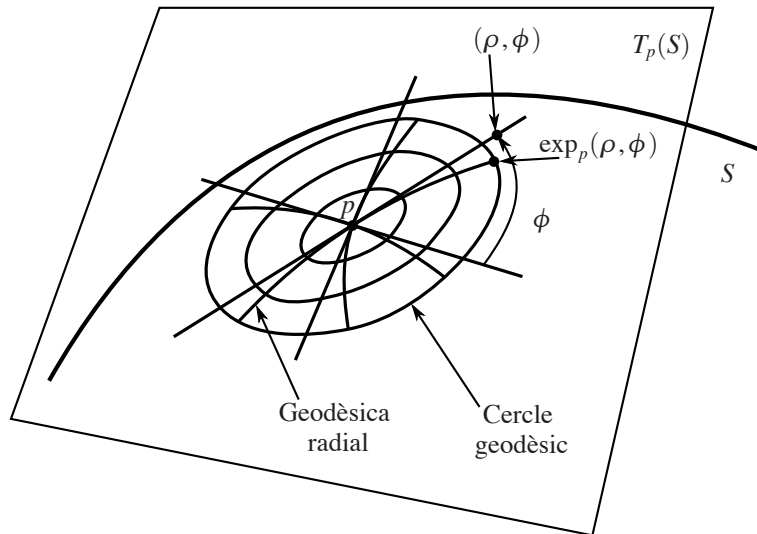
per l'aplicació exponencial. Per defecte, en els raonaments que segueixen prendrem δ de manera que $\bar{B}_\delta(0) \subset \mathcal{E}_p$ i, per tant, que la vora $\partial\bar{B}_\delta(0)$ sigui difeomorfa a la vora $\partial B_\delta(p)$.

Atès que l'aplicació exponencial és un difeomorfisme local al voltant de p , la podem utilitzar per traslladar diferents sistemes de coordenades del pla tangent a la superfície.

5.3.7. Definició. Diem que un entorn $V \subset S$ de p és un *entorn normal* si $V = \exp_p(U)$ tal que $\exp_p : U \rightarrow V$ és un difeomorfisme. En un entorn normal V , considerem els sistemes de coordenades següents:

- (1) *coordenades normals* de S en p corresponents, per l'aplicació exponencial, a un sistema de coordenades rectangulars del pla tangent T_pS .
- (2) *coordenades geodèsiques polars* corresponents, per l'aplicació exponencial, a les coordenades polars del pla tangent.

Fig. 5.3
L'aplicació exponencial:
coordenades polars
geodèsiques.



5.3.8. Així, si e_1, e_2 és una base ortonormal de T_pS i $w = ae_1 + be_2$, les coordenades normals de $q = \exp_p(w)$ són (a, b) . Observem que els eixos de coordenades es transformen en geodèsiques de S i que al punt p se satisfà

$$I(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pel que fa a les coordenades geodèsiques polars (r, θ) , estan ben definides en un obert del tipus $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$, que no conté la geodèsica radial que correspondria a l'angle $\theta = 0$. Les corbes coordenades corresponents són les geodèsiques radials i els cercles geodèsics.

La proposició següent estableix les propietats de la primera forma fonamental expressades en coordenades polars geodèsiques.

5.3.9. Proposició. Sigui $\varphi : U \setminus \ell \rightarrow V \setminus L$ un sistema de coordenades polars geodèsiques. Aleshores,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = 1.$$

Demostració. Per la pròpia definició, les corbes $\theta = cnt$ són les radials geodèsiques i, per tant, $E = 1$.

Provem que $F = 0$. Les equacions de les geodèsiques en el sistema de coordenades polars s'escriuen

$$\begin{aligned} r'' + \Gamma_{11}^1 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^1 r' \theta' + \Gamma_{22}^1 (\theta')^2 &= 0, \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^2 r' \theta' + \Gamma_{22}^2 (\theta')^2 &= 0. \end{aligned}$$

i com que les corbes $\theta = cnt$ són geodèsiques, deduïm de la segona equació que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Ara, tenint present que $E = 1$, del sistema lineal que determina Γ_{11}^1 deduïm

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}E_r = 0 \implies \Gamma_{11}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0 &\implies 0 = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_r - \frac{1}{2}E_\theta \implies F_r = 0, \end{aligned}$$

és a dir, F no depèn de r . Així, per provar que $F = 0$ només cal veure que el límit de $F(\theta)$ sobre una geodèsica radial $\theta = cnt$, quan r tendeix a zero, és zero.

Siguin $q \in V$ un punt de l'entorn normal V i $\gamma(s)$ la geodèsica radial que va de p a q parametritzada per l'arc. Sigui $\alpha(\theta)$ el cercle geodèsic que passa per q , $0 \leq \theta \leq 2\pi$; si $q = p$, $\alpha(\theta)$ és la corba constant, $\alpha(\theta) = p$. Aleshores,

$$F(q) = F(r, \theta) = \left\langle \frac{d\alpha}{d\theta}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle.$$

La funció $F(r, \theta)$ no està definida per a $r = 0$, però, si fixem la geodèsica radial $\theta = cnt$, el segon membre de la igualtat anterior està definit sobre tot punt d'aquesta geodèsica, ja que γ passa per p a l'instant $s = 0$ i α és constant a p . Atès que a p se satisfà $d\alpha/d\theta = 0$, en resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\theta}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle = 0.$$

Calculem ara el límit a p de G : considerem el sistema rectangular de coordenades normals

$$\bar{u} = r \cos \theta, \quad \bar{v} = r \sin \theta.$$

Aleshores, es té

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(r, \theta)} = r \sqrt{EG - F^2},$$



que, segons els càlculs anteriors, es redueix a

$$\sqrt{G} = r\sqrt{EG - F^2}, \quad r \neq 0,$$

amb la qual cosa resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} G = 0,$$

ja que les coordenades rectangulars tenen per primera forma fonamental a p la matriu identitat. A més, es té

$$(\sqrt{G})_r = \sqrt{EG - F^2} + r \left(\sqrt{EG - F^2} \right)_r \implies \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = 1. \quad \blacksquare$$

El fet que $F = 0$ és conegut com a *lema de Gauss* i es pot enunciar en la forma:

5.3.10. Corol·lari. *Les geodèsiques radials i els cercles geodèsics són ortogonals.* ■

Propietats mínims de les geodèsiques

Ens proposem utilitzar les coordenades polars geodèsiques per analitzar la relació entre les geodèsiques i les corbes de la superfície que minimitzen la distància entre dos punts.

Sigui S una superfície connexa. Atès que S és arc-connexa, per a qualssevol punts $p, q \in S$ existeix una corba contínua $\alpha : I \rightarrow S$ amb $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$. En general, una corba contínua no té per què ser de longitud finita, per la qual cosa una trajectòria α pot no ser convenient per mesurar la distància entre p i q .

5.3.11. Definició. Diem que una corba contínua $\alpha : I \rightarrow S$ és diferenciable a trossos si existeix una partició finita de l'interval $I, s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ tal que $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$ és diferenciable.

Per a una corba diferenciable a trossos, definim la longitud segons

$$\ell(\alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(\alpha; s_i, s_{i+1}).$$

5.3.12. Observació. Dos punts qualssevol $p, q \in S$ d'una superfície connexa S poden unir-se per una corba diferenciable a trossos.

En efecte, sigui $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow S$ una corba (contínua) que uneix p i q . Considerem un recobriments de S per a entorns coordenats (U_i, φ_i) i, per a cada $t \in I$, un interval obert $I_t \subset I$ tal que $\alpha(I_t) \subset \varphi_i(U_i)$ per a algun i . Per la compacitat de I , existeix un subrecobriments finit I_1, \dots, I_n de I , és a dir, hi ha una partició $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tal que $\alpha(t_i, t_{i+1}) \subset \varphi_j(U_j)$ per a algun j . Ara, $\alpha(t_i)$ i $\alpha(t_{i+1})$ poden unir-se per una corba diferenciable i es conclou fàcilment l'afirmació realitzada.

Definim ara la *distància intrínseca de la superfície S* segons

$$d_S(p, q) = \inf \ell(\alpha_{p,q}),$$

on $\alpha_{p,q}$ recorre el conjunt de corbes diferenciables a trossos que uneixen p i q . És un exercici demostrar que d_S defineix una distància a S i que la topologia associada és la mateixa que la topologia de subespai $S \subset \mathbb{R}^3$.

5.3.13. Definició. Diem que una corba diferenciable a trossos $\alpha_{p,q}$ entre p i q és de *distància mínima* (o *minimal*, per simplificar) si

$$\ell(\alpha_{p,q}) = d_S(p, q).$$

5.3.14. Proposició. Sigui $\delta > 0$ tal que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p) \subset S$ és un difeomorfisme. Aleshores, per a tot $q \in B_\delta(p)$, la geodèsica radial de p a q és l'única corba minimal de S entre p i q (llevat de reparametritzacions).

Demostració. Sigui $w \in T_p S$, $\ell = |w| < \delta$ tal que $\exp_p(w) = q$ i $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ la geodèsica radial parametritzada per l'arc que uneix p i q . Volem veure que, si $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ és una altra corba entre p i q diferenciable a trossos, aleshores $\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma)$ i que la igualtat es dona només si $\alpha = \gamma$.

Suposem, en primer lloc, que la traça de α està continguda a $B_\delta(p)$. Per comparar les longituds de α i γ , descomposem α' en una component radial i una altra tangencial als cercles geodèsics. Denotem per \mathbf{r} el camp vectorial unitari de $T_p(S) \setminus \{0\}$ que és tangent als radis que surten de l'origen. Aleshores, el camp vectorial $\alpha'(s)$ definit per $0 < s \leq \ell$ admet una descomposició

$$\alpha'(s) = a(s)\mathbf{r}|_{\alpha(s)} + w(s),$$

on $a(s)$ és una funció diferenciable i $w(s)$ és un camp ortogonal a \mathbf{r} .

Calculem la funció $a(s)$:

Pel lema de Gauss ($F = 0$ en coordenades polars geodèsiques), el camp $w(s)$ és tangent als cercles geodèsics de $B_\delta(p)$. Així, si considerem la funció

$$\begin{aligned} r : B_\delta(p) \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ q &\longmapsto |\exp_p^{-1}(q)| \end{aligned}$$

que és C^∞ , veiem que $dr_q(w(s)) = 0$, ja que r és constant sobre els cercles geodèsics.

A més, si $q = \exp_p(w)$, aleshores

$$dr_q(\mathbf{r}|_q) = dr_{\exp_p(w)} \left(\frac{\gamma'_w(1)}{|w|} \right) = \frac{1}{|w|} \frac{d}{ds}(s|w|) = 1,$$

amb la qual cosa trobem que

$$a(s) = (r \circ \alpha)'(s).$$



Sigui $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$ una descomposició de I tal que $\alpha|_{[s_i, s_{i+1}]}$ és regular (C^∞). Aleshores,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{a(s)^2 + |w(s)|^2} ds \geq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{a(s)^2} ds \\ &\geq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} a(s) ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (r\alpha)'(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (r(\alpha(s_{i+1})) - r(\alpha(s_i))) = r(q) - r(p) = \ell(\gamma). \end{aligned}$$

A més, perquè es doni la igualtat, s'ha de satisfer que $w(s) = 0$ i $a(s) \geq 0$ per a tot s , cas que correspon a $\alpha' = \mathbf{r}_\alpha$, ja que la corba està parametritzada per l'arc; però, aleshores, per la unicitat de les geodèsiques respecte de les condicions inicials, α coincideix amb la radial γ de p a q .

Si la traça de α no està continguda a $B_\delta(p)$, procedim de la forma següent: sigui t_1 el primer valor del paràmetre tal que $\alpha(t_1)$ talla el cercle geodèsic $\partial B_\delta(p)$. Pels casos anteriors, la radial entre p i $\alpha(t_1)$, que denotem $\bar{\gamma}$, és la corba minimal entre aquests punts continguda a $B_\delta(p)$, però, aleshores

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\alpha(0, t_1)) \geq \ell(\bar{\gamma}) \geq \ell(\gamma),$$

on a la darrera desigualtat hem usat que q és interior a $B_\delta(p)$ mentre que x està sobre la frontera. ■

5.3.15. Teorema. (1) Sigui $\alpha : I \rightarrow S$ una corba diferenciable a trossos minimal entre p i q . Aleshores, quan la parametritzem per l'arc, α és una geodèsica i, en particular, és diferenciable.

(2) Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ una geodèsica parametritzada per l'arc. Aleshores, γ és localment una corba minimal; és a dir, per a tot $p \in \gamma[a, b]$, hi ha un entorn U tal que, per a qualsevol $q \in U \cap \gamma[a, b]$, γ és el camí més curt entre p i q a S .

Demostració. (1) Sigui $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) = p$ i $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p)$ és un entorn normal de p . Si q' és el primer punt d'intersecció de α i el cercle geodèsic $\partial B_\delta(p)$, aleshores α ha de coincidir amb la radial de p a q' , ja que ambdues corbes són minimals entre aquests dos punts, i podem aplicar la unicitat de la proposició 5.3.14. Això implica que localment α és una geodèsica, però, com que la propietat de ser geodèsica és local, α és una geodèsica.

(2) Només cal prendre $B_\delta(p)$ un entorn geodèsic, ja que aleshores γ és una geodèsica radial de $B_\delta(p)$ i s'aplica la proposició. ■

5.3.16. Exemples. (1) El resultat anterior assegura que, si hi ha una corba minimal entre dos punts, aleshores aquesta corba és una geodèsica. No estableix, però, l'existència de corbes minimals entre dos punts. De fet, hi ha superfícies sobre les quals l'existèn-

cia de corbes minimal no sempre està assegurada. Per exemple, si considerem $S = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, aleshores no hi ha cap corba minimal entre els punts $p = (-1, 0)$ i $q = (1, 0)$, ja que hauria de ser un segment de recta, que no es pot completar per la falta de l'origen.

(2) La segona asserció del teorema afirma que, localment, les geodèsiques minimitzen la distància. Globalment, no podem fer cap afirmació general ja que, per exemple, si p, q són dos punts sobre el mateix meridià de l'hemisferi nord de l'esfera i γ és l'arc del meridià que va de p a q passant pel pol sud, aleshores γ és una geodèsica, però no és una corba minimal entre p i q . \square

Apèndix: Una altra demostració que les corbes minimal són geodèsiques

Per acabar aquesta secció, proposem una prova alternativa de la propietat (1) del teorema 5.3.15. Aquesta demostració, que no fa ús de les coordenades polars geodèsiques, és més pròxima al càlcul variacional, que és la tècnica que analitza les funcions que minimitzen alguns funcionals.

5.3.17. Teorema. *Sigui $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ una corba minimal entre $p = \alpha(a)$ i $q = \alpha(b)$, parametritzada per l'arc. Aleshores, α és una geodèsica.*

Demostració. Provarem que $\kappa_g = 0$ i, per fer-ho, analitzem la variació de les longituds d'una deformació de la corba α .

Més concretament: suposem que hi ha un $s_0 \in [a, b]$ amb $\kappa_g(s_0) \neq 0$. Per continuïtat, existiran c, d tals que

- $a < c < s_0 < d < b$,
- $\kappa_g(s) \neq 0$, $s \in [c, d]$,
- $\alpha([c, d]) \subset \varphi(U)$,

on $\varphi : U \rightarrow S$ és una parametrització regular. Pertorbem α en la direcció $N \wedge \mathbf{t}$ de la forma següent: prenem $\lambda(s) = (s - c)(d - s)\kappa_g(s)$ a l'interval $[c, d]$, que és una funció C^∞ que satisfà

- $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$,
- $\lambda(s) \neq 0$ si $s \neq c, d$,
- i $\lambda(s)\kappa_g(s) \geq 0$,

(de fet, qualsevol funció $\lambda(s)$ que satisfés aquestes propietats serviria per a les nostres necessitats) i considerem la família de corbes

$$\alpha_t(s) = \varphi(u(s) + t\bar{u}(s), v(s) + t\bar{v}(s)),$$

on \bar{u}, \bar{v} estan determinades per $\bar{u}\varphi_u + \bar{v}\varphi_v = \lambda(s)(N \wedge \mathbf{t})$.

Escrivint $\alpha(t, s) = \alpha_t(s)$, considerem α com a funció de dues variables. La longitud de α , entre c i d és



$$\ell(t) = \int_c^d \sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle} ds,$$

i, atès que té un mínim a $t = 0$, es té que $\ell'(0) = 0$.

Calculem aquesta derivada:

$$\ell'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_c^d \sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle} ds = \int_c^d \frac{\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle}} ds.$$

Ara, observem que, per a $t = 0$, $|\alpha'(s)| = 1$, ja que s és el paràmetre arc i $\ell'(0) = 0$. Però, aleshores

$$\begin{aligned} 0 = \ell'(0) &= \int_c^d \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} ds \\ &= \int_c^d \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} - \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} \right) ds \\ &= \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle_{|t=0} \Big|_c^d - \int_c^d \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} ds \\ &= - \int_c^d \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \right\rangle_{|t=0} ds = - \int_c^d \langle \lambda N \wedge \mathbf{t}, \kappa_g N \wedge \mathbf{t} + \kappa_n N \rangle ds \\ &= - \int_c^d \lambda \kappa_g ds = - \int_c^d (s-c)(d-s) \kappa_g^2 ds < 0, \end{aligned}$$

la qual cosa és una contradicció.

Observem que a la tercera línia hem utilitzat que el vector

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \bar{u}(s)\varphi_u + \bar{v}\varphi_v = \lambda(s)(N \wedge \mathbf{t})$$

és ortogonal a $\mathbf{t} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{t=0}$. ■

5.4. El teorema de Hopf-Rinow

A la secció anterior, hem vist que les corbes minimal són geodèsiques, però no hem establert condicions que n'assegurin l'existència entre dos punts de la superfície. En aquesta secció, presentem el teorema de Hopf-Rinow, que dóna condicions suficients per a l'existència de geodèsiques minimal entre dos punts.

5.4.1. Definició. Diem que una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ és *geodèsicament completa* si tota geodèsica $\gamma : I \rightarrow S$ pot estendre's a una geodèsica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$.

5.4.2. Teorema de Hopf-Rinow. *Sigui S una superfície connexa i geodèsicament completa. Aleshores, per a qualssevol $p, q \in S$, existeix una geodèsica minimal $\gamma : I \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.*

Demostració. La idea és "llançar" una geodèsica radial des de p en la "direcció" de q i aprofitar la completesa per allargar-la fins arribar a q .

Com determinem la "direcció" de q ? Sigui $\delta > 0$ tal que l'exponencial defineix un difeomorfisme $\overline{B}_\delta(0) \simeq \overline{B}_\delta(p)$ i $\Sigma = \partial B_\delta(p)$. Atès que Σ és compacte i la distància a q és una funció contínua, existeix $x_0 \in \Sigma$ tal que

$$d_S(x_0, q) \leq d_S(x, q), \quad x \in \Sigma.$$

El punt x_0 ens dona la direcció de q : sigui γ la radial (parametritzada per l'arc) de p a x_0 i l'estenem fins a obtenir una corba geodèsica de longitud $\ell = d_S(p, q)$, cosa que podem fer perquè S és geodèsicament completa, és a dir,

$$\gamma : [0, \ell] \rightarrow S.$$

Volem provar ara que $\gamma(\ell) = q$. Per fer-ho, demostrem que, per a tot $s \in [\delta, \ell]$, se satisfà

$$d_S(\gamma(s), q) = \ell - s, \tag{†}$$

amb la qual cosa $d_S(\gamma(\ell), q) = 0$, és a dir, $\gamma(\ell) = q$.

Per demostrar (†), és suficient provar que el suprem del conjunt

$$A = \{s \in [\delta, \ell] \mid d_S(\gamma(s), q) = \ell - s\} \subset [\delta, \ell]$$

és ℓ .

Observem que A és tancat, ja que la funció

$$f(s) = d_S(\gamma(s), q) - \ell + s$$

és contínua i $A = f^{-1}(0) \cap [\delta, \ell]$.

Provem que $A \neq \emptyset$ veient que $\delta \in A$. En efecte, tota corba α de p a q talla Σ ; per tant,

$$\begin{aligned} d_S(p, q) &= \inf \ell(\alpha_{p,q}) = \inf_{x \in \Sigma} (\inf \ell(\alpha_{p,x}) + \inf \ell(\alpha_{x,q})) \\ &= \inf_{x \in \Sigma} (d_S(p, x) + d_S(x, q)) = \inf_{x \in \Sigma} (\delta + d_S(x, q)) \\ &= \delta + d_S(x_0, q). \end{aligned}$$

És a dir, $d_S(x_0, q) = d_S(\gamma(\delta), q) = \ell - \delta$, que no és sinó la igualtat (†) per $s = \delta$.

Sigui ara s_0 el suprem de A ; com que A és tancat, $s_0 \in A$. Suposem que $s_0 < \ell$ i provem que existeix $\delta' > 0$ amb $s_0 + \delta' \in A$. Prenem un disc geodèsic de radi δ' centrat en $\gamma(s_0)$ i sigui x'_0 el punt de la vora d'aquest disc de mínima distància a q . Com que $s_0 \in A$, es té



$$\ell - s_0 = d_S(\gamma(s_0), q) = \delta' + d_S(x'_0, q) \implies d_S(x'_0, q) = \ell - s_0 - \delta'.$$

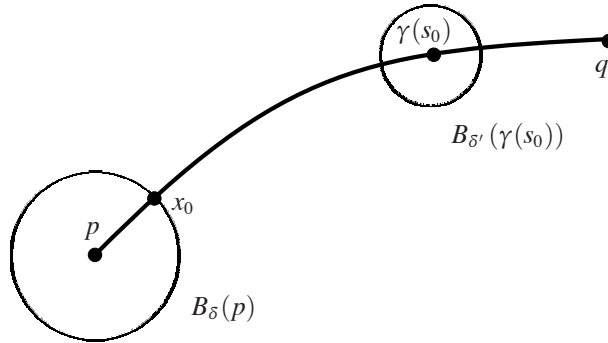
Atès que

$$d_S(p, x'_0) \geq d_S(p, q) - d_S(x'_0, q),$$

es té

$$d_S(p, x'_0) \geq \ell - (\ell - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

Fig. 5.4
Cami de la prova.



Per tant, la corba diferenciable a trossos que consisteix a seguir γ entre 0 i s_0 i continuar per la radial des d'aquest punt a x'_0 minimitza la distància entre p i x'_0 i, per tant, és una geodèsica, que necessàriament ha de coincidir amb γ . És a dir, $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$, amb la qual cosa $s_0 + \delta' \in A$, en contradicció amb l'elecció de s_0 . ■

5.4.3. Corol·lari. Si S és una superfície connexa i geodèsicament completa, aleshores l'aplicació exponencial $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ és exhaustiva, per a tot punt $p \in S$. ■

5.4.4. Corol·lari. Si S és una superfície connexa, geodèsicament completa i fitada per a la mètrica de d_S , aleshores S és compacta.

Demostració. Pel corol·lari anterior, l'exponencial està definida a tot el pla tangent $T_p S$. Com que la superfície és fitada, $S = \exp_p(\overline{B_\delta(0)})$, per a $\delta > 0$ prou gran, i només cal observar que $\overline{B_\delta(0)}$ és compacte. ■

Per tal que el teorema de Hopf-Rinow sigui útil, cal disposar d'exemples de superfícies geodèsicament completes. Dels teoremes de prolongació de solucions d'edos, es dedueixen els dos resultats següents, que enunciem sense demostració.

5.4.5. Proposició. Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ tancada és geodèsicament completa. ■

5.4.6. Corol·lari. Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ compacta és geodèsicament completa. ■

Així, per exemple, un pla, un cilindre, una esfera o un tor són superfícies completes, mentre que un con (sense el vèrtex!) o un pla llevat d'un punt no ho són.

5.5. Exercicis

1. Sigui $(u(s), v(s))$ una corba en un entorn coordinat d'una superfície S parametritzada per l'arc. Proveu que

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} u' & u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 \\ v' & v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 \end{vmatrix} \\ &= [u'v'' - u''v' + \Gamma_{11}^2(u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2v' + \\ &\quad + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1(v')^3] \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Deduïu que, si $F = 0$, la curvatura geodèsica de les corbes coordenades és

$$(\kappa_g)_{v=v_0} = \left(\frac{-E_v}{2E\sqrt{G}} \right)_{v=v_0}, \quad (\kappa_g)_{u=u_0} = \left(\frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \right)_{u=u_0}.$$

2. Si $E = 1$ i $F = 0$, proveu que les corbes $v = \text{cnt}$ són geodèsiques.
3. Sigui S el cilindre $x^2 + y^2 = 1$ i els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B = (0, 1, 1)$. Trobeu les geodèsiques que uneixen A amb B i les seves longituds. Quina és la corba sobre S que uneix A amb B de longitud mínima?
4. Escriviu les equacions de les geodèsiques sobre un helicoide recte.
5. Sigui S el tor de revolució obtingut en fer girar la circumferència $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ del pla XZ al voltant de l'eix OZ , en què $0 < r < a$. Calculeu la curvatura geodèsica del paral·lel superior, obtingut en girar el punt $(a, 0, r)$.
6. Demostreu que, si les geodèsiques d'una superfície connexa són planes, aleshores la superfície està continguda en una esfera o en un pla.
- (Indicació: Demostreu que, si les geodèsiques són planes, aleshores són línies de curvatura. Tot seguit demostreu que les superfícies que tenen tots els seus punts umbílics estan contingudes en un pla o en una esfera.)
7. Considerem la parametrització $\varphi(u, v) = (u, v, uv)$. Proveu que, si la parametritzem per l'arc, la corba $\alpha(t) = (t, -t, -t^2)$ és una geodèsica d'aquesta superfície. Podeu trobar altres geodèsiques de S .
8. Proveu que tota corba regular és geodèsica d'alguna superfície regular. (Indicació: Considereu la superfície generada per les binormals.)
9. Suposem que dues superfícies regulars S_1, S_2 són tangents al llarg d'una corba α . Proveu que α és geodèsica de S_1 si, i només si, ho és de S_2 .



10. Siguin S una superfície i Π un pla que talla S al llarg d'una corba α . Proveu que, si Π és un pla de simetria de S , aleshores α és una geodèsica.
11. Sigui S una superfície que admet una parametrització ortogonal tal que $E = G = \frac{1}{v^2}$. Calculeu-ne la curvatura gaussiana i demostreu que les corbes coordenades $u = cnt$ són geodèsiques.
12. Suposem que una superfície S ve donada per una parametrització $\varphi(u, v)$ tal que $E = v^2, F = 0, G = 2, e = v/\sqrt{2}, f = g = 0$.
- (a) Trobeu la curvatura de la corba coordenada $v = c$.
 - (b) Trobeu la curvatura en $p = \varphi(0, 1)$ de la geodèsica de S que forma un angle $\frac{\pi}{3}$ amb la corba coordenada $u = 0$ en p .
13. Sigui $\varphi(u, v), v > 0$, una parametrització ortogonal tal que $E = v^2$ i $G = 1 + u^2$.
- (a) Calculeu els símbols de Christoffel i la curvatura de Gauss de φ .
 - (b) Són geodèsiques les corbes coordenades?
 - (c) Considereu el camp $\mathbf{w}(u, v) = (-v, u)$. Calculeu-ne la derivada covariant al punt $\varphi(0, 1)$ en la direcció $(1, 1)$.
14. Sigui S una superfície regular de \mathbb{R}^3 tal que $E = e^{u+v}, F = 0, G = 1$ i $f = 0$.
- (a) Proveu que g és una funció que només depèn de la variable v , és a dir, $g_u = 0$.
 - (b) Determineu la curvatura de Gauss de S .
 - (c) Proveu que les corbes coordenades $u = u_0$, amb u_0 constant, són geodèsiques.
 - (d) Trobeu el transport paral·lel del vector tangent a $(0, 0)$, $\mathbf{w}(0) = \varphi_u + \varphi_v$, al llarg de la corba coordenada $\alpha(t) = (0, t)$.
15. Siguin $p \in \mathbb{S}^2$ un punt de l'esfera unitat i $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p\mathbb{S}^2$ dos vectors tangents tals que $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{w}_2|$. Proveu que hi ha una corba diferenciable a trossos, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ amb $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ i $\tau_\alpha(\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_2$.
16. Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització regular d'un obert d'una superfície regular S . Suposem que

$$E = E(u), \quad F = 0, \quad G = G(u).$$

- (a) Proveu que les corbes $v = cnt$ són geodèsiques.
- (b) Proveu que les corbes $u = u_0$ són geodèsiques si, i només si, $G_u(u_0) = 0$.
- (c) Proveu que les geodèsiques $(u(s), v(s))$ satisfan $\sqrt{G} \cos \theta = cnt$, on θ és l'angle entre la geodèsica i les corbes $u = cnt$.

17. Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització regular tal que

$$E = G = U(u) + V(v), \quad F = 0.$$

Proveu que, si $(u(s), v(s))$ és una geodèsica parametritzada per l'arc, aleshores

$$U \sin^2 \theta - V \cos^2 \theta = cnt,$$

on θ és l'angle que fa la geodèsica amb les corbes $v = cnt$.

18. Sigui $\varphi(r, \theta)$ la parametrització geodèsica polar al voltant d'un punt p d'una superfície S . Proveu que

$$\sqrt{G} = r - \frac{1}{6}K(p)r^3 + R(r, \theta), \quad \text{amb} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(r, \theta)}{r^3} = 0.$$

19. Sigui $\alpha(s) = (k(s), h(s))$ una corba plana regular parametritzada per l'arc. Definim $\varphi(s, t) = (k(s), h(s), t)$ i $\gamma(s) = (k(s), h(s), s \cdot \text{tg}(\phi))$, on ϕ és una constant. Proveu que γ és una geodèsica (s no és el seu paràmetre arc) i que és una hèlice.

20. Siguin S una superfície amb camp normal N i $\alpha(s)$ una corba parametritzada per l'arc a S . Denotem per \mathbf{t}_b la component tangencial a $T_{\alpha(s)}S$ del vector binormal \mathbf{b} de α .

(a) Proveu que $\mathbf{t}_b = -\frac{\kappa_n}{\kappa}N \wedge \mathbf{t}$.

(b) Proveu que són equivalents:

(i) $\mathbf{t}_b = \mathbf{b}$.

(ii) α és una geodèsica.

(iii) \mathbf{t}_b és paral·lel al llarg de α .

21. Sigui φ una parametrització a l'entorn de $p \in S$ d'una superfície regular S . Proveu que

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \varphi_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \varphi_u = K(\varphi_u \wedge \varphi_v) \wedge \varphi_u.$$

(En general, el resultat és cert substituint φ_u per una camp vectorial tangent qualsevol \mathbf{w} : $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \mathbf{w} - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \mathbf{w} = K(\varphi_u \wedge \varphi_v) \wedge \mathbf{w}$, cosa que es demostra amb un càlcul més feixuc.)

22. Proveu que l'única geodèsica tancada de l'hiperboloide $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ és la circumferència que resulta de tallar la superfície amb el pla $z = 0$.

23. Sigui $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrització global d'una superfície regular S . Suposem que, per a qualsevol corba regular α de S , el camp vectorial φ_u és paral·lel al llarg de α . Proveu que la curvatura de Gauss de S és constant igual a zero.



24. Proveu que una geodèsica d'una superfície de revolució no pot aproximar-se asimptòticament a un paral·lel que no sigui, ell mateix, una geodèsica.
25. Proveu que tota geodèsica del paraboloid ehlíptic $z = x^2 + y^2$ té infinites autointerseccions, llevat que sigui un meridià.
26. Sigui S una superfície regular amb $K \equiv 0$ i $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular tal que $F = 0 = f$, en què les corbes coordenades $u = cnt$ són asimptòtiques (totes aquestes condicions no donen cap restricció sobre S a l'entorn d'un punt que no sigui pla ja que, per a aquests punts, hi ha parametritzacions al seu voltant que les satisfan).

- (a) Proveu que $e \neq 0, g = 0$ i $\Gamma_{22}^1 = 0$. Deduïu que les corbes $u = cnt$ són geodèsiques i que, essent asimptòtiques, són rectes.
- (b) Utilitzant el canvi de variable

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \left(u, \int_{v_0}^v \sqrt{G(u, v)} dv \right),$$

proveu que podem suposar, a més, que $G = 1$ i deduïu que $\Gamma_{22}^2 = 0$.

- (c) Concloeu que $\varphi_{vv} = 0$ i que, per tant, es tracta d'una superfície desenvolupable. Hem provat, doncs, que $K \equiv 0 \implies$ localment desenvolupable.
27. Sigui S una superfície regular orientada pel camp normal N i $\alpha : I \rightarrow S$ una corba parametritzada pel paràmetre arc. Sigui $\mathbf{u}(s) = N(s) \wedge \mathbf{t}(s)$. El tríedre $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, N\}$ és un tríedre ortonormal, que s'anomena *tríedre de Darboux*. Es defineix la *torsió geodèsica* de α per

$$\tau_g(s) = -\langle N'(s), \mathbf{u}(s) \rangle$$

- (a) Proveu que se satisfan les equacions

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_g \mathbf{u} + \kappa_n N, \\ \mathbf{u}'(s) &= -\kappa_g \mathbf{t} + \tau_g N, \\ N'(s) &= -\kappa_n \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{u}. \end{aligned}$$

- (b) Proveu que dues corbes parametritzades per l'arc α, β , amb $\alpha(0) = \beta(0)$ i $\alpha'(0) = \beta'(0)$, tenen la mateixa torsió geodèsica en $s = 0$. Deduïu que la torsió geodèsica només depèn del vector tangent a la corba.
- (c) Sigui $\mathbf{w} \in T_p S$ un vector unitari. Proveu que

$$\tau_g(\mathbf{w}) = -\langle dN_p(\mathbf{w}), N \wedge \mathbf{w} \rangle$$

- (d) Sigui $e_1, e_2 \in T_p S$ direccions principals de curvatures k_1, k_2 , respectivament, tals que $N = e_1 \wedge e_2$. Proveu que, per a tot vector unitari $\mathbf{w} \in T_p S$, es té

$$\tau_g(\mathbf{w}) = \frac{k_2 - k_1}{2} \sin(2\theta),$$

essent θ l'angle de e_1 a \mathbf{w} .

(e) Sigui ϕ l'angle entre \mathbf{n} i N . Proveu que $\mathbf{u} = (\sin \phi)\mathbf{n} - (\cos \phi)\mathbf{b}$ i que

$$\tau_g = \tau + \frac{d\phi}{ds}$$

(f) Deduïu que, si $\kappa_n(\mathbf{w}) \neq 0$, aleshores $\tau_g(\mathbf{w})$ és la torsió de la geodèsica que passa per p i és tangent a \mathbf{w} .

(g) *Teorema de Beltrami-Enneper*. Deduïu que, si $\kappa_n(\mathbf{w}) = 0$, aleshores $\tau_g = \tau$ i

$$|\tau| = \sqrt{-K(p)}.$$

28. *Torsió total d'una corba esfèrica.* L'objectiu d'aquest problema és demostrar el resultat següent: *Sigui $\alpha(s)$ una corba regular tancada parametritzada per l'arc, amb imatge sobre l'esfera unitat \mathbb{S}^2 . Aleshores, la torsió total de α és zero:*

$$\int_0^\ell \tau(s) ds = 0.$$

Als apartats següents, farem servir la notació $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$.

(a) Proveu que, si $\alpha(s) = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}(s) + \nu \mathbf{b}(s)$, aleshores

$$\lambda = 0, \quad \mu = -R, \quad \nu = \pm \sqrt{1 - R^2}.$$

(b) Deduïu que, en els punts de la corba en què $\kappa \neq 1$, se satisfà

$$\tau = \pm \frac{R'}{\sqrt{1 - R^2}}.$$

(c) Proveu que $\kappa_g = \kappa R' T$ i deduïu que, en els punts en què $\kappa_g \neq 0$, se satisfà

$$\tau = \frac{\kappa R'}{\kappa_g}.$$

En particular, τ i κ_g tenen el mateix signe.

(d) Hi afegim una hipòtesi addicional (que simplifica la prova, tot i no ser necessària): Suposem que existeix un nombre finit de punts $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = \ell$ tals que κ_g és zero en aquests punts i $\kappa_{g|(s_{i-1}, s_i)}$ és positiva, negativa o zero. Observeu que $R(s_i) = 1$ i integreu sobre cadascun dels subintervalls per acabar la demostració del teorema.

29. Diem que una parametrització $\varphi(u, v)$ és geodèsica si $E = 1, F = 0$ (per exemple, les coordenades geodèsiques polars). Sigui $\alpha : (c, d) \rightarrow S$ una corba simple regular i no tancada d'una superfície S . Si $c < a < b < d$, per a cada $t \in [a, b]$, sigui $\alpha_t(s)$ l'única geodèsica de S tal que $\alpha_t(0) = \alpha(t)$ i $d\alpha_t/ds(0) = N \wedge \mathbf{t}(t)$.

(a) Proveu que existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(s, t) = \alpha_t(s)$, $|s| < \varepsilon, a < t < b$ és una parametrització regular de S (feu servir el teorema de dependència de paràmetres).



- (b) Proveu que $E = 1$.
- (c) Proveu que φ_{uu} és normal a S i deduiu que $F_s = 0$. Avaluant als punts $(0, t)$, concloueu que $F = 0$.
- (d) Proveu que α és una corba coordinada d'aquesta parametrització geodèsica.



→ 6



El teorema de Gauss-Bonnet

És ben conegut que la suma dels angles d'un triangle del pla euclidià és π . El primer objectiu d'aquest capítol és generalitzar aquest resultat a triangles geodèsics sobre una superfície. En general, la suma dels angles d'un triangle geodèsic no és π . Per exemple, prenent un triangle sobre l'esfera, format per dos meridians que es tallen en un angle θ al pol nord, i l'equador, la suma dels angles és exactament $\pi + \theta$, superior a π . De què depèn la suma dels angles d'un triangle geodèsic? Veurem que la curvatura de Gauss K de la superfície permet donar-ne una resposta explícita.

6.1. Algunes qüestions preliminars

En aquesta secció, reunim algunes nocions i resultats preliminars que intervindran en l'enunciat i la demostració del teorema de Gauss-Bonnet. En endavant S denota una superfície regular orientada de \mathbb{R}^3 .

6.1.1. Corbes diferenciables a trossos i regions simples. Recordem que una corba contínua $\alpha : [0, \ell] \rightarrow S$ diem que és *diferenciable a trossos* si existeix una partició de l'interval $[0, \ell]$

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = \ell$$

tal que α és regular en els subintervalls $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, k$. Els punts $\alpha(s_i)$, $i = 1, \dots, k$, els anomenem *vèrtexs* de α .

Si el paràmetre s és el paràmetre arc en cadascun d'aquests subintervalls, diem que α és una corba diferenciable a trossos parametritzada per l'arc. Diem que α és *tancada* si $\alpha(0) = \alpha(\ell)$ i *simple* si és injectiva a $[0, \ell]$.

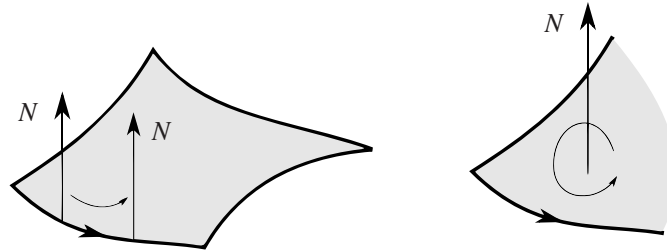
Sigui $R \subset S$ una regió de S , és a dir, l'adherència d'un obert connex. Diem que $R \subset S$ és una *regió simple* si R és homeomorfa al disc unitat (tancat) del pla i la frontera ∂R és la traça d'una corba tancada simple i diferenciable a trossos $\alpha : I \rightarrow S$. Diem que una



regió $R \subset S$ és *regular* si ∂R està formada per un nombre finit de corbes diferenciables tancades i simples.

Si la superfície S està orientada pel camp de vectors normals N i R és una regió simple, diem que una parametrització α de la vora ∂R és compatible amb l'orientació (o que l'orientació de α és positiva) si situant-nos segons el vector normal sobre ∂R i recorrent $\alpha(t)$, la superfície S queda a l'esquerra. Equivalentment, el sentit del recorregut ve determinat per N i la regla de la mà dreta (v. figura).

Fig.6.1
Regla de la mà dreta.



En la demostració del teorema de Gauss-Bonnet, utilitzem el teorema de Stokes en la seva versió del pla, que recordem.

Teorema de Green-Riemann. Sigui D una regió simple del pla i sigui $C = \partial D$ la corba que l'envolta. Sigui $F = (P, Q)$ un camp vectorial, derivable amb continuïtat a D . Aleshores, se satisfà que

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

on C^+ indica que recorrem la corba C en sentit antihorari (positiu respecte del vector normal $N = (0,0,1)$).

6.1.2. Determinació de l'angle i índex de rotació. Si $\alpha(s)$ és una corba regular tancada de S , $a \leq s \leq b$, es defineix l'índex de rotació $\rho(\alpha)$ del vector tangent al llarg de α com el grau de l'aplicació

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\longmapsto \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} \end{aligned}$$

Si, a més, la corba està parametritzada per l'arc, l'aplicació anterior és, simplement, $s \mapsto (u'(s), v'(s))$ i, segons la definició del grau que hem vist en el curs de topologia, si $\theta(s)$ és un aixecament d'aquesta aplicació, es té

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

En el cas que ens ocupa, en què la corba és regular (i no tant sols contínua), es pot donar un aixecament explícit $\phi(s)$: en efecte, si escollim un angle ϕ_0 tal que $u'(s_0) = \cos \phi_0, v'(s_0) = \sin \phi_0$, per a $s_0 \in [a, b]$, aleshores és un exercici elemental provar que



$$\phi(s) = \phi_0 + \int_{s_0}^s (u'v'' - u''v') dt$$

satisfà

$$u'(s) = \cos \phi(s), \quad v'(s) = \sin \phi(s),$$

és a dir, és un aixecament.

Analitzem ara el cas d'una corba tancada diferenciable a trossos. En els trams regulars d'aquesta corba, α , podem utilitzar la fórmula anterior per definir una funció de variació de l'angle, $\phi(s)$. En els vèrtexs, però, α deixa de tenir una tangent ben definida. Atès que α és regular en els subintervalls entre els vèrtexs, en cadascun d'ells tenim ben definits els vectors tangents

$$\alpha'_-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \alpha'(s) \neq 0,$$

$$\alpha'_+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \alpha'(s) \neq 0.$$

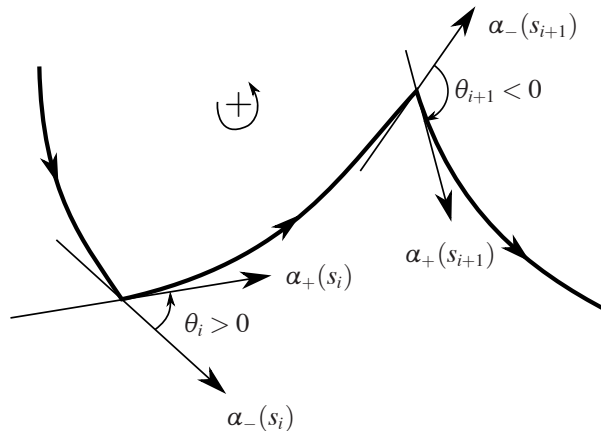


Fig. 6.2
Angle exterior en un vèrtex.

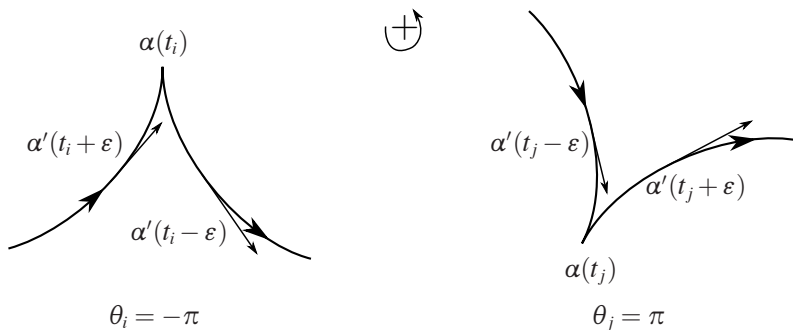


Fig. 6.3
Angle exterior en un vèrtex.

Definim l'angle exterior θ_i en el vèrtex $\alpha(s_i)$ com l'angle orientat entre $\alpha'_-(s_i)$ i $\alpha'_+(s_i)$, determinat entre $[-\pi, \pi]$. Això és: si aquests vectors són linealment independents, con-



siderem l'angle θ_i que determinen, escollint el signe segons que la base $\alpha'_-(s_i), \alpha'_+(s_i), N$ de \mathbb{R}^3 sigui directa o inversa.

En el cas en què $\alpha'_-(s_i)$ i $\alpha'_+(s_i)$ són linealment dependents, l'angle satisfà $|\theta_i| = \pi$. Per determinar el signe, ens situem “una mica abans i una mica després del vèrtex”: observem que existeix ε' tal que el tríedre $\alpha'(s_i - \varepsilon), \alpha'(s_i + \varepsilon), N$ no canvia de signe per a $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, i escollim el signe en funció d'aquest darrer.

6.1.3. Teorema de l'índex de Hopf. *Amb les notacions anteriors, si α recorre la vora d'una regió simple $R \subset S$,*

$$\sum_{i=1}^k (\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

Demostració. No fem la prova d'aquest resultat. Tot i això, podem donar la idea de la demostració quan α és regular. En aquest cas, el resultat estableix que $2\pi\rho(\alpha) = \phi(b) - \phi(a) = 2\pi$, és a dir, $\rho(\alpha) = 1$. Sigui p un punt interior de la regió R ; com que $\rho(\alpha)$ és un enter i el procés de deformació per homotopia és continu, aquest índex es mantindrà invariant per homotopia. Atès que la regió és simple, α es deforma homotòpicament sobre una petita circumferència al voltant de p i, per tant, només cal demostrar el teorema per a aquesta corba. Però, aleshores, un càlcul directe acaba la prova. ■

6.2. Una expressió per a la curvatura geodèsica

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada per un camp normal N i $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular (positiva) ortogonal ($F = 0$). Sigui $\alpha : I \rightarrow \varphi(U) \subset S$ una corba parametritzada per l'arc.

6.2.1. Proposició. *Si $\theta(s)$ és una determinació de l'angle entre els camps vectorials $t(s)$ i φ_u al llarg de α , aleshores la curvatura geodèsica de α satisfà*

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) + \theta'(s).$$

Demostració. Siguin e_1, e_2 els camps vectorials unitaris

$$e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}.$$

Com que són camps unitaris i ortogonals, les seves derivades covariants respecte de $\alpha(t)$ satisfan

$$\frac{De_1}{dt} = be_2, \quad \frac{De_2}{dt} = -be_1,$$

per a una determinada funció diferenciable $b(t)$. Per calcular la funció $b(t)$, fem servir la definició de la derivada covariant,



$$\begin{aligned}\frac{De_1}{dt} &= \frac{D\left(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}\right)}{dt} = \left(\Gamma_{11}^2 \frac{u'}{\sqrt{E}} + \Gamma_{12}^2 \frac{v'}{\sqrt{G}}\right) \varphi_v \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u' + \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'\right) e_2,\end{aligned}$$

i, per tant,

$$b = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u' + \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'. \quad (\dagger)$$

Calculem ara $b(t)$ d'una altra forma: per l'elecció de θ , es té $\alpha'(s) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ i, en conseqüència,

$$\kappa \mathbf{n} = \alpha''(s) = -\theta' \sin \theta e_1 + \theta' \cos \theta e_2 + \cos \theta e_1' + \sin \theta e_2'.$$

Així, la curvatura geodèsica, que ve determinada pel component tangencial d'aquesta igualtat, resulta

$$\begin{aligned}\kappa_g(N \wedge \mathbf{t}) &= -\theta' \sin \theta e_1 + \theta' \cos \theta e_2 + \cos \theta \frac{De_1}{dt} + \sin \theta \frac{De_2}{dt} \\ &= -(b + \theta') \sin \theta e_1 + (b + \theta') \cos \theta e_2.\end{aligned}$$

Atès que

$$N \wedge \mathbf{t} = (e_1 \wedge e_2) \wedge (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2,$$

trobem, finalment,

$$\kappa_g = \langle \kappa_g N \wedge \mathbf{t}, N \wedge \mathbf{t} \rangle = b + \theta',$$

cosa que, juntament amb l'expressió (\dagger) que hem calculat de $b(s)$, acaba la prova. ■

6.3. El teorema local de Gauss-Bonnet

Sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular ortogonal ($F = 0$) positiva d'una superfície orientada S , amb U un obert del pla difeomorf al disc unitat. Sigui $D \subset \varphi(U)$ una regió simple i $\alpha : I \rightarrow \partial D$ una parametrització que recorre ∂D en sentit positiu. Suposem que la vora té vèrtexs a $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ i que el paràmetre és l'arc en els trams regulars.

6.3.1. Teorema local de Gauss-Bonnet. *Amb les notacions anteriors, si θ_i és l'angle exterior de α en s_i , $i = 0, \dots, k-1$, se satisfà*

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \int_D K dA + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$



Demostració. Per la proposició 6.2.1, es té

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) + \theta'(s),$$

i, integrant respecte del paràmetre arc s entre 0 i ℓ , trobem

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \kappa_g(s) ds &= \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \kappa_g(s) ds \\ &= \int_0^\ell \left\{ \frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v) \right\} ds + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right\} dudv + \sum_{i=1}^k (\theta(s_i) - \theta(s_{i-1})) \\ &= - \int_D K \sqrt{EG} dudv + 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i \\ &= - \int_D K dA + 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i \end{aligned}$$

on a la tercera igualtat hem aplicat el teorema de Green-Riemann i, a la quarta, el teorema de l'índex de Hopf. ■

Observem que hem enunciat el teorema per a petites regions D contingudes en un entorn coordinat $D \subset \varphi(U)$ adequat. A l'apartat següent veurem que aquesta precaució és supèrflua i que el teorema és cert per a regions simples de S no necessàriament contingudes en un entorn coordinat.

6.4. El teorema de Gauss-Bonnet

Recordem que una triangulació d'una superfície compacta S és una família finita de triangles $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ que satisfà:

- (1) $S = \cup_{i=1}^n \Delta_i$,
- (2) si la intersecció de dues cares no és buida, aleshores és una aresta comuna o bé un o dos vèrtexs comuns a ambdues cares.

Podem estendre aquesta definició a una regió regular compacta $R \subset S$ d'una superfície S demanant aleshores les dues condicions suplementàries següents:

- (3) si la intersecció d'una cara amb ∂R no és buida, aleshores consisteix en vèrtexs o una aresta completa,
- (4) tot vèrtex (en el sentit de corba diferenciable a trossos) de la frontera ∂R és un vèrtex de, com a mínim, un triangle de la triangulació.



Donada una triangulació d'una regió regular R , es defineix la *característica d'Euler de R* per

$$\chi(R) = c - a + v,$$

on c és el nombre de cares (triangles), a és el nombre d'arestes i v és el nombre de vèrtexs. Dels cursos de topologia sabem que $\chi(R)$ és un invariant topològic.

6.4.1. Teorema de Gauss-Bonnet. *Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta (i orientable). Aleshores,*

$$\int_S K dA = 2\pi \chi(S).$$

Demostració. Sabem que una superfície compacta admet una triangulació finita, $\{\Delta_i\}$, $1 \leq i \leq c$. Per un procés de subdivisió baricèntrica (que no detallem), podem suposar que cadascun dels triangles de la triangulació està contingut en una parametrització regular ortogonal. Acceptem, a més, que podem suposar que les arestes dels triangles Δ_i són corbes diferenciables.

Si denotem per θ_{ij} els angles exteriors del triangle Δ_i , $j = 1, 2, 3$ i per $\phi_{ij} = \pi - \theta_{ij}$ els angles interiors, el teorema local de Gauss-Bonnet pel triangle Δ_i s'escriu

$$\sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds + \int_{\Delta_i} K dA + \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) = 2\pi.$$

Com que hi ha un nombre finit de triangles, podem sumar aquestes igualtats fent variar i ,

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^c \int_{\Delta_i} K dA + \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) = 2\pi c.$$

Analitzem separatament cadascuna de les sumes que hi ha al costat esquerre de la igualtat:

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds = 0,$$

ja que cada aresta ho és exactament de dos triangles i apareix en aquesta suma amb orientacions oposades. Quant a la integral de K ,

$$\sum_{i=1}^c \int_{\Delta_i} K dA = \int_S K dA.$$

Finalment, sigui c el nombre de cares de la triangulació, a el d'arestes i v el de vèrtexs. Aleshores,



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^3 (\pi - \phi_{ij}) &= 3\pi c - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} \\ &= 3\pi c - 2\pi v \\ &= 2\pi a - 2\pi v, \end{aligned}$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat que $3c = 2a$. Així, trobem

$$\int_S K dA + 2\pi(c - v) = 2\pi a$$

d'on se segueix el resultat, ja que $\chi(S) = a - c + v$. ■

Hem establert el teorema sumant la contribució de tots els triangles de la superfície. Si considerem una triangulació d'una regió regular R de S i efectuem la mateixa suma que a la demostració anterior, els termes corresponents a la vora ∂R no es cancel·laran, i, per tant, obtindrem la generalització següent del teorema de Gauss-Bonnet.

6.4.2. Teorema de Gauss-Bonnet per a regions regulars. *Sigui $R \subset S$ una regió regular triangulada de S . Aleshores,*

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA + \sum \theta_i = 2\pi \chi(R),$$

on la suma s'estén a tots els angles exteriors de les corbes de ∂R . ■

6.4.3. Observació. La prova de la darrera versió del teorema de Gauss-Bonnet estableix, en particular, que la fórmula establerta en el teorema local 6.3.1 és vàlida per a regions simples no necessàriament incloses en una parametrització regular.

Destaquem dues situacions particulars del teorema:

(1) Si ∂R és una corba regular, trobem

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R K dA = 2\pi \chi(R).$$

(2) Si D és una regió simple amb vora diferenciable a trossos i els arcs diferenciables de la parametrització α de la vora són geodèsics, aleshores $\kappa_g = 0$ i el teorema es redueix a

$$\int_D K dA + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Així, si Δ és un triangle geodèsic i $\alpha_i = \pi - \theta_i$, $i = 1, 2, 3$, són els angles *interiors* del triangle, es té:



6.4.4. Fórmula de l'excés. Sigui $\Delta \subset S$ un triangle geodèsic d'angles interiors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Aleshores,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_{\Delta} K dA. \quad \blacksquare$$

Així, si la curvatura és zero, retrobem la coneguda fórmula de la geometria euclidiana $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, mentre que, per a superfícies amb curvatura positiva, la suma dels angles d'un triangle geodèsic és superior a π i, per a les de curvatura negativa, aquesta suma és inferior a π . Al capítol següent, estudiem més detalladament la geometria de les superfícies de curvatures constants 1, 0 i -1.

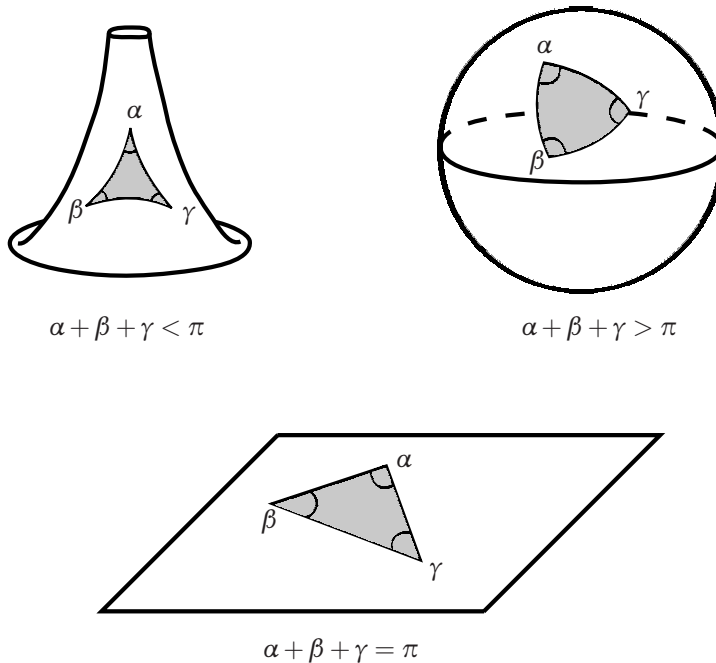


Fig. 6.4
Suma dels angles d'un triangle geodèsic segons la curvatura de la superfície.

El teorema de Gauss-Bonnet estableix una relació profunda entre la geometria (determinada per la curvatura K) i la topologia (determinada per la característica d'Euler χ) d'una superfície compacta S . Com a mostra de les implicacions d'aquesta relació, en presentem tot seguit algunes aplicacions.

6.4.5. Aplicacions. (1) Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta amb $K \geq 0$. Aleshores, S és homeomorfa a l'esfera \mathbb{S}^2 .

En efecte, atès que S és compacta, hi ha algun punt $p \in S$ amb $K(p) > 0$ (v. lema 7.4.2) i, per continuïtat, la curvatura es manté positiva en un entorn de p . Així, la hipòtesi implica que

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K dA > 0.$$



El resultat se segueix ara del fet que \mathbb{S}^2 és l'única superfície compacta (llevat d'homeomorfismes) amb característica positiva.

(2) Siguin $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície amb $K \leq 0$, $p \in S$, i γ_1, γ_2 dues geodèsiques de S que parteixen de p . Si γ_1, γ_2 es tallen en un altre punt $q \in S$, aleshores la corba $\gamma_2^{-1}\gamma_1$ no envolta una regió simple de S .

En efecte, siguin θ_1, θ_2 els angles exteriors amb què es tallen γ_1, γ_2 en p i q . Si aquestes corbes geodèsiques envoltessin una regió simple, hi podríem aplicar el teorema de Gauss-Bonnet i deduir

$$\int_D K dA + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi.$$

Ara bé, aquestes geodèsiques no són tangents ni a p ni a q (ja que, en cas contrari, coincidrien), per la qual cosa $\theta_1, \theta_2 < \pi$, que afegida a $K \leq 0$, fa que el terme de l'esquerra de la fórmula anterior sigui $< 2\pi$, i això és una contradicció.

(3) Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície amb $K \leq 0$; aleshores, no existeixen geodèsiques tancades que envoltin una regió simple.

Recordem que es diu que una superfície S és simplement connexa si tota corba tancada simple de S la divideix en dos components connexos, un dels quals és homeomorf a un disc. Com a aplicació dels punts (2) i (3) anteriors i dels resultats sobre les geodèsiques que s'han provat al capítol anterior, es té:

6.4.6. Corol·lari. *Sigui S una superfície simplement connexa de curvatura $K \leq 0$. Aleshores,*

- (1) *S no conté geodèsiques tancades.*
- (2) *Tot arc d'una geodèsica de S és minimal.*
- (3) *Si S és completa, dos punts qualssevol poden unir-se per una única geodèsica minimal.* ■

(4) Sigui S una superfície amb curvatura $K < 0$ a tots els punts, homeomorfa a un cilindre. Aleshores, existeix com a màxim una geodèsica tancada sense autointerseccions.

6.4.7. Observem que, de la fórmula de l'excés, se'n deriva una demostració del teorema egregi de Gauss (demostració que, per a Gauss, hauria estat la primera evidència del teorema). El raonament seria aproximadament el següent: sigui $f : S \rightarrow S'$ una isometria local a p . Sabem que f conserva els angles, les àrees i les geodèsiques en un entorn de p . Així, si Δ és un petit triangle geodèsic al voltant de $p \in S$ amb angles interiors α, β, γ , aleshores $\Delta' = f(\Delta)$ és un triangle geodèsic al voltant de $q = f(p)$ de la mateixa àrea i amb els mateixos angles interiors. Llavors, pel teorema del valor mitjà del càlcul integral i la fórmula de l'excés, es té

$$\begin{aligned} K_S(p) &= \lim_{\Delta \rightarrow p} \frac{\int_{\Delta} K dA}{A(\Delta)} = \lim_{\Delta \rightarrow p} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A(\Delta)} \\ &= \lim_{\Delta' \rightarrow q} \frac{\alpha' + \beta' + \gamma' - \pi}{A(\Delta')} = \lim_{\Delta' \rightarrow q} \frac{\int_{\Delta'} K dA}{A(\Delta')} = K_{S'}(q). \end{aligned}$$



6.5. L'índex d'un camp vectorial amb singularitats aïllades

6.5.1. Definició. Sigui w un camp vectorial sobre la superfície S . Diem que un punt $p \in S$ és *singular* per a w si $w(p) = 0$. En cas contrari, diem que p és *regular* per a w .

Sigui $p \in S$ un punt singular per al camp w i suposem que està aïllat, és a dir, que té un entorn U a S en el qual no hi ha altres punts singulars. Considerem una parametrització regular $\varphi : D_r(0) \rightarrow U$, on $D_r(0)$ és el disc de radi r centrat a 0 , i sigui $R \subset \varphi(D)$ una regió simple que conté p al seu interior. Denotem per α la corba positivament orientada que recorre ∂R i $\theta(s)$ una determinació de l'angle entre φ_u i w al llarg de $\alpha(s)$.

6.5.2. Definició. Amb les notacions anteriors, es defineix l'*índex de w a p* com l'enter

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}.$$

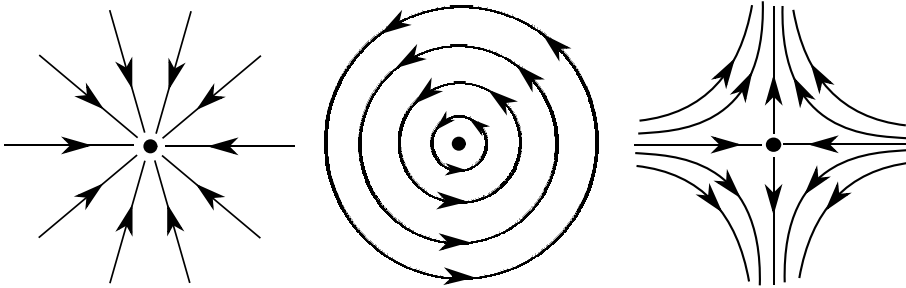


Fig. 6.5
Exemples de punts
singulars aïllats de
camps vectorials.

6.5.3. Teorema de l'índex de Poincaré-Hopf. Sigui w un camp vectorial sobre una superfície compacta orientable S tal que tots els seus punts singulars són aïllats. Aleshores,

$$\sum_{p \in S} \text{ind}_p(S) = \chi(S).$$

En particular,

6.5.4. Corollari. Sigui S una superfície compacta i orientable amb $\chi(S) \neq 0$. Aleshores, tot camp vectorial té almenys un punt singular. ■

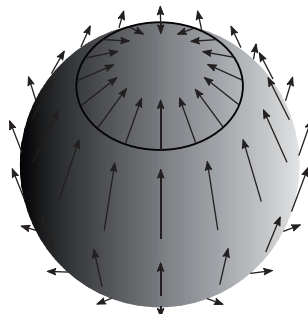


Fig. 6.6
Esfera peluda.



El cas de l'esfera es coneix com a teorema de l'esfera peluda:

6.5.5. Corol·lari (teorema de l'esfera peluda). *Tot camp vectorial sobre l'esfera S^2 té almenys un punt singular.* ■

Aquests corol·laris mostren una característica fonamental del teorema de l'índex: donen una relació sorprenent entre una propietat local (l'índex del camp vectorial en un punt) i una propietat global (la característica d'Euler). Així, donat un camp sobre una esfera, si el regularitzem a l'entorn d'un punt singular, estem produint una singularitat en algun altre lloc de la superfície.

La demostració del teorema de l'índex que presentem segueix un esquema similar a la demostració del teorema de Gauss-Bonnet: en primer lloc, establim una fórmula local per al càlcul de l'índex, en la qual intervé la curvatura de la superfície, després sumem l'aportació de tots els punts singulars considerant una triangulació adequada de S , i obtenim, com a aplicació del teorema de Gauss-Bonnet, la característica d'Euler de S .

Fórmula local per al càlcul de l'índex. Establim ara una fórmula anàloga a l'obtinguda per a la curvatura geodèsica a la proposició 6.2.1. Comencem fixant-ne les condicions: sigui w un camp vectorial sobre S i $p \in S$ un punt singular aïllat (o regular). Considerem una parametrització regular ortogonal al voltant de p , $\varphi : U \rightarrow S$ i $R \subset \varphi(U)$ una regió simple que conté p al seu interior i no conté altres punts singulars de w .

Parametritzem per l'arc la vora de la regió R , $\sigma : [a, b] \rightarrow \partial R$ i suposem que aquesta parametrització orienta positivament la vora (respecte de la parametrització φ). Finalment, siguin \bar{w} un camp vectorial paral·lel al llarg de σ i $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una determinació de l'angle entre $w\sigma$ i \bar{w} .

6.5.6. Proposició. *Amb les notacions anteriors, se satisfà*

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi} \int_R K dA - \frac{1}{2\pi} (\phi(b) - \phi(a)).$$

Demostració. Per definició, l'índex es calcula a partir de la determinació de l'angle entre w i φ_u . Siguin θ una determinació d'aquest angle i ψ una determinació de l'angle entre φ_u i \bar{w} . Aleshores,

$$\phi = \psi - \theta,$$

i, per tant,

$$\text{ind}_p(w) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi} (\psi(b) - \psi(a)) - \frac{1}{2\pi} (\phi(b) - \phi(a)),$$

per la qual cosa serà suficient establir el següent

6.5.7. Lema. $\psi'(s) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(v'G_u - u'E_v),$



ja que d'aquesta fórmula deduïm

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \psi'(s) ds = - \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{EG}} (v'G_u - u'E_v) ds = \int_R K dA,$$

on la darrera igualtat se segueix del teorema de Green-Riemann, anàlogament al càlcul efectuat en la demostració del teorema de Gauss-Bonnet local.

Demostrem ara la fórmula que estableix el lema 6.5.7: situem-nos amb les notacions de la demostració de la proposició 6.2.1, és a dir, denotem per e_1, e_2 els camps unitaris en les direccions coordenades. Segons l'expressió (†) d'aquella demostració, es té

$$\left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (v'G_u - u'E_v)$$

i, per tant, només cal veure que

$$\psi'(s) + \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle = 0.$$

Atès que \bar{w} és un camp paral·lel al llarg de σ i que, segons hem vist a la demostració de la proposició 6.2.1, es té

$$\frac{De_1}{dt} = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle e_2, \quad \frac{De_2}{dt} = - \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle e_1,$$

si escrivim $\bar{w}/|\bar{w}| = \cos \psi e_1 + \sin \psi e_2$, trobem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D(\bar{w}/|\bar{w}|)}{dt} = -\psi'(s) \sin \psi e_1 + \cos \psi \frac{De_1}{dt} + \psi'(s) \cos \psi e_2 + \sin \psi \frac{De_2}{dt} \\ &= \left(\psi'(s) + \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle \right) [-\sin \psi e_1 + \cos \psi e_2], \end{aligned}$$

amb la qual cosa acaba la prova. ■

Demostració del teorema de l'índex de Poincaré-Hopf (v. 6.5.3). En primer lloc, observem que w té un nombre finit de singularitats ja que, en cas contrari, per la compacitat de S , el conjunt de punts singulars tindria un punt d'acumulació, que seria un punt singular no aïllat.

Considerem una família de parametritzacions ortogonals que cobreixin S i una triangulació $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ tal que

- (i) tot triangle Δ_i de la triangulació està contingut en algun sistema coordinat,
- (ii) cada triangle conté, com a màxim, un punt singular del camp w , que és al seu interior.

I orientem positivament les vores d'aquests triangles.



Fem ara les eleccions següents:

- w_i un camp vectorial paral·lel al llarg de la vora del triangle Δ_i , $1 \leq i \leq n$,
- ϕ_i una funció de determinació de l'angle entre els camps w i w_i , $1 \leq i \leq n$.

Si ℓ_{ij} és l'aresta del triangle Δ_i de vèrtexs v_0, v_1 , escriurem

$$\phi_{ij} = \phi_i(v_1) - \phi_i(v_0).$$

Amb tots aquests preliminars, la fórmula del lema 6.5.7 al llarg de l'aresta ℓ_{ij} dona

$$\phi_{ij} = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (v'G_u - u'E_v) ds - [\theta(v_1) - \theta(v_0)],$$

on θ és l'angle entre w i φ_u . En particular, veiem que ϕ_{ij} no depèn de la determinació ϕ_i de l'angle escollida, com tampoc del camp vectorial w_i .

Per la proposició 6.5.6 aplicada a cadascun dels triangles, trobem

$$\int_{\Delta_i} K dA - \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_i \text{ no conté punts singulars,} \\ 2\pi \text{ind}_p(w), & \text{si } \Delta_i \text{ conté el punt singular } p. \end{cases}$$

Sumant les expressions anteriors sobre tots els triangles de la triangulació, resulta

$$\int_{\Delta_i} K dA - 2\pi \sum_p \text{ind}_p(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} = 0,$$

ja que cada aresta apareix dues vegades i amb sentits oposats. ■

6.5.8. Tot i que hem usat la curvatura de Gauss de la superfície en la demostració del teorema de l'índex de Poincaré-Hopf, aquesta no intervé en l'enunciat del teorema, com tampoc la primera forma fonamental. Sembla natural preguntar-se si es pot donar una altra demostració, independent del teorema de Gauss-Bonnet. La resposta és que sí i, com passa sovint amb teoremes importants, de fet hi ha diverses demostracions d'aquest resultat. El lector interessat pot consultar, per exemple, la que apareix al llibre *Topology from the Differentiable Viewpoint* de J. Milnor, o la suggerent demostració proposada per W. Thurston a *Three-dimensional Geometry and Topology*, proposició 1.3.10.

6.6. Exercicis

1. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta i orientable que no és homeomorfa a \mathbb{S}^2 . Proveu que S conté punts el·líptics, hiperbòlics i plans.
2. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta. Proveu que dues geodèsiques tancades amb tots els punts el·líptics es tallen. Doneu-ne un contraexemple si S no és compacta.



3. Considerem el triangle geodèsic de \mathbb{S}^2 format per

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &= (\cos s, \sin s, 0), \\ \gamma_2(s) &= (\cos \theta_0 \cos s, \sin \theta_0, \sin s), \\ \gamma_3(s) &= (\sin s, 0, \cos s),\end{aligned}$$

en què $s \in [0, \pi/2]$ i θ_0 és un angle entre 0 i $\pi/2$. Calculeu l'àrea d'aquest triangle.

4. Calculeu la curvatura de la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida per

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$$

i calculeu la integral

$$\int_S K dA.$$

5. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta amb $K > 0$ i $|H| = \text{cnt}$. Proveu que S és una esfera.

6. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície compacta i orientable, amb $K > 0$ i tal que

- (a) $H/K = \text{cnt}$.
- (b) k_1 (o k_2) és constant.
- (c) Existeix una funció decreixent $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k_2 = h(k_1)$.

Proveu que S és una esfera.

7. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície tancada i sense punts umbilicals tals que K i H són constants. Proveu que S és un cilindre circular.

8. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientable, de vector normal N . Es defineix la tercera forma fonamental en un punt $p \in S$, \mathbb{I}_p , segons

$$\mathbb{I}_p(v, w) = \langle dN_p(v), dN_p(w) \rangle.$$

Proveu que:

- (a) \mathbb{I}_p és una forma bilineal simètrica.
- (b) \mathbb{I}_p no depèn del vector d'orientació N escollit.
- (c) $\mathbb{I} - 2H\mathbb{II} + KI = 0$.
- (d) Supposem que la superfície S és tancada. Aleshores,

$$I = \mathbb{I} \iff S \text{ és una esfera de radi 1.}$$



9. Considerem la superfície $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

- (a) Parametritzeu el triangle geodèsic Δ de vèrtexs $(1,0,0)$, $(\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0)$, $(0,0,1/2)$, en què $\theta_0 \in [0, \pi/2]$.
- (b) Calculeu la integral

$$\int_{\Delta} K dA$$

directament i a partir del teorema de Gauss-Bonnet.

10. Sigui $f : S \rightarrow S'$ una aplicació diferenciable entre superfícies regulars. Proveu que f és una isometria local si, i només si, transforma geodèsiques radials de S en geodèsiques radials de S' .

11. Proveu que l'origen és un punt singular aïllat i calculeu l'índex en aquest punt dels camps següents:

- (a) $\mathbf{w} = (x, y)$.
- (b) $\mathbf{w} = (-x, y)$.
- (c) $\mathbf{w} = (x^2 - y^2, -2xy)$.

12. Pot ser 0 l'índex d'un camp vectorial en un punt singular aïllat? Si és així, doneu-ne un exemple.

13. Per a quins valors $d \in \mathbb{Z}$ hi ha una regió regular R d'una superfície S tal que $\chi(R) = d$?

14. Sigui $\mathbf{w} = (-xy, 1 - y^2 - z, y(1 - z))$. Proveu que, als punts de l'esfera \mathbb{S}^2 , \mathbf{w} defineix un camp vectorial tangent. Proveu que els seus punts singulars són aïllats i calculeu-ne l'índex.



→ 7



Curvatura constant

En aquest capítol, estudiem les superfícies completes de curvatura de Gauss constant. De fet, l'estudi complet d'aquestes superfícies queda fora de l'abast d'un curs d'un quadrimestre, per la qual cosa ens limitem essencialment a enunciar-ne i emmarcar-ne els resultats principals, demostrant dos teoremes que són interessants per ells mateixos (el recíproc del teorema egregi de Gauss per a superfícies de curvatura constant, teorema 7.2.1, i la caracterització de les esferes, teorema 7.4.1), i n'introduïm i estudiem un exemple singular, el pla hiperbòlic.

Les superfícies completes de curvatura constant donen models de les geometries axiomàtiques que es deriven dels *Elements* d'Euclides. És per això que dediquem la primera secció a una (molt) breu discussió de l'axioma de les paral·leles.

7.1. Introducció: geometries no euclidianes

En aquesta secció, fem una incursió succinta en les geometries no euclidianes i el paper de les superfícies diferencials com a models d'aquestes, limitant-nos al cas del pla. El lector interessat pot consultar el llibre d'Agustí Reventós [R] o, des d'una perspectiva més propera a la d'aquest curs, el de MacCleary [Mc], citats a la bibliografia.

Hi ha dues formes d'analitzar la geometria del pla. La primera, la *sintètica* , parteix d'un conjunt d'axiomes i nocions comuns, i obté els resultats de la geometria per deducció lògica a partir d'aquests axiomes. Aquesta és la via desenvolupada per Euclides als seus *Elements*. La segona via és l'*analítica* i consisteix a identificar el pla amb \mathbb{R}^2 , és a dir, identificar el pla amb parells de nombres reals, assignant equacions als diferents objectes geomètrics, a partir de les quals es poden demostrar les seves propietats. Observeu que aquesta segona via suposa també l'establiment d'uns axiomes previs però que, en aquest cas, han estat desplaçats fora de la geometria: els corresponents al cos real \mathbb{R} i a la teoria de conjunts.

La geometria dels *Elements* d'Euclides és sintètica i va representar un model de rigor i coneixement fonamental fins a les primeries del segle XIX. Euclides parteix d'unes de-



finicions bàsiques, unes nocions comunes i uns postulats fonamentals a partir dels quals dedueix les propietats geomètriques del pla. A tall d'exemple, reproduïm les definicions i els postulats següents, que afecten la geometria del pla:

7.1.1. Definicions dels Elements d'Euclides. (1) Un punt no té parts.

(2) Una línia és una longitud sense amplada.

(3) Els extrems d'una línia són punts.

(4) Una recta és una línia que està per igual respecte de tots els seus punts.

Les definicions són imprecises i fan servir termes no definits, com ara longitud o amplada, la qual cosa va comportar assumir algunes propietats geomètriques com a evidents sense que es deduïssin formalment dels axiomes. De fet, les definicions donades s'aplicarien igualment als arcs de circumferència, per exemple. Es va trigar força temps a adonar-se que l'important no és la naturalesa dels objectes de la geometria, sinó la relació que s'estableix entre aquests objectes. És a dir, no cal definir què és un punt o una recta, sinó fixar quines propietats tenen els uns respecte de les altres i recíprocament.

7.1.2. Postulats dels Elements d'Euclides. (1) Per dos punts diferents passa una única recta.

(2) Un segment rectilini sempre es pot perllongar.

(3) Hi ha una única circumferència amb centre i radi donats.

(4) Tots els angles rectes són iguals.

(5) Si una secant talla dues rectes formant a un costat angles interiors que sumen menys de dos rectes, les rectes suficientment perllongades es tallen en aquest mateix costat.

Els axiomes o postulats dels *Elements* no són complets. De fet, Euclides en els seus raonaments fa servir, sense ser-ne conscient, algunes propietats geomètriques que no es dedueixen dels postulats enunciats. Així, per exemple, Euclides utilitza com a fet evident que dues circumferències tals que cadascuna d'elles passa pel centre de l'altra es tallen necessàriament, cosa que no es dedueix dels axiomes establerts.

La perspectiva històrica ha assenyalat diverses deficiències en el sistema de postulats, com ara la manca del postulat de continuïtat de Dedekind o la seva conseqüència, el caràcter arquimedià de la recta real, o la manca d'axiomes d'ordre, aquells que permeten dir que un punt d'una recta està *entre* dos punts donats, aquest darrer assenyalat per Pasch el segle XIX. D. Hilbert va donar una versió axiomàtica definitiva de la geometria del pla al tombant del segle XX, aclarint i completant els axiomes dels *Elements* (vegeu el llibre de Reventós per a un desenvolupament axiomàtic de la geometria plana).

Des del primer moment, els postulats (1)-(4) van semblar molt naturals, mentre que el (5) tenia un caràcter ben diferent. En efecte, aquest postulat té diverses formes equivalents, d'entre les quals destaquen:

(5') Per tot punt exterior a una recta passa una única paral·lela.

(5'') La suma dels angles interiors d'un triangle és π .



Observem que, en la forma (5'), el postulat fa referència a un fet que succeeix a l'infinit: l'existència d'una recta que, per més que l'allarguem, no talla la recta donada. Aquest fet no és evident; pensem, per exemple, en una asímptota d'una hipèrbola: conforme tendim a l'infinit, s'apropa més i més a la hipèrbola i podríem sospitar que la talla en algun punt, cosa que no succeeix al pla euclidià. El propi Euclides sembla que era conscient que es tractava d'un postulat especial ja que el va evitar en molts raonaments, fins i tot a costa de fer proves molt més llargues d'alguns dels resultats presentats al seu tractat.

D'altra banda, a la forma (5), sembla un postulat força natural i és per això que durant molt de temps es va pensar que el 5è postulat havia de deduir-se dels altres quatre. A causa de (5') es coneix el 5è postulat com l'*axioma o postulat de les paral·leles*.

La història dels diversos intents per a demostrar-lo a partir dels primers quatre postulats i la descoberta conseqüent de la geometria no euclidiana (la qual no compleix el 5è postulat) per part de J. Bolyai, C. F. Gauss i N. Lovatchevsky és molt interessant, però ens duria molt lluny dels objectius d'aquest curs.

Quan es disposa d'un sistema axiomàtic, sorgeixen de forma natural diverses preguntes. Citem-ne, sense pretendre ser molt precisos, dues de fonamentals:

- És consistent? És a dir, els axiomes admesos poden dur a teoremes contradictoris?
- És complet? És a dir, hi ha teoremes indemostrables a partir del sistema d'axiomes?

A banda d'intentar respondre aquestes preguntes des de la pròpia teoria, una manera de comprovar la consistència d'un sistema axiomàtic es disposar de models que el compleixin. Així, per exemple, l'espai euclidià $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ és un model de la geometria euclidiana plana.

La geometria diferencial de les superfícies proveeix models de les geometries euclidianes i no euclidianes. En aquestes superfícies, les rectes del pla són substituïdes per les geodèsiques. La geometria del pla té dues propietats que hem d'imposar a una superfície per tal que en resulti un model acceptable de les geometries no euclidianes:

- *Completesa*: dos punts qualssevol han de determinar una recta, és a dir, en el context de la geometria diferencial, dos punts qualssevol han de determinar una geodèsica. És per això que demanem que la superfície sigui *completa*; recordem que el teorema de Hopf-Rinow assegura aleshores l'existència d'una geodèsica minimal entre dos punts, no necessàriament única.
- *Homogeneïtat*: la geometria al voltant de dos punts qualssevol p, q de la superfície ha de ser la mateixa. És a dir, s'ha de satisfer la propietat d'homogeneïtat següent:

$$\forall p, q \in S, \quad \exists \text{ entorns } U, V \subset S \quad \text{tals que } \exists \text{ isometria } U \cong V.$$

Pel teorema egregi de Gauss, la curvatura de la superfície serà la mateixa a tots els punts, és a dir, en un model geomètric la curvatura serà constant. De fet, n'hi ha prou de demanar la constància de K per obtenir l'homogeneïtat volguda, com resulta del teorema de Minding que demostrem a la propera secció.



En definitiva, els models de les geometries euclidianes i no euclidianes que pot proporcionar la geometria de les superfícies els hem de buscar entre les superfícies completes de curvatura constant, que són les superfícies objecte d'aquest capítol.

7.2. Un recíproc del teorema egregi

El teorema egregi de Gauss estableix que, en punts corresponents per una isometria local, les curvatures són iguals. En el cas de les superfícies de curvatura constant, es té el recíproc que enunciem a continuació.

7.2.1. Teorema de Minding. *Siguin $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ superfícies regulars de curvatures constants K, K' , respectivament, i $p \in S, q \in S'$ dos punts qualssevol. Si $K = K'$, aleshores existeix una isometria local d'un entorn de p en un entorn de q que transforma p en q .*

Demostració. Definim la isometria mitjançant l'aplicació exponencial. Per fer-ho, escollim $\delta > 0$ tal que l'exponencial de S en p i l'exponencial de S' en q estiguin definides en el disc de radi δ , establint sengles difeomorfismes

$$\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p S \longrightarrow B_\delta(p) \subset S, \quad \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q S' \longrightarrow B_\delta(q) \subset S',$$

que defineixen entorns normals dels punts p, q .

Sigui $g : T_p S \longrightarrow T_q S'$ una isometria, és a dir, escollim bases ortonormals a cadascun d'aquests plans i considerem l'aplicació lineal que transforma la base de $T_p S$ a la base de $T_q S'$. Aleshores, definim $f = \exp_q \circ g \circ \exp_p^{-1}$, que és l'aplicació C^∞ que completa el diagrama següent

$$\begin{array}{ccc} T_p S & \xrightarrow{g} & T_q S' \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_q \\ B_\delta(p) \subset S & \xrightarrow{\quad f \quad} & B_\delta(q) \subset S' \end{array}$$

Si veiem que f és una isometria, hem acabat la prova. Si en els entorns normals $B_\delta(p)$, $B_\delta(q)$ considerem coordenades polars geodèsiques, per la proposició 2.4.8 només cal veure que

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Les dues primeres igualtats són certes ja que $E = E' = 1$ i $F = F' = 0$, pel lema de Gauss, (v. 5.3.10). Quant a G , de la fórmula de Gauss se segueix que

$$G = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r = -\frac{1}{2G} \frac{2G_{rr}G - G_r G_r}{2\sqrt{G}} = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

i, anàlogament per a G' . Com que $K = K'$, les dues funcions $\sqrt{G}, \sqrt{G'}$ satisfan l'equació diferencial

$$x_{rr} + Kx = 0,$$



amb condicions inicials

$$\lim_{r \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} x_r = 1,$$

d'on, aplicant el teorema d'unicitat, en resulta la igualtat que busquem. Concretem aquest punt analitzant els diferents casos segons que les curvatures siguin positives, negatives o zero: partim de l'equació

$$(\sqrt{G})_{rr} + K\sqrt{G} = 0,$$

amb K constant.

$K = 0$ Integrant respecte de r , trobem $(\sqrt{G})_r = h(\theta)$, on h és una funció arbitrària. Ara bé, com que $\lim_r(\sqrt{G})_r = 1$, resulta que h ha de ser constant igual a 1, $(\sqrt{G})_r = 1$. Integrant de nou, $\sqrt{G} = r + k(\theta)$, però la condició $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ imposa que $k(\theta) = 0$. En resum, $G = r^2$ està unívocament determinada.

$K > 0$ Integrant l'equació diferencial, trobem

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cos(\sqrt{K}r) + b(\theta) \sin(\sqrt{K}r)$$

i, si imposen les condicions inicials, trobem que $a(\theta) = 0, b(\theta) = 1/\sqrt{K}$, amb la qual cosa l'única solució és

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}r \implies G = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}r.$$

$K < 0$ Aquest cas és similar a l'anterior: integrant l'equació, obtenim

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cosh(\sqrt{-K}r) + b(\theta) \sinh(\sqrt{-K}r)$$

i imposant les condicions inicials, trobem que $a(\theta) = 0, b(\theta) = 1/\sqrt{-K}$, és a dir,

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K}r \implies G = -\frac{1}{K} \sinh^2 \sqrt{-K}r.$$

En definitiva, hi ha una única solució a cada cas i, per tant, $G = G'$. ■

7.3. Superfícies de revolució de curvatura constant

Abans d'establir els teoremes generals d'aquest capítol sobre superfícies de curvatura constant, analitzem l'exemple de les superfícies de revolució. Lògicament, l'estructura local ve determinada pel teorema de Minding establert a la secció anterior; la pregunta ara és: Què podem dir globalment de les superfícies de revolució de curvatura constant?

Comencem fixant les notacions: considerem una corba plana, parametritzada per l'arc,

$$\alpha(s) = (r(s), z(s)), \quad s_0 < s < s_1,$$



amb $r(s) > 0$ i la superfície de revolució associada

$$S = \{(r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s)) \mid s_0 < s < s_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

La pregunta és: Per a quines funcions $r(s), z(s)$ aquesta superfície de revolució té curvatura constant?

Com hem vist al capítol 4, en aquestes condicions la curvatura de S ve donada per

$$K = -\frac{r''}{r}.$$

Així, com que hem suposat la corba parametritzada per l'arc, les funcions $r(s)$ i $z(s)$ satisfan

$$\begin{aligned} r''(s) + Kr(s) &= 0, \\ z'(s) &= \pm \sqrt{1 - (r'(s))^2} \implies z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - (r'(t))^2} dt + C. \end{aligned}$$

La constant d'integració C correspon a una translació de la superfície paral·lela a l'eix OZ , per la qual cosa podem suposar que és zero.

Suposem ara que la curvatura K és constant. L'anàlisi dels diferents casos segons el signe de la curvatura és ara paral·lel a l'efectuat a la secció anterior:

$K = a^2 > 0, a > 0$ Integrant l'equació diferencial, trobem la solució general

$$r(s) = C_1 \cos(as) + C_2 \sin(as) = A \cos(as + b),$$

per a determinades constants A, b . Escollint adequadament el punt des d'on comencem a mesurar el paràmetre arc, podem suposar que $b = 0, r(s) = A \cos(as)$.

Atès que la funció $r(s)$ és positiva, la constant A també ho serà, $A > 0$, i la variació del paràmetre s estarà delimitada per $|s| < \pi/2a$. Trobem així una família de solucions corresponents a superfícies de revolució de curvatura constant $K = a^2$ parametritzades per la constant $A > 0$:

$$\begin{aligned} r(s) &= A \cos(as), & |s| < \frac{\pi}{2a}, \\ z(s) &= \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 A^2 \sin^2(at)} dt \end{aligned}$$

Observem que, si $A = 1/a$, aleshores $z(s) = \pm(1/a) \sin(as)$ i, per tant, S és part d'una esfera de radi $1/a$, mentre que per $A \neq 1/a$ la integral que defineix $z(s)$ no pot calcular-se per mètodes elementals; de fet, aquesta integral pot expressar-se en termes d'integrals el·líptiques.

Si $A < 1/a$, aleshores l'expressió subintegral de $z(s)$ és real per a tots els valors de l'interval $|s| < \pi/(2a)$ i en el límit a $\pi/(2a)$ la superfície té contacte amb l'eix de gir. La superfície tendeix a ser punxeguda a l'eix de revolució.

Si $A > 1/a$, la integral de $z(s)$ només està definida per a $0 \leq s \leq \arcsin(1/a)$ i, a l'extrem final d'aquest interval, la derivada z' és 0, per la qual cosa el pla tangent a la superfície tendeix a ser perpendicular a l'eix de gir.

Pel teorema de Minding, totes aquestes superfícies són localment isomètriques. Observem, però, que les tres famílies no són (globalment) isomètriques entre elles. Per exemple, l'esfera és compacta i simplement connexa, mentre que la superfície corresponent a $A > 1/a$ no és compacta ni simplement connexa.

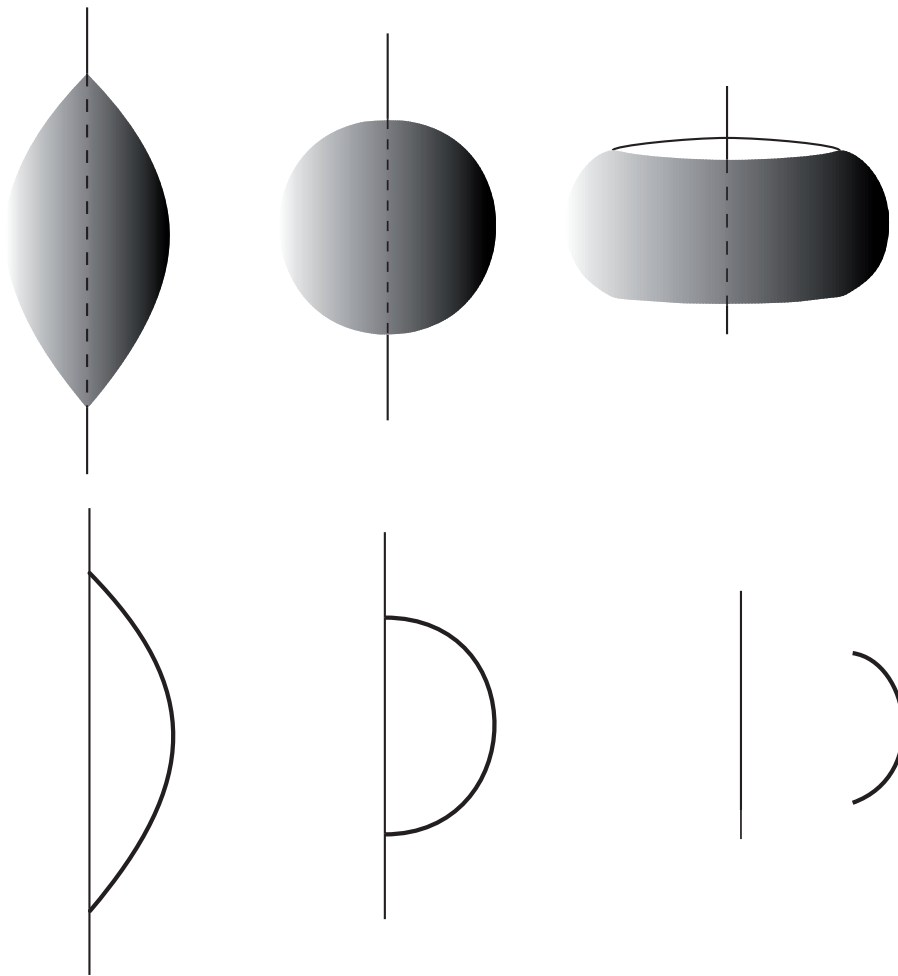


Fig. 7.1 Superfícies de revolució de curvatura constant positiva i corba generatriu.

$K = 0$ L'equació diferencial que satisfà $r(s)$ esdevé $r''(s) = 0$, per la qual cosa les funcions r i z seran $r(s) = as + b, z(s) = \pm\sqrt{1-a^2}s + d$. Si escrivim $c = \sqrt{1-a^2}$, trobem l'expressió



$$\begin{aligned} r(s) &= as + b, \\ z(s) &= cs + d, \end{aligned}$$

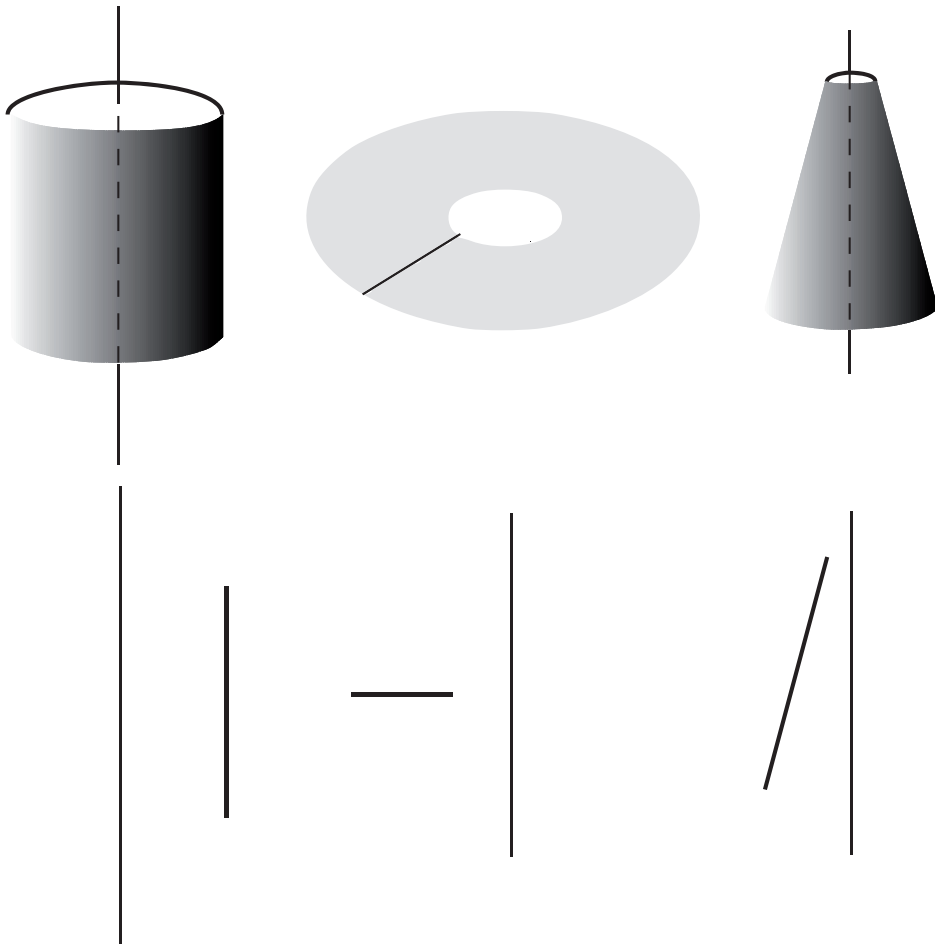
amb $a^2 + c^2 = 1$, com correspon al fet que el paràmetre és l'arc. Així, la corba $\alpha(s) = (as + b, cs + d)$ és una recta. Segons els valors de les constants, s'obtenen les possibilitats següents:

$a = 0$, aleshores S és part d'un cilindre circular.

$c = 0$, aleshores S és part d'un pla.

$ac \neq 0$, aleshores S és part d'un con circular.

Fig. 7.2
Superfícies de revolució
de curvatura zero i corba
generatriu.



$K = -a^2 < 0, a > 0$ L'equació diferencial $r'' - a^2r = 0$ té solució general

$$r(s) = C_1 \cosh(as) + C_2 \sinh(as) = D_1 e^{as} + D_2 e^{-as}.$$

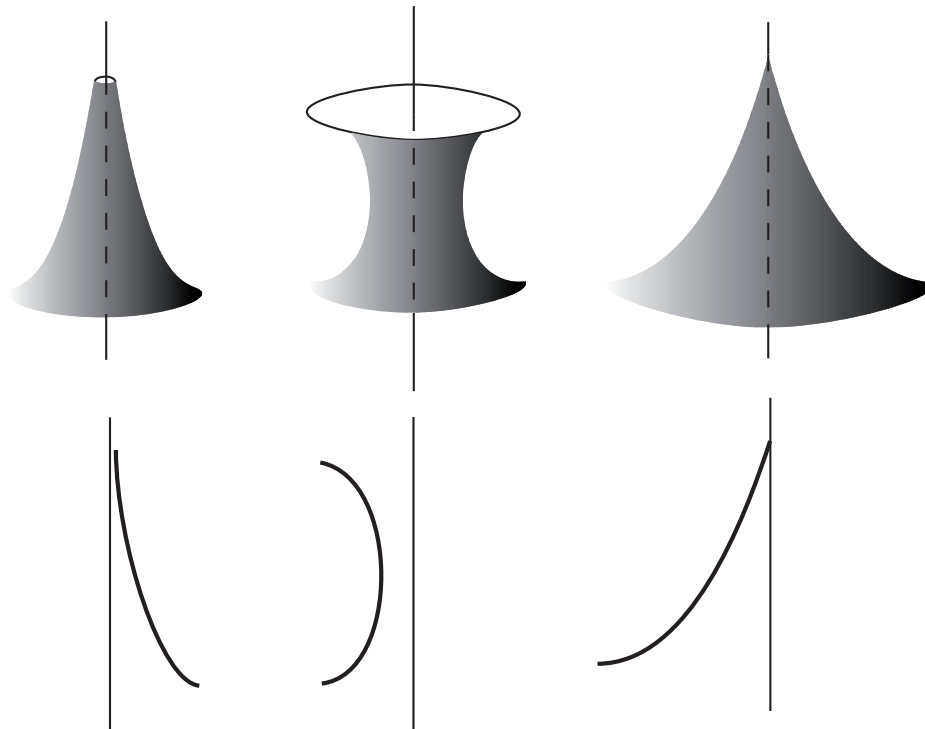


Fig. 7.3
Superfícies de revolució de curvatura constant negativa i corba generatriu.

Observem que els casos $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$ són equivalents mitjançant un canvi $s \mapsto -s$ i que, si $D_1, D_2 \neq 0$, podem suposar que $D_2 = \pm D_1$ (que corresponen als casos $C_1 = 0$ o $C_2 = 0$), ja que un canvi $s \rightarrow s + s_0$ multiplica les constants D_1, D_2 per factors diferents i permet igualar els seus mòduls; en aquest cas, escriurem $D = |D_1| = |D_2|$. Distingim aquests tres casos:

$D_2 = 0$. En aquest cas, la solució és

$$r(s) = De^{as},$$

$$z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2at}} dt$$

La integral que defineix $z(s)$ pot calcular-se per mètodes elementals (exercici!) i imposa la condició $e^{2as} < 1$. Per a $a = 1$, la corba resultant és la tractriu i la superfície de revolució corresponent és la pseudoesfera.

$D_1 = D_2 = D$. Aleshores, la superfície correspon a

$$r(s) = 2D \cosh(as),$$

$$z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - 4Da^2 \sinh(2a)t} dt$$

i la integral és definida per a $|\sinh(as)| < 1/(2aD)$, amb la qual cosa es té $2a < r(s) < \sqrt{1 + 4a^2 D^2}$.



$D_2 = -D_1 = -D$. Aleshores, la superfície correspon a

$$r(s) = 2D \sinh(as),$$

$$z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - 4Da^2 \cosh(2a)t} dt$$

i la integral és definida per a $0 < 2aD < 1$ i $1 < \cosh(as) < 1/(2aD)$. D'aquí deduïm que $0 < s < (1/2aD)$ i $0 < r(s) < \sqrt{1 - 4a^2D^2}$.

En els dos darrers casos, les integrals que intervenen no són elementals i s'expressen en funció de les integrals el·líptiques.

7.4. Superfícies de curvatura constant positiva

Segons els exemples analitzats a la secció anterior, entre les superfícies de revolució compactes, l'esfera de radi R es caracteritza perquè té la curvatura constant igual a $1/R^2$. De fet, aquesta caracterització de l'esfera es dona entre totes les superfícies compactes de l'espai, com mostra el teorema següent, que H.Liebmann va demostrar per primer cop.

7.4.1. Teorema. *Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular compacta i connexa, de curvatura constant K . Aleshores, S és una esfera.*

El resultat se segueix dels dos lemes següents, en els quals no se suposa que la curvatura és constant:

7.4.2. Lema. *Tota superfície compacta de \mathbb{R}^3 té al menys un punt el·líptic, és a dir, $p \in S$ amb $K(p) > 0$.*

7.4.3. Lema. *Sigui S una superfície regular i $p \in S$ tal que*

(i) *p és el·líptic, $K(p) > 0$,*

(ii) *p és màxim local per la curvatura principal k_1 i, alhora, mínim local per la curvatura principal k_2 .*

Aleshores, p és un punt umbilical, és a dir, $k_1(p) = k_2(p)$.

Demostració del teorema 7.4.1 a partir dels lemes 7.4.2 i 7.4.3. Atès que S és compacta, el lema 7.4.2 assegura l'existència d'un punt el·líptic i, com que K és constant, en resulta $K > 0$.

Les funcions de curvatura principals k_1, k_2 són funcions contínues sobre S ; així, per la compacitat de S , existeix un punt $p \in S$ en el qual k_1 atansa el seu valor màxim. Però, com que el producte $k_1 k_2 = K$ és constant, la segona curvatura principal k_2 tindrà un mínim a p . Segons el lema 7.4.3, p és un punt umbilical.

Com que les curvatures principals tenen un màxim i un mínim a p i coincideixen, han de coincidir a tots els punts, és a dir, tots els punts són umbilicals. Però, aleshores, podem



aplicar la proposició 3.4.9 per concloure que S és part d'un pla o d'una esfera S' i, com que $K \neq 0$, descartem el cas del pla. Finalment, conclouem per connexió: S és un obert i tancat de S' ; per tant, $S = S'$. ■

Demostració del lema 7.4.2. Atès que S és compacta, hi ha un punt $p \in S$ tal que la distància a l'origen és màxima. Volem veure que p és un punt el·líptic.

Sigui $R = |p|$ i S_R l'esfera de centre l'origen i radi R . Aleshores, $p \in S \cap S_R$ i la bola tancada de radi R conté la superfície S . En particular, S i S_R són tangents a p i, per tant, p és ortogonal a $T_p S$.

Calculem ara les curvatures normals de les corbes de S per p : en un entorn de p , la superfície S és orientable; sigui N el camp normal amb $N(p) = p/|p|$. Si $\alpha : I \rightarrow S$ és una corba amb $\alpha(0) = p$, aleshores la funció

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ s &\longmapsto |\alpha(s)|^2 \end{aligned}$$

té un màxim absolut a $s = 0$. Així, segons la definició de la curvatura normal

$$\kappa_n(\alpha'(0)) \leq -\frac{1}{|p|}.$$

Atès que la corba α és arbitrària, se segueix que les curvatures normals tenen totes el mateix signe i, en particular, que el punt p és el·líptic. ■

Demostració del lema 7.4.3. Raonarem per reducció a l'absurd. Suposem, doncs, que p no és umbilical i sigui $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrització regular en un entorn de p tal que les corbes coordenades són línies de curvatura. Per l'elecció de φ , $F = 0 = f$ i les curvatures principals són $e/E, g/G$. Atès que p no és umbilical, podem suposar, intercanviant u i v , si cal, que

$$k_1 = \frac{e}{E} > k_2 = \frac{g}{G}.$$

Derivant aquestes igualtats respecte de v i u , respectivament, trobem que

$$(Ek_1)_v = e_v, \quad (Gk_2)_u = g_u.$$

Les equacions de Codazzi-Mainardi per a φ s'escriuen

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \quad g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2)$$

i, per tant, si hi substituïm les expressions de e_v, g_u obtingudes anteriorment, trobem que se satisfan les igualtats

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2), \quad G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2). \quad (\dagger)$$



D'altra banda, la fórmula de Gauss per a la curvatura, quan $F = 0$, és

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right),$$

d'on se segueix la igualtat

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u,$$

per a determinades funcions diferenciables de (u, v) , M, N , que no ens caldrà especificar. Si, en aquesta darrera expressió, utilitzem les igualtats (\dagger), trobem que se satisfà una igualtat del tipus

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2} (k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2} (k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u$$

i, per tant,

$$-(k_1 - k_2)KEG = -E(k_1)_{vv} + G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u,$$

per a determinades funcions diferenciables \tilde{M}, \tilde{N} . El membre de l'esquerra d'aquesta igualtat és estrictament negatiu a p , ja que $K > 0$ i $k_1 > k_2$. D'altra banda, per la hipòtesi (ii), k_1 té un màxim a p i k_2 hi té un mínim, per la qual cosa les derivades primeres s'anul·len a p i $(k_1)_{vv} \leq 0, (k_2)_{uu} \geq 0$; és a dir, el membre de la dreta de la igualtat és positiu o nul. Arribem així a una contradicció. ■

7.4.4. Observació. Els exemples de superfícies de revolució de curvatura constant positiva de la secció anterior mostren la necessitat de suposar alguna propietat suplementària a la constància de la curvatura per tal de caracteritzar l'esfera. Al teorema 7.4.1, hem suposat que S és compacta, la qual cosa ha estat suficient. De fet, es pot demostrar que és suficient suposar que S és completa (recordem que una superfície compacta és completa), ja que una superfície de curvatura constant positiva i completa és necessàriament compacta, com se segueix del teorema de Bonnet; per a més detalls, vegeu el teorema de Bonnet a [dC], capítol 5.

7.5. Superfícies de curvatura constant nul·la

Hem vist que les superfícies de revolució de curvatura zero són una part del pla, del cilindre circular o dels cons. Dels tres exemples anteriors, només el pla i el cilindre són superfícies completes, ja que els cons han d'evitar necessàriament el vèrtex. De fet, els casos del pla i del cilindre no són aïllats, ja que es té:

7.5.1. Teorema (Hartman-Nirenberg). *Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular conne-xa, completa i de curvatura $K \equiv 0$. Aleshores, S és un pla o un cilindre (generalitzat).* ■

No donarem la demostració completa d'aquest resultat (vegeu, per exemple, [AT], [dC], [S]), sinó que ens limitarem a fer-ne alguns comentaris per emmarcar-ne les idees principals sense entrar en tots els detalls.



La observació: Atès que $K \equiv 0$, tots els punts de la superfície seran plans o parabòlics, $S = Pl(S) \cup Par(S)$.

Si tots els punts són plans, $S = Pl(S)$, aleshores S és un pla, com es desprèn de 3.4.9. En general, el conjunt de punts plans $Pl(S)$ és un tancat, ja que es defineix per l'anul·lació de la curvatura mitjana H , i el conjunt de punts parabòlics és un obert $Par(S) = S \setminus Pl(S)$.

L'anàlisi de la frontera del conjunt de punts parabòlics, allà on es fa la transició dels punts parabòlics als punts plans, és força delicada. En comptes d'endinsar-nos en aquest punt, comentem un exemple clàssic i molt il·lustratiu de la possible relació entre els conjunts $Pl(S)$ i $Par(S)$.

Considerem un triangle Δ del pla XY al qual hem tret els vèrtexs i hi afegim sengles superfícies cilíndriques a cadascun dels costats amb generadors paral·lels als costats corresponents.

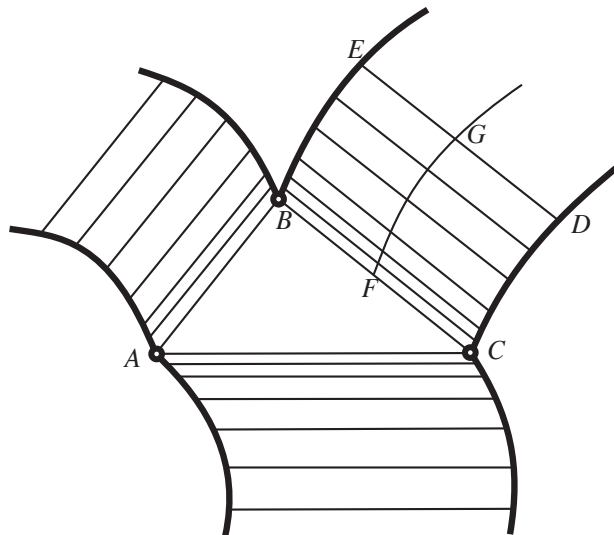


Fig. 7.4
Superfície, no completa,
de curvatura zero.

Enganxant amb cura els cilindres als costats del triangle, es pot aconseguir que en resulti una superfície regular S . El conjunt de punts parabòlics $Par(S)$ està format pels interiors dels cilindres, mentre que els punts plans són els punts del triangle Δ i els punts frontera de $Par(S)$ són els tres costats de Δ . Obtenim així una superfície regular amb $K \equiv 0$ i que no és part d'un pla o d'un cilindre.

Certament, aquest exemple no està en contradicció amb el teorema de Hartman-Nirenberg, ja que la superfície no és completa. Una part de la prova del teorema, que no analitzarem, consisteix a veure que la transició de punts parabòlics a punts plans que es dona en aquest exemple no es pot donar per a superfícies completes.

Per a la resta, suposem que tots els punts són parabòlics, $S = Par(S)$.



2a observació: Per a tot punt $p \in S$ passa una única recta ℓ_p continguda a S .

En efecte, per p passa una única corba asimptòtica, ja que és un punt parabòlic; si veiem que és un segment rectilini, tota la recta corresponent estarà inclosa a S ja que la superfície és completa. Per veure que la corba asimptòtica per p és un segment, comprovem que és a la intersecció de dos plans no paral·lels.

Considerem una parametrització regular φ en un entorn V de p i tal que les corbes coordenades siguin línies de curvatura. Una d'elles serà la corba asimptòtica, posem per cas $v = v_0$, amb la qual cosa $N_u = 0$ al llarg d'aquesta corba, pel teorema de O. Rodrigues. Així, el vector $N(u, v_0)$ serà constant en variar u , i anàlogament el vector $N_v(u, v_0)$, ja que la seva derivada respecte de u és $(N_v)_u = (N_u)_v = 0$. Denotem per N_0 i $(N_v)_0$ aquests vectors.

Com que per tot punt de V passa una corba $v = cnt$, se segueix que $N_u = 0$ a V . D'aquí, en resulta:

$$\langle \varphi, N \rangle_u = \langle \varphi_u, N \rangle + \langle \varphi, N_u \rangle = 0 \implies \langle \varphi, N \rangle = g(v),$$

per a una determinada funció C^∞ , $g(v)$.

Derivant respecte de v la funció $g(v)$, trobem

$$\langle \varphi, N_v \rangle = g'(v).$$

En definitiva, veiem que la corba $v = v_0$ satisfà

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u, v_0), N_0 \rangle &= g(v_0) \\ \langle \varphi(u, v_0), (N_v)_0 \rangle &= g'(v_0) \end{aligned}$$

i, per tant, està continguda en la intersecció de dos plans. Només cal observar finalment que aquests dos plans es tallen en una recta, ja que $N_v \neq 0$, perquè els punts són parabòlics i, en conseqüència, N, N_v són linealment independents.

3a observació: Les rectes ℓ_p, ℓ_q per dos punts diferents $p, q \in S$ són paral·leles.

En primer lloc, observem que les rectes ℓ_p, ℓ_q no es poden tallar, ja que, segons l'observació anterior, només passa una recta per cada punt de S . Acceptem ara el fet següent (cf. [dC], p. 385):

Asserció: Si S és una superfície regular amb $K \equiv 0$ i $p \in S$, aleshores l'aplicació exponencial \exp_p està definida a tot el pla tangent

$$\exp_p : T_p S \longrightarrow S,$$

és exhaustiva i és una isometria local.

La idea és ara veure que ℓ_p, ℓ_q són paral·leles, aixecant-les al pla tangent $T_p S$ i comprovant que allà ho són. El raonament qualitatiu és el següent: com que S és arc-connexa, existeix



un camí continu $\alpha(t)$ que uneix $p = \alpha(0)$ i $q = \alpha(1)$. Recobrim $\alpha(I)$ considerant a cada punt $\alpha(t)$ un entorn sobre al qual l'aplicació \exp_p indueix una isometria local; pel lema del nombre de Lebesgue, hi ha una partició $0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de l'interval I tal que, per a tot i , la imatge $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ està continguda en un d'aquests entorns.

Així, començant en el primer tram, $[t_0, t_1]$, les preimatges de $\ell_p, \ell_{\alpha(t_1)}$ per l'aplicació exponencial són dues rectes (recordem que l'exponencial és una isometria en aquest entorn). Però, aleshores, raonant inductivament des de t_1 fins a t_n , veiem que les preimatges de les rectes ℓ_p, ℓ_q són rectes del pla tangent que són paral·leles.

Com que totes les rectes són paral·leles, podem considerar-les parametritzades per un vector director constant comú, \mathbf{w} . Finalment, només cal fer una secció de S per un pla ortogonal a \mathbf{w} per obtenir una corba directriu $\alpha(t)$, amb la qual cosa S serà el cilindre $\alpha(u) + v\mathbf{w}$.

7.6. Superfícies de curvatura constant negativa: el pla hiperbòlic

La pseudoesfera és un exemple de superfície de curvatura constant negativa, però no és una superfície completa. De fet, Hilbert va provar el resultat següent (per a la demostració, vegeu [dC] o [S]):

7.6.1. Teorema de Hilbert. *No hi ha superfícies completes de \mathbb{R}^3 de curvatura constant negativa.* ■

Aquest resultat pot semblar que exhaurix les possibilitats de tenir un exemple de superfície que modelitzi la geometria sobre superfícies completes de curvatura constant negativa, però podem seguir Riemann i adoptar un punt de vista més general: en efecte, la curvatura i les geodèsiques d'una superfície depenen únicament de la primera forma fonamental, que defineix un producte escalar sobre cada pla tangent, i no del fet que aquesta primera forma fonamental sigui la corresponent al producte escalar ordinari de \mathbb{R}^3 . Concretem-ho amb la definició següent:

7.6.2. Definició. Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ una superfície regular. Una *mètrica riemanniana* g a S assigna a cada punt $p \in S$ un producte escalar g_p en el pla tangent $T_p S$ de manera que, per a qualsevol parametrització regular $\varphi : U \rightarrow S$, les funcions

$$\begin{aligned} g_{ij} : U &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\longmapsto g_{\varphi(u,v)}(\varphi_i, \varphi_j) \end{aligned}$$

són diferenciables (on hem escrit $\varphi_1 = \varphi_u, \varphi_2 = \varphi_v$). El parell (S, g) l'anomenem *superfície riemanniana*.

En el cas de les superfícies regulars analitzades fins ara, g_p no és altra cosa que la primera forma fonamental I_p . Observem que, des del punt de vista conjuntista, les superfícies riemannianes i els seus vectors tangents estan a \mathbb{R}^n , però les diferents mètriques g_p no són necessàriament les mètriques heretades de la mètrica ordinària de \mathbb{R}^n ; en aquest sentit podem dir que *les superfícies riemannianes no viuen necessàriament a \mathbb{R}^n* .



Tots aquells conceptes desenvolupats als capítols anteriors que depenen únicament de la primera forma fonamental s'estenen a les superfícies riemannianes, per exemple la longitud de corbes, els angles entre vectors tangents o l'àrea d'una regió compacta.

Pel teorema egreri de Gauss, la curvatura d'una superfície depèn únicament de la seva primera forma fonamental, per la qual cosa és possible definir ara la curvatura K per a les superfícies riemannianes mitjançant la fórmula de Gauss del capítol 3, que en el cas en què $g_{12} = 0$ es redueix a

$$K := -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\left(\frac{g_{11,v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_v + \left(\frac{g_{22,u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_u \right).$$

A més, podem definir les geodèsiques a partir de les equacions diferencials amb què les hem caracteritzat al capítol 5. Els resultats intrínsecs demostrats fins ara seran també certs per a les superfícies riemannianes; així, per exemple: (i) les geodèsiques són corbes que localment minimitzen la distància; (ii) a les superfícies riemannianes completes, dos punts es poden unir per una geodèsica minimal (Hopf-Rinow); (iii) la suma dels angles d'un triangle geodèsic satisfà la fórmula de l'excés, ja que se satisfà el teorema de Gauss-Bonnet. En particular, aquest darrer teorema mostra que les mètriques no poden ser arbitràries.

El pla hiperbòlic: el semipla de Poincaré

Anomenem *pla hiperbòlic* tota superfície riemanniana completa i simplement connexa de curvatura constant -1 . Hi ha diferents models del pla hiperbòlic. Comencem presentant el conegut com a semipla de Poincaré:

La superfície \mathbb{H} del semipla de Poincaré és l'obert de \mathbb{R}^2

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

que parametritzem amb les coordenades cartesianes $\varphi(u, v) = (u, v)$, amb la mètrica riemanniana definida per

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}.$$

Observem que aquesta matriu defineix un producte escalar que a cada punt és igual al producte escalar ordinari escalat per l'alçada del punt respecte de l'eix OX . A continuació analitzem algunes de les propietats d'aquesta superfície riemanniana:

(a) *Longitud i angles entre corbes.* Atès que la mètrica és un escalat de la mètrica ordinària que depèn de v , les longituds dels vectors tangents i de les corbes es deformen a mesura que ens apropem a l'eix OX o ens n'allunyem cap a l'infinit en la direcció OY . Per fer-nos-en una idea més concreta, calculem la longitud del segment de la recta $u = 0$ entre $v_0 = 1$ i $v_1 = a$:

$$\ell_1^a = \left| \int_1^a \sqrt{g_{11}(u')^2 + 2g_{12}u'v' + g_{22}(v')^2} dt \right| = \left| \int_1^a \sqrt{g_{22}} dt \right| = \left| \int_1^a \frac{dt}{t} \right| = |\ln a|.$$

Així, per exemple, veiem que la longitud del segment entre $v_0 = 1$ i $v_1 = 2$ és la mateixa que la longitud entre $v_0 = 1$ i $v_1 = 1/2$ –en ambdós casos és $\ell = \ln 2$ – i que, en general, quan ens acostem a l'eix $v = 0$, que està fora de \mathbb{H} , les longituds des de $v_0 = 1$ van augmentant fins a l'infinit.

Respecte de l'angle entre dos vectors tangents, el fet que sigui la mètrica ordinària escalada per un factor comporta que sigui una mètrica conforme, és a dir, que la mesura dels angles no canvia. Més concretament, a qualsevol punt de \mathbb{H} el pla tangent és el propi \mathbb{R}^2 ; considerem dos vectors tangents $\mathbf{w}_1 = (a, b), \mathbf{w}_2 = (c, d)$; aleshores, el cosinus de l'angle que formen respecte de la mètrica riemanniana és

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(a, b) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}{\sqrt{(a, b) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \sqrt{(c, d) \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{\langle (a, b), (c, d) \rangle}{|(a, b)| \cdot |(c, d)|}, \end{aligned}$$

on ara el producte escalar i els mòduls ho són amb referència al producte ordinari. És a dir, els angles entre vectors tangents a \mathbb{H} (i, per tant, entre corbes) són els mateixos que al semiplà ordinari.

(b) *Curvatura de Gauss.* Per calcular la curvatura, observem que $g_{12} = 0$ i, per tant, podem utilitzar la fórmula de Gauss en la forma

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\left(\frac{g_{11,v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_v + \left(\frac{g_{22,u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_u \right) \\ &= -\frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{2}{v} \right) \right) \\ &= -\frac{v^2}{2} \cdot \frac{2}{v^2} \\ &= -1, \end{aligned}$$

és a dir, \mathbb{H} és una superfície riemanniana de curvatura constant negativa.

(c) *Geodèsiques de \mathbb{H} .* Com que la mètrica de \mathbb{H} és ortogonal, $g_{12} = 0$, els símbols de Christoffel es calculen segons

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{g_{11,u}}{g_{11}} = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{g_{11,v}}{g_{22}} = \frac{1}{v}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{g_{11,v}}{g_{11}} = \frac{1}{v}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{g_{22,u}}{g_{22}} = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{g_{22,u}}{g_{11}} = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{g_{22,v}}{g_{22}} = \frac{1}{v}. \end{aligned}$$



Per tant, les equacions de les geodèsiques són

$$u'' - \frac{2}{v}u'v' = 0,$$

$$v'' + \frac{1}{v}(u')^2 - \frac{1}{v}(v')^2 = 0.$$

Observem que les rectes $u = cnt$ són una solució, ja que substituïnt a les equacions anteriors trobem

$$0 = 0,$$

$$v'' - \frac{1}{v}(v')^2 = 0,$$

i la segona equació determina el paràmetre arc amb el qual recórrer la corba.

Per trobar altres geodèsiques, observem que la primera equació diferencial la podem escriure de la forma

$$\frac{u''}{u'} = \frac{2v'}{v},$$

que és una equació de variables separades que podem integrar per obtenir

$$u' = cv^2,$$

on c és una constant. A més, la corba, essent una geodèsica, estarà parametritzada per l'arc s , per tant, ha de satisfer

$$\frac{(u')^2}{v^2} + \frac{(v')^2}{v^2} = 1 \implies \frac{(c^2v^2)^2}{v^2} + \frac{(u')^2}{v^2} = 1 \implies v' = v\sqrt{1 - c^2v^2},$$

amb la qual cosa trobem

$$u = \int \frac{du}{dv} dv = \int \frac{du}{ds} \frac{ds}{dv} ds = \int \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2v^2}} ds.$$

Podem calcular aquesta primitiva amb un canvi de variable $cv = \sin t$ per tal d'obtenir, finalment,

$$u = -\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2v^2} + d,$$

on d és una constant. Si escrivim aquesta equació de la forma

$$(u - d)^2 + v^2 = \frac{1}{c^2},$$

veiem que aquestes geodèsiques són arcs de circumferències centrades a l'eix OX .

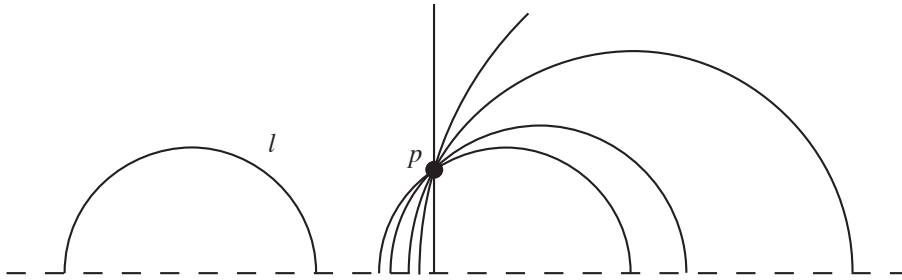


Fig. 7.5
Geodèsiques del semiplà de Poincaré.

En definitiva, les geodèsiques de \mathbb{H} són les rectes paral·leles a l'eix OY i les semicircumferències centrades a l'eix OX . A més, un càlcul senzill mostra que aquestes geodèsiques són de longitud infinita, per la qual cosa la variació del seu paràmetre arc és $-\infty < s < \infty$, és a dir, \mathbb{H} és una superfície riemanniana completa.

Resumim els càlculs i les observacions anteriors de la forma següent:

7.6.3. Proposició. *El pla hiperbòlic \mathbb{H} és una superfície riemanniana completa de curvatura constant negativa -1 .* ■

Hi ha altres superfícies riemannianes completes de curvatura constant -1 que serveixen com a model del pla hiperbòlic. Per exemple, deixem com a exercici provar que el disc unitat (obert) del pla que, parametritzat en coordenades polars $(u \cos v, u \sin v)$, té mètrica riemanniana

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-u^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1-u^2} \end{pmatrix}$$

és un d'aquests models (observem que podem passar de \mathbb{H} a \mathbb{D} mitjançant la transformació holomorfa i, per tant, conforme, $z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$).

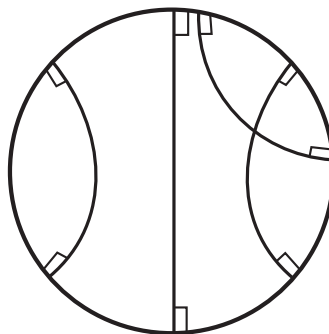


Fig. 7.6
Geodèsiques del disc de Poincaré.

Un altre model del pla hiperbòlic

Un altre model del pla hiperbòlic s'obté a partir de la mètrica de Minkowski de \mathbb{R}^3 . Considerem el producte bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ definit per



$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle_{-1} = xx' + yy' - zz'.$$

La matriu d'aquesta forma bilineal a la base canònica de \mathbb{R}^3 és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, és una forma bilineal no degenerada; no és, però, un producte escalar a \mathbb{R}^3 ja que no és definida positiva. S'anomena la *mètrica de Minkowski* de \mathbb{R}^3 .

Considerem la superfície \mathbb{S}_{-1} corresponent al full superior de l'hiperboloide definit per $|(x, y, z)|_{-1} = -1$, és a dir,

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0.$$

7.6.4. Lema. La mètrica de Minkowski indueix una mètrica riemanniana a \mathbb{S}_{-1} .

Demostració. Considerem la parametrització

$$\varphi(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, \cosh v), \quad 0 < u < 2\pi, v > 0.$$

Aleshores, a la base φ_u, φ_v del pla tangent, la mètrica de Minkowski té matriu

$$g = \begin{pmatrix} \sinh^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que és definida positiva a tots els punts. Aquesta parametrització no inclou el punt $(0, 0, 1)$, però en aquest punt el pla tangent és el pla XY i la restricció de la mètrica de Minkowski a aquest pla és el producte escalar ordinari; en particular, és definida positiva. En definitiva, la mètrica de Minkowski defineix una mètrica riemanniana a \mathbb{S}_{-1} . ■

7.6.5. Proposició. *Amb la mètrica induïda per la mètrica de Minkowski, la superfície riemanniana \mathbb{S}_{-1} és completa i de curvatura constant -1 . A més, les seves geodèsiques són les seccions planes de \mathbb{S}_{-1} .*

Demostració. Calculem la curvatura de \mathbb{S}_{-1} parametritzant-la com una superfície de revolució, com en la demostració del lema. Com que la corba $(\sinh v, 0, \cosh v)$ està parametritzada per l'arc (respecte de la mètrica de Minkowski!), en podem calcular la curvatura segons

$$K = -\frac{r''(v)}{r(v)} = -\frac{(\sinh v)''}{\sinh v} = -1.$$

A continuació, analitzem les geodèsiques. En primer lloc, considerem les geodèsiques pel punt $(0, 0, 1)$: són els meridians $u = cnt$, que corresponen a la intersecció de \mathbb{S}_{-1} amb els plans que contenen l'eix OZ .

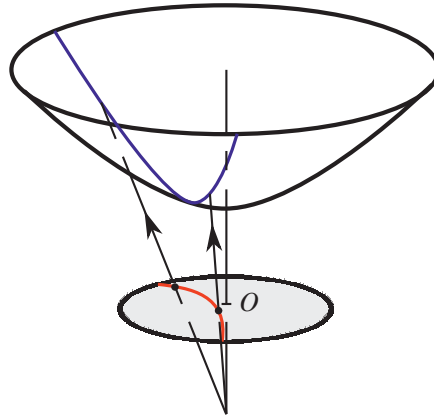


Fig. 7.7
Model sobre
l'hiperboloide del pla
hiperbòlic.

Sigui ara $p \in \mathbb{S}_{-1}$ un punt qualsevol. Afirmem que existeix una transformació lineal A que deixa invariant la mètrica de Minkowski, en què $Ap = (0, 0, 1)$. (Les transformacions lineals que deixen invariant la forma de Minkowski, s'anomenen *transformacions de Lorentz*.)

En efecte, les rotacions

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

són transformacions de Lorentz, per la qual cosa podem suposar que $p = (\sinh r, 0, \cosh r)$ és un punt del pla XZ . Però, aleshores, la transformació de Lorentz

$$\begin{pmatrix} -\cosh r & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}$$

transforma p en $(0, 0, 1)$.

Com que les transformacions de Lorentz conserven les geodèsiques, les geodèsiques per p són les preimatges per la transformació de Lorentz amb $Lp = (0, 0, 1)$ de les geodèsiques per $(0, 0, 1)$. El resultat es deriva del fet que L és lineal. Veiem, a més, que aquestes geodèsiques són completes. ■

7.6.6. La importància de les superfícies $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}_R^2$ i \mathbb{H}_R^2 , és a dir, el pla, l'esfera de radi R i el semiplà de Poincaré amb la mètrica escalada per la constant R , ve determinada perquè es poden caracteritzar pel teorema d'unicitat següent: *Si S és una superfície riemanniana completa i simplement connexa, de curvatura constant, aleshores S és isomètrica a $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}_R^2$ o \mathbb{H}_R^2 . Més encara, totes les superfícies completes de curvatura constant són quocient, per un subgrup discret determinat del grup d'isometries corresponent, d'una d'aquestes superfícies. Aquests resultats, s'extenen a varietats de dimensió superior. Vegeu, per exemple, [L].*



7.7. Exercicis

1. Diem que un difeomorfisme $f : S_1 \rightarrow S_2$ és una aplicació geodèsica si la imatge de tota geodèsica C de S_1 és una geodèsica de S_2 (no estem suposant que es preservi el paràmetre arc). Diem que és una aplicació geodèsica local a $p \in S_1$ si existeixen sengles entorns U i V de p i $f(p)$ tals que $f : U \rightarrow V$ és geodèsica.

- Donats $a > R > 0$, considerem el pla $H : z = a$ i la semiesfera $S_R^+ : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0$. Sigui $f : S_R^+ \rightarrow H$ la projecció central que a un punt $p \in S_R^+$ fa correspondre el punt intersecció de H i la recta determinada per p i l'origen. Determineu les equacions de f i f^{-1} . Proveu que és una aplicació geodèsica.
- Donats $R > a > 0$, considerem el pla $H : z = a$ i l'hiperboloide $S : x^2 + y^2 - z^2 = -R^2, z > 0$, amb la mètrica de Minkowski. Sigui $f : S \rightarrow H$ la projecció central que en un punt $p \in S$ fa correspondre el punt intersecció de H amb la recta determinada per p i l'origen. Determineu les equacions de f i f^{-1} . Proveu que és una aplicació geodèsica.
- Deduïu que tota superfície de curvatura constant S admet una aplicació geodèsica local en el pla per a tot $p \in S$.

2. *Teorema de Beltrami*. En aquest exercici, demostrem el recíproc de l'apartat (c) de l'exercici anterior.

- Sigui $v = v(u)$ una geodèsica d'una superfície $\varphi(u, v)$ que no és una corba coordenada $u = \text{cnt}$. Proveu que satisfà

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2.$$

- Sigui $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació geodèsica local a $p \in V \subset S$. Proveu que podem escollir una parametrització en la qual

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 2\Gamma_{12}^1, \quad \Gamma_{11}^1 = 2\Gamma_{12}^2$$

- Deduïu, de l'equació de Gauss i de les seves variants (problema 34 del capítol 3), que en les condicions de (b) se satisfan les equacions següents:

$$EK = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u$$

$$FK = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_v$$

$$FK = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)_u$$

$$GK = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)_v.$$

- Utilitzeu les equacions anteriors per tal de provar que les derivades parcials de K satisfan el sistema lineal:

$$EK_v - FK_u = 0,$$

$$FK_v - GK_u = 0,$$



i conclouem que K és constant, amb la qual cosa es demostra el teorema de Beltrami: *Si una superfície regular S admet en tot punt una aplicació geodèsica local en el pla, aleshores la curvatura de S és constant.*

3. El model projectiu del pla hiperbòlic. Sigui $R, a > 0$. En el disc $D_a : u^2 + v^2 < a^2$, considerem la mètrica riemanniana

$$E = \frac{R^2(a^2 - v^2)}{a^2 - u^2 - v^2}, \quad F = \frac{R^2 uv}{a^2 - u^2 - v^2}, \quad G = \frac{R^2(a^2 - u^2)}{a^2 - u^2 - v^2}.$$

- (a) Proveu que la curvatura és constant, igual a $-1/R^2$.
 (b) Proveu que les geodèsiques són rectes.
 (c) Sobre la semiesfera $S_a^+ : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$, considerem la forma quadràtica induïda per la forma de \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

Proveu que S_a^+ esdevé així una superfície riemanniana.

- (d) Proveu que la projecció ortogonal $\pi : S_a^+ \rightarrow D_a$ és una isometria.
 (e) Determineu les geodèsiques de D_a .

4. Superfícies localment determinades a partir d'una funció de curvatura.

- (a) Considerem una mètrica riemanniana a \mathbb{R}^2 definida per

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G(x, y) > 0.$$

Proveu que

$$(\sqrt{G})_{xx} + K\sqrt{G} = 0.$$

- (b) Recíprocament, sigui K una funció a \mathbb{R}^2 . Interpretem y com a paràmetre, i sigui G una solució de l'equació anterior amb condicions inicials

$$\sqrt{G}(x_0, y) = 1, \quad (\sqrt{G})_x(x_0, y) = 0.$$

Proveu que G és una funció positiva en un entorn de (x_0, y) i que, per tant, defineix una mètrica riemanniana en aquest entorn. Conclouem que tota funció diferenciable és localment la curvatura d'una superfície riemanniana.





Bibliografia

- [AT] M. Abate, F. Tovena: *Curves and Surfaces*. Universitext. Springer Verlag, 2012.
- [B] C. Bär: *Elementary Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2010.
- [Be] M. Berger: *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer Verlag, 2003.
- [BI] E. Bloch: *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Birkhäuser Verlag, 1997.
- [dC] M. P. Do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [L] J. M. Lee: *Riemannian Geometry*. GTM 176, Springer Verlag, 1997.
- [Mc] J. McCleary: *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press, 1994.
- [MP] R. Millman, G. Parker: *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1977.
- [MR] S. Montiel, A. Ros: *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society 2005.
- [M] J. Monterde: *Geometria diferencial de corbes i superfícies*.
www.uv.es/monterde/pdfs/totGDC.pdf, 2009.
- [O] J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*. Prentice-Hall, 1997.
- [R] A. Reventós: *Geometria axiomàtica*. Institut d'Estudis Catalans, 1993.
- [S] M. Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (5 vol)*. Publish or Perish, 1979.
- [St] D. J. Struik: *Geometría diferencial clásica*. Aguilar ed. 1955 (traducció de l'edició anglesa, Addison-Wesley, 1950).

