

PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N^o 15

Sigui X un vector aleatori, amb vector de mitjanes

$$\mu_X = EX,$$

matriu de variàncies i covariàncies

$$\Sigma_{XX} = E(X - \mu_X)(X - \mu_X)'$$

i matriu de moments de quart ordre

$$\Sigma_{XXXX} = E[((X - \mu_X) \otimes (X - \mu_X))((X - \mu_X) \otimes (X - \mu_X))']$$

finits. Considerem el vector de mitjanes mostrals

$$\bar{X} = n^{-1} \sum X_i$$

i matriu de variàncies i covariàncies mostral

$$S_{XX} = (n - 1)^{-1} \sum (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

corresponen a una mostra X_1, X_2, \dots, X_n d'observacions independents de X .
Demostrar

$$n^{1/2} (\text{vec } S_{XX} - \text{vec } \Sigma_{XX}) \rightarrow N(0, \Sigma_{XXXX}),$$

en distribució. (Utilitzar el teorema central del límit.)

Albert Satorra

PROBLEMA N^o 16

Sean X_1, \dots, X_n las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n , todas ellas estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas según una distribución de Poisson de parámetro λ , $P(\lambda)$. Hallar, aplicando los teoremas de Rao-Blackwell y Lehmann-Scheffé, un estimador insesgado y de varianza mínima de la probabilidad de que X tome el valor cero, $\psi(\lambda) = e^{-\lambda}$. ¿Alcanza dicho estimador la cota de Cramer-Rao? ¿Podríamos construir un estimador, no insesgado, con error cuadrático medio menor?

C.M. Cuadras
Josep M. Oller

PROBLEMA N° 17

Sean X_1, \dots, X_n las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n , todas ellas estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas según una uniforme en el intervalo (α, β) , $\alpha < \beta$. Teniendo en cuenta que \bar{X}_n , la media muestral, es un estimador insesgado de la media poblacional $\frac{\alpha+\beta}{2}$, hallar otro estimador de la misma más eficiente que el citado, considerando el error cuadrático medio como medida de eficiencia.

Jordi Ocaña