Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 10, 4, 317-339(1994)

UNA FORMULACIÓN MATRICIAL GENERALIZADA: 1- ANÁLISIS ESTÁTICO

CLIMENT MOLINS

PERE ROCA
y
ANTONIO R. MARÍ

Dpto. de Ing. Construcción,
Campus Norte UPC, 08034 Barcelona.

RESUMEN

Se presenta una Formulación Matricial Generalizada (FMG) para el análisis de estructuras formadas por entramados espaciales de elementos de directriz curva y sección variable. La principal característica de la FMG reside en que su formulación establece el equilibrio "exacto" en cualquier punto interior de un elemento y no requiere hipótesis alguna sobre el campo de desplazamientos. Juntamente al desarrollo formulístico, se discuten aspectos relacionados con la implementación en programa de ordenador. A través del diseño de la organización del programa y de los distintos algoritmos adoptados, se ha buscado potenciar la posibilidad de tratar eficientemente estructuras complejas tanto por la geometría como por la multiplicidad de elementos. Finalmente, mediante la presentación de algunos ejemplos numéricos, se desea ilustrar las posibilidades y la precisión alcanzable mediante esta formulación.

SUMMARY

A generalized matrix formulation (GMF) for the static analysis of 3D frame structures with curved elements having variable cross-section is presented. The most remarkable feature of GMF consists in the stablishment of equilibrium in an "exact" form at any point within an element, so that no additional hypothesis are needed upon the field of displacements. Besides the description of the adopted formulation, some aspects are dicussed in concern with the computer implementation. The designed general layout of the program and the adopted procedures are aimed to exploit the efficient treatment of complex structures because of their geometry or multiplicity of elements. Finaly, some numeric examples are presented to illustrate some of the capabilities and the accuracity which are achievable through this formulation.

Recibido: Noviembre 1993

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213–1315

INTRODUCCIÓN

Los elementos lineales de geometría curva o de sección variable (principalmente arcos) son numerosos en las construcciones antiguas por su óptima adecuación a los materiales de construcción no cohesivos. Por sus óptimas cualidades arquitectónicas y estructurales, este tipo de elementos aparece también en muchas construcciones singulares modernas. No obstante, son pocas las formulaciones para el análisis estructural que permiten tratar específicamente elementos de geometría curva y sección variable, siendo corriente para este efecto utilizar aproximaciones tales como la descomposición de arcos en poligonales de elementos rectos.

Por otra parte, las formulaciones válidas para el tratamiento de elementos curvos se basan normalmente en el método de los elementos finitos formulado en deplazamientos, utilizando interpolaciones de la geometría mediante elementos de tipo isoparamétrico. Es conocido que, como consecuencia de la hipótesis sobre el campo de desplazamientos que este método introduce (en forma de interpolación a partir de las incógnitas nodales), los esfuerzos internos son calculados de forma indirecta, a partir de los desplazamientos nodales, resultando de ello un equilibrio no necesariamente exacto a nivel de elemento. Sin embargo, para este tipo de estructuras es posible establecer generalizaciones analíticas de los métodos matriciales convencionales, fundamentadas directamente en el equilibrio entre cargas exteriores y esfuerzos internos seccionales, en las que, por construcción, este equilibrio se verifica de forma exacta. En este sentido existen algunos precedentes históricos como el de Baron[1].

El interés práctico de estas formulaciones matriciales se vió en el pasado limitado por el gran volumen de operaciones que su utilización solía exigir. Actualmente, el importante desarrollo experimentado por los ordenadores digitales hace menos crítico este punto, mientras que los aspectos de exactitud y versatilidad cobran un renovado interés.

En este trabajo se presenta una Formulación Matricial Generalizada (FMG) para el análisis de estructuras formadas por entramados espaciales de elementos de directriz curva y sección variable. Juntamente con el desarrollo formulístico, se discuten aspectos relacionados con su implementación en ordenador, a través de la cual se ha deseado potenciar la posibilidad de tratar eficientemente estructuras complejas formadas por múltiples elementos. Finalmente se aportan algunos ejemplos numéricos destinados a ilustrar las posibilidades y la precisión alcanzable, incluso con gran economía de incógnitas nodales. Aunque por el momento sólo se ha implementado la formulación para análisis de tipo elástico lineal, se prevé en un futuro obtener un método para el análisis de construcciones antiguas introduciendo ecuaciones constitutivas específicas para la obra de fábrica de ladrillo o piedra.

En una comunicación posterior se presentará la extensión de esta formulación al análisis modal. Por otra parte, versiones semejantes para análisis no lineal, instantáneo y diferido, han sido ya desarrolladas por Carol y Murcia[2], para estructuras reticuladas planas de hormigón armado, y Carrascón y Marí[3,4] , para estructuras espaciales de hormigón armado y pretensado.

FORMULACIÓN

La Formulación Matricial Generalizada se fundamenta en el establecimiento exacto del equilibrio entre cargas exteriores y esfuerzos internos seccionales, sin que sea necesaria ninguna hipótesis adicional. No obstante, la técnica resultante puede entenderse también como una formulación híbrida del método de los elementos finitos en la que, a través de la condición de equilibrio, es posible definir una interpolación "exacta" para los esfuerzos seccionales a partir de las fuerzas nodales. En su implementación numérica, la posible pérdida de precisión queda únicamente controlada por el proceso de integración utilizado en el cálculo de cantidades tales como la matriz de rigidez o los vectores de tensiones o deformaciones iniciales, siendo preciso por ello adoptar reglas numéricas suficientemente potentes.

Como es conocido, un problema de análisis estructural queda determinado a partir de las siguientes condiciones: el equilibrio entre fuerzas externas e internas, la compatibilidad cinemática, y las ecuaciones constitutivas de los materiales. Estas condiciones deben verificarse sea cual sea el nivel de detalle al que se lleve el problema (sección transversal de elemento, elemento individual, o estructura global). En particular, para un elemento individual deberá cumplirse:

— el equilibrio entre las fuerzas aplicadas en sus extremos y los esfuerzos internos en cada sección,
— la compatibilidad entre los movimientos en los extremos y las deformaciones seccionales,
— y la ecuación constitutiva del material, que relaciona tensiones y deformaciones a nivel de punto, o bién esfuerzos y deformaciones seccionales, a nivel de sección.

De la consideración ordenada de estas condiciones se infiere la ecuación del elemento tipo, según se describe en los siguientes apartados.

Ecuación de equilibrio en el elemento

Para el siguiente planteamiento es conveniente introducir dos sistemas de referencia: uno global, común a toda la estructura, y otro local, asociado a cada sección transversal. Fijado en particular el sistema de referencia global, las coordenadas globales de cada punto pueden definirse mediante una ecuación del tipo $\mathbf{\Gamma}(s) = \Big(X(s), Y(s), Z(s)\Big)$, donde s es el parámetro arco, utilizado como coordenada curvilínea según la directriz del elemento curvo (Figura 1).

El sistema local de coordenadas x, y, z se define en cada sección de manera que el eje x sea tangente a la directriz y los ejes y y z sean perpendiculares entre sí y con x, y se hallen contenidos en el plano de la sección transversal perpendicular a la directriz (Figura 2).

En cada punto de la directriz, o en cada sección transversal, se supondrá conocida la matriz de transformación de coordenadas locales a globales $\mathbf{C}$.

Considérese un elemento de longitud infinitesimal ds delimitado por dos secciones transversales A y A', normales a la directriz, tal y como puede observarse en la Figura 3. Sean O y O' los puntos de intersección de la directriz con tales secciones. Sobre

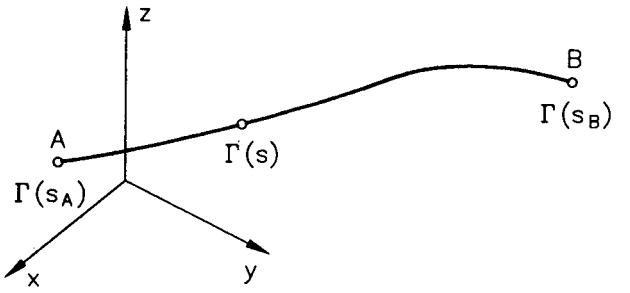

Figura 1. Representación de la directriz de un elemento y su coordenada curvilínea en el sistema global de referencia XYZ.

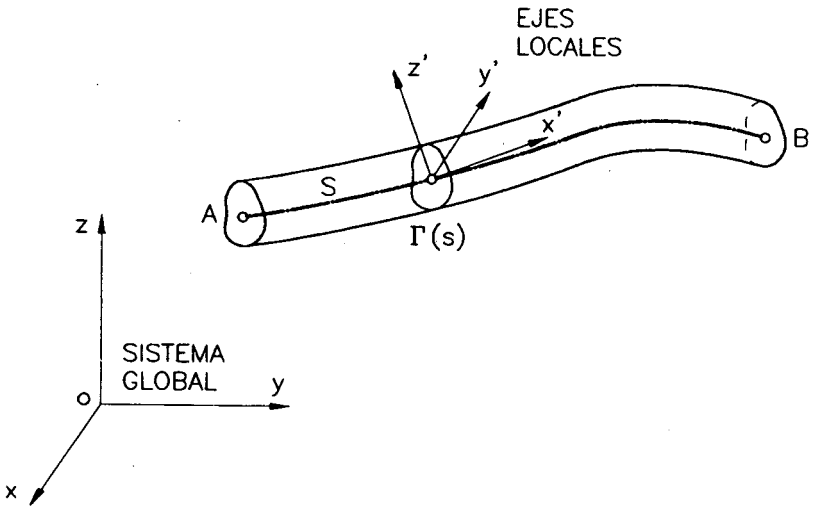

Figura 2. Definición del sistema local de coordenadas.

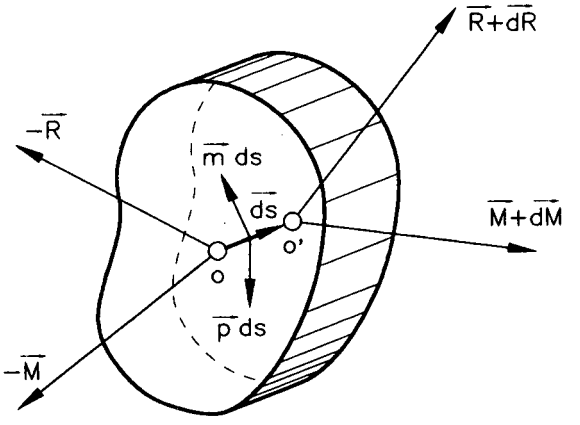

Figura 3. Fuerzas sobre una rebanada transversal de espesor diferencial.

este elemento se suponen aplicadas unas cargas, fuerza $\mathbf{p}$ y momento $\mathbf{m}$, repartidas por unidad de longitud sobre su directriz. En ambos extremos actúan unas fuerzas y unos momentos, $-\mathbf{R}$ y $-\mathbf{M}$ en el punto O sobre la cara A, y $\mathbf{R}+d\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}+d\mathbf{M}$ en el punto O' sobre la cara A', en equilibrio con las cargas aplicadas.

Las ecuaciones de equilibrio de la estática implican que la resultante de las fuerzas aplicadas sobre un elemento sea nula ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$), al igual que la resultante de los momentos aplicados ($\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$). Al particularizar para el elemento diferencial, resultan las ecuaciones vectoriales:

$$d\mathbf{R} + \mathbf{p}ds = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$-\mathbf{R} \times d\mathbf{s} + d\mathbf{M} + \mathbf{m}ds = \mathbf{0} \tag{2}$$

que, expresadas en componentes (en ejes globales) dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales escalares:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_X}{ds} &= -p_X \\
\frac{dR_Y}{ds} &= -p_Y \\
\frac{dR_Z}{ds} &= -p_Z \\
-R_Y\frac{dZ}{ds} + R_Z\frac{dY}{ds} + \frac{dM_X}{ds} &= -m_X \\
R_X\frac{dZ}{ds} - R_Z\frac{dX}{ds} + \frac{dM_Y}{ds} &= -m_Y \\
-R_X\frac{dY}{ds} + R_Y\frac{dX}{ds} + \frac{dM_Z}{ds} &= -m_Z
\end{aligned} \tag{3}$$

Se trata de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con seis ecuaciones y seis incógnitas. Su integración dará como resultado las ecuaciones de equilibrio de un elemento de longitud finita.

Para resolver el sistema (3) es necesario obtener la solución del sistema homogéneo correspondiente y sumar una solución particular del sistema completo. El sistema homogéneo resulta de tomar término independiente nulo ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{m} = \mathbf{0}$), es decir, de considerar que no hay cargas distribuídas sobre las barras, existiendo sólo esfuerzos en los extremos del elemento. Los esfuerzos originados por las cargas repartidas vendrán descritos por la solución particular.

Para determinar el problema es preciso introducir condiciones de contorno. En este sistema, las condiciones de contorno son los esfuerzos en los extremos de la barra, o lo que es lo mismo, las fuerzas nodales en el caso de que la estructura sea de una sola barra.

En los extremos del elemento puede haber aplicados hasta doce esfuerzos (tres fuerzas y tres momentos en cada extremo), de los que, por equilibrio y en ausencia de cargas repartidas, solamente seis de ellos son linealmente independientes. El sistema de

esfuerzos independientes depende de la configuración isostática elegida como base para formular elemento de viga. Así, por ejemplo, Carol[2] adopta la viga biapoyada como configuración isostática base para su formulación de estructuras reticulares planas; en este caso la serie de términos independientes es combinación de esfuerzos provenientes de ambos extremos: $N = F_{XA}$, M_{YA} y M_{YB}. En el presente trabajo se ha optado por tomar el voladizo empotrado en el extremo A como configuración isostática, de tal forma que el sistema de términos independientes está constituido por las tres fuerzas y los tres momentos posibles aplicados en el extremo B, $F_{XB}, F_{YB}, F_{ZB}, M_{XB}, M_{YB}, M_{ZB}$. Esta elección se justifica por la mayor claridad conceptual que produce en el posterior desarrollo, al permitir asociar directamente la solución particular con los esfuerzos debidos a las cargas repartidas sobre elemento, obtenidos por integración directa sobre la directriz de la viga, a partir del extremo empotrado.

La solución del sistema homogéneo se obtiene por integración directa:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dR_X}{ds} &= 0 \\ \frac{dR_Y}{ds} &= 0 \\ \frac{dR_Z}{ds} &= 0 \\ \frac{dM_X}{ds} &= -R_Y\frac{dZ}{ds} + R_Z\frac{dY}{ds} \\ \frac{dM_Y}{ds} &= R_X\frac{dZ}{ds} - R_Z\frac{dX}{ds} \\ \frac{dM_Z}{ds} &= -R_X\frac{dY}{ds} + R_Y\frac{dX}{ds} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} R_X &= C_1 \\ R_Y &= C_2 \\ R_Z &= C_3 \\ \int_o^s \frac{dM_X}{ds}ds &= -\int_o^s R_Y\frac{dZ}{ds}ds + \int_o^s R_Z\frac{dY}{ds}ds + C_4 \\ \int_o^s \frac{dM_Y}{ds}ds &= \int_o^s R_X\frac{dZ}{ds}ds - \int_o^s R_Z\frac{dX}{ds}ds + C_5 \\ \int_o^s \frac{dM_Z}{ds}ds &= -\int_o^s R_X\frac{dY}{ds}ds + \int_o^s R_Y\frac{dX}{ds}ds + C_6 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Las seis constantes de integración C_1 a C_6 se determinan imponiendo otras tantas condiciones de contorno. Éstas, relativas al extremo libre B, se expresan como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{XY}(s_B) = \mathbf{P}_B \tag{5}$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}_{XY} = (R_X, R_Y, R_Z, M_X, M_Y, M_Z)^T$ es el vector de esfuerzos en una sección, y
$\mathbf{P}_B = (F_{XB}, F_{YB}, F_{ZB}, M_{XB}, M_{YB}, M_{ZB})$ es el vector de esfuerzos nodales en B, extremo del elemento.

Integrando la expresión (4) en la longitud del elemento, utilizando las condiciones (5) para determinar las constantes y sumando finalmente la solución particular, se obtiene la siguiente ecuación matricial,

$$\begin{bmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Z-Z_B) & -(Y-Y_B) & 1 & 0 & 0 \\ -(Z-Z_B) & 0 & (X-X_B) & 0 & 1 & 0 \\ (Y-Y_B) & -(X-X_B) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{XB} \\ F_{YB} \\ F_{ZB} \\ M_{XB} \\ M_{YB} \\ M_{ZB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_X^* \\ R_Y^* \\ R_Z^* \\ M_X^* \\ M_Y^* \\ M_Z^* \end{bmatrix} \tag{6}$$

La ecuación (6) se puede escribir de forma compacta como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{XY}(s) = \mathbf{N}(s, s_B)\, \mathbf{P}_B + \boldsymbol{\sigma}^*_{XY}(s) \tag{7}$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}_{XY}(s)$ es el vector de esfuerzos referidos al sistema global coordenadas en la sección de coordenada curvilínea s.
$\boldsymbol{\sigma}^*_{XY}(s)$ es la solución particular, obtenida al integrar las cargas distribuídas a lo largo de la directriz del elemento hasta la sección de coordenada s, coincidente, por construcción, con el vector de esfuerzos producidos por las cargas distribuídas sobre la configuración isostática base.
$\mathbf{N}(s, s_B)$ es la matriz de equilibrio (interpolación) de esfuerzos de B a s.

La ecuación (7) obtenida permite, a partir del vector de esfuerzos en un extremo, inferir de forma exacta los esfuerzos en cualquier otra sección de la barra.

Ecuación de compatibilidad

Las ecuaciones cinemáticas de Navier-Bresse para un viga de directriz curva en el espacio pueden expresarse como:

$$\boldsymbol{\omega}(s) = \boldsymbol{\omega}(s_o) + \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{\Omega}(\xi) d\xi \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \boldsymbol{\lambda}(s_o) + \boldsymbol{\omega}(s_o) \times \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{s_o})\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{s}) + \int_{s_0}^{s} (\boldsymbol{\Lambda}(\xi) + \boldsymbol{\Omega}(\xi) \times \boldsymbol{\Gamma}(\xi)\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{s}))\, d\xi \tag{9}$$

donde:

$\boldsymbol{\omega}(s) = (\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)$ es el vector de giros de la directriz en el punto de coordenada curvilínea s.
$\boldsymbol{\lambda}(s) = (u_X, u_Y, u_Z)$ es el vector de desplazamientos de la directriz en el punto de coordenada curvilínea s.

$\mathbf{\Omega}(\xi)=$ (ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z) es el vector de deformaciones angulares, o curvatura de la sección en el punto de coordenada curvilínea ξ.

$\mathbf{\Lambda}(\xi) =$ $(\epsilon_X, \epsilon_Y, \epsilon_Z)$ es el vector de deformaciones seccionales en el punto de coordenada curvilínea ξ.

$\mathbf{\Gamma}(\xi) =$ $(X(\xi), Y(\xi), Z(\xi))$ es el vector de posición (respecto al sistema global de coordenadas) del punto de la directriz de coordenada curvilínea ξ.

$\mathbf{\Gamma}(\xi)\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}) =$ $\Big((X(s)-X(\xi)), (Y(s)-Y(\xi)), (Z(s)-Z(\xi))\Big)$ es el vector de posición del extremo donde se calculan los movimientos, con coordenada curvilínea s, respecto al punto de coordenada ξ variable de integración.

$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s_o})\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}) =$ $\Big((X(s)-X(s_o)), (Y(s)-Y(s_o))(Z(s)-Z(s_o))\Big)$ es el vector de posición del extremo donde se calculan los movimientos, con coordenada curvilínea s, respecto al punto origen de integración de coordenada s_o.

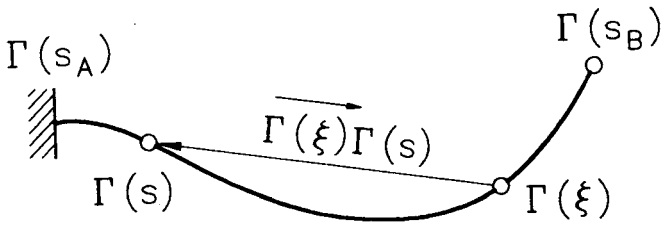

Figura 4. Esquema de la configuración isostática base, el de viga en voladizo.

Si se particularizan las anteriores ecuaciones (8) y (9) en los extremos A y B del elemento se comprueba que:

$$\boldsymbol{\delta}_B = \mathbf{N}^T(s_A, s_B)\boldsymbol{\delta}_A + \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B)\boldsymbol{\epsilon}_{XY}(s)ds \tag{10}$$

donde:

$\boldsymbol{\delta}_B =$ $(u_{XB}, u_{YB}, u_{ZB}, \theta_{XB}, \theta_{YB}, \theta_{ZB})^T$ es el vector de movimientos del extremo B.

$\boldsymbol{\delta}_A =$ $(u_{XA}, u_{YA}, u_{ZA}, \theta_{XA}, \theta_{YA}, \theta_{ZA})^T$ es el vector de movimientos del extremo A.

$\boldsymbol{\epsilon}_{XY}(s) =$ $(\epsilon_X, \epsilon_Y, \epsilon_Z, \phi_X, \phi_Y, \phi_Z)^T$ es el vector de deformaciones en coordenadas globales de la sección con coordenada curvilínea s.

El primer término de la anterior ecuación, $\mathbf{N}^T(s_A, s_B)\boldsymbol{\delta}_A$, caracteriza la parte de movimiento de sólido rígido de la viga debido solamente a los movimientos del extremo A. El segundo término corresponde al desplazamiento del extremo B debido a las deformaciones que aparecen en la viga causadas por los esfuerzos seccionales. Si se aisla el segundo término de (10) se obtiene el movimiento que experimenta el extremo B causado únicamente por la deformación del propio elemento:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{N}^T(s_A, s_B)\boldsymbol{\delta}_A = \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B)\boldsymbol{\epsilon}_{XY}(s)ds \tag{11}$$

Modelo de comportamiento seccional

La técnica adoptada para la descripción del elemento de viga admite utilizar una curva directriz arbitraria —siempre y cuando las secciones se entiendan normales a la misma— no necesariamente coincidente con el baricentro de las secciones. Esta opción puede facilitar la definición de la geometría del elemento, especialmente cuando ésta es curva y variable. Además, ello permite modelizar una gama más amplia de condiciones de contorno o de relaciones de conexión entre elementos, no siendo necesario situar sistemáticamente los vínculos en puntos baricéntricos.

Las principales hipótesis empleadas para establecer la relación entre tensiones y deformaciones a nivel de sección son:

1.- Se considera que los elementos se hallan sometidos a un estado uniaxial de tensiones.
2.- El comportamiento a torsión es de Saint Venant, de forma que el alabeo es libre y además la curvatura a torsión es directamente proporcional al momento torsor aplicado en cada sección. En el caso de secciones huecas, el espesor de las paredes se considera suficiente como para hacer despreciable el efecto de distorsión de la sección. Por otra parte, al no existir restricción sobre la deformación de alabeo, ésta no interviene en la energía de deformación del sistema y como consecuencia puede ser ignorada en la formulación general.
3.- Los comportamientos frente a tensiones normales y tangenciales están desacoplados. Así, no se tiene en cuenta la posible influencia de los esfuerzos cortantes ni la del momento torsor en las deformaciones normales.
4.- Se mantiene la hipótesis de Bernouilli, admitiéndose que las secciones planas normales a la directriz permanecen planas tras deformarse la pieza.
5.- En primera instancia, se adopta la hipótesis de comportamiento elástico lineal.

Partiendo de las anteriores hipótesis ha de ser posible plantear una ecuación constitutiva en términos de esfuerzos y deformaciones seccionales. En coordenadas locales, esta ecuación, en su forma más general, adoptará la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = K_s(\boldsymbol{\epsilon}_s - \boldsymbol{\epsilon}_s^o) + \boldsymbol{\sigma}_s^o \tag{12}$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}_s =$ $(N, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z)^T$, vector de esfuerzos seccionales.
$\boldsymbol{\epsilon}_s =$ $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z)^T$, vector de deformaciones seccionales (siendo ϵ_x la deformación axial, ε_y y ε_z las deformaciones tangenciales, ϕ_x la curvatura a torsión, y ϕ_y, ϕ_z las curvaturas a flexión).
$\boldsymbol{K}_s$ es la matriz de rigidez seccional, que depende de la forma de la sección y de las características elásticas de los materiales.
$\boldsymbol{\sigma}_s^o$ es el vector de esfuerzos debidos a tensiones iniciales.
$\boldsymbol{\epsilon}_s^o$ es el vector de deformaciones iniciales de la sección.

La forma de la matriz $\boldsymbol{K}_s$ se obtiene combinando la condición de equilibrio entre esfuerzos y tensiones, las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, y

las ecuaciones constitutivas de los materiales. Prescindiendo por el momento de los términos de tensión o deformación tangenciales, se tiene:

– Equilibrio

$$\begin{aligned} N &= \iint_s \sigma(y,z)dA \\ M_y &= \iint_s \sigma(y,z)zdA \\ M_z &= \iint_s \sigma(y,z)ydA \end{aligned} \tag{13}$$

– Compatibilidad

$$\epsilon(y,z) = \epsilon_x - y\phi_z + z\phi_y \tag{14}$$

– Relación constitutiva

$$\sigma(y,z) = E(\epsilon(y,z) - \epsilon^0(y,z)) + \sigma^0(y,z) \tag{15}$$

donde:

$\sigma(y,z)$ es la tensión normal en el punto (y,z).
$\epsilon(y,z)$ es la deformación axial en el punto (y,z).
$\sigma^0(y,z)$ y ϵ^0 son la tensión y la deformación iniciales en (y,z).
E es el módulo de deformación del material en el punto (y,z).

Sustituyendo (15) en (13) y utilizando (14) resulta una expresión matricial entre esfuerzos y deformaciones normales en la sección:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint_s EdA & \iint_s EzdA & -\iint_s EydA \\ & \iint_s Ez^2dA & -\iint_s EyzdA \\ sim. & & \iint_s Ey^2dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} + \\ + \begin{Bmatrix} \iint_s \sigma_x^o dA \\ \iint_s \sigma_z^o dA \\ \iint_s \sigma_y^o dA \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \iint_s E\epsilon_x^o dA \\ \iint_s E\epsilon_z^o dA \\ \iint_s E\epsilon_y^o dA \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Se puede observar que la matriz de rigidez seccional obtenida es completa, debido a la interacción flexión-axil existente.

Mientras que los esfuerzos que generan tensiones normales se tratan a nivel puntual, los esfuerzos que generan exclusivamente tensiones tangenciales se tratan a nivel seccional. Dada la arbitrariedad con que puede elegirse el eje de referencia, resulta una interacción entre el momento torsor M_x y los esfuerzos cortantes V_y, V_z (Figura 5). Estableciendo de nuevo las condiciones de equilibrio, compatibilidad de deformaciones y relación constitutiva, se tiene:

– Equilibrio

$$\Omega = M_x + z_c V_y - y_c V_z \tag{17}$$

– Compatibilidad

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \gamma_y + \phi_x z_c \\ \epsilon_z &= \gamma_z - \phi_x y_c \end{aligned} \tag{18}$$

– Relación constitutiva

$$\begin{aligned} V_y &= \gamma_y G A_{s_y} \\ V_z &= \gamma_z G A_{s_z} \\ \Omega &= G J \phi_x \end{aligned} \tag{19}$$

donde:

(y_c, z_c) son las coordenadas locales del centro de esfuerzos cortantes.
Ω es el momento torsor reducido al centro de esfuerzos cortantes.
M_x es el momento torsor reducido al eje de referencia de la sección.
V_y, V_z son los esfuerzos cortantes en dirección y y z aplicados en el eje de referencia de la sección.
A_{s_y}, A_{s_z} son las áreas reducidas de la sección ante unos esfuerzos cortantes en las direcciones y y z.
ϵ_y, ϵ_z son las deformaciones de dirección y y z en el eje de referencia de la sección.
γ_y, γ_z son las deformaciones de dirección y y z debidas los esfuerzos cortantes actuando en el centro de esfuerzos cortantes.

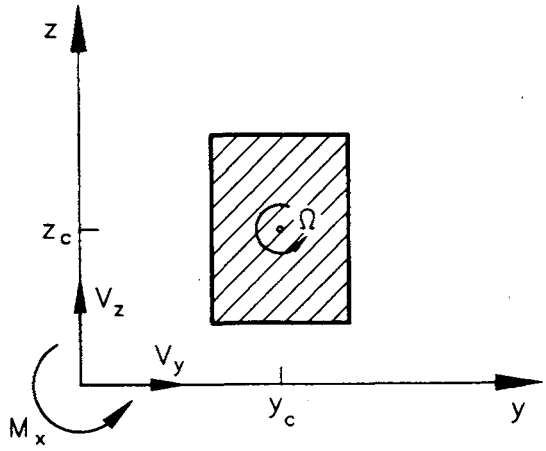

Figura 5. Esfuerzos que originan tensiones tangenciales en la sección.

Sustituyendo las condiciones de compatibilidad (18) en la relación tenso-deformacional (17) e imponiendo equilibrio (19) se obtiene la relación existente entre

los esfuerzos de corte y momento torsor, y las deformaciones transversales y giro en el eje de referencia.

$$\begin{aligned} V_y &= GA_{s_y}(\epsilon_y - \phi_x z_c) \\ V_z &= GA_{s_z}(\epsilon_z + \phi_x y_c) \\ M_x &= [GJ + G(A_{s_y} z_c^2 + A_{s_z} y_c^2)]\phi_x + y_c G A_{s_z}\epsilon_z - z_c G A_{s_y}\epsilon_y \end{aligned} \tag{20}$$

El desacoplamiento entre el comportamiento frente a tensiones normales y frente a tensiones tangenciales se manifiesta en la ausencia de términos cruzados en la matriz de rigidez ampliada a estos grados de libertad.

La relación entre esfuerzos y deformaciones seccionales, incluyendo términos normales y tangenciales, es:

$$\begin{Bmatrix} N \\ V_y \\ V_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_s \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \tag{21}$$

donde:

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \iint_s E dA & 0 & 0 & 0 & \iint_s E z dA & -\iint_s E y dA \\ & GA_{s_y} & 0 & -GA_{s_y} z_c & 0 & 0 \\ & & GA_{s_z} & GA_{s_z} y_c & 0 & 0 \\ & & & GJ+G(A_{s_z} y_c^2 + A_{s_y} z_c^2) & 0 & 0 \\ & & & & \iint_s E z^2 dA & -\iint_s E y z dA \\ & sim. & & & & \iint_s E y^2 dA \end{bmatrix} \tag{22}$$

Ecuación del elemento

De las condiciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas se obtendrá la ecuación fundamental de la barra.

Retomando la ecuación (12) y reescribiéndola en coordenadas globales mediante una matriz de cambio $\mathbf{C}$ (siendo $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_{XY}$, $\boldsymbol{\epsilon}_s = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{XY}$), se tiene:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_{XY} = K_s(\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{XY} + \boldsymbol{\epsilon}_s^o) + \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_{XY}^o \tag{23}$$

Despejando el vector de deformaciones en coordenadas globales $\boldsymbol{\epsilon}_{XY}$,

$$\boldsymbol{\epsilon}_{XY} = \mathbf{C}^T \mathbf{K}_s{}^{-1} \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}_{XY} - \boldsymbol{\sigma}_{XY}^o) - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\epsilon}_s^o \tag{24}$$

Sustituyendo en (11) el vector de deformaciones (24) obtenido de la ecuación constitutiva seccional, resulta:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{N}^T(s_A, s_B)\boldsymbol{\delta}_A = \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B)(\mathbf{C}^T \mathbf{K}_s{}^{-1} \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}_{XY} - \boldsymbol{\sigma}_{XY}^o) - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\epsilon}_s^o) ds \tag{25}$$

Sólo queda relacionar los esfuerzos internos seccionales de cualquier punto con las fuerzas $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_B$ en los extremos de la viga. Ello se consigue combinando (25) con la ecuación de equilibrio (7),

$$\begin{aligned}\mathbf{d} \;=\; \int_A^B \Big(\; & \mathbf{N}^T(s,s_B)\mathbf{C}^T\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{N}(s,s_B)\mathbf{P}_B \;+\; \mathbf{N}^T(s,s_B)\mathbf{C}^T\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^*_{XY} \\ & +\; \mathbf{N}^T(s,s_B)\mathbf{C}^T\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^o_{XY} \;+\; \mathbf{N}^T(s,s_B)\mathbf{C}^T\boldsymbol{\epsilon}^o_s \;\Big) ds\end{aligned} \tag{26}$$

Esta ecuación se puede escribir de forma más compacta como

$$\mathbf{d} \;=\; \mathbf{F}\mathbf{P}_B + \mathbf{d}^* + \mathbf{d}^o \tag{27}$$

donde:

$\mathbf{B}(s) = \mathbf{C}(s)\mathbf{N}(s,s_B)$, es una matriz de interpolación de esfuerzos en coordenadas locales.

$\mathbf{F} = \int_A^B \mathbf{B}^T\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{B}\; ds$ es la matriz de flexibilidad de la viga.

$\mathbf{d}^* = \int_A^B \mathbf{B}^T\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^*_{XY}\; ds$ es el vector de movimientos en B producidos por la deformación del elemento, en su configuración isostática base, bajo el efecto de las cargas repartidas.

$\mathbf{d}^o = \int_A^B \mathbf{B}^T\Big(\mathbf{K}_s{}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^o_{XY} - \boldsymbol{\epsilon}^o_s\Big)\; ds$ es el vector de movimientos en B debidos a las deformaciones y esfuerzos iniciales existentes en la propia viga.

La matriz de rigidez de un elemento se obtiene al formular la relación explícita entre fuerzas y desplazamientos nodales. Para el extremo B, dicha relación se obtiene de forma inmediata a partir de (11) y (27),

$$\mathbf{P}_B \;=\; \mathbf{F}^{-1}\mathbf{N}^T(s_A,s_B)\;\boldsymbol{\delta}_A + \mathbf{F}^{-1}\;\boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{F}^{-1}\;(\mathbf{d}^* + \mathbf{d}^o) \tag{28}$$

mientras que para el extremo A, ello resulta de combinar (28) con la ecuación que se obtiene al particularizar la condición de equilibrio (7) entre los extremos de la barra, según:

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{N}(s_A,s_B)\;\mathbf{P}_B + \mathbf{P}^*_A \tag{29}$$

$$\mathbf{P}_A \;=\; \mathbf{N}(s_A,s_B)\;\Big(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{N}^T(s_A,s_B)\;\boldsymbol{\delta}_A + \mathbf{F}^{-1}\;\boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{F}^{-1}\;(\mathbf{d}^* + \mathbf{d}^o)\Big) + \mathbf{P}^*_A \tag{30}$$

Ambas relaciones (28) y (29) pueden sistentizarse en una sola expresión matricial,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}_A\\ \mathbf{P}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{N}_{(A,B)}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{N}^T_{(A,B)} & -\mathbf{N}_{(A,B)}\mathbf{F}^{-1}\\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{N}^T_{(A,B)} & \mathbf{F}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_A\\ \boldsymbol{\delta}_B\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{N}_{(A,B)}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{d}^*+\mathbf{d}^o) + \mathbf{P}^*_A\\ \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{d}^*+\mathbf{d}^o)\end{bmatrix} \tag{31}$$

O lo que es lo mismo,

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{P}^{*o} \tag{32}$$

donde:

- $\mathbf{P}$ es el vector de fuerzas en los extremos de barra.
- $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez de la barra.
- $\boldsymbol{\delta}$ es el vector de desplazamientos en los extremos de barra.
- $\mathbf{P}^{*o}$ es el vector de reacciones de empotramiento perfecto en los extremos de barra debidas a las cargas y tensiones iniciales. Este término es independiente de la configuración isostática base usada en el desarrollo y tiene el mismo significado que en el cálculo matricial clásico de estructuras de barras reticuladas.

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Definición de la geometría longitudinal e integración

Un importante aspecto relacionado con la implementación en ordenador de la formulación presentada, reside en el establecimiento de un método óptimo para la definición sistemática de la geometría de las estructuras a analizar, estableciendo previamente un compromiso entre la máxima complejidad tratable y la conveniente facilidad de utilización. La trascendencia de esta elección es tanto mayor cuando se espera del método la posibilidad de analizar estructuras a la vez grandes y de geometría compleja.

En el presente trabajo se ha optado por ofrecer dos posibilidades al usuario:

(a) Definir expresamente la posición y la forma de la sección transversal en cada punto de integración a lo largo de la directriz de un elemento. La gama de geometrías posibles no tiene límite, pero el proceso de preparación de datos es considerablemente laborioso.

(b) Proveer los datos necesarios para definir la posición y la geometría de las secciones transversales en tres puntos del elemento, coincidentes con los dos extremos y el punto medio de la directriz. La geometría del elemento completo se genera por interpolación parabólica a partir de los datos asociados a las tres secciones de control, independientemente del número de puntos utilizados en la integración numérica. En este caso se minimiza la labor de entrada de datos, pero la variedad de geometrías posibles —manteniendo un tratamiento exacto— queda restringida.

En ambos casos, la integración en la directriz de los elementos se realiza mediante una regla múltiple de Simpson con un número de puntos variable, a definir por el usuario en función de la complejidad de la geometría estudiada. Para las geometrías curvas obtenibles a partir del método (b), considerar 11 puntos de integración será en general suficiente.

Definición de las secciones transversales e integración

Para la definición de la geometría de las secciones transversales de referencia se ha adoptado un método que resulta particularmente eficiente cuando el contorno de aquellas es poligonal. Según este método, cada sección se define mediante una serie de trapezoides $T(i), i = 1, ..., N_{trap}$, determinados a partir de las coordenadas locales de sus vértices, (y_k, z_k) $k = 1, 2, 3, 4$ (Figura 6). Los trapezoides se normalizan en forma de cuadrado de lado 2 (Figura 7) mediante una transformación de coordenadas que puede expresarse utilizando unas funciones de forma lineales bidimensionales M_1, M_2, M_3, M_4, según:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} M_k(\gamma, \rho) \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} \tag{33}$$

siendo:

$$\begin{aligned} M_1(\gamma, \rho) &= \tfrac{1}{4}\,(1+\gamma, 1+\rho) \\ M_2(\gamma, \rho) &= \tfrac{1}{4}\,(1-\gamma, 1+\rho) \\ M_3(\gamma, \rho) &= \tfrac{1}{4}\,(1-\gamma, 1-\rho) \\ M_4(\gamma, \rho) &= \tfrac{1}{4}\,(1+\gamma, 1-\rho) \end{aligned} \tag{34}$$

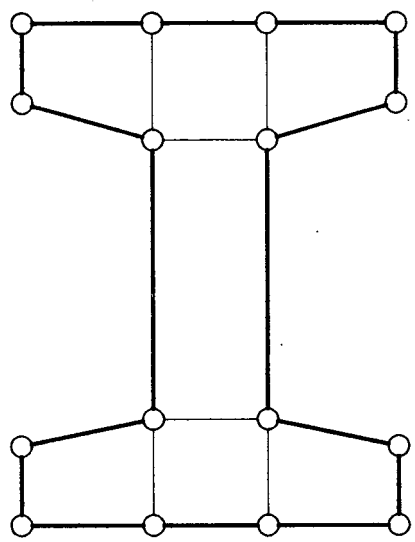

Figura 6. Discretización de una sección en trapezoides.

La integral de cualquier función $f(y, z)$ sobre la sección transversal completa se obtiene como suma de la contribución de cada uno de los trapezoides. Por otra parte, la integración en un trapezoide se efectúa mediante una cuadratura bidimensional, utilizando como referencia la geometría del trapezoide normalizado.

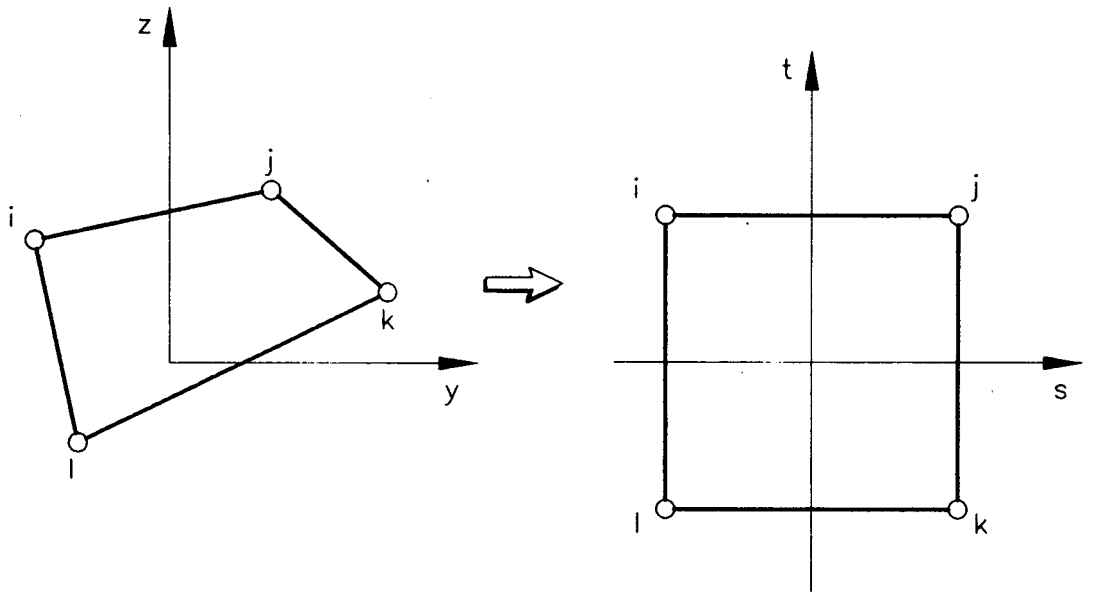

Figura 7. Transformación de un trapezoide en un cuadrado normalizado.

Como algoritmo de integración numérica se utiliza la regla de Simpson generalizada a dos dimensiones. De esta forma, la integración sobre una sección puede escribirse como:

$$\int_S f(y,z)\,ds = \sum_{1}^{N_{trap}} \sum_{p=1}^{5} \sum_{q=1}^{5} f(y_p, z_q)\, J_{pq}\, P_{pq} \tag{35}$$

donde:

J_{pq} jacobiano de la transformación geométrica en el punto (y_p, z_q)
P_{pq} peso de la integración en el punto (y_p, z_q)

El jacobiano J de la transformación del plano de coordenadas normalizadas γ,ρ, al plano de las coordenadas reales y,z se obtiene a partir de (33) como:

$$dydz = Jd\gamma d\rho \qquad J = det\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial M_i}{\partial \gamma} y_k & \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial M_i}{\partial \gamma} z_k \\ \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial M_i}{\partial \rho} y_k & \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial M_i}{\partial \rho} z_k \end{bmatrix} \tag{36}$$

Conexiones rígidas

Los macizos rígidos que se presentan en una estructura real, tales como los extremos sobre pilares de las vigas que forman pórticos, se pueden simular en el modelo a modo de conexiones rígidas en extremos, para lo cual basta modificar convenientemente la matriz de rigidez y el vector de esfuerzos de empotramiento perfecto de los elementos. Esta facilidad permite, además, reproducir exactamente en el modelo numérico la ubicación real de los apoyos en las estructuras.

Post-proceso gráfico

El programa de cálculo ha sido complementado con un post-proceso gráfico para la representación de las geometrías iniciales y deformadas así como del estado tensional de los materiales.

Para ello se ha utilizado un método iterativo de generación de hexaedros obtenidos automáticamente a partir de los trapecios que forman cada sección transversal. Si se considera a los trapecios como bases, la altura del hexaedro viene determinada por la distancia existente entre las secciones de integración a lo largo de la directriz. Cada uno de los hexaedros queda definido con las coordenadas de sus ocho vértices, los cuatro vértices que forman cada cara, y las seis caras que forman el hexaedro. Para la representación de los resultados del análisis estructural se evalúa el estado tensional de todos los puntos (vértices) usados préviamente en la generación de la geometría del modelo.

Asimismo, las deformadas de las estructuras calculadas se obtienen aplicando en los vértices de cada sección los movimientos que ésta experimenta, desplazamientos y giros.

EJEMPLOS

Se presentan tres ejemplos destinados a mostrar las posibilidades y la exactitud que la FMG ofrece frente a otros posibles métodos en el estudio de piezas o sistemas de geometría curva o variable.

Un cuarto ejemplo se refiere a la aplicación de la FMG para el análisis de una compleja estructura real, donde la disminución de grados de libertad que esta técnica proporciona permite llevar a cabo el estudio de su comportamiento estructural con una economía razonable de medios.

Ejemplo 1: Voladizo de sección variable

El primer ejemplo consiste en el estudio estático de una pieza en voladizo de directriz recta y sección rectangular de canto variable en la longitud. La luz del voladizo es $L = 10.0\ m$, y su ancho, constante, es $b = 1.0\ m$. El canto varía desde un máximo $h_E = 1.0\ m$ en el empotramiento hasta extinguirse en el extremo libre. Las propiedades mecánicas consideradas para el material son las siguientes: módulo de deformación $E = 10^6 kN/m^2$ y módulo transversal $G = 10^6 kN/m^2$.

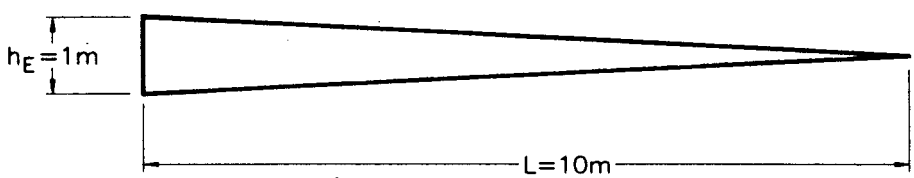

Figura 8. Ejempo 1: esquema de la viga en voladizo.

Esta estructura se estudia bajo el efecto de su peso propio, de 1. kN/m^3.

La solución exacta se puede obtener analíticamente a través de la integración directa de las ecuaciones de Navier-Bresse. Para ello, es preciso formular matemáticamente las expresiones del área $A(x)$ y de la inercia $I(x)$. Éstas son, en función de la distancia x a la sección de empotramiento:

$$A(x) = (1 - \frac{x}{L}) \tag{37}$$

$$I(x) = \frac{(1 - \frac{x}{L})^3}{12} \tag{38}$$

De forma semejante, las leyes de esfuerzos flectores $M(x)$ y de esfuerzos cortantes V(x) se escriben como:

$$M(x) = \frac{L^2}{6} - \frac{xL}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \tag{39}$$

$$V(x) = \frac{L}{2} - x + \frac{x^2}{2L} \tag{40}$$

Finalmente, los movimientos en cualquier punto del voladizo, giro $\omega(s)$ y flecha $\delta(s)$, se pueden calcular directamente mediante las expresiones:

$$\omega(s) = \int_0^s \frac{M(x)}{EI(x)} dx \tag{41}$$

$$\delta(s) = \int_0^s \Big(\frac{M(x)}{EI(x)}(s - x) + \frac{V(x)}{GA_s(x)}\Big) dx \tag{42}$$

MÉTODO	M_E (kNm)	V_E (kN)	δ_V (m)	ω_V
analítico	16.666	5.0000	-.010025	-.002
FMG 1 elemento	16.666	5.0000	-.010019	-.10306
FMG 3 elementos	16.666	5.0000	-.010024	-.0019998

Tabla 1. Comparación entre los esfuerzos de empotramiento y los movimientos en el extremo, obtenidos analíticamente y los obtenidos usando la FMG en distintas modelizaciones.

La comparación de resultados analíticos —provenientes del uso de las fórmulas teóricas— con los resultados numéricos obtenidos muestra ante todo la gran precisión alcanzada por éstos últimos, con independencia del número de elementos utilizado (Tabla 1). No obstante, es posible realizar algunas matizaciones.

A pesar de que, por la especial geometría del caso estudiado, resultaría más conveniente utilizar una cuadratura abierta, los resultados obtenidos con el método de integración cerrada implementado son altamente satisfactorios. Las reacciones son

en cualquier caso exactas, mientras que en el valor de los movimientos en el extremo del voladizo se aprecian ligeras diferencias con respecto a la solución analítica. Al modelar el voladizo con un solo elemento se obtiene un valor muy correcto para la flecha máxima (siempre tomando como referencia la solución analítica) mientras que el máximo giro muestra un ligero error. Este error puede atribuirse a las limitaciones que el método de integración adoptado presenta al tratar una flexibilidad muy fuertemente variable a lo largo del elemento. Con tres elementos desaparecen los problemas numéricos y se consiguen resultados muy precisos.

Ejemplo 2: Arco parabólico

Como segundo ejemplo se presenta el análisis estático de un arco parabólico biarticulado y de sección rectangular de dimensiones constantes, bajo el efecto de un movimiento horizontal impuesto en uno de sus apoyos (Figura 9).

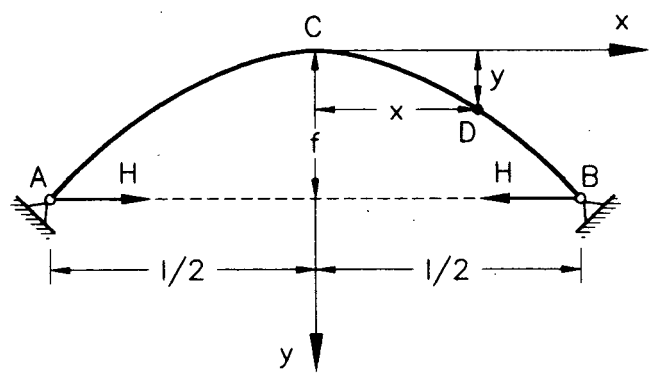

Figura 9. Ejemplo 2: esquema del arco estudiado.

El arco en estudio tiene una luz $L = 10.0\ m$ y una flecha central $f = 2.0\ m$; el ancho de su sección transversal es $b = 1.0\ m$ y su canto $h = 1.0\ m$. El material se caracteriza por un módulo de deformación de $E = 10^6 kN/m^2$. El desplazamiento impuesto es $\delta_{imp} = 1.0\ m$. No se considera deformación por cortante en los cálculos.

Mediante el Teorema de Castigliano, tal y como puede verse desarrollado en la referencia[5], es posible obtener la siguiente expresión teórica para relacionar la reacción horizontal H con el valor del movimiento impuesto δ,

$$H = \frac{1}{\int_0^s \frac{(f-y)^2}{EI} ds + \int_0^s \frac{ds}{1+(\frac{8fx}{L^2})^2}} \delta \tag{43}$$

en la que x es la coordenada horizontal que mide la distancia al eje del arco, y ds describe el incremento de longitud de arco, calculable como:

$$ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx \tag{44}$$

Utilizando (43) con los datos del ejemplo se obtiene una reacción horizontal $H = 3.619093\ 10^3\ kN$. Este valor coincide exactamente con aquél que se obteniene numéricamente, incluso al modelar el arco con un único elemento. En este caso la geometría interpolada es directamente exacta y asímismo lo es la regla de Simpson múltiple empleada para realizar las integraciones.

Ejemplo 3: Helicoide circular de Scordelis y Young

Como tercer ejemplo de aplicación se presenta el estudio estático de un helicoide circular biempotrado cuya proyección horizontal abarca 180° y mantiene una pendiente constante de 30°. En la Figura 10 se muestran las principales características del modelo, previamente estudiado analítica y experimentalmente por Y.F. Young y A.C. Scordelis[6].

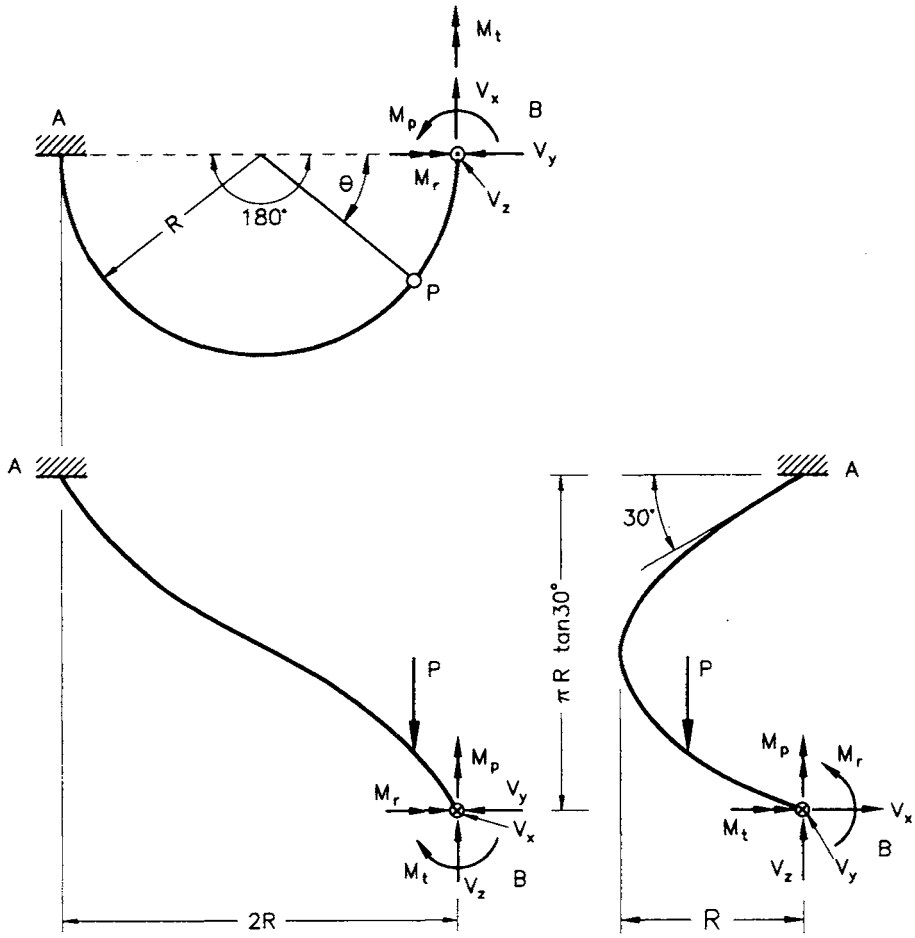

Figura 10. Ejemplo 3: Planta y alzado del helicoide estudiado por Young y Scordelis.

El radio del helicoide (en proyección) es $R = 0.254\ m$, y la sección transversal, de geometría constante, tiene canto de $0.0061976\ m$ y ancho de $0.0262382\ m$. El material se caracteriza por las siguientes propiedades mecáncias: módulo de deformación $E = 3185.5\ MPa$ y módulo transversal $G = 1117.0\ MPa$.

En la Tabla 2 se pueden comparar las reacciones de empotramiento obtenidas por los citados autores con las obtenidas en el presente estudio mediante FMG, discretizando el helicoide mediante 2 ó 6 elementos. La comparación se realiza para dos posiciones distintas de una carga puntual unitaria aplicada ($\theta = 30^o$ y $\theta = 90^o$).

Las ligeras diferencias que se aprecian (Tabla 2), con errores que únicamente afectan al cuarto dígito decimal, se deben fundamentalmente al uso del pre-proceso de definición de la geometría, en el cual los parámetros geométricos se hacen variar de forma parabólica cuando de hecho el helicoide tiene planta circunferencial. El uso del método de definición geométrica (a) descrito en el apartado 3., hubiera dado lugar a una exactitud aún mayor en los resultados.

POSICIÓN CARGA θ	TIPO RESULTADO	V_X	V_Y	V_Z	$\frac{M_T}{R}$	$\frac{M_r}{R}$	$\frac{M_p}{R}$
$\theta = 90^o$	analítico	.5314	.0000	.5000	.3247	-.0181	.5314
	FMG (2 elem)	.5313	.0000	.5000	.3246	-.0182	.5312
	FMG (6 elem)	.5317	.0000	.5000	.3248	-.0178	.5317
$\theta = 30^o$	analítico	-.1448	-.3387	.7526	.2179	-.1874	.3605
	FMG (6 elem)	-.1448	-.3383	.7527	.2177	-.1874	.3601

Tabla 2. Comparación entre los esfuerzos de empotramiento analíticos obtenidospor Young y la FMG. Los resultados son adimensionales.

Ejemplo 4: Aplicación a una estructura compleja

Cuando, por encargo del Servei de Patrimoni Arquitectònic de la Diputació de Barcelona, se planteó el estudio de una estructura tan singular como la Cripta de la Colonia Güell de A. Gaudí[7], los autores del artículo vieron en la FMG presentada un método particularmente adecuado para su análisis. Características poco comunes de esta estructura son la multiplicidad de elementos, su variedad y su geometría casi siempre curva. El modelo elaborado al efecto, presentado en la Figura 11, estuvo formado por seiscientos elementos, que para su definición necesitaron de cuatrocientos diecisiete tipos de secciones transversales distintas, algunas de ellas definidas por cinco trapecios. Las integraciones necesarias se realizaron sobre once puntos. El sistema

resultante produjo mil novecientas veinte ecuaciones. El tiempo de resolución de un análisis elástico lineal fué inferior a los 9 minutos en el ordenador DIGITAL-VAX 6420 utilizado.

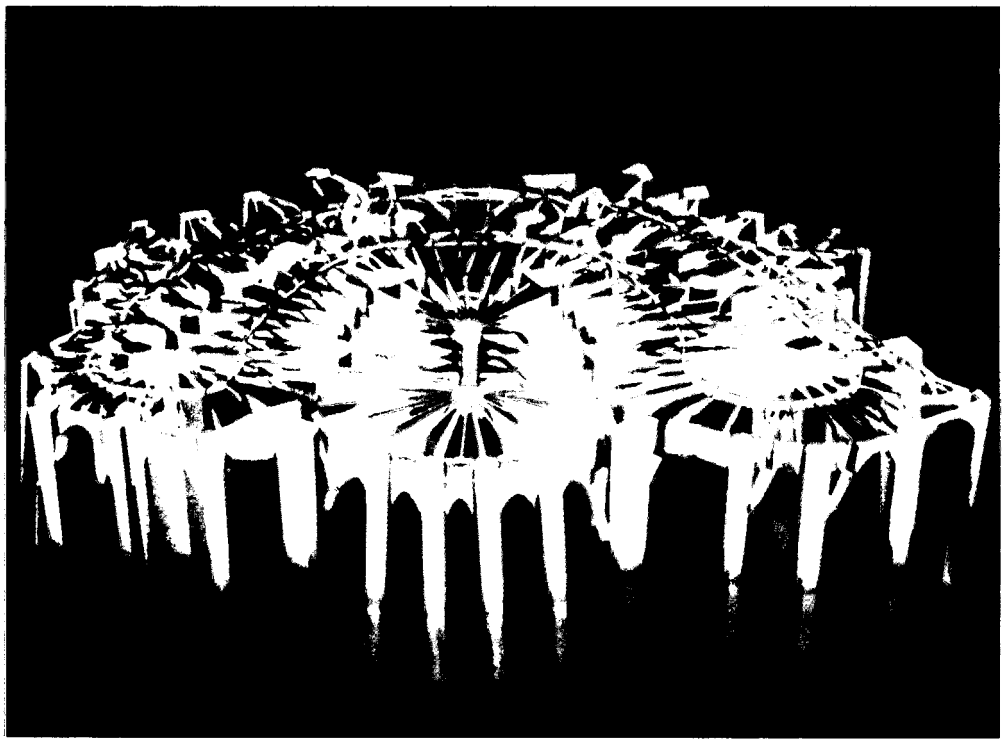

Figura 11. Vista general del modelo realizado de la Cripta de la Colonia Güell de Antoni Gaudí. Representación obtenida mediante el programa MPGS (Multi-Purpose Graphic System) en el Centro de Supercomputación de Catalunya.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una Formulación Matricial Generalizada (FMG) para el análisis exacto de estructuras reticuladas espaciales formadas por elementos unidimensionales de geometría curva y sección transversal arbitraria y variable. La FMG permite modelar, con gran precisión, cualquier estructura múltiple formada por vigas utilizando para ello un reducido número de grados de libertad.

Puesto que la FMG no requiere hipótesis adicionales sobre el campo de movimientos o de tensiones, sus resultados son en principio exactos, hallándose la precisión únicamente condicionada por los métodos de integración numérica adoptados. El coste en tiempo de ordenador que exige la utilización de este método viene controlado directamente por el número de secciones a integrar, y en menor medida por la resolución del sistema de ecuaciones ya que el número necesario de grados de libertad se mantiene reducido incluso en ejemplos complejos.

En su implementación para el análisis elástico lineal (programa CRIPTA), la FMG proporciona resultados muy satisfactorios. Así se desprende del cálculo de varias estructuras de geometría curva y sección variable, presentados como ejemplos de comprobación y aplicación.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido desarrollado con el soporte económico concedido por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología al proyecto "Desarrollo y ensayo de técnicas para el análisis estructural de construcciones antiguas del patrimonio arquitectónico histórico" (SEC93-1160). Asímismo, el primer autor ha disfrutado de una beca FPI concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia español.

REFERENCIAS

1. F. Baron, "Matrix Analysis of Structures curved in space", *Journal of the Structural Division ASCE*, Vol. **87**, n^o. ST3, (1961).
2. I. Carol y J. Murcia, "Nonlinear time-dependent Analysis of Planar Frames Using an 'Exact' Formulation—I. Theory", *Computers and Structures*, Vol. **33**, n°. 1, pp. 79–87, (1989).
3. S. Carrascón, A.R. Marí y I. Carol, *"Análisis instantáneo y diferido de puentes curvos de hormigón armado y pretensado"*, Publicación ES-015, Departament d'Enginyeria de la Construcció, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (1987).
4. A.R. Marí, *"Modelos unidimensionales para el análisis no lineal en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado"*, Departament d'Enginyeria de la Construcció, Universitat Politècnica de Catalunya, (1987).
5. S.P. Timoshenko, D.H. Young. *"Theory of structures"*, Second Edition, Mc Graw-Hill, (1965).
6. Y.F. Young y A.C. Scordelis, "An analytical and experimental study of Helicoidal Girders", *Journal of the Structural Division ASCE*, Vol. **84**, n^o. ST5, (1958).
7. A. González, A. Casals, P. Roca y J.L. González, "Studies of Gaudi's Cripta de la Colonia Güell", *Proceeding of IABSE Symposium Structural Preservation of the Architectural Heritage*, Roma, (1993).