SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 10. N° 4

PROBLEMA Nº 9

Sea

$$Z_i = \frac{X_i}{X_1+\ldots+X_n} \qquad i = 1,\ldots,n$$

Entonces $Z_1,\ldots,Z_n$ son variables aleatorias positivas e igualmente distributivas. Sea $E(Z_i) = a$. Se verifica:

$$Z_1 + \ldots + Z_n = 1$$

$$E(Z_1) + \ldots + E(Z_n) = 1$$

luego $a = 1/n$. Finalmente, como

$$Y_i = Z_1 + \ldots + Z_i$$

resulta que $E(Y_i) = i/n$.

C.M.Cuadras

PROBLEMA Nº 10

Sean $x_{11},\ldots,x_{1n_1}$ y $x_{21},\ldots,x_{2n_2}$ las muestras correspondientes a cada una de las dos poblaciones. La función de densidad conjunta asociada a ambas poblaciones viene dada por:

$$p(x|\lambda_1,\lambda_2) = e^{-(n_1\lambda_1+n_2\lambda_2)}\lambda_1^{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}\lambda_2^{\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}} \Big/ \{\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n_i} x_{ij}!\}$$

Por tanto, la matriz de información de Fisher, será:

$$g_{11} = -E\left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial\lambda_1^2}\right) = \frac{n_1}{\lambda_1} \qquad g_{22} = -E\left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial\lambda_2^2}\right) = \frac{n_2}{\lambda_2}$$

$$g_{12} = g_{21} = -E\left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right) = 0$$

Dicha matriz permite definir en la variedad paramétrica $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$ un tensor covariante, de segundo orden, simétrico y definido positivo, que podemos tomar como el tensor métrico de Ω, dotándola de estructura de variedad riemanniana. El siguiente paso consiste en calcular la distancia riemanniana entre dos puntos de la variedad Ω. Para ello resulta conveniente introducir el cambio de parámetros $(\lambda_1, \lambda_2) \to (\mu_1, \mu_2)$ definido por: $\mu_1 = 2\sqrt{\lambda_1}$, $\mu_2 = 2\sqrt{\lambda_2}$. Este cambio constituye un difeomorfismo de Ω en sí mismo con matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2}{2} \end{pmatrix}$$

por tanto, bajo el nuevo sistema de coordenadas (μ_1, μ_2) el tensor métrico, en forma matricial vendrá dado por:

$$G = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$$

y la distancia riemanniana entre dos puntos de coordenadas (u_1, u_2) y (v_1, v_2), en el nuevo sistema de referencia, será simplemente:

$$\rho = \sqrt{n_1 (u_1 - v_1)^2 + n_2 (u_2 - v_2)^2}$$

y al ser la distancia invariante frente a cambios admisibles en el sistema de coordenadas, ésta vendrá expresada en el antiguo sistema de referencia por:

$$\rho = 2\sqrt{n_1 (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\eta_1})^2 + n_2 (\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\eta_2})^2}$$

siendo (λ_1, λ_2) y (η_1, η_2) las coordenadas de los puntos que distanciamos. La distancia obtenida por este método se conoce como distancia de Rao. Una vez tenemos explícitamente la distancia de Rao, consideremos el punto en la variedad paramétrica Ω determinada por la estimación máximo-verosímil de λ_1 y λ_2: $\lambda_1 = \bar{x}_1$ y $\lambda_2 = \bar{x}_2$. Entonces podemos considerar a la subvariedad paramétrica determinada por la hipótesis nula: $\omega = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Omega : \lambda_1 = \lambda_2\}$ y definir a la región crítica del contraste como el conjunto de puntos del espacio muestral tales que la distancia entre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y ω sea mayor que una cierta constante a determinar que dependerá del nivel de significación ε del test.

ε del test.

$$W_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{N}^{n_1 + n_2} : \delta_\omega (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq K_\varepsilon \}$$

siendo

$$\delta_\omega (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \inf_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \omega} \rho((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\lambda_1, \lambda_2))$$

Por tanto tendremos ahora que calcular $\delta_\omega (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Teniendo en cuenta que $\lambda_1 = \lambda_2$ si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \omega$, entonces bastará minimizar:

$$\rho^2 ((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\lambda, \lambda)) = 4 \{ n_1 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\bar{x}_1})^2 + n_2 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\bar{x}_2})^2 \}$$

Obteniéndose un mínimo cuando:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n_1 \sqrt{\bar{x}_1} + n_2 \sqrt{\bar{x}_2}}{n_1 + n_2}$$

y entonces:

$$\delta_\omega(\bar{x}_1, x_2) = 2\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\left(\sqrt{\bar{x}_2} - \sqrt{\bar{x}_1}\right)^2}$$

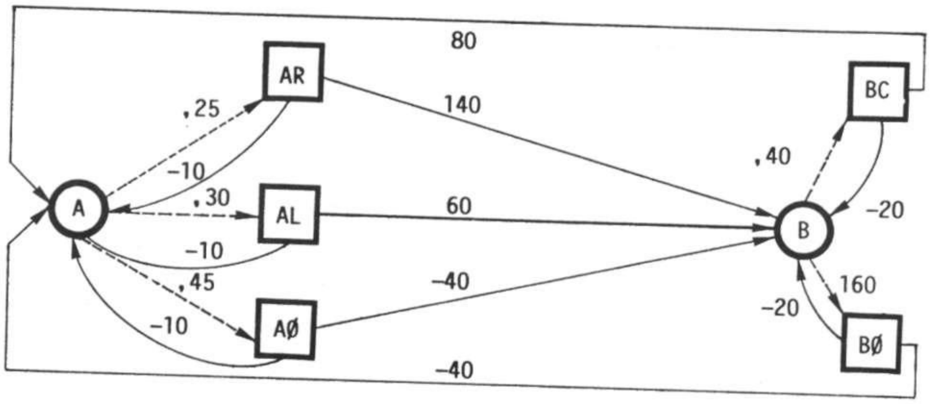
Por tanto, en este caso la región crítica vendrá dada equivalentemente por:

$$W_\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{n_1+n_2} : \frac{4n_1 n_2}{n_1+n_2}\left(\sqrt{\bar{x}_2} - \sqrt{\bar{x}_1}\right)^2 \geq K_\varepsilon^2 \}$$

y K_ε se determina teniendo en cuenta que δ_ω^2 bajo H_0 sigue asintóticamente una distribución χ^2 con 1 grado de libertad.

Problema nº11 J.M. Oller

En la figura se ha representado gráficamente la situación, indicando con trazo continuo las transiciones que consumen tiempo (1 día) y con discontinuo las que no. Aparecen claramente diferenciados los vértices-azar: A y B de los vértices-decisión: AR, AL, AØ, BC y BØ. Aunque no es el único procedimiento emplearemos estos segundos como estados en nuestro proceso y los primeros como estados auxiliares (principalmente para resumen y simplificación de cálculos, aunque su significado físico está fuera de toda duda).



La forma normalizada del problema aparece en el esquema de la Tabla, donde hemos prescindido de $r_{ij}^{(k)}$ ya que al ser independiente de j (depende del estado inicial, i, y de la decisión de Viajar o Esperar, k) se confunde con $q_i^{(k)}$.

ESTADO INICIAL (i)	ACCION (k)	PROBABILIDAD DE TRANSICION $(p_{ij}^{(k)})$ ESTADO FINAL (j) AR	AL	AØ	BC	BØ	RENDIMIENTO MEDIO $(q_i^{(k)})$
AR	V				,40	,60	140
	E	,25	,30	,45			-10
AL	V				,40	,60	60
	E	,25	,30	,45			-10
AØ	V				,40	,60	-40
	E	,25	,30	,45			-10
BC	V	,25	,30	,45			80
	E				,40	,60	-20
BØ	V	,25	,30	,45			-40
	E				,40	,60	-20

Evidentemente en régimen estable las acciones E son absurdas en los estados AR y BC, y deberíamos haberlas suprimido de la tabla. Solo las emplearemos para cumplir las condiciones de contorno.

Llamemos $v_{AR}(N)$, $v_{AL}(N)$, $v_{A\emptyset}(N)$, $V_{BC}(N)$, $V_{B\emptyset}(N)$ al valor esperado en cada uno de los estados cuando faltan N días para terminar la semana y se va a seguir la política óptima.

Los valores medios en los estados auxiliares A y B los llamaremos $a_A(N)$ y $a_B(N)$:

$$a_A(N) = 0,25 \cdot v_{AR}(N) + 0,30 \cdot v_{AL}(N) + 0,45 \cdot v_{A\emptyset}(N)$$

$$a_B(N) = 0,40 \cdot v_{BC}(N) + 0,60 \cdot v_{B\emptyset}(N)$$

Su significado es simple, $a_A(N)$ es el valor esperado en A cuando faltan N días antes de saber si hay ó no carga y de qué. $v_{AR}(N)$ es el valor esperado cuando faltan N días, se está en A y se ha comprobado que hay ROSAS.

Las ecuaciones de recurrencia son las siguientes (reduciendo sistemáticamente las a).

$$g_N = \min \{ a_A(N) , a_B(N)\}$$

$$\bar{a}_A(N) = a_A(N) - g_N$$

$$\bar{a}_B(N) = a_B(N) - g_N$$

$$v_{AR}(N+1) = \max \{140 + \bar{a}_B(N) \; ; \; -10 + \bar{a}_A(N)\}$$

$$v_{AL}(N+1) = \max \{60 + \bar{a}_B(N) \; ; \; -10 + \bar{a}_A(N)\}$$

$$v_{A\emptyset}(N+1) = \max \{-40 + \bar{a}_B(N) \; ; \; -10 + \bar{a}_A(N)\}$$

$$v_{BC}(N+1) = \max \{80 + \bar{a}_A(N) \; ; \; -20 + \bar{a}_B(N)\}$$

$$v_{B\emptyset}(N+1) = \max \{-40 + \bar{a}_A(N) \; ; \; -20 + \bar{a}_B(N)\}$$

a) Los valores iniciales son muy simples habida cuenta que hay que terminar el recorrido en A.

$$v_{AR}(1) = -10 \qquad v_{BC}(1) = 80$$

$$v_{AL}(1) = -10 \qquad v_{B\emptyset}(1) = -40$$

$$v_{A\emptyset}(1) = -10$$

que sería equivalente a tomar $\bar{a}_A(0) = 0 \quad \bar{a}_B(0) = -\infty$

En la Tabla siguiente se recogen los cálculos

N		0	1				2				3			
i		$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$
A	AR		-10	E			158	V			140	V		
	AL	0	-10	E	-10	0	78	V	58,4	27,6	60	V	60,92	25,32
	AØ		-10	E			-10	E			17,6	E		
B	BC		80	V			80	V			107,6	V		
		-			8	18			30,8	0			35,60	0
	BØ		-40	V			-2	E			-12,4	V		
g						-10				30,8				35,60

N		4				5				6		
i		v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a
A	AR	140	V			140	V			140	V	
	AL	60	V	59,89	26,57	60	V	60,46	25,89	60	V	60,15
	AØ	15,32	E			16,57	E			15,89	E	
B	BC	105,32	V			106,57	V			105,89	V	
				33,32	0			34,57	0			33,89
	BØ	-14,68	V			-13,43	V			-14,11	V	
g					33,32				34,57			

El valor semanal esperado es -10+30,8+35,60+33,32+34,57+60,15 = 184,44 y la política es viajar siempre salvo en AØ, de lunes a jueves, el viernes no viajar tampoco en BØ y el sábado desde B viajar con o sin carga, y en A permanecer sin viajar.

b) Si no se impone la condición final $a_A(0) = a_B(0) = 0$ y los cálculos aparecen en la Tabla.

N		0	1				2				3			
i		$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$
A	AR		140	V			140	V			140	V		
	AL	0	60	V	48,5	28,5	60	V	61,32	24,82	60	V	59,67	26,85
	AØ		-10	E			18,5	E			14,82	E		
B	BC		80	V			108.5	V			104,82	V		
		0			20	0			36,5	0			32,82	0
	BØ		-20	E			-11,5	V			-15,18	V		
g						20			36,5					32,82

N		4				5				6		
i		v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a	$\bar{a}$	v	k	a
A	AR	140	V			140	V			140	V	
	AL	60	V	60,58	25,73	60	V	60,08	26,35	60	V	60,36
	AØ	16,85	E			15,73	E			16,35	E	
B	BC	106,85	V			105,73	V			106,35	V	
				34,85	0			33,73	0			34,35
	BØ	-13,15	V			-14,27	V			-13,65	V	
g					34,85				33,73			

El valor semanal esperado es 20+36,5+32,82+34,85+33,73+60,36 = 218,26 (el aumento 33,82 se debe al menor condicionamiento). La política consiste en viajar siempre, excepto en AØ de lunes a viernes, y el sábado no viajar tampoco en BØ.

c) De los casos anteriores parece deducirse que a largo plazo la política adecuada es viajar salvo en el estado AØ

$$w°(AR) + g° = 140 + 0{,}40\ w°\ (BC) + 0{,}60\ w°(BØ)$$

$$w°(AL) + g° = 60 + 0{,}40\ w°\ (BC) + 0{,}60\ w°(BØ)$$

$$w°(AØ) + g° = -10 + 0{,}25\ w°\ (AR) + 0{,}30\ w°(AL) + 0{,}45\ w°(AØ)$$

$$w°(BC) + g° = 80 + 0{,}25\ w°\ (AR) + 0{,}30\ w°(AL) + 0{,}45\ w°(AØ)$$

$$w°(BØ) + g° = -40 + 0{,}25\ w°\ (AR) + 0{,}30\ w°(AL) + 0{,}45\ w°(AØ)$$

Por homogeneidad con lo anterior haremos:

$$0{,}40\ w°(BC) + 0{,}60\ w°(BØ) = 0$$

de donde:

$$g° = \frac{1058}{31} = 34{,}13 \qquad \begin{array}{ll} w°(AR) = 105{,}87 & w°(BC) = 72 \\ w°(AL) = 25{,}87 & w°(BØ) = -48 \\ w°(AØ) = -18 & 0{,}25w°(AR)+0{,}30w°(AL)+ \\ & +\ 0{,}45w°(AØ) = 26{,}13 \end{array}$$

Determinemos si puede mejorarse

$$W°\ (AR) = \max\ \{140+0\ ;\ -10+26{,}13\}\ -34{,}13 = 105{,}87 = w°(AR)$$

$$W°\ (AL) = \max\ \{60+0\ ;\ -10+26{,}13\}\ -34{,}13 = 25{,}87 = w°(AL)$$

$$W°\ (AØ) = \max\ \{-40+0\ ;\ -10+26{,}13\}\ -34{,}13 = -18 = w°(AØ)$$

$$W°\ (BC) = \max\ \{80+26{,}13\ ;\ -20+0\}\ -34{,}13 = 72 = w°(BC)$$

$$W°\ (BØ) = \max\ \{-40+26{,}13\ ;\ -20+0\}\ -34{,}13 = -48 = w°(BØ)$$

Hemos alcanzado el óptimo, el beneficio medio diario equivalente máximo es $g^{*} = 34{,}13$, descansando sólo en A cuando no hay carga.

Este problema tiene numerosos antecedentes en la literatura. Tal cual fué propuesto en una prueba parcial el 23 de Abril de 1973.

R.C.P.

R.Companys