Review: Rigidity problems in bar-and-joint frameworks and linkages of rigid bodies

by Tiong-Seng Tay

Topologie Structurale #8, 1983

Compte rendu: Problèmes de rigidité dans les charpentes à barres et à joints et dans les liaisons des corps rigides

Cet article constitue un compte rendu de la thèse de l'auteur (Tay 1981). Comme le suggère le titre, ce travail traite de problèmes généraux de rigidité dans deux types de structures, c'est-à-dire les charpentes à barres et à joints et les liaisons des corps rigides.

Premièrement, nous traiterons de la rigidité des liaisons des corps rigides. Un **corps rigide** dans l'espace n est simplement un solide n-dimensionnel. Une **liaison** de corps rigides en R^n consiste en un ensemble de corps rigides et en un ensemble de barres reliant ensemble des paires de corps rigides au moyen de joints universels. Il se peut qu'il n'y ait aucune, une ou plusieurs barres liant une paire de corps rigides.

Un corps rigide dans un espace n se déplace avec $n(n + 1)/2$ degrés de liberté. Toutefois, un ensemble de b corps rigides, qui ne sont pas reliés dans un espace n, possède $bn(n + 1)/2$ degrés de liberté. Chaque barre reliant une paire de corps rigides impose tout au plus une contrainte linéaire sur les mouvements des corps rigides. Cela veut dire qu'une liaison de corps rigides en R^n ayant un ensemble de $b + 1$ corps possède un minimum de $bn(n + 1)/2$ barres. (Note: Ici, la rigidité signifie une absence de mouvements internes (relatifs), incluant les mouvements continus et infinitésimaux. Pour alimenter une discussion sur le sujet aussi bien que pour les concepts de base de la géométrie structurale, les lecteurs peuvent se référer à l'article fondamental de (Crapo et Whiteley 1982)).

* Cette thèse de doctorat fut rédigée à l'Université de Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, sous la direction du professeur Henry Crapo.

Structural Topology #8, 1983

This article reviews the present author's thesis (Tay 1981). As the title suggests, this work deals with general rigidity problems in two types of structures, viz. bar-and-joint frameworks and linkages of rigid bodies.

First we shall discuss the rigidity of linkages of rigid bodies. A **rigid body** in n-space is simply an n-dimensional solid. A **linkage** of rigid bodies in R^n consists of a set of rigid bodies and a set of bars linking together pairs of rigid bodies by means of universal (ball) joints. There may be none, one or more than one bar between a pair of rigid bodies.

A rigid body in n-space moves with $n(n + 1)/2$ degrees of freedom. Therefore a set of b rigid bodies, unlinked in n-space, has $bn(n + 1)/2$ degrees of freedom. Each bar linking a pair of rigid bodies imposes at most one linear constraint on the motions of the rigid bodies. This means that a rigid body linkage in R^n having a set of $b + 1$ bodies has a minimum of $bn(n + 1)/2$ bars. (Note: rigidity here means absence of *internal* (*relative*) motions, including both continuous and infinitesimal motions. For a discussion on this as well as the basic concepts of structure geometry the readers are referred to the fundamental paper (Crapo and Whiteley 1982)).

* This PhD thesis was written at the University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, under the direction of Professor Henry Crapo.

Il existe une structure combinatoire, appelée **liaison abstraite**, associée à une liaison de corps rigides, c'est-à -dire un multigraphe dont l'ensemble de sommets correspond à l'ensemble des corps rigides et l'ensemble d'arêtes correspond à l'ensemble des barres avec la relation d'incidence évidente. Nous appelons la liaison une réalisation en R^n de la jonction abstraite.

Le résultat le plus important de la thèse est le suivant:

Théorème (Théorème 4.13, Tay 1981). *Une jonction abstraite comportant $b + 1$ corps et $bn(n + 1)/2$ barres possède une réalisation rigide en R^n si et seulement si, il y a au plus $kn(n + 1)/2$ barres reliant un sous-ensemble de $k + 1$ corps, pour tout $k < b$. Ou, de façon équivalente, une jonction abstraite possède une réalisation rigide en R^n et est minimale (en termes du nombre de barres) par rapport à cette propriété si et seulement si c'est, comme un multigraphe, une union à arêtes disjointes de $n(n + 1)/1$ arbres générateurs.*

La généralisation suivante du théorème précédent est également vraie: supposons que les corps ont n degrés de liberté chacun en R^n. (Cela peut être fait, par exemple, en reliant par un certain nombre de barres chaque corps rigide à un corps rigide fixe. Appelons ce procédé l'attachement au sol. On peut analyser la rigidité de la liaison originale en observant la nouvelle liaison modulo l'attachement au sol.). Une telle structure est appelée une n-charpente (White et Whiteley, à paraître). Le résultat le plus général est le suivant:

Théorème. *Une n-charpente possède une réalisation rigide en R^n et est minimale, en tenant compte de cette propriété, si et seulement si elle est une union disjointe de n arbres générateurs.*

D'autres généralisations sont possibles. De plus, ce résultat, combiné au résultat de White et Whiteley (à paraître) apportera une preuve du théorème de Tutte sur la façon de décomposer un graphe en n composants connexes (Tutte 1961).

Dans le théorème ci-haut, nous assumons que les barres entrant dans chaque corps sont attachées au corps à des points distincts en général. Cela soulève la question suivante: supposons que pour chaque corps nous désignons un nombre fixe de joints, disons k, et insistons pour que les barres pénétrant chaque corps soient attachées à l'un de ces joints. Alors, pour quel k le théorème ci-haut se vérifierait-il encore? Il n'y a pas de réponse ou d'hypothèses évidentes.

Dans des espaces à trois dimensions ou à dimensions supérieures, k doit être au moins équivalent à quatre, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant (**Figure 1**). Dans la figure, la liaison abstraite possède deux corps rigides, les tétraèdres abcd et efgh, et 6 barres. Sur chaque corps, il y a 4 points de fixation. La jonction n'est pas rigide en R^3 ou dans des espaces à dimensions supérieures.

Voici une autre observation: supposons une liaison minimalement rigide en R^n. Fixons les points d'attache sur chaque corps pour qu'ils forment une charpente à barres et à joints minimalement rigide. De cette façon, nous pouvons transformer la jonction minimalement rigide en une charpente à barres et à joints minimalement rigide en R^n. Le problème ici est de caractériser les graphes sous-jacents de telles charpentes.

Les autres chapitres de la thèse traitent des charpentes à barres et à joints en R^n ($n \geqslant 3$).

There is a combinatorial structure, called an **abstract linkage**, canonically associated with a linkage of rigid bodies, namely a multi-graph whose set of vertices corresponds to the set of rigid bodies and whose set of edges corresponds to the set of bars with the obvious incidence relation. We call the linkage a realizatio&n in R^n of the abstract linkage.

The main result in the thesis is the following:

Theorem (Theorem 4.13, Tay 1981). *An abstract linkage with $b + 1$ bodies and $bn(n + 1)/2$ bars has a rigid realization in R^n iff there are at most $kn(n + 1)/2$ bars linking a subset of $k + 1$ bodies, for all $k < b$. Or equivalently an abstract linkage has a rigid realization in R^n and is minimal (in terms of the number of bars) with respect to this property iff it, as a multi-graph, is an edge-disjoint union of $n(n + 1)/2$ spanning trees.*

The following generalization of the above theorem is also true. Assume that the bodies has n degrees of freedom each in R^n. (This can be done, for example, by linking each rigid body to a fixed rigid body by a certain number of bars. Call this process the tie-down. The rigidity of the original linkage can be analysed by looking at the new linkage modulo the tie-down.) Such a structure is called an n-frame (White and Whiteley, to appear). The more general result is:

Theorem. *An n-frame has a rigid realization in R^n and is minimal with respect to this property iff it is a disjoint union of n spanning trees.*

Further generalizations are possible. Also, this result, together with the result of White and Whiteley (to appear) will give a proof of Tutte's theorem on decomposing a graph into n connected components (Tutte 1961).

In the above theorem we assume that the bars entering each body are attached to the body at distinct points in general. This raises the following question. Suppose on each body we designate a fixed number, say k, of joints and insist that the bars entering each body must be attached to one of these joints. Then for which k would the above theorem still hold? There is no obvious answer or conjecture.

In 3- or higher-dimensional spaces k has to be at least four as can be seen by the following example (**Figure 1**). In the figure, the abstract linkage has 2 rigid bodies, the tetrahedra abcd and efgh, and 6 bars. On each body there are 4 points of attachment. The linkage is not rigid in R^3 or higher-dimensional spaces.

Another observation is the following. Given a minimally rigid linkage in R^n. Brace the points of attachment on each body so that they form a minimally rigid bar and joint framework. In this way we can transform the minimally rigid linkage into a minimally rigid bar and joint framework in R^n. The problem here is to characterize the underlying graphs of such frameworks.

The other chapters of the thesis deals with bar-and-joint frameworks in R^n ($n \geqslant 3$).

Le chapitre 2 traite de plusieurs façons de construire des charpentes dépendantes. Ces constructions produisent une grande classe de charpentes dépendantes, et démontrent la complexité de la structure de ces charpentes; il n'y a pas d'hypothèse offerte quant aux conditions nécessaires et suffisantes pour la dépendance. On peut en voir quelques exemples à la **Figure 2**.

Chapter 2 discusses several ways of constructing dependent frameworks. These constructions yield a large class of dependent frameworks, and show the complexity of the structure of these frame works; no conjecture is offered as to necessary and sufficient conditions for dependency. Some examples are shown in **Figure 2**.

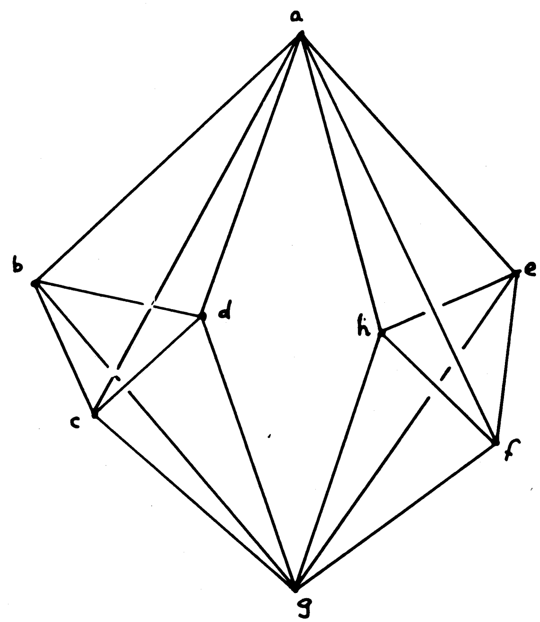
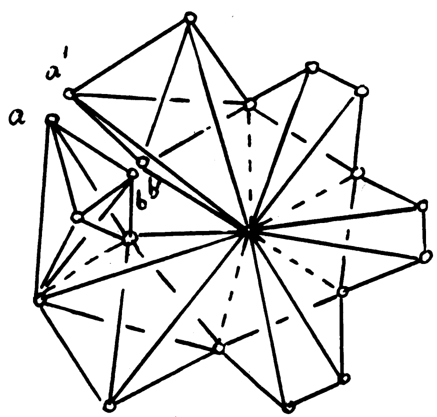
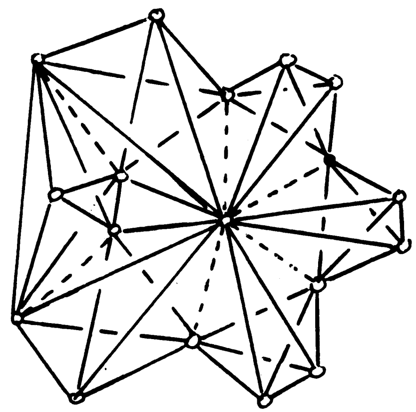


Figure 1.



A (i)



A (ii)

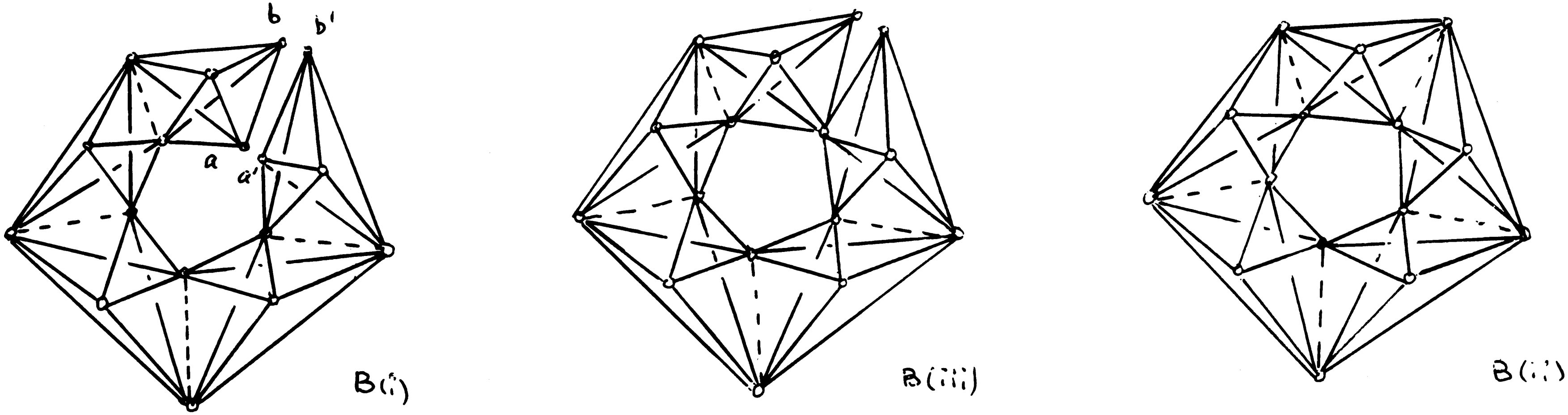


Figure 2.

A(i) et B(i) sont deux circuits (charpentes dépendentes minimales) en R^3. On les forme en prenant plusieurs copies de K^5 (le graphe complet sur 5 sommets), en les collant ensemble à travers des paires d'arêtes et en supprimant par la suite les arêtes collées (les lignes pointillées dans le diagramme). On obtient A(ii) à partir de A(i) en collant ensemble les arêtes ab et a'b' et en supprimant par la suite l'arête collée.

On obtient B(ii) à partir de B(i) en collant ensemble les arêtes ab et a'b' mais sans supprimer l'arête collée. On obtient B(iii) à partir de B(i) en collant ensemble les sommets a et a'. Ces trois procédés produisent des circuits selon certaines conditions et dans l'exemple ci-dessus, ils le font tous. A(ii) est rigide, comme l'est B(ii). Mais A(i), B(i) et B(iii) ne sont pas rigides.

Adresse: Département de mathématiques, Université nationale de Singapour, Kent Ridge, Singapour 0511.

Figure 2.

A(i) and B(i) are both circuits (minimal dependent frameworks) in R^3. They are formed by taking several copies of K_5 (the complete graph on 5 vertices) *gluing* them together across pairs of edges and then deleting the *glued* edges (dotted lines in the diagram). A(ii) is obtained from A(i) by gluing together edges ab and a'b' and then deleting the glued edge.

B(ii) is obtained from B(i) by gluing together edges ab and a'b' but without deleting the glued edge. B(iii) is obtained from B(i) by gluing together vertices a and a'. These three processes yield circuits under certain conditions and in the above example they all do. Also A(ii) is rigid, as is B(ii). But A(i), B(i) and B(iii) are not rigid.

Address: Mathematics Department, National University of Singapore, Kent Ridge, Singapore 0511.

Bibliography

Crapo & Whiteley 1982 Henry Crapo and Walter Whiteley A—M—R	**Statics of frameworks and notions of panel structures** **Structural Topology 6** (1982), 43-82.	
Tay 1981 Tiong-Seng Tay P—M—R	**Rigidity problems in bar and joint frameworks and linkages of rigid bodies.** PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1981.	Constructions of dependent frameworks (circuits) in R^n. Construction of new rigid frameworks from old. Generic rigidity of linkages of rigid bodies.
Tutte 1961 W.T. Tutte A—M—G	**On the problem of decomposing a graph into n connected components** **J. London Math. Soc. 36** (1961), 21-230.	
White & Whiteley, to appear Neil White and Walter Whiteley P—M—R	(Chapter 2 of a manuscript) Dept. of mathematics, McGill University, Montreal, Quebec Canada, 1982	Frames and their rigidity.