SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 15. N° 1

PROBLEMA N° 37

Sea $U = U(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_n)$ un estimador UMV.

Supongamos que $V = U(X_1 \cdots X_j \cdots X_i \cdots X_n)$, obtenido permutando X_i por X_j, es un estimador distinto de U.

Entonces, $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(V)$ y $\mathrm{var}(U) = \mathrm{var}(V)$ debido a que $X_1 \cdots X_n$ están idénticamente distribuidas, y son independientes.

Definamos $W = \dfrac{U+V}{2}$. Resulta: $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(V)$ por tanto W es un estimador también insesgado y

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(W) &= \frac{1}{4}\,\mathrm{var}(U) + \frac{1}{4}\,\mathrm{var}(V) + \frac{1}{2}\,\mathrm{cov}(V,V) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{var}(U) + \frac{1}{2}\,\mathrm{cov}(U,V) \end{aligned}$$

Además

$$\mathrm{cov}(U,V) \leq \sqrt{\mathrm{var}(U)}\,\sqrt{\mathrm{var}(V)} = \mathrm{var}(U)$$

Si se verifica la desigualdad estricta entonces

$$\mathrm{var}(W) < \mathrm{var}(U)$$

lo cual es absurdo ya que U es un estimador UMV. Por tanto debe verificarse la igualdad $\mathrm{cov}(U,V) = \mathrm{var}(U)$, que se verifica si y solo si $U = \alpha V + \beta$ con probabilidad 1 y con $\alpha > 0$.

Pero:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \alpha\mathrm{E}(V) + \beta = \alpha\mathrm{E}(U) + \beta \\ \mathrm{var}(U) &= \alpha^2\mathrm{var}(V) = \alpha^2\mathrm{var}(U) \end{aligned}$$

por tanto $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, obteniéndose $U = V$, con probabilidad 1.

J. M. Oller
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 38

1) Puesto que

$$P(X < x) = P(X > 1/x)$$

la función de distribución de X verifica

$$F(x) = 1 - F(1/x)$$

Derivando y suponiendo que la función de densidad $f(x)$ es continua en x, tenemos que

$$f(x) = \left(-1/x^2\right)\left(-f(1/x)\right)$$

es decir,

$$x^2 f(x) = f(1/x) \qquad x > 0$$

2) $f(1/x) = \displaystyle\int_R y\varphi\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)\varphi(y)\,dy$

Introduciendo el cambio $u = \dfrac{1}{x}\,y$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(1/x) &= \int_R ux\varphi(u)\varphi(x\,u)\,x\,du = \\ &= x^2\int_R u\varphi(u)\varphi(x\,u)\,du = x^2\,f(x) \end{aligned}$$

luego X y $1/X$ siguen la misma distribución.

3) Como $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(1/X) = m$, $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(1/X) = \sigma^2$ tenemos que el coeficiente de correlación es

$$\rho(X, 1/X) = (1 - m^2)/\sigma^2$$

luego se cumple la desigualdad $|1 - m^2| \leq \sigma^2$.

C. M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 39

Siguin:

$i \in \{1,2\}$	índex de línia
T_i	temps entre autobusos, constant
λ_i	taxes d'arribada dels usuaris
n_i	nombres d'usuaris a les parades

L'esperança matemàtica del temps d'espera, sense fer ús dels valors n_i, és:

$$\frac{1}{2}\min_i T_i$$

Prescindirem ara del subíndex i per tal d'alleugerir la notació.

Sigui t el temps transcorregut des de l'arribada del darrer autobús:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \\ p(n|t) &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ p(n) &= \int_0^T p(n|t)\cdot\frac{1}{T}\,dt = \\ &= \frac{\lambda^n}{n!T}\int_0^T t^n\,e^{-\lambda t}\,dt \end{aligned}$$

Si fem $\int_0^T t^n\,e^{-\lambda t}\,dt = I_n$ i integrem per parts, tenim:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{\lambda}I_{n-1} - \frac{T^n}{\lambda}e^{-\lambda T} \\ \text{amb}\quad I_0 &= \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda T}\right) \end{aligned}$$

i, fent $A_n = \frac{I_n}{T^{n+1}}$:

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{(\lambda T)^n}{n!}A_n \\ A_n &= \frac{1}{\lambda T}\left(nA_{n-1} - e^{-\lambda T}\right) \\ A_0 &= \frac{1}{\lambda T}\left(1-e^{-\lambda T}\right) \end{aligned}$$

Aleshores, tenint en compte que

$$f(t|n) = \frac{p(n|t) \cdot f(t)}{p(n)}$$

resulta que:

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \int_0^T t f(t/n)\, dt = \\ &= T \frac{A_{n+1}}{A_n} \end{aligned}$$

I, si designem per $\tau(n)$ l'esperança matemàtica del temps d'espera:

$$\tau(n) = T - E_n(t) = T \left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$$

Per conseqüent, l'esperança matemàtica del temps d'espera fent ús de la regla òptima és:

$$\tau_b^* = \sum_{n_1, n_2} p_1(n_1)\, p_2(n_2) \min\left[\tau_1(n_1), \tau_2(n_2)\right]$$

Si l'usuari utilitza les estimacions:

$$\hat{\tau}_i(n_i) = T_i - \frac{n_i}{\lambda_i}$$

l'esperança matemàtica serà:

$$\begin{aligned} \tau_a^* &= \sum_{n_1, n_2} p_1(n_1) p_2(n_2) \tau'(n_1, n_2) \\ \text{amb} \quad \tau'(n_1, n_2) &= \tau_i(n_i) \quad \text{amb} \quad i \quad \text{tal que :} \\ \hat{\tau}_i(n_i) &= \min_{\mu=1,2} \hat{\tau}_\mu(n_\mu) \end{aligned}$$

Els càlculs són fàcilment programables.
Per a $T = 5, 10, 15$ i $\lambda = 0.5, 1, 1.5, 2$, els valors de τ_a^* i τ_b^* no són gaire diferents (la diferència màxima és d'un 5.3% per a $T_1 = 15, T_2 = 5, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 2$). Per a $T_i = 15, \lambda_i = 2$, $\tau_a^* = \tau_b^* = 4.61$ (una reducció del 38.5% en relació a $15/2 = 7.5$).

Alvaro J. Morales de Cano
Albert Corominas
Univ. Politècnica de Catalunya