Letters / Correspondance

L'enseignement de la perception spatiale

J'étais vraiment excitée en lisant la dernière colonne de la page 4, *Perception de l'espace* (Topologie Structurale #4), car je ne pouvais être davantage en accord avec vous. Avant que je réponde à vos questions, permettez-moi de vous raconter certaines choses de mes expériences, parce qu'elles ne sont ni en architecture, ni en structure, ni en topologie!

Bien que j'aie enseigné les mathématiques ordinaires au collège jusqu'en 1965 et que depuis j'aie enseigné les mathématiques aux futurs professeurs, j'éprouve beaucoup d'intérêt dans le travail visuel, les structures et les liens entre les mathématiques et les arts visuels. Tout en étudiant et en enseignant à Harvard Graduate School of Education, j'ai pu prendre des cours et assister comme auditeur libre aux cours d'art visuel. J'ai pris un cours sur le design tri-dimensionnel donné par le professeur Bakanowsky et ai assisté aux cours donnés par les professeurs Arnheim et Loeb. J'ai eu la chance d'entrer en contact avec Alan Holden alors qu'il travaillait pendant quelques étés à l'Elementary Science Study dans la région de Boston (j'en parlerai davantage plus loin). Après avoir entendu Keith Critchlow donner la conférence centrale à la rencontre annuelle de l'Association des professeurs de mathématiques de Grande-Bretagne, en 1970, j'ai pu assister quelques-unes de ses conférences au A.A. J'ai eu la chance également, plus récemment, de faire la connaissance de Lionel March à une autre rencontre des professeurs britanniques. Toutes ces personnes m'ont grandement influencée et m'ont fait souhaiter de pouvoir passer plus de temps dans ce domaine où se rencontrent les mathématiques, la pensée visuelle et les arts visuels. Comme je vivais encore à Cambridge, j'ai même parlé une fois de créer un Institut d'Education visuelle! J'ai dirigé plusieurs ateliers qui se trouvaient à la limite des mathématiques et du visuel, ou des mathématiques et des arts visuels (d'un, un bref cours d'été au département de mathématiques à Concordia, grâce à David Wheeler.) Malheureusement, je n'ai pas encore écrit grand-chose sur ce genre de travail.

Permettez-moi de vous parler de certaines choses que j'ai faites avec et pour les enfants dans mon enseignement des mathématiques, choses qui impliquent la visualisation.

Teaching spatial perception

I was really excited when I read the last column on page 4, *Perception of Space* (Structural Topology #4), because I could not agree with you more. Before responding to your questions, let me tell you a few things about my background, since it is not in architecture, structure or topology!

Though I taught straight college math until 1965 and since then have been teaching math to teachers-to-be, I have strong interest in visual work, structure and links between math and the visual arts. While studying and then teaching at the Harvard Graduate School of Education, I was able to take and audit courses in the visual arts. I took a course in three dimensional design given by Professor Bakanowsky, and audited courses given by Professors Arnheim and Loeb, for example. I was fortunate to have come in contact with Alan Holden while working during some summers at the Elementary Science Study in the Boston area (more of that later). After hearing Keith Critchlow give the main lecture at the 1970 annual meeting of the Association of Teachers of Mathematics of Britain, I was able to attend a few of his lectures at the A.A. I was lucky also more recently to have run into Lionel March at another British teachers' meeting. All of these people have influenced me greatly and made me wish that I could be spending more time in the area of the intersection of math, visual thinking and the visual arts. While I still lived in Cambridge, I even once talked of setting up an Institute of Visual Education! I have run several workshops which were in the intersection of math and visualizing, or math and the visual arts. (One, a short summer course in the Mathematics Department at Concordia, through David Wheeler.) Unfortunately, I have not yet written up much of that kind of work.

Let me tell you of a few things that I have done with and for children in my math teaching, things that involve visualizing.

Les cartes-miroirs (mirror cards) et les livres pour enfants. J'ai créé les *cartes-miroirs* lorsque je travaillais pour l'Elementary Science Study, à partir de l'été 1963. Quest-ce que c'est? Ce sont 21 ensembles de cartes. Le début est très simple et s'adresse à des enfants jeunes et sans expérience; mais elles arrivent à devenir un véritable défi même pour les adultes et les architectes! Le principe de base est d'assortir le dessin d'une carte avec le dessin d'une autre carte en se servant d'un miroir. Certains motifs peuvent s'assortir, d'autres pas. L'ordre des cartes a été étudié soigneusement et les gens s'améliorent pour prédire si une carte *peut* ou *ne peut pas*. Je joins quelques exemples de cartes. J'ai aussi écrit deux articles sur les cartes:

An Example of Informal Geometry: Mirror Cards (Un exemple de géométrie informelle), **Arithmetic Teacher**, Vol. XIII, No 6, October 1966;

Some Mathematical Ideas Involved in the Mirror Cards (Quelques idées mathématiques contenues dans les cartes-miroirs), **Arithmetic Teacher**, Vol. XIV, No 2, February 1967.

J'ai aussi écrit le guide du professeur. Les cartes et le guide sont publiés par la Webster Division de McGraw Hill.

Je me suis servie des cartes avec quelques pré- et post-tests comme partie de mon projet de doctorat à Harvard. Je n'ai pas fait de statistiques compliquées, mais à l'époque, j'ai préparé de nouveaux tests visuels. Si je peux mettre la main sur l'un d'eux, je les joindrai à ma lettre.

Livres pour enfants. J'ai écrit trois livres pour enfants qui apportent une expérience visuelle. Les deux premiers sont *Make a Bigger Puddle, Make a Smaller Worm* et *Annette*. Chacun de ces livres contient un miroir en métal avec lequel les enfants peuvent modifier les images et résoudre de simples problèmes. Ces livres sont plus amusants, informels et moins limités que les cartes-miroirs. Ces livres sont publiés en Angleterre par Andre Deutsch Ltd. et sont disponibles au Canada par l'entremise de William Collins Ltd. Aux Etats-Unis, ils sont publiés par M. Evans et distribués par Dutton. (*Annette* s'intitule *Look at Annette* aux Etats-Unis.) Ces deux livres sont aussi disponibles brochés (*The Magic Mirror Book* et *Another Magic Mirror Book*) de la maison Scholastic avec un miroir en plastique. *Annette* est disponible en français: Edition Pierrot, Pierrot Verlag, Schaufelbergstrasse 45, Zurich CH 8055. Le troisième livre, *Another, Another, Another and More*, a deux miroirs pivotants et est publié en Angleterre par Andre Deutsch Ltd., mais pas encore aux Etats-Unis. A nouveau, dans ce livre, les enfants ont des défis à relever avec des problèmes visuels. Une chose que j'ai remarquée est que quelques enfants qui sont étiquetés «*faibles*» et «*lents*» à l'école excellent souvent quand ils travaillent avec ces livres. Les enfants apprennent à prédire ce qui va arriver quand ils se servent du miroir.

Travail tri-dimensionnal. A partir de l'été 1964, à l'Elementary Science Study, j'ai mis au point un fascicule de géométrie informelle qui commençait par un problème visuel. A nouveau j'ai trouvé que certains des enfants «*faibles*» excellaient alors que d'autres classés «*A*» trouvaient cela difficile. Le fascicule est publié par le Conseil national des professeurs de mathématiques et s'intitule *Boxes, Squares and Other Things* (Boîtes, carrés et autres objets), 1970. Maintenant, bien sûr, j'incluerais bien d'autres matériaux, mais à l'époque il fut considéré comme quelque chose d'assez différent, comme tel. Je joins un court article de **Arithmetic Teacher**, *A Second Example of Informal Geometry* (Un second exemple de géométrie informelle), Vol. XVI, No. 5, May 1969, qui décrit les premières pages du fascicule. Bien sûr, les polyominoes sont démodés maintenant, mais ils ne l'etaient pas à l'époque.

Mirror cards and books for children. I created the *Mirror Cards* while working for the Elementary Science Study, starting in the summer of 1963. What are they? They are 21 sets of cards. They start very simply for young and inexperienced children and get to be challenging even for adults and architects! Basically the problem is to match a design on another card. Some patterns are possible to match and others are not. I sequenced the cards very carefully, and people get better at predicing whether a card is a *can* or a *cannot* one. I enclose a few sample cards. I also wrote two articles on the cards:

An Example of Informal Geometry: Mirror Cards, **Arithmetic Teacher**, Vol. XIII, No 6, October 1966;

Some Mathematical Ideas Involved in the Mirror Cards, **Arithmetic Teacher**, Vol. XIV, No 2, Februray 1967.

I also wrote the Teachers' Guide. The cards and guide are published by the Webster Division of McGraw Hill.

I used the cards together with some pre- and post-testing as one part of my doctoral project at Harvard. I did not do complicated statistics, but I did make up new visual tests at the time. If I can put my hand on one I will enclose it.

Books for children. I have written three children's books which provide visual experience. The first two are *Make a Bigger Puddle, Make a Smaller Worm* and *Annette*. Each of these books has a metal mirror with which children are asked to change pictures and solve simple problems. These books are more entertaining, informal and open-ended than the Mirror Cards. These books are published in England by Andre Deutsch Ltd. and are available in Canada from them through William Collins Ltd. In the States they are published by M. Evans and distributed by Dutton. (*Annette* is called *Look at Annette* in the States.) These two books are also available in paperback)*The Magic Mirror Bood* and *Another Magic Mirror Book*) from Scholastic with a plastic type mirror. *Annette* is available in French: Edition Pierrot, Pierrot Verlag, Schaufelbergstrasse 45, Zurich CH 8055, Switzerland. Hopefully the *Puddle* will follow in French. The third book, *Another, Another, Another and More*, has tow hinged mirrors and is published in England by Andre Deutsch Ltd, abd not yet in the U.S. Again in this book, children are challenged with visual problems. One thing I noticed is that some children who are labelled «*no good*» and «*slow*» at school often excell when they work with these books. Children learn to predict what will happen when they use the mirror.

Three dimensional work. Starting in the summer of 1964, at the Elementary Science Study, I developed an informal geometry unit which started with a visual problem. Again I found that some «*poor*» children excelled and some of those «A» students found it difficult. The booklet is published by the National Council of Teachers of Mathematics and is called *Boxes, Squares and Other Things*, 1970. Now, of course, I would include much other stuff - but way back then it was considered as something quite different, as it is. I enclose a short article from the **Arithmetic Teacher**, *A Second Example of Informal Geometry*, Vol. XVI, No 5, May 1969 - which describes the first few pages of the booklet work. Of course, polyominoes are old hat now, but they were not then.

J'ai publié également un article sur la façon visualiser le deltahèdre. Il a été traduit en néerlandais et publié dans une revue de professeurs hollandais parce qu'il faisait une référence à Freudenthal qui était en relation avec cette revue.

Matériaux d'autres personnes (autres que les livres et articles bien connus). Le groupe LEAPFROG en Angleterre (un groupe de superbes professeurs de mathématiques) a publié différents matériaux intéressants. Un ruban qui donne des instructions pour visualiser ou imaginer les objets s'y trouve inclus. Pour obtenir des informations, contacter Dick Thata, Leapfrogs, Coldharbour, Newton St. Cyres, Exeter, Devon, England. Il enseigne à l'université d'Exeter.

La revue brittannique **Mathematics Teaching** offre beaucoup d'articles en relation avec les activités visuelles. Beaucoup traitent de mosaïques, symétrie, etc. Ils sont d'un niveau plus élémentaire que ceux de **Mathematics Magazine**. Je pourrais vous donner une bibliographie interminable sur les mosaïques, les activités pour enfants, etc., mais je ne suis pas sûre que vous mettiez de telles activités dans la rubrique «*spatiale*».

Il existe de nombreux types de blocs. Parmi mes favoris: *Pattern Blocks* et *Teachers' Guide for Pattern Blocks* et *Geo-blocks* et *Teachers' Guide for Geo-blocks*. Les deux ont été mis au point à l'Elementary Science Study et sont disponibles par l'entremise de McGraw Hill. Comme pour les *cartes-miroirs* (Mirror Cards), l'auteur est enregistré sous le nom de Elementary Science Study et non sous son nom personnel. Les *Pattern Blocks* (Arrangements de blocs) sont disponibles par l'intermédiaire de nombreux distributeurs commerciaux.

Creative Publications ont publié *Seeing Shapes* de Ranucci et ils publient toutes sortes d'autres choses et livres.

Par ailleurs, à Montréal, le professeur Maurice Bélanger, qui est à un certain institut de recherche (en français, ne ne peux me rappeler le nom*) sait tout sur les matériaux des sciences élémentaires.

Je pourrais continuer indéfiniment, mais je vais m'arrêter bientôt - et de toute façon j'ai besoin d'en savoir plus sur la direction que vous prenez. Permettez-moi de vous dire que je suis impatiente de faire un autre *Mirror Book* (Livre Miroir), qui insisterait davantage sur la forme géométrique. J'aimerais aussi publier un ensemble révisé des cartes-miroirs.

Permettez-moi de finir en disant que je ne peux insister assez sur le besoin de plus de travaux spatiaux à l'école - à la fois pour que ceux qui ont des dons puissent s'en servir et avoir une bonne image d'eux-mêmes plutôt que de devenir des marginaux dans un système uniquement verbal, et pour que ceux qui ne sont pas bons aient une chance d'apprendre à faire un travail visuel. Il y a bien sûr énormément de recherches à faire sur les capacités visuelles et spatiales. Je suis sûre que vous devez en penser autant. Une dernière chose: je suis sûre que les jouets visualisés de bonne heure - cubes, casse-tête, etc. et autres objets jouent un rôle crucial. Je serais très intéressée à poursuivre une recherche sur ce sujet aussi!

Je devrais essayer de retrouver différents fragments que j'ai écrits pour des affaires comme des demandes de subventions sur le besoin de plus de travail visuel. (Je n'ai pas obtenu les subventions - c'était il y a de nombreuses années maintenant.)

I have also published an article on how to visualize the deltahedra. It was translated into Dutch and published in a Dutch teachers' journal because it referred to Freudenthal who was connected to that journal.

Other people's material (other than the well-known textbooks or articles). The LEAPFROG group in England (a group of superb teachers of mathematics) have put out a variety of interesting material. Included is a tape giving instructions to visualize or imagine things. To get information contact Dick Tahta, Leapfrogs, Coldharbour, Newton St. Cyres, Exeter, Devon, England. He is teaching at the University of Exeter.

The British Journal **Mathematics Teaching** has many articles dealing with visual activities. Many deal with tessellations, symmetry, etc. They are on a more elementary level than in **Mathematics Magazine**. I could give you endless bibliography on tessellations, activities for children, etc., but I'm not sure you are including such activities under «*spatial*».

There are many types of blocks. Among my favorites: *Pattern BLocks* and *Teachers' Guide for Geo-Blocks* and *Geo-blocks* and *Teachers' Guide for Geo-Blocks*. Both were developed at the Elementary Science Study and are available through McGraw Hill. Like the *Mirror Cards*, the author is listed as Elementary Science Study, rather than by the specific creator. *Pattern Blocks* are available through many commercial distributors.

Creative Publications published *Seeing Shapes* by Ranucci and they publish many types of other things, and books.

By the way, in Montreal, Prof. Maurice Belanger, who is at some research institute (French speaking - I can't think of its name*) knows all about the Elementary Science Materials.

I could go on and on but will stop soon - and anyway I need to know more about the direction you're going in. Let me say though that I am eager to do another *Mirror Book*, one with more emphasis on geometric shape. I would also like to publish a revised set of mirror cards.

Let me end by saying that I cannot stress enough the need for more spatial work in schools - both so that those who have the talent can use it and feel good about themselves instead of becoming drop-outs in a verbal-only system, and so that those who do not do well can have a chance to learn to do visual work. There is of course a huge amount of research on visual and spatial ability. I am sure you must be finding it. One last thing: I am quite sure that early visual toys - blocks, puzzles, etc., and other things play a crucial role. I would be most interested to pursue that topic too!

I should try and find various pieces I wrote for such things as grand applications on the need for more visual work. (I did not get the grants - it was many years ago now.)

Excusez s'il vous plaît cette longue lettre désordonnée - mais d'une certaine manière vous m'avez donné l'occasion de parler de sujets sur lesquels j'ai voulu travailler pendant des années.

Bien à vous,

Marion Walter
Associate Professor of Mathematics Education
Department of Mathematics
University of Oregon
Eugene, Oregon 97403 USA

P.S. Je ne peux réellement envoyer ceci sans ajouter:

A) *Experimental Unit on Space Visualization* (Chapitre expérimental sur la visualisation de l'espace), Univ. of State of N.Y., State Education Dept., Bureau of Secondary Curriculum Development, Albany, NY 12224 (alas, 1967).

B) **Beaucoup** de différents matériaux comme tuiles de différentes sortes: Ecrire à Geoffrey Giles, D.I.M.E. Project, University of Stirling, Stirling, Scotland.

C) Prof. Heinrich Besuden, Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Il vient de m'envoyer un article, *Die Forderung des Raumlichen Vorstellungsvermögen in des Grundschule*, qui présente quelques merveilleux problèmes spatiaux. (En anglais: *Promoting spatial conception in elementary school.*)

P.P.S. J'ai parcouru un autre de mes vieux dossiers: *Geometrical Ability and the Space Factors in Boys and Girls* (Aptitude à la géométrie et les facteurs espace chez les garçons et les filles), de Ingvar Werdlin, Lund GWK Gleerup. Ceci peut donner des idées pour un travail, même si vous n'êtes pas engagés dans l'analyse des facteurs.

Note de l'éditeur. Quand nous avons demandé à Marion Walter la permission de publier sa lettre dans nos colonnes, elle nous a répondu en s'excusant: «Je sens que cette lettre est très personnelle - qui d'autre se soucie des cours que j'ai pris et avec qui. En relisant ma lettre, je trouve tout cela un peu égocentrique!!» Nous ne sommes d'accord: il est très utile de voir des preuves supplémentaires de l'existence de réseaux informels qui ont amené de nouvelles personnes à la recherche morphologique ces dernières années, réseaux que nous nous efforçons de rendre plus visibles et plus intégrés par la publication de *Topologie Structurale*. De plus, c'était le but des derniers numéros de notre revue de décrire les recherches actuellement en cours dans les différentes parties du monde, ceci comme point de départ de futures tentatives de coopération. Dans ce contexte, il nous est d'une grande aide que Marion Walter ait jugé gon de nous faire part de son propre travail dans l'enseignement de la perception géométrique dans le plan et dans l'espace.

* Maurice Bélanger, Sciences de l'Education, Université du Québec à Montréal.

Sur des anneaux de polyèdres réguliers

Je viens de recevoir le #5 de *Topologie structurale*. Il était très généreux de votre part de faire un compte rendu si long et si favorable de la seconde édition des *Aventures...* Mille mercis pour la publicité.

Please excuse the long rambling letter - but in a way you were giving me the opportunity to talk about things that I have wanted to work on for many years.

Sincerely yours,

Marion Walter
Associate Professor of Mathematics Education
Department of Mathematics
University of Oregon
Eugene, Oregon 97403 USA

P.S. I really can't send this without adding:

A) *Experimental Unit on Space Visualization*, Univ. of State of N.Y., State Education Dept., Bureau of Secondary Curriculum Development, Albany, NY 12224 (alas, 1967).

B) **Many** different materials such as Shape Tiles: Write to Geoffrey Giles, D.I.M.E. Project, University of Stirling, Stirling, Scotland.

C) Prof. Heinrich Besuden, Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. He just sent me a paper, *Die Forderung des Raumlichen Vorstellungsvermögen in der Grundschule*. It has some lovely spatial problems. (In English: *Promoting spatial conception in elementary school.*)

P.P.S. Was looking through another of my old files: *Geometrical Ability and the Space Factors in Boys and Girls*, by Ingvar Werdlin, Lund GWK Gleerup. This can give ideas for work even if you are not into factor analysis!

Editor's note. When we requested Mario Walter's permission to publish her letter in this column, she gave a most apologetic reply: «I feel the letter is very personal - who else cares what courses I took and with whom. On rereading the letter, I find it all a bit egotistical!!» We disagree: it is very helpful to see further evidence of the informal networks which have introduced new people to morphological research in recent years, networks which we are endeavoring to make more visible and more integrated through the publication of *Structural Topology*. Furthermore, it has been the purpose of these last few issues of the journal to describe the research presently being done in various parts of the world, this as a startingf point for future cooperative endeavors. In this context, it is very helpful that Marion Walter has seen fit to tell us of her own work on the teaching of geometrical perception in plane and space.

* Maurice Bélanger, Sciences de l'Education, Université du Québec à Montréal.

On rings of regular polyhedra

I have just received *Structural Topology #5*. It was good of you to write such a lengthy and favorable review of the second edition of *Adventures...*. Many thanks for the publicity.

C'est en peu dommage que votre dactylo ait changé «il» pour «elle» à plusieurs endroits. Eh bien! J'ai passé ma vie à expliquer que Stewart est un nom écossais et que mes parents pensaient que Bonnie convenait parfaitement comme prénom pour un garçon. [*éd.: Désolé, c'est ma faute, non la sienne.*]

Merci aussi pour m'avoir aidé à clarifier l'histoire de la découverte en 1972 d'anneaux d'octaèdres et de polyèdres. Pour vos dossiers, je joins (1) le programme ΠΜΕ à Missoula, Montana, 20-22 août 1973, qui annonce l'article de Schmucker *Configurations of Platonius Solid of Positive Genus*, et (2) une copie de la p. 110 de la revue *Scientific American*, juin 1975, extrait de la colonne de M. Gardner *Mathematical Games*. [voir illustration.]

Je suis heureux que vous projetiez un compte rendu des *Transpolyèdres* d'Haresh Lalvani. Peu de temps après que son livre a paru, j'ai obtenu une copie, en échange d'une première édition des *Aventures*... Plus tard, à une conférence sur la théorie des graphes à Kalamazoo, j'ai fait une communication (non-publiée) ayant pour titre *Transit Graphs*, dans laquelle j'ai (1) annoncé le livre de Lalvani et (2) donné une généralisation de son idée d'une famille continue de graphes (TIG) sur l'intermédiaire S_k comme intermédiaires entre n'importe quel plongement [IG] de n'importe quel graphe connecté G sur une surface orientable S_k et sa duale [DIG] sur S_k. Ce que Lalvani hésitait à entreprendre pour les polyèdres généraux semble facile dans ce cadre de plongements de graphes; bien sûr, cette famille inclut de nombreux plongements qui ne sont pas polyédriques et mène à des figures en *beignets*, et pas seulement des sphères. Je me rappelle ma déception devant l'absence de réaction de l'assistance, car je trouvais les figures de Lalvani si belles et ma généralisation de grande importance. Cette expérience me fait apprécier davantage les remarques de Baracs sur «le goût, la formation et les perceptions spatiales» à la page 4 du #5. Mes propres communications sur les *Beignets à faces régulières* semblent plus appréciées par les enseignants, les éducateurs et les artistes que par les mathématiciens.

Merci encore pour vos remarques encourageantes,

Bonnie Stewart
4494 Wausau Road
Okemos, Michican, 48864 USA

Note de l'éditeur. Dans le même contexte, nous citons un extrait du compte rendu d'*Adventures*... préparé par H.S.M. Coxeter pour *Mathematical Reviews*:

«Cette seconde édition, comme la première [MR 43 #1023], a été illustrée et écrite à la main par l'auteur. Le format en deux colonnes la rend plus facile à consulter et cinquante pages de matière neuve ont été ajoutées dans le même style informel et enthousiaste. Les pages 51-62 décrivent une nouvelle construction, suggérée en 1972 par l'étudiant de l'auteur, Kent Schmucker, pour des polyèdres multi-connexes dont les faces sont constituées entièrement de triangles équilatéraux ou de pentagones réguliers. La première famille est basée sur un anneau remarquable de 8 octaèdres réguliers; leurs centres sont aux sommets et aux bissectrices des arêtes d'un losange dont les diagonales sont dans la proportion $\sqrt{2} : 1$. Les faces exposées dans cet anneau forment un polyèdre de genre 1 avec 24 sommets, 72 arêtes et 48 faces triangulaires. Des *deltaèdres* plus compliqués se présentent quand on utilise beaucoup de tels

It is a bit unfortunate that your typist changed «his» to «hers» in a couple of places. Oh, well! I have spent a lifetime explaining that Stewart is a Scottish name and that my parents thought Bonnie a perfectly good name for a boy. [*ed: Sorry, my fault (not hers).*]

Thanks too for helping set the record straight about the 1972 discovery of rings of octahedra and dodecahedra. For your files I enclose (1) the ΠΜΕ program at Missoula, Montana, August 20-22, 1973, which announces Schmucker's paper *Configurations of Platonic Solids of Positive Genus*, and (2) a copy of p. 110 from the *Scientific American*, June 1975, part of M. Gardner's *Mathematical Games* column. [see illustration].

I am pleased you plan a review of Haresh Lalvani's *Transpolyhedra*. Not long after his book appeared I obtained a copy, by barter of a first edition of *Adventures* .... Later, at a graph theory conference at Kalamazoo I presented a talk (unpublished) entitled *Transit Graphs*, in which I (1) advertised Lalvani's book, and (2) gave a generalization of his idea to a continuous family of graphs [TIG] on S_k intermediate between any two cell imbeddings [IG] of any connected graph G on an orientable surface S_k and its interchange dual [DIG] on S_k What Lalvani was hesitating to undertake for general polyhedra seems easy in this graph-imbedding setting; of course this family includes many imbeddings that are not polyhedral, and leads to figures on *doughnuts*, not just spheres. I remember being disappointed at having no reaction from the audience, for I thought Lalvani's figures so beautiful and my generalization significant. This experience adds to my appreciation of Baracs' remarks about «inclination, training and spatial perceptions» on page 4 of #5. My own talks on *Doughnuts with regular faces* seem to be more appreciated by teacher education people and by art majors than by mathematicians.

Thanks again for your encouraging remarks,

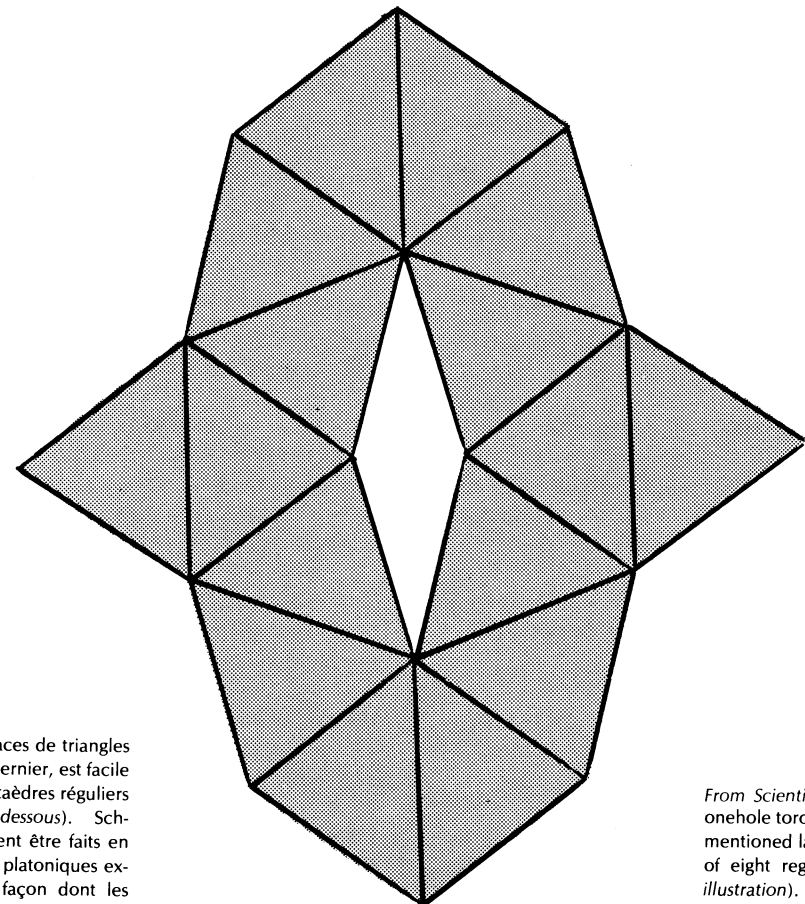
Bonnie Stewart
4494 Wausau Road
Okemos, Michigan, 48864 USA

Editor' note. In this same context, we quote from the review of *Adventures* ... prepared by H. S. M. Coxeter for *Mathematical Reviews:*

«This second edition, like the first [MR 43 #1023], was illustrated and hand-lettered by the author. The two-column format makes it easier to handle, and fifty pages of fresh material have been added in the same informal and enthusiastic style. Pages 51-62 describe a new construction, suggested in 1972 by the author's student Kurt Schmucker, for multiply-connected polyhedra whose faces consist entirely of equilateral triangles or entirely of regular pentagons. The former family is based on a remarkable ring of 8 regular octahedra; their centers are at the vertices and side-midpoints of a rhombus whose diagonals are in the ratio $\sqrt{2} : 1$. The exposed faces in this ring form a polyhedron of genus 1 with 24 vertices, 72 edges and 48 triangular faces. More complicated *deltahedra* arise when a number of such

losanges (chacun avec son propre anneau d'octaèdres) comme faces de polyèdres tels qu'un rhomboèdre aplati ou un dodécaèdre rhombique. Un anneau encore plus remarquable (avec 80 faces pentagonales) est formé de 8 dodécaèdres réguliers; leurs centres sont aux sommets et aux bissectrices des arêtes d'un losange *doré* dont les diagonales sont dans la proportion $\tau : 1$, où $\tau = 2 \cos 36°$. On peut se servir de losanges dorés comme faces de polyèdres convexes variés: deux rhomboèdres, second dodécaèdre rhombique [Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser II 15 (1960), 251-263; MR 24 #A 1644], l'icosaèdre rhombique de Federov et le triacontaèdre de Kepler. En laissant chaque losange porter son anneau de dodécaèdre, Schmucker a construit une large famille de polyèdres à faces pentagonales. Ces idées ont été exposées indépendamment par K. Miyazaki et I. Takada [*Topologie Structurale*, 4 (1980).]

rhombi (each carrying its own ring of octahedra) are used as faces of polyhedra such as an oblate rhombohedron or a rhombic dodecahedron. A still more remarkable ring (with 80 pentagonal faces) is formed by 8 regular dodecahedra; their centers are at the vertices and side-midpoints of a *golden* rhombus whose diagonals are in the ratio $\tau : 1$, where $\tau = 2 \cos 36°$. Golden rhombi can be used as faces of various convex polyhedra: two rhombohedra, Bilinski's second rhombic dodecahedron [Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser II 15 (1960), 251-263; MR 24 #A 1644], Federov's rhombic icosahedron, and Kepler's triacontahedron. By letting each rhombus carry its ring of dodecahedron, Schmucker constructed a large family of pentagonal-faced polyhedra. These ideas were developed independently by K. Miyazaki and I. Takada [*Structural Topology*, 4 (1980).]



Extrait de Scientific America:

«Le modèle de Kurt Schmucker, avec 48 faces de triangles équilatéral congruent, mentionné le mois dernier, est facile à faire. Il consiste en un anneau de huit octaèdres réguliers joints par leurs faces (*voir illustration ci-dessous*). Schmucker a trouvé que les anneaux pouvaient être faits en joignant huit copies de chacun des solides platoniques excepté le tétraèdre. Quelle que soit la façon dont les tétraèdres sont jjoints par leurs faces, aucun anneau n'est possible même quand les solides peuvent se couper l'un l'autre. J.H. Mason en donne la preuve dans son article «Can Regular Tetrahedra Be Glued Together Face to Face to Form a Ring?» (Est-ce que des tétraèdres réguliers peuvent être collés ensemble face à face de façon à former un anneau?) dans *The Mathematical Gazette*, volume 56, octobre, 1972, pages 194-197.»

From Scientific American: «A model of Kurt Schmucker's onehole toroid with 48 congruent equilateral triangle faces, mentioned last month, is easy to make. It consists of a ring of eight regular octahedrons joined by their faces (see *illustration*). Schmucker found that rings could be made by joining eight replicas of each of the Platonic solids except the tetrahedron. No matter how many tetrahedrons are joined by their faces, no ring is possible even when the solids are allowed to intersect one another. A proof is given by J.H. Mason in his paper «Can Regular Tetrahedra be Glued Together Face to Face to Form a Ring?» in the *Mathematical Gazette*, Volume 56, October, 1972, pages 194-197."