On the Space-filling Decahedra

by Michael Goldberg

Résumé

Topologie Structurale #7, 1982

Un polyèdre remplissant l'espace est celui dont les copies identiques peuvent être entassées pour remplir complètement l'espace à trois dimensions. Nous avons déjà présenté précédemment le résultat de nos recherches sur les polyèdres remplissant l'espace comportant de quatre à neuf faces. Nous élargissons ici cette étude pour englober les polyèdres remplissant l'espace comportant dix faces. Nous en avons découvert au moins 26 types différents.

Abstract

Structural Topology #7, 1982

A space-filling polyhedron is one whose replications can be packed to fill three-space completely. The space filling polyhedra of four to nine faces have been previously reported. The search is here extended to the convex space-fillers of ten faces. The number of types is found to be at least 26.

Introduction

La description et l'énumération des polyèdres remplissant l'espace, qui sont une réponse au dix-huitième problème de Hilbert, est loin d'être complète. L'auteur a déjà donné des réponses partielles dans un certain nombre d'articles. Les découvertes faites lors des travaux précédents ont contribué à trouver les polyèdres convexes remplissant l'espace à dix faces recherchés pour en faire une classification et une description dans cet article. On n'a pas encore inventé une méthode générale donnant toutes les solutions au problème de Hilbert.

(Koch 1972) a créé un programme pour ordinateur afin de découvrir les régions de Dirichlet des ensembles périodiques de points du système à treillis cubique. Les subdivisions de l'espace qui n'emploient que des régions directement congruentes produiront des polyèdres remplissant l'espace tel que spécifié dans le dix-huitième problème de Hilbert. Certains polyèdres remplissent l'espace en utilisant à la fois les polyèdres directement congruents et les polyèdres à image-miroir (énantimorphiques). En outre, les régions de Dirichlet se rencontrent face à face sans se superposer. Mais il y a d'autres polyèdres adéquats qui remplissent l'espace seulement en utilisant des faces qui se superposent.

Introduction

The description and enumeration of the space-filling polyhedra, which are an answer to Hilbert's eighteenth problem, is still far from complete. Partial answers are given in papers by the author. The findings of the previous works are an aid in deriving some of the convex space-fillers of ten faces sought for tabulation and description in this work. A general method for obtaining all the solutions of Hilbert's problem has not yet been devised.

(Koch 1972) has programmed a computer to derive the Dirichlet regions of periodic point sets of the cubic lattice system. Those which employ only directly congruent regions will qualify as space-fillers as demanded by Hilbert's eighteenth problem. Some polyhedra fill space by employing both directly congruent and mirror-image (enantimorphic) polyhedra. Furthermore, Dirichlet regions meet face-to-face without overlapping. But there are other qualifying polyhedra which fill space only by employing overlapping faces.

Parmi les onze types de polyèdres à dix faces répertoriés dans le mémoire de Koch, il n'y en a qu'un qui n'est pas énuméré ici parce qu'il requiert des formes droitières et gauchères pour remplir l'espace à trois dimensions. Un certain nombre de polyèdres peuvent être issus de la combinaison de polyèdres à sept faces remplissant l'espace.

Les formules du polyèdre

La formule de face d'un polyèdre indique le nombre de faces de chaque type. Le chiffre de droite indique le nombre de faces triangulaires. Le chiffre suivant indique le nombre de faces quadrilatérales; le prochain chiffre indique le nombre de faces pentagonales; etc.

La formule du sommet d'un polyèdre indique le nombre de sommets de chaque type. Le chiffre de droite indique le nombre de sommets de degré trois (trois arêtes au sommet); le chiffre suivant indique le nombre de sommets de degré quatre; etc. Lorsque le nombre de sommets excède neuf, le nombre est alors indiqué entre parenthèses.

La formule du polyèdre est une combinaison de la formule de face et de la formule du sommet. Cette formule constitue une description partielle d'un polyèdre. Il y a habituellement plusieurs polyèdres à combinaisons différentes qui ont la même formule de polyèdre. Ces différences ont été démontrées dans les diagrammes de Schlegel. (Federico 1975) a démontré qu'il y a exactement 2606 polyèdres à neuf faces à combinaison différente, et plus de 30 000 polyèdres à dix faces à combinaison différente.

Fragmentation

Si un polyèdre donné remplissant l'espace est fragmenté en plusieurs parties congruentes, alors chaque fragment remplit aussi l'espace. Les polyèdres remplissant l'espace comportant une grande symétrie ou qui sont très réguliers sont ceux qui sont le plus susceptible d'être dignes d'intérêt.

Si un polyèdre remplissant l'espace comporte un axe de symétrie, alors une coupure plane contenant cet axe divisera le polyèdre en deux parties congruentes. Cela peut parfois être fait de différentes manières, et chaque méthode produit un nouveau polyèdre remplissant l'espace différent. On peut voir des exemples de ces divisions en 10-X, 10-XI, 10-XIII, 10-XIV, 10-XV, 10-XVI, 10-XVII, 10-XX, 10-XXI, 10-XXII, 10-XXIII, 10-XXIV, 10-XXV et 10-XXVI.

Parfois un polyèdre remplissant l'espace a un axe de symétrie de rotation multiple. Ces polyèdres remplissant l'espace peuvent être séparés en trois parties congruentes ou plus par des demi-plans dans l'espace qui contiennent cet axe. Voir les exemples 10-XIX et 10-XXIV.

On peut faire éclater l'octaèdre tronqué à quatorze faces en quatre parties congruentes en utilisant six plans passant par le centre. Chaque partie est alors semblable à 10-XVIII. Le *dix de carreau*, 10-II, peut être séparé en deux parties congruentes par un plan, au centre, entre ses deux faces à forme de diamant. Chaque partie est alors semblable à 10-XXV.

Of the eleven types of ten-faced polyhedra listed in the Koch dissertation, only one of them is not listed here because it requires both right-hand and left-hand forms to fill three-space. Some of those listed can be derived by combinations of seven-faced space-fillers.

The polyhedron formulas

The face formula of a polyhedron expresses the number of faces of each type. The digit on the right is the number of triangular faces. The next digit is the number of quadrilateral faces; the succeeding digit is the number of pentagonal faces; etc.

The vertex formula of a polyhedron expresses the number of vertices of each type. The digit on the right is the number of vertices of degree three (three edges at a vertex); the next digit is the number of vertices of degree four; etc. When the number of vertices exceeds nine, then the number is enclosed in a parenthesis.

The polyhedron formula is the combination of the face formula and the vertex formula. This formula is a partial description of a polyhedron. There are usually several combinatorially different polyhedra with the same polyhedron formula. These differences are exhibited in their Schlegel diagrams. (Federico 1975) has reported that there are exactly 2606 combinatorially different polyhedra of nine faces, and over 30 000 combinatorially different polyhedra of ten faces.

Fragmentation

If a known space-filler can be fragmented into several congruent parts, then each fragment is also a space-filler. Those space-fillers which have a high degree of symmetry or regularity are the likeliest candidates for such consideration.

If a space-filler has an axis of symmetry, then a plane cut containing this axis will divide the polyhedron into two congruent parts. Sometimes this can be done in several ways, and each method produces a different new space-filler. Examples of such divisions are exhibited in 10-X, 10-XI, 10-XIII, 10-XIV, 10-XV, 10-XVI, 10-XVII, 10-XX, 10-XXI, 10-XXII, 10-XXIII, 10-XXIV, 10-XXV and 10-XXVI.

Sometimes a space-filler has an axis of multiple rotary symmetry. Such space-fillers can be cut into three or more congruent parts by spaced half-planes containing this axis. Examples are 10-XIX and 10-XXIV.

The 14-faced truncated octahedron can be exploded into four congruent parts by six planes containing the center. Each part is then like 10-XVIII. The ten-of-diamonds, 10-II, can be cut into two congruent parts by a plane midway between its two diamond faces. Each part is then like 10-XXV.

Fusion

On peut parfois obtenir un nouveau polyèdre remplissant l'espace en combinant deux polyèdres identiques remplissant l'espace ou deux polyèdres différents. On peut séparer un prisme triangulaire régulier en huit polyèdres à sept faces remplissant l'espace, comme illustré en 7-XXIX et 7-XXIX-1 (Goldberg 1978). Si on fait la division énantiamorphe des prismes adjacents d'une couche plane de prismes, alors chaque heptaèdre peut être combiné sur sa face latérale à son image-miroir dans le prisme adjacent pour produire le polyèdre à dix faces remplissant l'espace, tel qu'illustré en 10-XII et 10-XVI.

On peut obtenir les polyèdres remplissant l'espace 10-II, 10-III, 10-IV, 10-V, 10-VI et 10-VIII, en combinant deux polyèdres énantiamorphes 7-XIII, 7-XIV, 7-XVII ou 7-XVIII. Quatre 7-XXVII (deux énantiamorphes) peuvent être combinés en reliant les faces latérales et les bases pour produire un polyèdre à onze faces remplissant l'espace, 74-74. Ce polyèdre comporte un axe de symétrie. Un type de coupures planes passant à travers cet axe le divise en deux polyèdres congruents à neuf faces remplissant l'espace. Une autre famille de plans de coupes produit des polyèdres à huit faces remplissant l'espace, 143-36, qui n'ont pas encore été répertoriés et que nous désignons maintenant comme 8-XXXIX, F 235, au supplément (Goldberg, à paraître (b)). Une autre famille divise également le polyèdre en deux polyèdres congruents remplissant l'espace comme illustré en 10-XXIII (10 144-48). Quatre 7-XXXIX (deux énantiamorphes) peuvent être reliés en combinant les faces latérales et les bases pour produire un polyèdre à 12 faces remplissant l'espace, 66-92. Ce polyèdre possède un axe de symétrie. Une famille de coupures planes passant à travers cet axe divise ce polyèdre en deux polyèdres à dix faces remplissant l'espace, désignés comme 10-XX.

Quatre 7-XXIX-1 (deux énantiamorphes) peuvent être combinés à leurs faces latérales et à leurs bases pour produire le polyèdre à douze faces remplissant l'espace (12)-68. Une famille de coupures planes passant à travers cet axe produit le polyèdre à dix faces remplissant l'espace, 1072-48. Une autre famille de coupures produit le polyèdre à dix faces remplissant l'espace, 1153-48. Une autre famille encore produit 1090-3(10).

Le polyèdre à dix-huit faces remplissant l'espace de Löckenhoff-Hellner , illustré au numéro 18/32-1 à la page 33 du mémoire de Koch (Koch 1972) possède un axe de symétrie rotative à trois plis. Ce polyèdre peut être divisé en trois parties congruentes de douze faces chacune par trois demi-plans contenant cet axe. Chacune de ces parties possède un axe de symétrie. Une coupure plane passant à travers cet axe divise cette partie en deux parties congruentes de dix faces pour produire 10-XXV, 11 251-(15) à 23 arêtes.

Des divisions similaires du polyèdre remplissant l'espace, décrites par (Koch et Fischer 1972) devraient produire de nouveaux polyèdres remplissant l'espace.

Classification

La liste suivante comporte tous les polyèdres à dix faces remplissant l'espace qui ont été découverts. Pour chaque polyèdre, on a assigné un symbole, la formule du polyèdre, le nombre d'arêtes, la méthode de dérivation et une représentation picturale. Le nombre de sommets est toujours inférieur de huit au nombre d'arêtes, conformément à la formule d'Euler.

Fusion

Sometimes a new space-filler can be obtained by combining two identical or two different space-fillers. A regular triangular prism can be cut into eight seven-faced space-fillers, shown as 7-XXIX and 7-XXIX-1 (Goldberg 1978). If the opposite-hand division is performed in the adjacent prisms in a plane layer of prisms, then each heptahedron can be combined at the lateral face with its mirror-image in the adjacent prism to make the ten-faced space-fillers, shown as 10-XII and 10-XVI.

Space-fillers 10-II, 10-III, 10-IV, 10-V, 10-VI and 10-VIII can be made by combining two opposite-hand 7-XIII, 7-XIV, 7-XVII or 7-XVIII.
Four 7-XXVII (two-opposite-hand) can be combined by joining lateral faces and bases to produce an eleven-faced space-filler, 74-74. This polyhedron has an axis of symmetry. One class of plane cuts through this axis divides it into two congruent nine-faced space-fillers. Another family of cutting planes produces eight-faced space-fillers, 143-36, not previously reported, now designated as 8-XXXIX, F 235, to supplement (Goldberg; to appear (b)). Still another family divides it into two-congruent space-fillers shown as 10-XXIII (10 144-48). Four 7-XXXIX (two opposite-hand) can be joined by combining lateral faces and bases to produce a twelve-faced space-filler, 66-92. This polyhedron has an axis of symmetry. One family of plane cuts through this axis divides it into two ten-faced space-fillers designated as 10-XX.

Four 7-XXIX-1 (two opposite-hand) can be combined at their lateral faces and bases to produce the twelve-faced space-filler, (12)-68. One family of plane cuts through this axis produces the ten-faced space-filler, 1072-48. Another family of cuts produces the ten-faced space-fillers, 1153-48. Still another family of cuts produces 1090-3(10).

The eighteen-faced space-filler of Löckenhoff-Hellner, shown as 18/32-1 on page 33 of the Koch dissertation (Koch 1972), has an axis of three-fold rotary symmetry. This polyhedron can be divided into three congruent parts of twelve faces each by three half-planes containing this axis. Each of these parts has an axis of symmetry. A plane cut through this axis this part into two congruent parts of ten faces to produce 10-XXV, 11 251-(15) of 23 edges.

Similar divisions of the space-fillers described in (Koch & Fisher 1972) should produce new space-fillers.

Tabulation

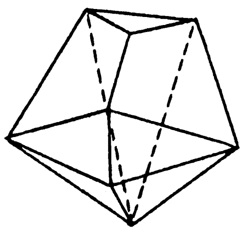
The following table shows all the convex ten-faced space-fillers that have been found. For each polyhedron, there is an assigned symbol, the polyhedron formula, the number of edges, the method of derivation and a pictorial representation. The number of vertices is always eight less than the number of edges, in accordance with Euler's formula.

Pour faciliter la comparaison, les polyèdres remplissant l'espace ont été classés dans l'ordre numérique de leurs formules de polyèdre. Les polyèdres remplissant l'espace 10-XVIII et 10-XIX ont la même formule de polyèdre 1630(16), bien que 10-XVIII soit le quart de 14-1, et que 10-XIX soit le tiers de 14-1. De plus, ils ont le même diagramme de Schlegel. Mais ils sont métriquement si différents qu'il est préférable d'utiliser une désignation séparée. Les polyèdres remplissant l'espace 10-XII et 10-XIII ont la même formule de polyèdre 1036-64, mais ils ont des diagrammes de Schlegel différents. Dans 10-XII, l'hexagone est bordé de polygones dont les arêtes comptent 3,3,3,3,3,3. Dans 10-XIII, l'hexagone est entouré de polygones dont les arêtes comptent 3,4,3,3,4,3.

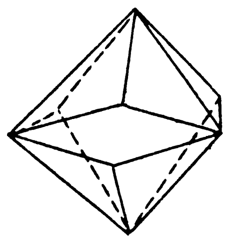
La plupart des cas illustrés font partie de classes infinies. Nous avons le choix d'angles indépendants et de longueurs indépendantes. Les classes de polyèdres à dix faces remplissant l'espace, décrites ici, ne s'excluent pas mutuellement. Ces classes sont des exemples de méthodes de dérivation, et on peut parfois obtenir une forme particulière en utilisant différentes méthodes. Comme il y a plus de 30 000 types combinatoires différents de polyèdres à dix faces, il devrait y avoir encore plusieurs polyèdres remplissant l'espace à découvrir parmi eux.

To facilitate comparison, the space-fillers have been tabulated in numerical order of their polyhedron formulas. Space-fillers 10-XVIII and 10-XIX have the same polyhedron formula 1630(16), although 10-XVIII is one-fourth of 14-I, and 10-XIX is one-third of 14-I. Furthermore, they have the same Schlegel diagram. But they are so different metrically that a separate designation is desirable. Space-fillers 10-XII and 10-XIII have the same polyhedron formula 1036-64, but they have different Schlegel diagrams. In 10-XII, the hexagon is bordered by polygons whose edges number 3,3,3,3,3,3. In 10-XIII, the hexagon is bordered by polygons whose edges number 3,4,3,3,4,3.

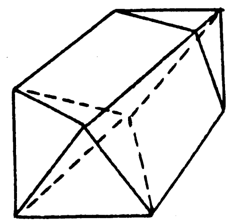
Most of the cases exhibited are members of infinite classes. We have the choice of independent angles and independent lengths. The classes of ten-faced space-fillers described here are not mutually exclusive. These classes are examples of methods of derivation, and sometimes a particular shape can be derived by different methods. Since there are over 30 000 different combinatorial types of ten-faced polyhedra, there should be many more space-fillers among them that are yet to be found.



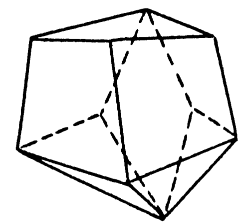
10-I. Koch 10/8-2, 28-161, 16 edges (arêtes).



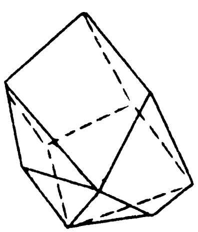
10-II. ten-of diamonds, Koch 10/8-1, 28-404, 16 edges, made of four double pyramids or two opposite-hand 7-XIII (dix de diamants, fabriqué de quatres pyramides doubles ou de deux 7-XIII enantiamorphes.)



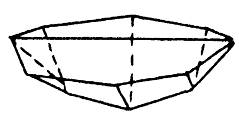
10-III. Koch 10/9-1, 46-72, 17 edges, made of two 7-XIV or 7-XVIII (17 arêtes, construit de deux 7-XIV ou 7-XVIII.)



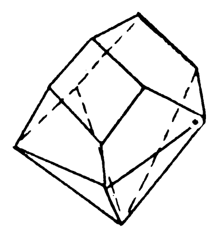
10-IV. Koch 10/10-2, 64-145, 18 edges, made of two opposite-hand 7-XXVII. (18 arêtes, construit de deux 7-XXVII enantiamorphes.)



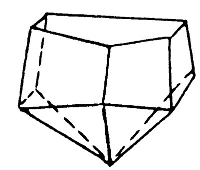
10-V. Koch 10/10-1, 64-226, 18 edges, made of two opposite-hand 7-XIV (18 arêtes, fabriqué de deux 7-XIV enantiamorphes.)



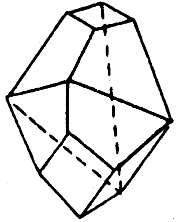
10-VI. Koch 10/11-1, 244-56, 19 edges, made of two opposite-hand 7-XIII (19 arêtes, fait de deux 7-XIII enantiamorphes.)



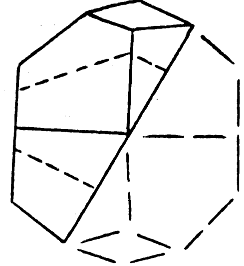
10-VII. Koch 10/11-2, 244-137, 19 edges (arêtes).



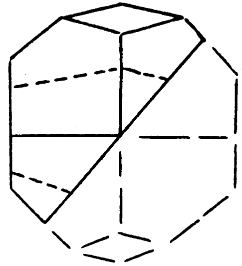
10-VIII. Koch 10/11-3 or 10/11-4, 244-137, 19 edges, made of two opposite-hand 7-XIII (19 arêtes, fabriqué de deux 7-XIII anantiamorphes.)



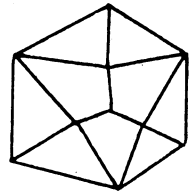
10-IX. Koch 10/12-1, (10)0-48, 20 edges (arêtes).



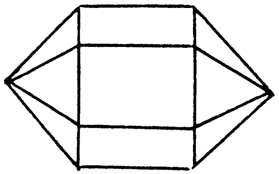
10-X. 541-3(10), 21 edges, 1/2 of 13-I (21 arêtes, 1/2 d'un 13-I.)



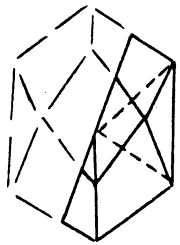
10-XI. 640-1(14), 23 edges, 1/2 of 13-I (23 arêtes, 1/2 d'un 13-I.)



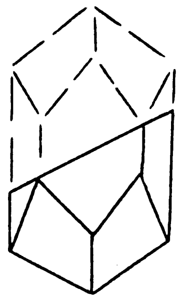
10-XII. 1036-64, 18 edges, join of two opposite-hand 7-XXIX at lateral faces, hexagon bordered by 3,3,3,3,3,3 (18 arêtes, l'union de· deux 7-XXIX enantiamorphes aux faces latérales, l'hexagone borné par 3,3,3,3,3,3.)



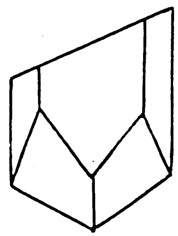
10-XIII. 1036-64, 18 edges, 1/2 of pencil cube 12-I, hexagon bordered by 3,4,3,3,4,3 (18 arêtes, 1/2 d'un cube-crayon 12-I, l'hexagone borné par 3,4,3,3,4,3.)



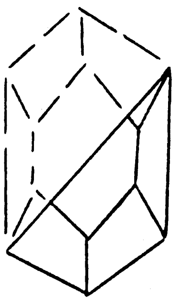
10-XIV. 1054-56, 19 edges, 1/2 of 12-VI-0 which is made of four 7-XXIX (two opposite-hand). (19 arêtes, 1/2 d'un 12-VI-0 qui est fait de quatre 7—XXIX, deux enantiamorphes.)



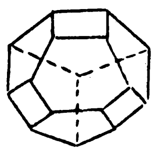
10-XV. 1072-48, 20 edges, 1/2 of 12-faced (12)0-68 which is made of four 7-XXIX-1 (two opposite-hand). (20 arêtes, 1/2 du (12)0—68 à 12 faces, qui est fait de quatre 7-XXIX-1 (deux enantiamorphes)).



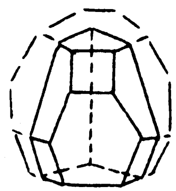
10-XVI. 1090-3(10), 21 edges, 1/2 of 12-faced (12)0-68 which is made of four 7-XXIX-1 (two opposite hand). (21 arêtes, 1/2 d'un (12)0-68 à 12 faces, qui est fait de quatre 7-XXIX-1 (deux enantiamorphes)).



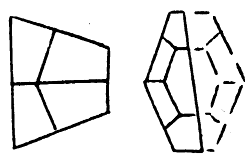
10-XVII. 1153-48, 20 edges, 1/2 of 12-faced (12)0-68 which is made of four 7-XXIX-1 (two opposite-hand). (20 arêtes, 1/2 d'un (12)0-68 à 12 faces, qui est fait de quatre 7-XXIX-1 (deux enantiamorphes)).



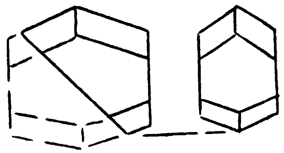
10-XVIII. 1630-(16), 24 edges, 1/4 of truncated octahedron 14-I by exploding from center. Made of three 7-XXI. (24 arêtes, 1/2 d'un octaèdre tronqué 14-I par explosion du centre. Fait de trois 7-XXI.)



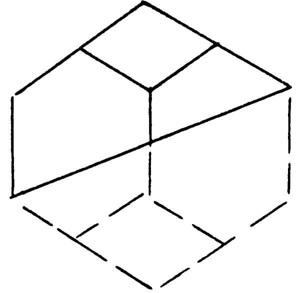
10-XIX. 1630-(16), 24 edges, 1/3 of truncated octahedron 14-I of 14-VI made by three cutting half-planes through axis, 120° apart. Made of four 7-XXI. (24 arêtes, 1/3 d'un octaèdre tronqué 14-I du 14-VI fait par trois demi-plans passant par un axe, séparés par des angles de 120°. Fait de quatre 7-XXI.



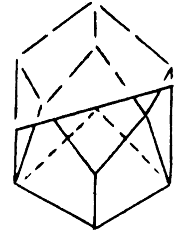
10-XX. 2260-1(14), 23 edges, 1/2 of 12-V (23 arêtes, 1/2 d'un 12-V.)



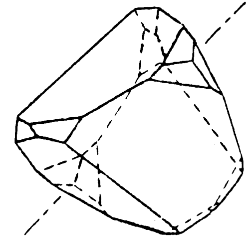
10-XXI. 3052-2(12), 22 edges, 1/2 of 12-II (22 arêtes, 1/2 d'un 12-II.)



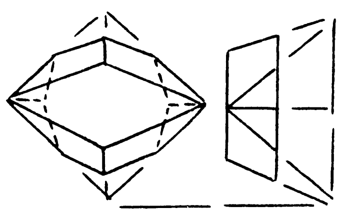
10-XXII. 3250-(16), 24 edges, 1/2 of 14-I by cutting plane through parallel edges of opposite squares (24 arêtes, 1/2 d'un 14-I par un plan coupant par des arêtes parallels dans des carrés opposés.)



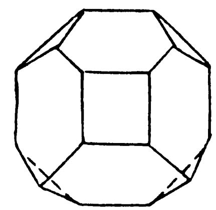
10-XXIII. 10144-48, 20 edges, 1/2 of 11-faced cluster of four 7-XXVII (two opposite-hand). (20 arêtes, 1/2 d'un assemblage à onze faces fait de quatre 7-XXVII, deux enantiamorphes).



10-XXIV. 11251-(15), 23 edges, 1/6 of 18-faced Löckenhoff-Hellner space-filler shown, Koch 18\32-1, 6000(12)0-32), axis indicated in diagram. (23 arêtes, 1/6 du polyèdre remplissant l'espace à 18 faces, de Löckenhoff-Hellner, par rapport à l'axe indiqué dans le diagramme.)



10-XXV. 100054-20(10), 20 edges, 1/2 of ten-of-diamonds 10-II (20 arêtes, 1/2 du dix-de-diamants 10-II.)



10-XXVI. 104014-(16), 24 edges, 1/2 of 14-faced 14-I, cut through four squares. (24 arêtes, 1/2 du 14-I à 14 faces, coupé par quatres carrés.)

Bibliography

(Koch 1972) Koch, Elke, *Wirkungsbereichspolyeder und Wirkungsbereichsteilungen zu kubischen Gitterkomplexen mit weniger als drei Freiheitsgraden*, Diss. Univ. Marburg/Lahn (1972).

(Koch & Fischer 1972) Koch, Elke and Fischer, W., *Wirkungsbereighstypen einer verzerrten Diamantkonfiguration mit Kugelpackungssharacter*, Z. Kristallogr. 135 (1972) 73-92.

(Federico 1975) Federico, P.J., *The Number of Polyhedra*, Philips Res. Repts. 30 (1975) 220-231.

(Goldberg 1974) Goldberg, Michael, *Three Infinite Families of Tetrahedral Space-fillers*, Jour. of Comb. Theory 16 (1974) 348-354.

(Goldberg 1972) *The Space-Filling Pentahedra*, Jour. of Comb. Theory 13 (1972) 437-443.

(Goldberg 1976) *Several New Space-Filling Polyhedra*, Geometriae Dedicata 5 (1976) 517-523.

(Goldberg 1977) *On the Space-Filling Hexahedra*, Geometriae Dedicata 6 (1977) 99-108.

(Goldberg 1978) *On the Space-Filling Heptahedra*, Geometriae Dedicata 7 (1978) 175-184.

(Goldberg 1979) *Convex Space-Fillers of More than Twelve Faces*, Geometriae Dedicata 8 (1979) 491-500.

(Goldberg 1980) *Some overlooked convex polyhedral space-fillers*, Geometriae Dedicata 9 (1980) 375-379.

(Goldberg, to appear (a)) *On the dodecahedral space-fillers*, Geometriae Dedicata.

(Goldberg, to appear (b)) *On the space-filling octahedra*, Geometriae Dedicata.

(Goldberg, to appear (c)) *On the space-filling enneahedra*, Geometriae Dedicata.