

# LA INTEGRACION DE LA FORMULA DE ASIENTOS DE MINDLIN PARA CARGA ANULAR

J.L. JUSTO

*Departamento de Mecánica de Medios Continuos,  
E.T.S. Arquitectura, Universidad de Sevilla,  
Avda. Reina Mercedes, 2 - 41012 Sevilla.*

## RESUMEN

Se ha hallado el asiento producido por una presión constante, actuando sobre una superficie anular profunda en un punto cualquiera mediante integración de la ecuación de Mindlin.

Se hace un estudio a fondo de esta integral, indicando cuando se puede expresar por medio de funciones explícitas conocidas.

Basándose en ella se resuelven los problemas del asiento de placas circulares flexibles o rígidas.

## SUMMARY

The settlement produced by a constant pressure acting on a ring-shaped deep surface is found by integration of Mindlin equation.

A thorough study of this integral has been carried out, indicating when it may be expressed by explicit known functions.

Based on that, the settlement of circular flexible or rigid plates are solved.

## INTRODUCCION

Los estudios rigurosos sobre asientos, distribución de tensiones en cimentaciones profundas e interacción suelo-estructura-cimentación profunda, requieren la integración de la expresión del asiento producido por una fuerza en el interior de un semiespacio elástico, obtenida por Mindlin (1936), sobre determinadas superficies elementales, entre las que se encuentra la superficie anular.

Si bien una fórmula de integración parcial de esta expresión está incluida en el libro de Poulos y Davis (1980), dicha fórmula requiere simplificación, en dicho libro no se indica cómo se ha realizado la integración, ni se demuestra en qué casos la integral se puede expresar mediante funciones explícitas o hay que proceder a una integración numérica.

Recibido: Octubre 1991

Es interesante también comprobar la exactitud de algunas pretendidas fórmulas elásticas para placas profundas, como la indicada por Burland y Cooke (1974).

Se estudian también aquí los puntos singulares presentes en la integración, cosa que no se había hecho con anterioridad.

Esto es un punto importante y en él se centra una de nuestras aportaciones al tema, ya que la expresión (3) alcanza valores infinitos en algunos puntos dentro del intervalo de integración de (9).

En nuestro estudio se demuestra que, si los pilotes son delgados, la solución se puede expresar de forma explícita mediante funciones conocidas.

Por otro lado, se ha obtenido aquí la expresión explícita del asiento producido por una corona circular profunda uniformemente cargada en un punto situado en la vertical de su eje.

Por último, se ha resuelto aquí el problema del asiento de una placa circular rígida profunda, que tiene una aplicación inmediata como es hallar el asiento y las tensiones a las que está sometida la placa de un pilote de barrena, en un suelo susceptible.

Se utilizan los símbolos recomendados por la Sociedad Internacional de Mecánica del Suelo siempre que éstos hayan sido normalizados.

## ASIENTO PRODUCIDO POR UNA TENSION UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN UN ANILLO CIRCULAR HORIZONTAL

Partimos primeramente de un anillo elemental de espesor  $dr$ .  
Reproducimos el anillo elemental y el punto  $i$  en la Figura 1.

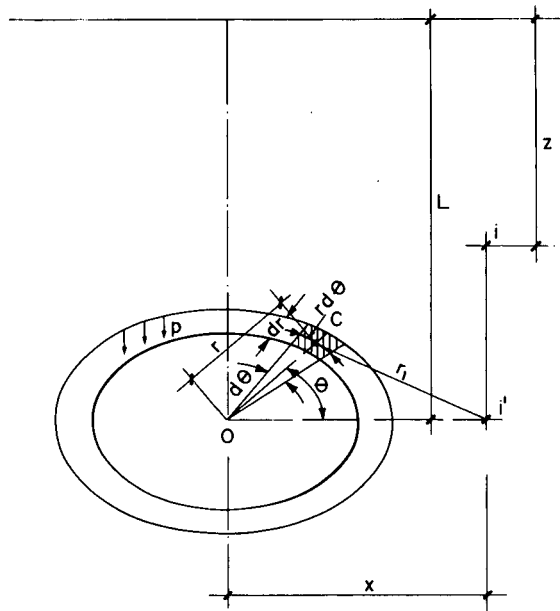


Figura 1. Geometría del anillo elemental.

Sea  $i'$  la proyección de  $i$  sobre el plano del anillo.  
 Sea  $L$  la profundidad del plano del anillo.  
 Partimos de la expresión de Mindlin:

$$I'_1(r, \theta) = \frac{z_1^2}{R_1^3} + \frac{B}{R_1} + \frac{H}{R_2} + \frac{Bz_2^2 - 2Lz}{R_2^3} + \frac{6Lz_2^2z}{R_2^5} \quad (1)$$

siendo

$$\begin{aligned} z_2 &= z + L \\ z_1 &= z - L \\ R_1^2 &= z_1^2 + r_1^2 \\ R_2^2 &= z_2^2 + r_1^2 \\ B &= 3 - 4\nu \\ H &= 5 - 12\nu + 8\nu^2 \end{aligned}$$

El asiento producido por el rectángulo elemental es:

$$ds_i = C \frac{p}{E} r d\theta dr I'_1(r, \theta)$$

siendo:

$$C = \frac{1 + \nu}{8\pi(1 - \nu)}$$

Asiento producido por la corona circular:

$$s_i = 2C \frac{p}{E} \int_0^\pi d\theta \int_{r_1}^{r_2} I'_1(r, \theta) r dr \quad (2)$$

La integración se realiza en el apéndice nº 1.

La integral (2) respecto a  $r$  se calcula en el apéndice nº 1, obteniéndose la expresión:

$$\begin{aligned} I'_2(r, \theta) &= \int I'_1(r, \theta) r dr \\ I'_2(r, \theta) &= BR_1 + \frac{z_1^2 ar'}{b^2 R_1} - \frac{z_1^2}{R_1} + B a \ln(r' + R_1) + HR_2 + \\ &+ \frac{2Mar'}{c^4 R_2} + \frac{Kar'}{c^2 R_2} - \frac{K}{R_2} + \frac{Mar'}{c^2 R_2^3} - \frac{M}{R_2^3} + H a \ln(r' + R_2) \end{aligned} \quad (3)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{r'^2 + b^2} \\
R_2 &= \sqrt{r'^2 + c^2} \\
r' &= r - a \\
a &= x \cos \theta \\
b^2 &= z_1^2 + x^2 \sin^2 \theta \\
c^2 &= z_2^2 + x^2 \sin^2 \theta \\
M &= 2Lz_2^2 z \\
K &= Bz_2^2 - 2Lz
\end{aligned}$$

Si  $x = 0$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{z_1^2 + r^2} \\
R_2 &= \sqrt{z_2^2 + r^2}
\end{aligned}$$

$$I'_2(r) = BR_1 - \frac{z_1^2}{R_1} + HR_2 - \frac{K}{R_2} - \frac{M}{R_2^3} \quad (4)$$

$$I'_j = I'_2(r_j) - I'_2(r_{j-1}) \quad (5)$$

$$s_i = 2\pi C I'_j \frac{p}{E} \quad (6)$$

Si, además  $z = L$  y  $r_{j-1} = 0$ :

$$I'_2(0) = 4(1 - 2\nu)^2 L \quad (7)$$

Si  $x \neq 0$ :

$$I'_j(\theta) = I'_2(r_j, \theta) - I'_2(r_{j-1}, \theta) \quad (8)$$

$$s_i = 2C \frac{p}{E} \int_0^\pi I'_j(\theta) d\theta \quad (9)$$

La expresión 9 requiere integración numérica. Dicha integración se detalla en el apéndice n° 1.

## ASIENTO PRODUCIDO POR UNA PLACA CIRCULAR FLEXIBLE PROFUNDA EN LA VERTICAL DE SU CENTRO

El asiento provocado por una presión uniforme de valor  $p$ , sobre una placa circular flexible de radio  $R$ , situada a la profundidad  $L$ , en un punto de su eje situado a la profundidad  $z$ , se obtendrá a partir de la ecuación 6:

Llamamos:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{z_1^2 + R^2} \\
 R_2 &= \sqrt{z_2^2 + R^2} \\
 I' &= B[R_1 - |z_1|] + |z_1| - \frac{z_1^2}{R_1} + H(R_2 - z_2) + K\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{R_2}\right) + \\
 &\quad + M\left(\frac{1}{z_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) \\
 s_2 &= \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)E} p \left[ BR_1 - 2(1 - 2\nu)|z_1| - \frac{z_1^2}{R_1} + H(R_2 - z_2) + \right. \\
 &\quad \left. + K\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{R_2}\right) + M\left(\frac{1}{z_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

El asiento en el centro de una placa circular flexible provocado por su propia carga uniforme se obtendrá haciendo:

$$z = L$$

$$z_1 = 0$$

$$R_1 = R$$

$$z_2 = 2L$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + (2L)^2}$$

$$K = 4BL^2 - 2L^2 = 4(3 - 4\nu)L^2 - 2L^2 = 2(5 - 8\nu)L^2 \quad (11)$$

$$M = 8L^4 \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 s_o &= \frac{1 + \nu}{8(1 - \nu)E} p \left[ BR + H(R_2 - 2L) + 2(5 - 8\nu)L^2 \left( \frac{1}{2L} - \frac{1}{R_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 8L^4 \left( \frac{1}{8L^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_o &= \frac{1 + \nu}{8(1 - \nu)E} p \left[ BR + HR_2 + L(-10 + 24\nu - 16\nu^2 + 5 - 8\nu + 1) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(5 - 8\nu)L^2}{R_2} - \frac{8L^4}{R_2^3} \right]
 \end{aligned}$$

$$s_o = \frac{1 + \nu}{8(1 - \nu)E} p \left[ BR + HR_2 - 4(1 - 2\nu)^2 L - \frac{2(5 - 8\nu)L^2}{R_2} - \frac{8L^4}{R_2^3} \right] \quad (13)$$

En forma adimensional será:

$$\lambda = \frac{L}{R} \quad (14)$$

$$p_2 = \frac{R_2}{R} = \sqrt{1 + (2\lambda)^2} = \rho_2(\lambda) \quad (15)$$

$$\frac{s_o E}{R_p} = F(\lambda, \nu) = \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)} \left[ B + H_{\rho_2} - 4(1 - 2\nu)^2 \lambda - \frac{2(5 - 8\nu)\lambda^2}{\rho_2} - \frac{8\lambda^4}{\rho_2^3} \right] \quad (16)$$

Si hacemos  $\text{tg } \alpha = 2\lambda$ , tenemos:

$$\frac{s_o E}{R_p} = \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)} \left[ B(1 - \text{tg } \alpha \text{ sen } \alpha) + \frac{H}{\cos \alpha} - 2(1 - 2\nu)^2 \text{tg } \alpha + \frac{\text{sen}^2 \alpha \cos \alpha}{2} \right] \quad (16bis)$$

Cuando  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{s_o E}{R_p} \rightarrow \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)} B$$

La ecuación 16 bis se representa en la Figura 2, y algunos valores se incluyen en la Tabla I.

$\nu$	$L/R$			$R/L$	
	0	1/2	1	1/2	0
0	2	1,532	1,248	1,022	0,750
0,1	1,980	1,572	1,297	1,070	0,794
1/3	1,778	1,557	1,322	1,106	0,833
0,45	1,595	1,472	1,266	1,060	0,791
1/2	1,500	1,413	1,220	1,018	0,750

Tabla I. Asiento adimensional ( $\frac{s_o E}{R_p}$ ) para placa circular sometida a presión uniforme  $p$ .

Si el estrato elástico situado bajo la punta del pilote es finito, se puede hallar el asiento, utilizando la aproximación de Steinbrenner, como diferencia entre el de la ecuación 16 bis y el que resultaría de sustituir en (10) la  $z$  del fondo del estrato.

Para placa superficial es  $L = 0$ . Sustituyendo en (13):

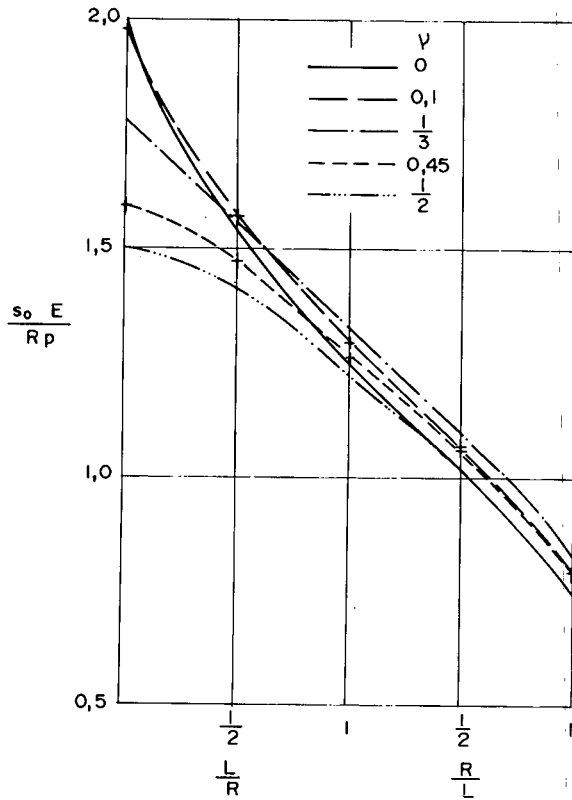


Figura 2. Asiento adimensional para placa circular bajo presión constante.

$$s_o = \frac{1 + \nu}{4(1 - \nu)E} p(3 - 4\nu + 5 - 12\nu + 8\nu^2)R$$

$$s_o = \frac{1 - \nu^2}{E} pd$$

y obtenemos la conocida fórmula del asiento en el centro de una placa superficial circular flexible.

Puede verse en la Figura 2 que el asiento adimensional depende poco de  $\nu$  para  $L/R > 0,6$ . Por el contrario existe una fuerte dependencia respecto a  $L/R$ , a diferencia de lo que sugieren otros autores (v. Burland y Cooke, 1974).

### PLACA CIRCULAR RIGIDA PROFUNDA

La solución del problema resulta de expresar que el asiento en un punto cualquiera de la placa es constante ( $s$ ) y que la presión depende sólo de  $r$  (Figura 1).

En la expresión 1 hacemos:

$$z = L$$

$$z_1 = 0$$

$$R_1 = r_1$$

$$z_2 = 2L$$

$$R_2 = \sqrt{4L^2 + r_1^2}$$

$$I_1'(r, \theta) = \frac{B}{r_1} + \frac{H}{R_2} + \frac{2GL^2}{R_2^3} + \frac{24L^4}{R_2^5}$$

siendo:

$$r_1^2 = r^2 - 2rx \cos \theta + x^2$$

$$G = 2(5 - 8\nu)$$

$$\frac{2C}{R} \int_0^\pi d\theta \int_0^R I_1'(r, \theta) p(r) dr = s \quad x \leq R \quad (17)$$

Por otro lado la ecuación de equilibrio será:

$$Q = 2\pi \int_0^R r p(r) dr \quad (18)$$

El sistema de ecuaciones integrales formado por (17) y (18) permitiría calcular  $p(r)$  y  $s$ .

Este sistema requiere solución numérica, que se detalla en el apéndice nº 2.

## PILOTES DELGADOS

Las dimensiones horizontales de un pilote delgado suelen ser despreciables frente a las verticales. Vamos a utilizar esta propiedad para conseguir que la integral (9) se pueda expresar mediante funciones explícitas.

En la ecuación (3), podemos sustituir  $r_1^2$ ,  $a$ ,  $b^2$  y  $c^2$  por sus valores medios.

$$\overline{r_1^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (r^2 - 2rx \cos \theta + x^2) d\theta = r^2 + x^2 \quad (19)$$

$$\overline{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos \theta d\theta = 0$$



$$\overline{b^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z_1^2 + x^2 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} [z_1^2 \pi + \frac{x^2}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \Big|_0^\pi]$$

$$\overline{b^2} = z_1^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$\overline{c^2} = z_2^2 + \frac{x^2}{2}$$

Con ello:

$$R_1 = \sqrt{z_1^2 + r^2 + x^2} \quad (20)$$

$$R_2 = \sqrt{z_2^2 + r^2 + x^2} \quad (21)$$

$$I_2'(r, x) = BR_1 - \frac{z_1^2}{R_1} + HR_2 - \frac{K}{R_2} - \frac{M}{R_2^3} \quad (22)$$

Con lo cual, el asiento producido por una corona circular uniformemente cargada viene dado por:

$$s_i = \frac{2C\pi}{E} I_j'(x) \quad (23)$$

siendo:

$$I_j'(x) = I_2'(r_j, x) - I_2'(r_{j-1}, x) \quad (24)$$

$I_2'(r, x)$  viene dado por (22) con (20) y (21).

## CONCLUSIONES

Se ha hallado el asiento producido por una presión constante actuando sobre una superficie anular profunda en un punto cualquiera, mediante integración de la ecuación de Mindlin de asientos.

Se ha hecho un estudio a fondo de esta integral, indicando cuando se puede expresar por medio de funciones explícitas conocidas, mediante integrales elípticas completas o mediante series. Se ha preparado el tema para el cálculo numérico, incluida la especificación de errores.

Se han hecho varias aplicaciones concretas de dicha integral.

El asiento en el centro de una placa circular flexible profunda, cargada, viene dado por las ecuaciones (13), (16) ó (16bis).

La Figura 2 muestra dicho asiento, en forma adimensional. Como puede verse dicho asiento depende poco de  $\nu$  para  $L/R > 0,6$ , pero sí depende fuertemente de  $L/R$ .

Se ha establecido un método numérico para hallar el asiento de una placa rígida profunda.

Este estudio, que tienen algunas aplicaciones directas por sí mismo, es fundamental para trabajos posteriores de pilotes.

Esto indica que la fórmula citada por Burland y Cooke (1974) para una placa profunda, en la que dicho asiento adimensional no depende de  $L/R$  es inexacta.

### APENDICE N° 1: INTEGRACION DE LA EXPRESION DEL ASIEN TO PRODUCIDO POR UNA TENSION UNIFORME DISTRIBUIDA EN UN ANILLO CIRCULAR HORIZONTAL

$$I_1'(r, \theta) = \frac{z_1^2}{R_1^3} + \frac{B}{R_1} + \frac{H}{R_2} + \frac{Bz_2^2 - 2Lz}{R_2^3} + \frac{6Lz_2^2z}{R_2^5} \quad (\text{Ap. 1.1})$$

En el triángulo  $OCi$  (Figura 1):

$$r_1^2 = r^2 - 2rx \cos \theta + x^2$$

Llamamos:

$$z_1^2 + x^2 = (R_1)^2$$

$$z_2^2 + x^2 = (R_2)^2$$

$$x \cos \theta = a$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 - 2ar + (R_1)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 - 2ar + (R_2)^2}$$

$$(R_1)^2 = z_1^2 + x^2 + a^2 - x^2 \cos^2 \theta = a^2 + z_1^2 + x^2 \sin^2 \theta = a^2 + b^2$$

siendo:

$$\begin{aligned} b^2 &= z_1^2 + x^2 \sin^2 \theta \\ (R_2)^2 &= a^2 + c^2 \end{aligned} \quad (\text{Ap. 1.2})$$

siendo:

$$\begin{aligned} c^2 &= z_2^2 + x^2 \sin^2 \theta \\ R_1 &= \sqrt{(r - a)^2 + b^2} \\ R_2 &= \sqrt{(r - a)^2 + c^2} \end{aligned} \quad (\text{Ap. 1.3})$$

Se trata de calcular la:

$$\int I_1'(r, \theta) r dr = \int I_1'(r, \theta) (r - a) dr + \int I_1'(r, \theta) a dr \quad (Ap. 1.4)$$

Utilizamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} r - a &= r' \\ dr &= dr' \\ R_1 &= \sqrt{r'^2 + b^2} \end{aligned} \quad (Ap. 1.5)$$

$$R_2 = \sqrt{r'^2 + c^2} \quad (Ap. 1.6)$$

$$\int I_1'(r, \theta) (r - a) dr = -\frac{z_1^2}{R_1} + BR_1 + HR_2 - \frac{K}{R_2} - \frac{M}{R_2^3} \quad (Ap. 1.7)$$

siendo:

$$K = Bz_2^2 - 2Lz \quad (Ap. 1.8)$$

$$M = 2Lz_2^2z \quad (Ap. 1.9)$$

$$\int I_1'(r, \theta) a dr = a \int I_1'(r', \theta) dr'$$

$$\begin{aligned} \int I_1'(r, \theta) dr &= \int \left[ \frac{z_1^2}{(r'^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{B}{(r'^2 + b^2)^{1/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{H}{(r'^2 + c^2)^{1/2}} + \frac{K}{(r'^2 + c^2)^{3/2}} + \frac{3M}{(r'^2 + c^2)^{5/2}} \right] dr' \end{aligned}$$

Los términos 1º, 2º, 3º y 4º aparecen integrados por Justo (1991). El 5º término (como en realidad todos los anteriores) es una integral binómica con:

$$m = 0$$

$$n = 2$$

$$b = 1$$

$$p = -\frac{5}{2}$$

Hacemos:

$$r'^2 = t$$

$$2r' dr' = dt$$

$$dr' = \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\int I'_1(r, \theta) dr = \frac{z_1^2 r'}{b^2 R_1} + K \frac{r'}{c^2 R_2} + \frac{1}{2} \int \frac{3M}{(t+c^2)^{5/2} \sqrt{t}} dt + B \operatorname{argsh} \frac{r'}{b} + H \operatorname{argsh} \frac{r'}{c} \quad (\text{Ap. 1.10})$$

Hacemos:

$$t = \frac{1}{v} \\ dt = -\frac{1}{v^2} dv$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{3M dt}{(r+c^2)^{5/2} \sqrt{t}} = -\frac{3M}{2} \int (c^2 v + 1)^{-5/2} v dv$$

Hacemos ahora:

$$c^2 v + 1 = u$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{3M dt}{(t+c^2)^{5/2} \sqrt{t}} &= -\frac{3M}{2c^2} \int \left(-\frac{1}{c^2} + \frac{u}{c^2}\right) u^{-5/2} du = \\ &= -\frac{3M}{2c^4} \left(-\frac{u^{-3/2}}{-3/2} + \frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right) = \frac{M}{c^4} \left[-\frac{1}{(c^2 v + 1)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{c^2 v + 1}}\right] = \\ &= \frac{M}{c^4} \left[\frac{3}{\sqrt{\frac{c^2}{r^2} + 1}} - \frac{1}{\left(\frac{c^2}{r^2} + 1\right)^{3/2}}\right] = \frac{M r'}{c^4 R_2} \left[3 - \frac{r'^2}{R_2^2}\right] = \frac{2M r'}{c^4 R_2} + \frac{M r'}{c^2 R_2^3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (Ap. 1.10), y, a su vez, en (Ap. 1.4):

$$\begin{aligned} I'_2(r, \theta) = \int I'_1(r, \theta) r dr &= B R_1 + \frac{z_1^2 a r'}{b^2 R_1} - \frac{z_1^2}{R_1} + B a \ln(r' + R_1) + H R_2 \\ &+ \frac{2M a r'}{c^4 R_2} \frac{K a r'}{c^2 R_2} - \frac{K}{R_2} + \frac{M a r'}{c^2 R_2^3} - \frac{M}{R_2^3} + H a \ln(r' + R_2) \quad (\text{Ap. 1.11}) \end{aligned}$$

Esta integración ha sido realizada independientemente por Davis y Poulos (1981), que llegan a una expresión que coincide matemáticamente con ésta, pero mucho más complicada. Estos autores no explican cómo se realizó la integración.

Si  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} r_1 &= r \\ R_1 &= \sqrt{z_1^2 + r^2} \\ a &= 0 \\ r' &= r \\ R_2 &= \sqrt{z_2^2 + r^2} \end{aligned}$$

$$I'_2(r) = \int I'_1(r, \theta) r dr = B R_1 - \frac{z_1^2}{R_1} + H R_2 - \frac{K}{R_2} - \frac{M}{R_2^3} \quad (\text{Ap. 1.12})$$

$$I' = \int_{r_{j-1}}^{r_j} I'_1(r, \theta) r dr = I'_2(r_j) - I'_2(r_{j-1})$$

$$s_i = 2\pi C I' \frac{p}{E} \quad (\text{Ap. 1.13})$$

Si, además, es:

$$z = L \quad \text{y} \quad r = 0$$

serán:

$$z_1 = 0 \quad \text{y} \quad R_1 = 0$$

el límite del segundo término de (Ap. 1.12) es:

$$\lim_{r \rightarrow 0} -\frac{z_1^2}{R_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0}{\sqrt{r^2 + 0}} = 0$$

$$R_2 = 2L$$

$$I'_2(0) = (5 - 12\nu + 8\nu^2)2L - \frac{2(5 - 8\nu)L^2}{2L} - \frac{8L^4}{8L^3} = 4(1 - 2\nu)^2 L$$

Si  $x \neq 0$ :

$$I'_j(\theta) = I'_2(r_j, \theta) - I'_1(r_{j-1}, \theta) \quad (\text{Ap. 1.14})$$

$$s_i = 2C \frac{p}{E} \int_0^\pi I'_j(\theta) d\theta \quad (\text{Ap. 1.15})$$

Esta integral hay que calcularla numéricamente.

A continuación se indican las integrales de algunos de los términos de (Ap. 1.11).

$$\begin{aligned} R_1^2 &= z_1^2 + r_1^2 = z_1^2 + r^2 - 2rx \cos \theta + x^2 \\ R_1^2 &= z_1^2 + r_1^2 + 2rx - 2rx(1 + \cos \theta) + x^2 \\ R_1^2 &= z_1^2 + (r + x)^2 - 4rx \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{Ap. 1.16})$$

Llamamos:

$$(RX1)^2 = z_1^2 + (r+x)^2 \quad (\text{Ap. 1.17})$$

Hacemos:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\text{Ap. 1.18})$$

Sustituyendo (Ap. 1.17) y (Ap. 1.18) en (Ap. 1.16):

$$\begin{aligned} R_1^2 &= (RX1)^2 - 4rx \operatorname{sen}^2 \alpha \\ I_1 &= \int_0^\pi BR_1 d\theta = 2B(RX1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{Ap. 1.19})$$

siendo:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{4rx}{(RX1)^2} \\ k_1^2 &= \frac{4rx}{z_1^2 + (r+x)^2} = \frac{4\frac{r}{x}}{(\frac{z_1}{x})^2 + (1 + \frac{r}{x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{r}{x} = 0 \quad k_1 = 0 \quad I_1 = \pi B(RX1)$$

$$\text{Si } \frac{r}{x} = 1 \quad k_1^2 = \frac{4}{(\frac{z_1}{x})^2 + 4} \leq 1$$

$$\text{Si, además, } z_1 = 0 \text{ será } k_1 = 1 \text{ e } I_1 = 2B(RX1) = 4Bx$$

$$\text{Si } \frac{r}{x} \leq 1 \quad R_1 \leq 1, \quad \text{pues:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(k_1^2)}{d(\frac{r}{x})} &= \frac{4[(\frac{z_1}{x})^2 + (1 + \frac{r}{x})^2] - 8(1 + \frac{r}{x})\frac{r}{x}}{[(\frac{z_1}{x})^2 + (1 + \frac{r}{x})^2]^2} \\ \frac{d(k_1^2)}{d(\frac{r}{x})} &= \frac{4}{[(\frac{z_1}{x})^2 + (1 + \frac{r}{x})^2]^2} [(\frac{z_1}{x})^2 + (1 + \frac{r}{x})(1 - \frac{r}{x})] \end{aligned}$$

$\frac{d(k_1^2)}{d(\frac{r}{x})} \geq 0$ , luego la función es creciente entre  $\frac{r}{x} = 0$  y  $\frac{r}{x} = 1$ . Así pues:

$$0 \leq k_1 \leq 1$$

La integral de la ecuación (Ap. 1.19) es, pues, una integral elíptica de segunda especie completa:

$$I_1 = 2B(RX1)E(k_1) \quad (\text{Ap. 1.20})$$

$$E(k_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (\text{Ap. 1.21})$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1 \\
 u_n &= u_{n-1} \frac{4n^2 - 8n + 3}{4n^2} k_1^2 \quad n \geq 1 \quad (Ap. 1.22)
 \end{aligned}$$

Si tomamos:

$$E(k_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^n u_n \quad (Ap. 1.23)$$

el error absoluto de la serie es:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sum_{n=n+1}^{\infty} u_n < 0 \quad n \geq 0 \\
 \frac{u_n}{u_{n-1}} &= \frac{4n^2 - 8n + 3}{4n^2} k_1^2 < k_1^2 \quad n \geq 1 \\
 |\varepsilon| &< \frac{|u_{n+1}|}{1 - k_1^2} \quad (Ap. 1.24)
 \end{aligned}$$

$$I_2 = z_1^2 \int_0^\pi \frac{ar'}{b^2 R_1} d\theta$$

Si  $z_1 = 0$        $I_2 = 0$

Si  $r = 0$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -x^2 z_1^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{(z_1^2 + x^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \sqrt{z_1^2 + x^2}} d\theta \\
 I_2 &= -\frac{2x^2 z_1^2}{R_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{(R_1)^2 - x^2 \cos^2 \theta} d\theta \\
 I_2 &= -\frac{2x z_1^2}{R_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\frac{(R_1)^2}{\cos^2 \theta} - x^2 \cos^2 \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

Hacemos:

$$\begin{aligned}
 t &= \operatorname{tg} \theta \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2} \\
 dt &= \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\
 I_2 &= -\frac{2x^2 z_1^2}{R_1} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{(R_1)^2 + (R_1)^2 t^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{2x^2 z_1^2}{R1} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{z_1^2 + (R1)^2 t^2} \\
I_2 &= -\frac{2x^2}{R1} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)[1 + \frac{(R1)^2}{z_1^2} t^2]} \\
I_2 &= -\frac{2x^2}{R1} \left[ -\frac{z_1^2}{x^2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} + \frac{z_1(R1)}{x^2} \int_0^\infty \frac{(R1/z_1)dt}{1 + [\frac{(R1)t}{z_1}]^2} \right] \\
I_2 &= \frac{2z_1^2}{(R1)} \left[ \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right|_0^\infty - \frac{(R1)}{z_1} \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{(R1)t}{|z_1|} \right] \right|_0^\infty \right] \\
I_2 &= \frac{2z_1^2}{(R1)} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{R1}{|z_1|} \right) \right] = \pi z_1^2 \left( \frac{1}{R1} - \frac{1}{|z_1|} \right) \\
I_3 &= -z_1^2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{R1} = -2z_1^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{(RX1)^2 - 4rx \operatorname{sen}^2 \alpha}} \\
I_3 &= -\frac{2z_1^2}{(RX1)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} \\
I_3 &= -\frac{2z_1^2}{(RX1)} K(k_1) \tag{Ap. 1.25}
\end{aligned}$$

siendo  $K(k_1)$  la integral elíptica de primera especie completa.

$$K(k_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{Ap. 1.26}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_n &= u_{n-1} \left( \frac{2n-1}{2n} k \right)^2 \quad n \geq 1 \tag{Ap. 1.27}
\end{aligned}$$

Si tomamos:

$$K(k_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^n u_n \tag{Ap. 1.28}$$

Error absoluto:

$$\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{1 - k_1^2} \tag{Ap. 1.29}$$

$$\text{Si } \frac{r}{x} = 0 \quad k_1 = 0 \quad K(k_1) = \frac{\pi}{2} \tag{Ap. 1.30}$$

$$\text{Si } z_1 = 0 \quad \text{será} \quad I_3 = 0 \tag{Ap. 1.31}$$



$$I_4 = Bx \int_0^\pi \cos \theta \ln(r' + R_1) d\theta$$

Si  $z_1 = 0$  ( $z = L$ ), integrando por partes:

$$I_4 = Bx \left[ \left| \sin \theta \ln(r - x \cos \theta + \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}) \right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r - x \cos \theta + \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} \left( x \sin \theta + \frac{rx \sin \theta}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} \right) d\theta \right]$$

$$I_4 = Bx[I_a + I_b]$$

$$I_a = 0 \quad \text{excepto si:}$$

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad r \leq x$$

En este caso  $I_a$  es indeterminado.

$$\begin{aligned} I_b &= -x \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta (r - \cos \theta) - \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}}{r^2 - 2rx \cos \theta + x^2 \cos^2 \theta - r^2 - x^2 + 2rx \cos \theta} \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} \right) d\theta \\ I_b &= \frac{1}{x} \int_0^\pi (r - x \cos \theta - \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}) \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} \right) d\theta \\ I_b &= \frac{1}{x} \int_0^\pi \left( r - x \cos \theta + \frac{(r - x \cos \theta)r}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}} - \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta} - r \right) d\theta \\ I_b &= \frac{1}{x} \left[ \left| -x \sin \theta \right|_0^\pi + 2 \int_0^{\pi/2} \left( r \frac{r + x - 2x \sin^2 \alpha}{(r + x)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - (r + x)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \right) d\alpha \right] \end{aligned}$$

siendo:

$$k^2 = \frac{4rx}{(r+x)^2} \leq 1$$

$$I_b = \frac{1}{x} \left[ 2rK(k) + (r+x) \int_0^{\pi/2} \frac{k^2 \sin^2 \alpha - 1 + 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha - 2(r+x)E(k) \right]$$

$$I_b = \frac{1}{x} [2rK(k) + (r+x)E(k) - (r+x)K(k) - 2(r+x)E(k)]$$

$$I_b = \frac{1}{x} [(r-x)K(k) - (r+x)E(k)]$$

Vamos a examinar, ahora, los puntos singulares.

Si  $r \leq x$ , cuando  $\theta \rightarrow 0$ , aplicando la regla de l'Hôpital:

$$I_a = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r - x \cos \theta - \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}}{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} x \sin \theta} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta}}\right) d\theta$$

Si  $r < x$   $I_a = 0$

Si  $r = x$

$$I_a = \lim_{\theta \rightarrow 0} x \frac{2\sin^2 \theta/2 - 2\sin \theta/2}{-\cos \theta} x 2\sin \theta/2 \cos \theta/2 \left(1 + \frac{1}{2\sin \theta/2}\right) = 0$$

O sea que en cualquier caso  $I_a = 0$ .

Si  $r = x$  el primer término de  $I_b$  es indeterminado.

$$I_4 = Bx \int_0^\pi (\sin \theta/2 - 2 \sin \theta/2) d\theta = -2Bx \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

En definitiva:

Si  $z_1 = 0$  ( $z = L$ ):

$$I_4 = B[(r-x)K(k) - (r+x)E(k)] \quad (\text{Ap. 1.32})$$

Si, además,  $r = x$ :

$$I_4 = -2Bx$$

Si  $z_1 = 0$  y  $r = 0$  será  $k = 0$ :

$$I_4 = B\left(-\frac{x\pi}{2} - x\frac{\pi}{2}\right) = -B\pi x$$

Si llamamos:

$$(RX2)^2 = z_2^2 + (r+x)^2$$

$$k_2^2 = \frac{4rx}{(RX2)^2}$$

$$I_5 = 2H(RX2)E(k_2)$$

Son válidas (Ap. 1.22), (Ap. 1.23) y (Ap. 1.24) sin más que sustituir  $k$  por  $k_2$ . Igualmente:

$$\text{Si } r = 0 \quad k_2 = 0 \quad \text{e} \quad I_5 = \pi H(RX2)$$

$$I_6 = 2M \int_0^\pi \frac{ar'}{c^4 R_2} d\theta$$

Si  $z = 0$   $M = 0$  e  $I_6 = 0$

$$I_8 = -K \int_0^\pi \frac{d\theta}{R_2}$$

$$I_8 = -2K \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{(RX2)^2 - 4rx \text{ sen}^2 \alpha}} =$$

$$= -\frac{2K}{(RX2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k_2^2 \text{ sen}^2 \alpha}} \quad (\text{Ap. 1.33})$$

$$I_8 = -\frac{2K}{(RX2)} K(k_2) \quad (\text{Ap. 1.34})$$

Son válidos (Ap. 1.26), (Ap. 1.27) (Ap. 1.28) y (Ap. 1.29), sustituyendo  $k_1$  por  $k_2$ .

Si  $r = 0$      $k_2 = 0$      $K(k_2) = \frac{\pi}{2}$

$$I_9 = M \int_0^\pi \frac{ar'}{c^2 R_2^3} d\theta$$

Si  $z = 0$      $M = 0$     e     $I_9 = 0$

$$I_{10} = -\frac{2M}{(RX2)^3} \int_0^{\pi/2} (1 - k_2^2 \text{ sen}^2 \alpha)^{-3/2} d\alpha$$

$$I_{10} = -\frac{2M}{(RX2)^3} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-3/2}{n} k_2^{2n} \text{ sen}^{2n} \alpha d\alpha$$

$$I_{10} = -\frac{2M}{(RX2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-3/2}{n} k_2^{2n} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{10} = \frac{\pi M}{(RX2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k_2^{2n} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{3}{2}-n+1)}{n!}$$

$$I_{10} = -\frac{\pi M}{(RX2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

siendo:

$$u_0 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} \frac{4n^2 - 1}{4n^2} k_2^2 \quad n \geq 1$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} k_2^2 < k_2^2$$

Si tomamos:

$$I_{10} = -\frac{\pi M}{(RX2)^3} \sum_{n=0}^n u_n \quad (\text{Ap. 1.35})$$

Error absoluto:

$$|\varepsilon| < \frac{|u_{n+1}|}{1 - k_2^2} \quad (\text{Ap. 1.36})$$

Si  $z = 0$   $I_{10} = 0$

Se puede tomar, en todos los casos, un error relativo de 0,001.

Al hallar las diferencias correspondientes a la ecuación Ap. 1.14, el minuendo y el sustraendo estarán aproximados en el mismo sentido, siempre que se utilice en las series Ap. 1.23, Ap. 1.28 y Ap. 1.35 el mismo valor de  $n$ . Por ello, el error absoluto de la diferencia será inferior al mayor de los valores absolutos de los errores de minuendo y sustraendo, deducidos a partir de Ap. 1.24, Ap. 1.29 y Ap. 1.36.

## APENDICE N° 2: CALCULO NUMERICO DE UNA PLACA CIRCULAR RIGIDA CARGADA

Para hallar el asiento producido por una corona circular horizontal uniformemente cargada, en un punto de su plano, hacemos, en la expresión (3):

$$\begin{aligned} z &= L \\ z_1 &= 0 \\ a &= x \cos \theta \\ r' &= r - a \\ R_1 &= \sqrt{r^2 - 2ar + x^2} \\ z_2 &= 2L \\ R_2 &= \sqrt{4L^2 + R_1^2} \\ c^2 &= 4L^2 + x^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$K$  y  $M$  toman los valores (11) y (12)

$$\begin{aligned} I_2(r, \theta) &= BR_1 + Ba \ln(r' + R_1) + HR_2 + \frac{16L^4 ar'}{c^4 R_2} + \frac{GL^2 ar'}{c^2 R_2} - \\ &\quad - \frac{GL^2}{R_2} + \frac{8L^4 ar'}{c^2 R_2^3} - \frac{8L^4}{R_2^3} + Ha \ln(r' + R_2) \end{aligned}$$

Para ponerlo en forma adimensional hacemos:

$$\rho = \frac{r}{R} \quad \rho_a = \frac{R_1}{R} = \sqrt{\rho^2 - 2\eta\rho \cos \theta + \eta^2} \quad \rho_b = \frac{R_2}{R} = \sqrt{4\lambda^2 + \rho_a^2}$$

$$\eta = \frac{x}{R} \quad \beta^2 = \frac{c^2}{R^2} = 4\lambda^2 + \eta^2 \sin^2 \theta \quad \rho' = \frac{r'}{R} = \rho - \eta \cos \theta$$

$$\lambda = \frac{L}{R}$$

$$I_2(\rho, \eta, \theta) = B\rho_a + B\eta \cos \theta \ln(\rho' + \rho_1) + H\rho_b + \frac{16\lambda^4 \eta \cos \theta \rho'}{\beta^4 \rho_b} +$$

$$+ \frac{G\lambda^2 \eta \cos \theta \rho'}{\beta^2 \rho_b} - \frac{G\lambda^2}{\rho_b} + \frac{8\lambda^4 \eta \cos \theta \rho'}{\beta^2 \rho_b^3} - \frac{8\lambda^4}{\rho_b^3} +$$

$$+ H \eta \cos \theta \ln(\rho' + \rho_b) \quad (\text{Ap. 2.1})$$

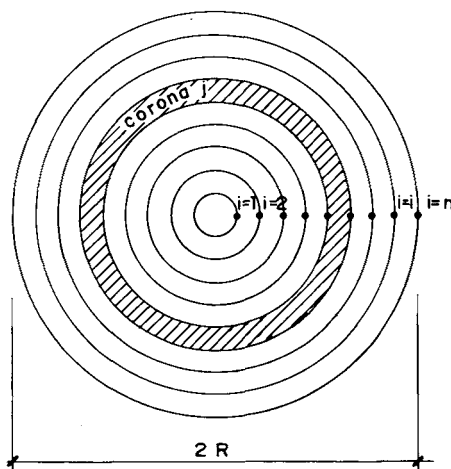


Figura Ap. 2.1. División de la placa circular rígida en coronas circulares de igual  $r$ .

Dividimos la placa en  $n$  coronas circulares, correspondientes a incrementos iguales de radio. Suponemos cada corona uniformemente cargada con una presión  $p_j$  (Figura Ap. 2.1). Suponemos que en la placa existen  $n$  circunferencias nodales (nodos), correspondientes a  $n$  valores de  $i$  que situamos en el exterior de cada corona.

El asiento producido por la corona  $j$  en el nodo  $i$  se obtendrá a partir de las ecuaciones 8 y 9:

$$I'(\rho_j, \eta_i, \theta) = I_2(\rho_j, \eta_i, \theta) - I_2(\rho_{j-1}, \eta_i, \theta) \quad (\text{Ap. 2.2})$$

$$\rho_j = \frac{j}{n} \quad (\text{Ap. 2.3})$$

$$\eta_i = \frac{i}{n}$$

Llamamos:

$\zeta = \frac{s}{R}$  asiento unitario de la placa

$$\pi_j = \frac{p_j}{E} \quad (\text{Ap. 2.4})$$

$$\Delta\zeta_i = 2C\pi_j \int_0^\pi I'(\rho_j, \eta_i, \theta) d\theta$$

Hacemos:

$$I_{ij} = 2C \int_0^\pi I'(\rho_j, \eta_i, \theta) d\theta \quad (\text{Ap. 2.5})$$

El asiento total del nodo  $i$  será:

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^n I_{ij}\pi_j = \zeta \quad (\text{Ap. 2.6})$$

Si  $Q$  es la fuerza total vertical que actúa sobre la placa, la ecuación de equilibrio nos da:

$$\pi R^2 \sum_{j=1}^n (\rho_j^2 - \rho_{j-1}^2) \pi_j = \frac{Q}{E} \quad (\text{Ap. 2.7})$$

Sustituimos (Ap. 2.3) en (Ap. 2.7), y hacemos:

$$\chi = \frac{Q}{\pi R^2 E} \quad (\text{Ap. 2.8})$$

Con ello se obtiene:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{2j-1}}{n} \pi_j = n \chi \quad (\text{Ap. 2.9})$$

Las  $n$  ecuaciones (Ap. 2.6) y la ecuación (Ap. 2.9) nos dan un sistema de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas que, expresadas de forma matricial, nos da:

$$[I_{ij}]_{n+1} \{\pi_j\}_{n+1} = n \{x_i\}_{n+1} \quad (\text{Ap. 2.10})$$

$I_{ij}$  toma el valor (Ap. 2.5) para  $i \leq n$   $j \leq n$

$$\begin{aligned} I_{n+1,j} &= \frac{2j-1}{n} & 1 \leq j \leq n \\ I_{i,n+1} &= -1 & 1 \leq i \leq n \\ I_{n+1,n+1} &= 0 \end{aligned}$$

$\pi_j$  toma el valor (Ap. 2.4) para  $j \leq n$

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= \zeta \\ \chi_i &= 0 & 1 \leq i \leq n \\ \chi_i &= \chi & i = n+1 \end{aligned}$$

La solución de (Ap. 2.10) es:

$$\{\pi_j\}_{n+1} = \frac{n\{\chi_i\}_{n+1}}{[I_{ij}]_{n+1}}$$

Que nos da la distribución de presiones y el asiento de la placa, ambos en forma adimensional, en función de  $\lambda$  y  $\nu$ .

Concretamente el asiento de la placa será:

$$\zeta = f(\lambda, \nu) \tag{Ap. 2.12}$$

### REFERENCIAS

1. J.B. Burland y R.W. Cooke, "The design of bored piles in stiff clays", *Ground Engineering*, Vol. 7, No. 4, pp. 28-30, 33-35, (1974).
2. J.L. Justo, "Asiento producido por una tensión cortante uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica vertical", *Boletín de la Sociedad Española de Mecánica del Suelo*, Vol. 106, pp. 23-35, *Ingeniería Civil*, Vol. 84, pp. 103-117, (1991).
3. R.D. Mindlin, "Force at point in the interior of a semi-infinite solid", *Physics*, 7:195, (1936).
4. H.G. Poulos y E.H. Davis, "Pile Foundation Analysis and Design", Wiley (1980).
5. D. Puif Adam, "Cálculo Integral", Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam, Madrid (1966).

