SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 12. N° 1

PROBLEMA N° 21

Dada la naturaleza de los enunciados, no se incluye aquí resultados numéricos sino únicamente un esbozo de cómo enfocar la respuesta a las cuestiones planteadas.

Si se ordena las piezas por orden creciente del número total de músicos se puede obtener una solución tomando las K primeras o suprimiendo las $m - K$ últimas. Estos dos algoritmos "greedy", que conducen al mismo resultado, son bastante malos: ni tienen en cuenta la distribución de los músicos por especialidades, en cada pieza, ni aprovechan la información de que el programa de la tournée consta exactamente de K piezas, ni tienen en cuenta, para la decisión correspondiente a una iteración, las tomadas en iteraciones anteriores.

Si se procede a ordenar las piezas, para cada especialidad, por orden creciente de músicos, la pieza K-ésima en cada una de estas listas da una cota inferior del número de músicos de la especialidad correspondiente que deberán formar parte de la expedición; de ahí se obtiene inmediatamente una cota inferior del óptimo. De la tabla inicial de músicos por pieza y especialidad se puede obtener otra, la de músicos por pieza y especialidad *por encima del mínimo indispensable*. La aplicación de los algoritmos "greedy" del párrafo anterior a esta tabla proporcionará en general mejores resultados que los obtenidos a partir de la tabla inicial.

Como quiera que, en cada iteración del algoritmo, se incorpora una pieza al programa de la tournée, los mínimos de cada especialidad pueden aumentar (si el número de músicos de la pieza elegida para la especialidad es superior al mínimo anterior); se puede, en cada iteración, obtener una nueva tabla y un nuevo orden para las piezas aún no tomadas. El algoritmo "greedy" así esbozado tiene en cuenta en cada iteración, por consiguiente, las decisiones tomadas en las anteriores y actúa, por así decirlo, de un modo más inteligente.

Todos estos algoritmos, y las variantes que cabe obtener combinando características de los mismos, son muy sencillos y es muy fácil formalizarlos. A partir de ahí, cuesta muy poco contar el número de operaciones elementales necesarias para ejecutar el algoritmo en el peor de los casos (realmente dicho número, para este problema y estos algoritmos, depende poco del ejemplar -"instance"- de que se trate).

La solución o soluciones óptimas se pueden hallar por medio de algoritmos de branch-and-bound (separación y acotación, exploración dirigida). Se ha hecho ya referencia al cálculo de la cota; la idea general del procedimiento de separación es obvia: separar las soluciones que contienen una pieza de aquéllas que no la contienen (se ha de concretar la elección de la pieza que separa las soluciones: puede haber un orden establecido a priori -por ejemplo: de menor a mayor número total de músicos- o se puede determinar en cada vértice de la arborescencia; la analogía con los algoritmos "greedy" es patente). El problema se presta a ensayar distintas variantes del branch-and-bound (por ejemplo separar con la "mejor" pieza en cada vértice o con la "peor"), aprovechando en la aplicación, desde luego, el valor de las soluciones obtenidas con los algoritmos heurísticos.

Para plantear el problema de los músicos como un programa lineal, se define una variable binaria x_i para cada pieza (valor 1 si la pieza se incluye en el programa; 0 si no) y entonces se puede escribir:

$$[MIN]z = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$y_j \geq a_{ij} x_i \qquad i = 1, 2, ..., m \quad j = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = K$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

(y no es preciso imponer el carácter entero y no negativo de las y_j, que está asegurado por el hecho de ser enteros los elementos de la matriz A).

A. Corominas

PROBLEMA N° 22

Aunque desde luego cabría una discusión sobre algoritmos heurísticos y de branch-and-bound, este comentario se centra en el planteamiento como PL.

Se supone que las duraciones son proporcionales a la longitud de cinta necesaria para la grabación, por lo cual se utilizan indistintamente ambos términos.

Una posibilidad es definir dos variables binarias para cada pieza (primera variable igual a 1 si la pieza se incluyen en la primera pista, si no y análogamente en lo que respecta a la segunda variable) pero este enfoque es muy malo ($2n$ variables y $2n$ restricciones sólo para expresar la condición de que cada pieza tiene que incluirse en una pista y sólo una).

Pero basta con una sola variable binaria por pieza: el valor 1 indica que se incluye en una cierta pista, y 0 que se incluye en la otra.

Se trata de minimizar la longitud de la cinta y ésta es igual a la de la pista más larga, por lo cual se puede escribir:

$$[MIN]\, z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{1} d_i\, x_i$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{n} d_i\, (1 - X_i)$$

Pero obsérvese que la suma de longitudes ocupadas de las dos pistas es igual a la suma de las longitudes correspondientes a las piezas D, por lo cual la pista más larga tiene una longitud igual o superior a la mitad de dicha suma. Por consiguiente:

$$\left.\begin{aligned} [MIN]\, z = \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i & \\ \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i \geq \frac{D}{2} & \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Lo cual es equivalente a maximizar la longitud de la pista más corta, con lo que resulta un problema de la mochila con iguales coeficientes en la función objetivo que en la restricción, es decir, un "subset sum problem".

$$\left.\begin{aligned} [MAX]\, z = \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i & \\ \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i \leq \frac{D}{2} & \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

se llega también a un problema con esta estructura haciendo un cambio de las variables x_i por sus complementarias en (1).

A. Corominas

PROBLEMA N^o 23

Cal recordar primer (veura Problema 15) que, sota la hipòtesis de que Z té moments de quart-ordere finits, el vector de variàncies i covariàncies mostral $s \equiv (s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})'$ té distribució assimptòtica normal, amb la següent matriu de variàncies i covariàncies

$$(1) \qquad \Gamma \equiv n^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{xxxx} - \sigma_{xx}\sigma_{xx} & \text{simètrica} & \text{simètrica} \\ \sigma_{xxxy} - \sigma_{xx}\sigma_{xy} & \sigma_{xxyy} - \sigma_{xy}\sigma_{xy} & \text{simètrica} \\ \sigma_{xxyy} - \sigma_{xx}\sigma_{yy} & \sigma_{xyyy} - \sigma_{xy}\sigma_{yy} & \sigma_{yyyy} - \sigma_{yy}\sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Per tant, com que $b \equiv s_{xx}^{-1} s_{xy}$ es funció de s_{xx}, s_{xy} y s_{yy}, amb derivades parcials

$\partial b / \partial s_{xx} = -s_{xx}^{-2} s_{xy}$,

$\partial b / \partial s_{xy} = s_{xx}^{-1}$

i

$\partial b / \partial s_{yy} = 0$,

aplicant l'anomenat Mètode-δ (Rao 1973, p. 388) obtenim que b tindrà distribució límit normal amb una variància aj simptòtica (que denotarem per "avar") donada per

$$\text{avar}(b) = h'\Gamma h, \tag{2}$$

on h és el vector

$$h \equiv \left[-\sigma_{xx}^{-2}\sigma_{xy} \, , \, \sigma_{xx}^{-1}, 0\right]',$$

σ_{xx} i σ_{xy} son, respectivamente, la variància i covariància poblacionals i Γ és la matriu definida a (1). Desenvolupant (2) obtenim

$$\begin{aligned} \text{avar}(b) = n^{-1} [\sigma_{xx}^{-2}\sigma_{xy}(\sigma_{xxxx})\sigma_{xx}^{-2}\sigma_{xy} - 2\,\sigma_{xx}^{-2}\sigma_{xy}(\sigma_{xxxy})\sigma_{xx}^{-1} + \\ \sigma_{xx}^{-1}\,(\sigma_{xxyy})\,\sigma_{xx}^{-1}], \end{aligned} \tag{3}$$

que és l'expressió de la variància assimptòtica de b pel cas general en que Z té moments d'ordre-quart finits (es a dir, el cas (i) de l'enunciat del problema)

Abans de considerar el cas de que Z té distribució normal, recordarem el següent resultat típic de teoria de la distribució normal multivariant (consultar, per exemple, Anderson 1984 p. 49): si x, y, u i v son variables aleatòries amb distribució conjunta normal multivariant, aleshores

$$\begin{aligned} \sigma_{xyuv} \equiv E(x-\mu_x)(y-\mu_y)(u-\mu_u)(v-\mu_v) = \\ = \sigma_{xy}\sigma_{uv} + \sigma_{xu}\sigma_{yv} + \sigma_{xv}\sigma_{yu} \end{aligned} \tag{4}$$

Per tant, sota la hipòtesi de que Z té distribució normal, tindrem

$\sigma_{xxxx} = 3\sigma_{xx}^2$,

$\sigma_{xxxy} = 3\sigma_{xx}\sigma_{xy}$

i

$\sigma_{xxyy} = \quad \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xy}$;

és a dir, els moments d'ordre-quart que apareixen a (3) són funció dels moments d'ordre-dos. Per tant, quan Z té distribució normal, la variància assimptòtica de b donada per (3) serà

$$\operatorname{avar}(b) = n^{-1}\left[\sigma_{yy}\sigma_{xx}^{-1} - \left(\sigma_{xy}\sigma_{xx}^{-1}\right)^2\right]$$

Nota que l'expressió de l'estimació de variància, avar(b), pel cas de normalitat de Z, serà

$$\operatorname{avar}(b) \;=\; n^{-1}\left(s_{yy}s_{xx}^{-1} - \left(s_{xy}s_{xx}^{-1}\right)^2\right).$$

Aquesta estimació de variància coincideix amb l'estimador habitual de la variància de b quan aquest estadistic es considerat l'estimador de mínims quadrats ordinaris del coeficient de la regressió de Y sobre X (la coincidencia es exacta llevat d'un factor funció de n que tendeix a 1 quan $n \longrightarrow \infty$)

En el cas (i), en que Z no té necessariament distribució normal (en aquest cas parlarem de "distribució lliure"), l'estimació de avar(b) utilitzarà els moments mostrals de Z d'ordre-quart. De fet, hom pot estimar l'expressió que apareix a (2) substituint h per $[s_{xx}^{-2}s_{xy}\,,\, s_{xx}^{-1}, 0]'$ i Γ per la matriu $n^{-1}H$, on H fou definida a l'Observació-2 de la Solució al Problema 15. (En aquest punt, per guarantir la consistència d'aquest estimador de variància, necessitem que Z tingui moments d'ordre vuitè finits; recorden la Nota 2 al Problema 15).

Nota: El lector interessat amb extensions d'aquest tema a un contexte general de l'anàlisi multivariant pot consultar Wesselman (1987).

Albert Satorra i Brucart
Universitat de Barcelona

REFERÉNCIES

[1] **Anderson, T.W.**, (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysisis" (Second Edit) John Wiley. New York.

[2] **Rao, C.R**, (1973) "Linear Statistical Inference and Its Applications" (Second Edit). John Wiley. New York.

[3] **Wesselman, A.M.**, (1987) "The Population-Sample Decompositions Method: A Distribution-Free Estimation Technique for Minimum Distance Parameters". Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.