Folding Polyhedra

by R. Hughes Jones

Résumé Topologie Structurale #7, 1982

Polyèdres pliants

La structure topologique de deux des polyèdres uniformes non-convexes est étudiée à l'aide de modèles pliants qui démontrent explicitement cette structure.

Introduction

L'heptaèdre et l'octahemioctaèdre sont deux polyèdres uniformes non-convexes. Les faces d'un polyèdre uniforme sont des polygones réguliers et les sommets sont tous équivalents sous les opérations d'un groupe symétrique. Les polyèdres uniformes sont illustrés par Coxeter et al. (1) et Wenninger (2). Wenninger réfère à l'heptaèdre sous un autre nom: le tétrahémihexaèdre. Il donne des indications détaillées pour la construction de tous les polyèdres uniformes et de quelques formes étoilées.

Dans cet article, nous considérerons la structure topologique de l'heptaèdre et de l'octahémioctaèdre et nous démontrerons comment construire des modèles de carton pour illustrer cette structure.

L'heptaèdre a les sommets et les arêtes d'un octaèdre, comme dans la **Figure 1**, mais les faces alternées de l'octaèdre sont introduites comme dans la **Figure 2**. Donc, l'heptaèdre a quatre faces triangulaires ABC, AED, BDF, CFE et trois faces carrées BAEF, CBDE, ACFD.

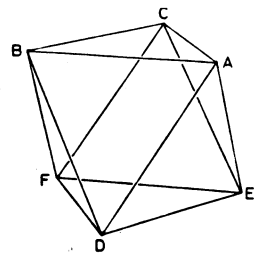

Figure 1. Vertices and edges of the Octahedron and Heptahedron ● Les sommets et arêtes de l'octaèdre et du heptaèdre.

Abstract **Structural Topology #7, 1982**

The topological structure of two of the non-convex uniform polyhedra is examined with the aid of folding models that explicitly demonstrate this structure.

Introduction

The Heptahedron and Octahemioctahedron are two non-convex uniform polyhedra. The faces of a uniform polyhedron are regular polygons and the vertices are all equivalent under the operations of a symmetry group. Uniform polyhedra are illustrated by Coxeter et al. (1) and Wenninger (2). Wenninger refers to the Heptahedron by an alternative name: the Tetrahemihexahedron. He gives detailed instructions for constructing all uniform polyhedra and some stellated forms.

In this article we shall consider the topological structure of the Heptahedron and Octahemioctahedron and show how card models may be built to demonstrate this structure.

The Heptahedron has the vertices and edges of an Octahedron, as in **Figure 1**, but alternate faces of the Octahedron are removed and three squares passing through the centre of the polyhedron are introduced as in **Figure 2**. So the Heptahedron has four triangular faces ABC, AED, BDF, CFE and three square faces BAEF, CBDE, ACFD.

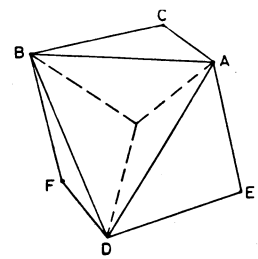

Figure 2. The Heptahedron ● L'heptaèdre.

L'octahémioctaèdre a les sommets et les arêtes d'un cuboctaèdre comme dans la **Figure 3**. Il a les faces triangulaires du cuboctaèdre ainsi que quatre faces hexagonales régulières qui passent au centre comme dans la **Figure 4**. Donc, l'octahémioctaèdre a les faces triangulaires ABC, DEF, GHI, JKL, AJE, BDH, CGK, FLI et les faces hexagonales BAJLIH, CBDFLK, ACGIFE, JKGHDE.

Lorsqu'on construit des modèles de carton de polyèdres, il est préférable d'employer des cartons de différentes couleurs pour les faces qui se rencontrent en arête ou qui s'intersectent. Les triangles de l'heptaèdre et de l'octahémioctaèdre peuvent donc être d'une couleur, alors que les carrés et les hexagones devraient préférablement être de couleurs différentes. Les parties d'une face simple devraient évidemment être de la même couleur. La structure de la surface est alors visible de façon plus immédiate.

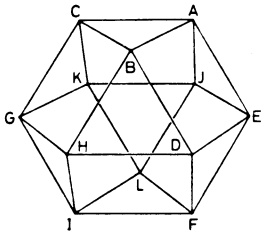

Figure 3. Vertices and edges of the Cuboctahedron and Octahemioctahedron ● Les sommets et arêtes du cuboctaèdre et de l'octahemioctaèdre.

Un heptaèdre pliant

Les faces carrées de l'heptaèdre s'intersectent le long de leurs diagonales. On peut construire une **forme non-pliée** de l'heptaèdre n'ayant pas ces intersections comme dans la **Figure 5**. Ce modèle a maintenant trois paires d'arêtes non-reliées autour de son périmètre. Les points opposés tels que X et Y autour du périmètre (un **trou**) sont identifiés dans l'heptaèdre. C'est un exemple d'une surface à **cross-caps**. On peut ajouter un **cross-cap** à n'importe quelle surface en y faisant un trou et en identifiant les points opposés autour du périmètre du trou. Toute surface fermée non-orientable, c'est-à-dire à un seul côté, doit être classée selon le nombre de **cross-caps** qu'elle possède. Lorsque l'application à S sommets, à A arêtes et à F faces est dessinée sur une surface fermée non-orientable, nous avons

$$S - A + F = 2 - \alpha,$$

où α est le nombre de **cross-caps**. Pour l'heptaèdre, nous avons S = 6, A = 12, F = 7, et α = 1. Dans la **Figure 5**, nous pouvons également remarquer que l'heptaèdre est formé à partir de la moitié des faces d'un cuboctaèdre. En fait, si nous prenons un cuboctaèdre entier et identifions les points opposés de façon diagonale sur toute la surface, alors nous obtenons un heptaèdre. Alors l'heptaèdre est un modèle du **plan projectif**. Le cuboctaèdre est **recouvert** par deux heptaèdres, alors le cuboctaèdre est une surface **recouvrant deux fois** l'heptaèdre.

On peut plier un modèle de carton dans la forme de la **Figure 5** en faisant des coupures supplémentaires le long d'une diagonale de chaque carré afin de produire un heptaèdre. La **Figure 6** montre le réseau obtenu et indique la méthode adéquate de construction pour obtenir un résultat soigné. Les points marqués 1, 2, 3 et 4 devraient être de quatre couleurs différentes. Les moitiés de chaque carré ont des pattes le long des deux petites arêtes et ces arêtes devraient être marquées afin de les plier facilement. Les

The Octahemioctahedron has the vertices and edges of a Cuboctahedron as in **Figure 3.** It has the triangular faces of the Cuboctahedron together with four regular hexagonal faces passing through the centre as in **Figure 4**. So the Octahemioctahedron has triangular faces ABC, DEF, GHI, JKL, AJE, BDH, CGK, FLI and hexagonal faces BAJLIH, CBDFLK, ACGIFE, JKGHDE.

When constructing card models of polyhedra it is best to use differently coloured card for any faces that meet at an edge or intersect. So the triangles of the Heptahedron and Octahemioctahedron may be of one colour, whilst the squares and hexagons should preferably be of different colours. Parts of a single face should of course be of the same colour. The structure of the surface is then more readily visible.

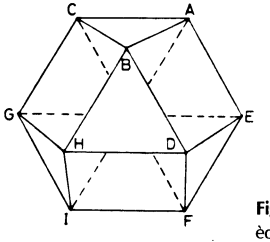

Figure 4. The Octahemioctahedron ● L'octahemioctaèdre.

A Folding Heptahedron

The square faces of the Heptahedron intersect each other along their diagonals. An **unfolded form** of the Heptahedron that does not have these intersections may be constructed as in **Figure 5**. This model now has three pairs of unattached edges around its perimeter. Opposite points such as X and Y around this perimeter or **hole** are identified in the Heptahedron. This is an example of a surface with a **cross-cap**. A cross-cap may be added to any surface by making a hole in that surface and identifying opposite points around the perimeter of the hole. Any closed non-orientable, i.e. one-sided, surface may be classified according to the number of cross-caps it possesses. When a map with V vertices, E edges and F faces is drawn on a closed non-orientable surface we have

$$V - E + F = 2 - \alpha$$

where α is the number of cross-caps. For the Heptahedron, we have V = 6, E = 12, F = 7, and α = 1. From **Figure 5** we may also notice that the Heptahedron is formed out of half of the faces of a Cuboctahedron. In fact if we take a whole Cuboctahedron and identify diagonally opposite points over the whole surface then we obtain a Heptahedron. So the Heptahedron is a model of the **projective plane**. The Cuboctahedron is **covered** by two Heptahedra, so the Cuboctahedron is a **double covering** surface for the Heptahedron.

A card model in the form of **Figure 5** with extra cuts along one diagonal of each square may be folded to produce a Heptahedron. **Figure 6** shows the resulting net and a suitable method of construction that yields a neat result. Regions marked 1, 2, 3 and 4 may be of four different colours. The halves of each square have tabs along both shorter edges and these edges should be scored so that they fold easily. The triangular regions marked 1 may then be made double to hide all but three of the tabs, as shown in the

régions triangulaires marquées 1 devraient être faites en double pour cacher les trois pattes, comme l'indique la figure. Ces deux épaisseurs ne doivent pas être collées ensemble le long des arêtes DE, EF et FD afin de laisser des fentes dans lesquelles on collera les pattes des arêtes correspondantes des carrés.

On peut plier le réseau en déposant le triangle ABC sur une surface plane et en relevant les régions ABE, BCD et CAF jusqu'à ce qu'elles se rejoignent comme dans la **Figure 7**. Les points D_1, E_1 et F_1 sont alors amenés aux points D_2, E_2 et F_2 respectivement. Les carrés se reforment lors de cette seconde étape et les pattes qui restent peuvent alors être collées dans les fentes prévues à cet effet. Le réseau de la **Figure 6** est alors devenu un heptaèdre.

On peut facilement démontrer que l'heptaèdre est une surface non-orientable en traçant une route reliant les points opposés sur la périphérie de la **Figure 5**, c'est-à-dire de X à Y. Il est préférable de dessiner une ligne continue sur un des côtés de la surface, dans la **Figure 5** et une ligne pointillée sur l'autre côté exactement en-dessous de la ligne continue. Lorsqu'on pliera le modèle pour former l'heptaèdre, on découvrira que la ligne continue amène à la ligne pointillée.

figure. These double layers should not be glued together along the edges DE, EF and FD as they then provide convenient slots into which to tuck the free tabs on the corresponding edges of the squares.

The net may now be folded by keeping the triangle ABC on a flat surface and lifting up the regions ABE, BCD and CAF until they meet as in **Figure 7**. The points D_1, E_1 and F_1 are then taken across to D_2, E_2 and F_2 respectively. The squares are reformed by this second step and the free tabs may be tucked into their correct slots. The net of **Figure 6** has now been turned into a Heptahedron.

The fact that the Heptahedron is a non-orientable surface is easily demonstrated by marking a path joining two opposite points on the periphery of **Figure 5**, e.g. X to Y. It is best to draw a continuous line on one side of the surface in **Figure 5** and a dotted line on the other side directly under the continuous line. When the model is folded to form the Heptahedron it will be found that the continuous line leads to the dotted line.

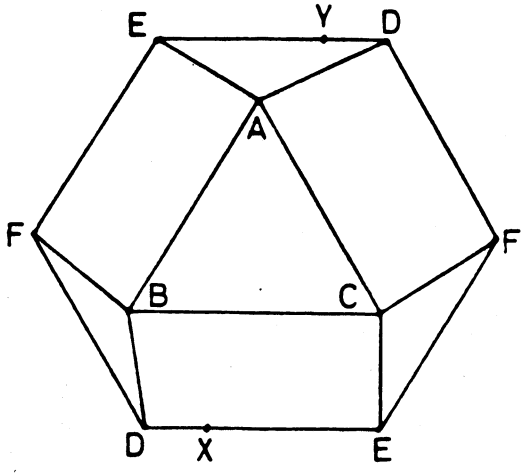

Figure 5. An unfolded Heptahedron ● Un heptaèdre non-plié.

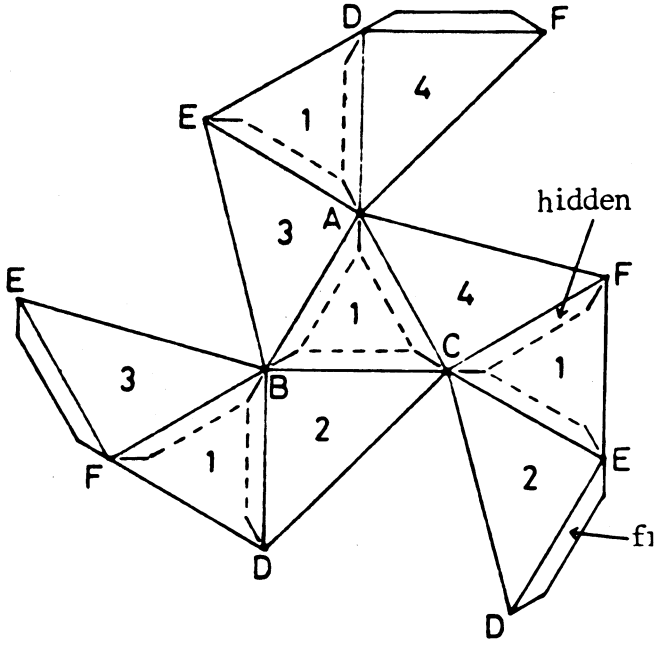

Figure 6. A net for a folding Heptahedron ● Un réseau pour plier un heptaèdre.

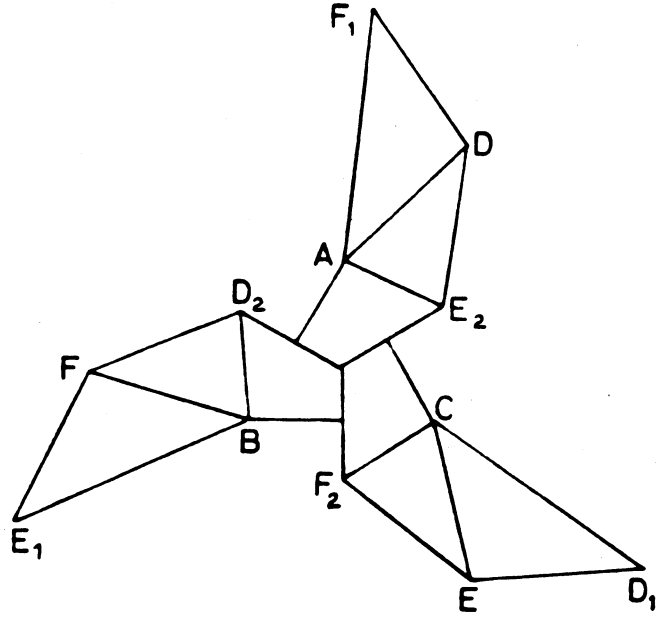

Figure 7. A partially folded Heptahedron ● Un heptaèdre partiellement plié.

Un octahémioctaèdre pliant

Les faces hexagonales de l'octahémioctaèdre s'intersectent le long de leurs diagonales. On peut construire une forme non-pliée de l'octahémioctaèdre n'ayant pas ces intersections, comme dans la **Figure 8**. Cette forme possède huit paires d'arêtes non-reliées autour de son périmètre et démontre immédiatement que la surface est équivalente à un tore car le périmètre est un parallélogramme à côtés opposés identifiés dans les mêmes directions. On peut rouler un modèle cartonné de la **Figure 8** comportant des plis le long des arêtes et de toutes les diagonales des hexagones pour rejoindre l'une ou l'autre paire des côtés opposés (mais non les deux). On peut rassembler les deux bouts du tube obtenu, pour former un véritable tore uniquement si le modèle est construit à partir d'un matériau flexible.

On peut remplir le plan euclidien par la juxtaposition d'octahémioctaèdres non-pliés comme le démontre la **Figure 9**. Nous obtenons alors une des mosaïques uniformes du plan. On peut considérer les mosaïques comme des polyèdres uniformes d'un genre différent. La **Figure 9** démontre que la mosaïque uniforme 3.6.3.6 est une couverture multiple de l'octahémioctaèdre, recouvrant l'octahémioctaèdre un nombre infini de fois. On peut comparer cette situation à celle de la Section 2, où le cuboctaèdre recouvrait l'heptaèdre deux fois.

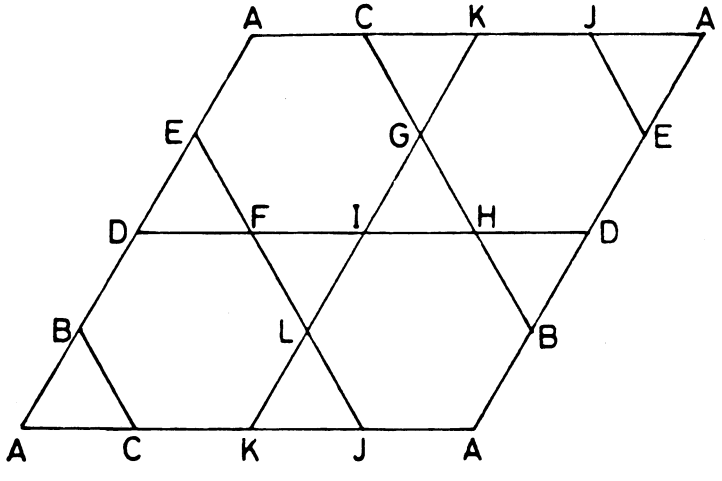

Figure 8. An unfolded Octahemioctahedron ● Un octahemioctaèdre non-plié.

A Folding Octahemioctahedron

The hexagonal faces of the Octahemioctahedron intersect each other along their diagonals. An unfolded form of the Octahemioctahedron which does not have these intersections may be constructed as in **Figure 8**. This form has eight pairs of unattached edges around its perimeter and shows immediately that the surface is equivalent to a torus as we have a parallelogram as perimeter with opposite sides identified in the same directions. A card model of **Figure 8** with creases along the edges and also along all diagonals of the hexagons may be «rolled up» to join either (but not both!) of the pairs of opposite sides. The two ends of the resulting tube could then be joined together to form a real torus only if the model were made of some flexible material.

The Euclidean plane may be «tiled» by unfolded Octahemioctahedra as shown in **Figure 9**. We obtain one of the uniform tessellations of the plane. Uniform tessellations may be considered to be degenerate uniform polyhedra. **Figure 9** demonstrates that the uniform tessellation 3.6.3.6 is a multiple covering of the Octahemioctahedron, covering the Octahemioctahedron an infinite number of times. This situation may be compared to that of Section 2, where the Cuboctahedron covers the Heptahedron twice.

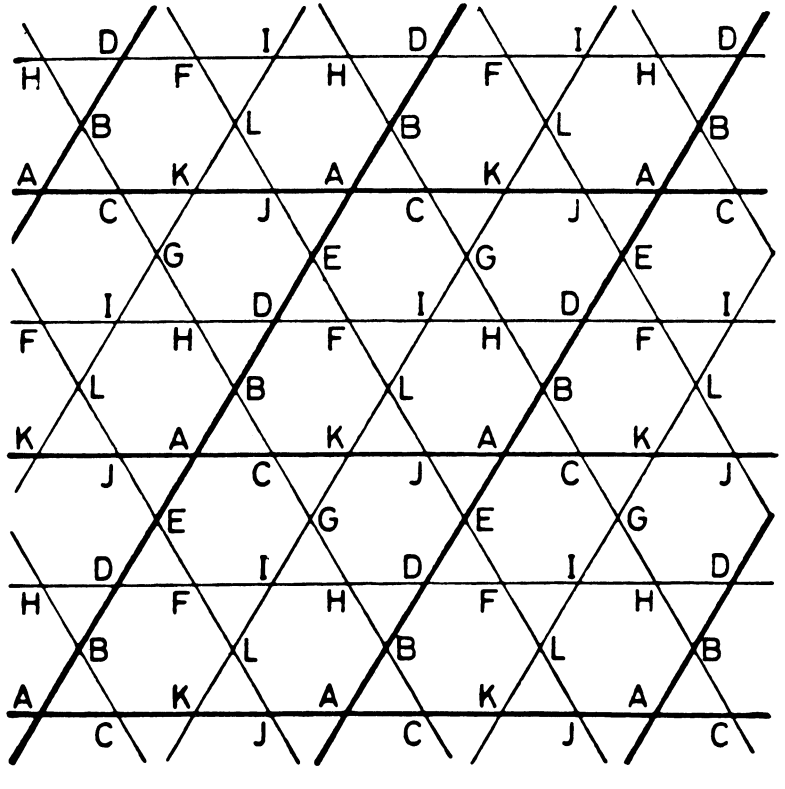

Figure 9. The uniform tessellation 3.6.3.6. ● La tessellation uniforme 3.6.3.6.

Toute surface fermée orientable, c'est-à-dire à deux côtés, peut être classée selon le nombre de poignées qu'elle possède. L'addition d'une poignée à une sphère produit une surface équivalente, c'est-à-dire qu'elle peut être altérée en l'étirant sans la déchirer pour former un tore. Lorsque l'application à S sommets, A arêtes et F faces est dessinée sur une surface orientable fermée, nous obtenons

$$S - A + F = 2 - 2\beta,$$

où β indique le nombre de poignées. Pour l'octahémioctaèdre, nous avons S = 12, A = 24, F = 12 et β = 1.

On peut former un octahémioctaèdre à partir d'un modèle cartonné de la forme de la **Figure 8** en y ajoutant des entailles supplémentaires le long des semi-diagonales de chaque hexagone, comme le démontre la **Figure 10**. Trois petites parties du modèle apparaîtront disjointes du reste, il serait alors préférable de les rattacher comme dans la **Figure 11**. Les paires d'arêtes non-reliées sont maintenant BD, DE, EA, AB et KJ.

Any closed orientable, i.e. two-sided, surface may be classified according to the number of **handles** it possesses. One handle added to a sphere yields a surface which is equivalent, i.e. may be distorted with stretching but without tearing, to a torus. When a map with V vertices, E edges and F faces is drawn on a closed orientable surface we have

$$V - E + F = 2 - 2\beta,$$

where β is the number of handles. For the Octahemioctahedron, we have V = 12, E = 24, F = 12 and β = 1.

A card model made in the form of **Figure 8** with extra cuts along semi-diagonals of each hexagon as shown in **Figure 10**, may be folded to form an Octahemioctahedron. Three small parts of the model will be seen to be disjoint from the rest so it is best to reattach these parts as in **Figure 11**. Unattached pairs of edges are now BD, DE, EA, AB and KJ.

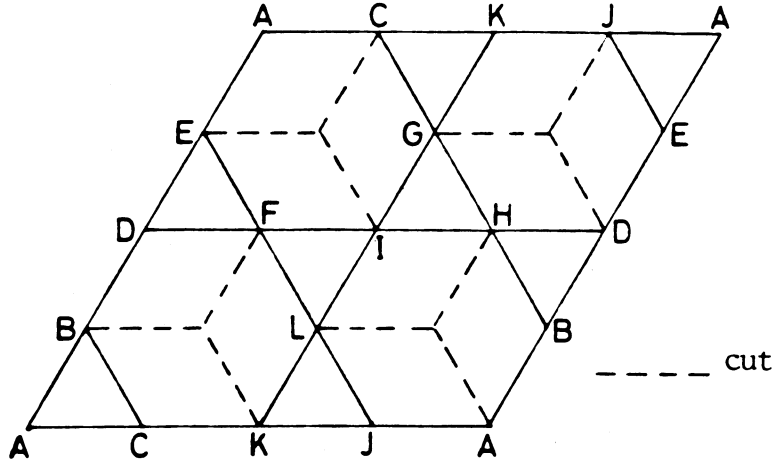

Figure 10. A net for a folding Octahemioctahedron ● Un réseau pour plier un octahemioctaèdre.

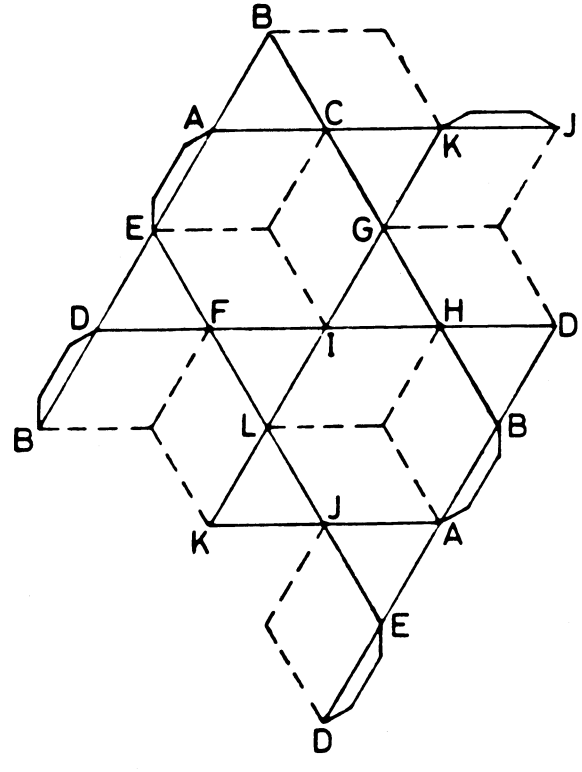

Figure 11. A modified net for a folding Octahemioctahedron ● Un réseau modifié pour plier un octahemioctaèdre.

On obtiendra un résultat final satisfaisant en construisant le réseau d'une façon similaire à celle décrite pour l'heptaèdre, c'est-à-dire en ajoutant des pattes sur les arêtes des hexagones et une double épaisseur pour les triangles. Si le lecteur a bien suivi les étapes décrites à la Section 2 pour plier l'heptaèdre, il ne lui suffira alors que

A neat result will again be obtained by constructing the net in a similar fashion to that described for the Heptahedron, i.e. have tabs on the edges of the hexagons and double layers for the triangles. If the reader has followed the procedure described in Section 2 for folding a Heptahedron then a little experimentation should be all that is needed to

d'un peu d'expérience pour plier le réseau de la **Figure 11** en un octahémioctaèdre. Le point important à retenir est que dans l'assemblage final les triangles alternés de la **Figure 11** pointent vers l'extérieur et les autres vers l'intérieur. A chaque sommet, les deux triangles doivent alors être inversés l'un par rapport à l'autre. Il serait alors utile d'avoir un second octahémioctaèdre déjà construit à partir de moyens plus conventionnels dans le but de les comparer l'un à l'autre. La **Figure 12** démontre une étape intermédiaire obtenue en tournant deux fois suivant la ligne KLIGK de la **Figure 11** et en ramenant ensemble les arêtes KJ.

fold the net in **Figure 11** into an Octahemioctahedron. One important point to remember is that alternate triangles in **Figure 11** point outwards in the final assembly and the rest point inwards. So at each vertex the two triangles must be turned over relative to each other. It will be of assistance to have for comparison a second Octahemioctahedron already constructed by more conventional means. **Figure 12** shows one possible intermediate stage which has been reached by twisting through two turns about the line KLIGK of **Figure 11** and bringing the edges KJ together.

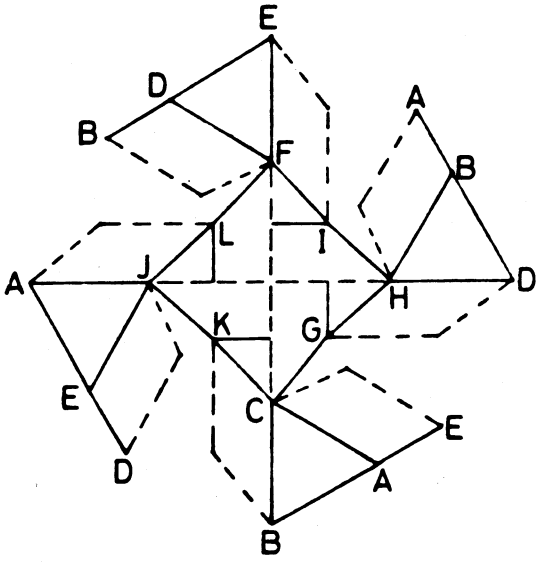

Figure 12. A partially folded Octahemioctahedron ● Un octahemioctaèdre partiellement plié.

Références

1. H.S.M. Coxeter, M.S. Lonquet-Higgins and J.C.P. Miller, *Uniform Polyhedra,* **Phil. Trans. Roy. Soc., A246** (1954), 401-450.

2. M.J. Wenninger, **Polyhedral Models**, Cambridge University Press, 1971.

References

1. H.S.M. Coxeter, M.S. Lonquet-Higgins and J.C.P. Miller, *Uniform* Polyhedra, **Phil. Trans. Roy. Soc., A246** (1954), 401-450.

2. M.J. Wenninger, **Polyhedral Models**, Cambridge University Press, 1971.