SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 9 N.º 4

PROBLEMA Nº 1.

Sea D la variable aleatoria "distancia de un punto cualquiera a la estrella más próxima" y N_x la variable aleatoria "número de estrellas contenidas en una esfera (n-dimensional) de radio x". Entonces

$$P[D>x] = P[N_x = 0] \qquad x>0$$

Por hipótesis N_x se distribuye según una Poisson de parámetro proporcional al volumen de una esfera n-dimensional de radio x, volumen que viene dado por:

$$V_x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} x^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

donde Γ es la función gamma de Euler.

La función de distribución de D viene dada por:

$$F(x) = 1-P[D>x] = \begin{cases} 1-e^{-\frac{\lambda\pi^{\frac{n}{2}} x^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

Por tanto la función de densidad será:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{n\lambda\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} x^{n-1} e^{-\frac{\lambda\pi^{\frac{n}{2}} x^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

y los momentos de orden k serán:

$$E(D^k) = \int_0^\infty \frac{n\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} x^{n+k-1} e^{-\lambda \frac{\pi^{n/2} x^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}} dx$$

que con el cambio $u = \frac{\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} x^n$, se transforma en:

$$E(D^k) = \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}\lambda}\right)^{\frac{k}{n}} \int_0^\infty u^{k/n} e^{-u} du$$

pero:

$$\int_0^\infty u^{k/n} e^{-u} du = \Gamma(\frac{k}{n}+1)$$

por tanto:

$$E(D^k) = \frac{\Gamma(\frac{k}{n}+1)}{\pi^{k/2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\lambda}\right)^{\frac{k}{n}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

En particular:

$$E(D) = \frac{\Gamma(\frac{1}{n}+1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\lambda} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$Var(D) = E(D^2) - E(D)^2 = \frac{(\Gamma(\frac{2}{n}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{n}+1))}{\pi} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\lambda} \right)^{\frac{2}{n}}$$

En cuanto a la entropía de la distribución, resulta:

$$S = -\int_0^\infty p(x) \log p(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^\infty \left(\log \frac{n\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} + (n-1)\log x - \frac{\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} x^n\right) p(x)dx =$$

$$= -\log \frac{n\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} - (n-1)\int_0^\infty p(x)\log x\, dx + \frac{\lambda\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} E(X^n)$$

Teniendo en cuenta que con el cambio $u = \frac{\lambda\pi^{n/2} x^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

resulta:

$$\int_0^\infty p(x)\log x\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{n} \log \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}\lambda} u\right) e^{-u}\, du =$$

$$= \frac{1}{n} \log \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}\lambda}\right) + \frac{1}{n}\Gamma'(1)$$

y como $\Gamma'(1) = \gamma$, siendo γ la constante de Euler, tenemos finalmente

$$S = \log\left(\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{n-1}{n}\gamma + 1$$

PROBLEMA Nº 2

Sea $h(x,y) = f(x)f(y)$ la función de densidad conjunta.

Como $h(x,y)$ es constante a lo largo de cada circunferencia de radio c, tenemos que $h(x,y)$ es una función de $\sqrt{x^2+y^2} = c$, es decir

$$h(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$$

Para $x = 0$ tenemos

$$h(x,0) = g(x) = f(x)f(0)$$

y como $f(0) \neq 0$ resulta

$$f(x) = \alpha g(x)$$

siendo $\alpha = f(0)^{-1}$. Análogamente $f(y) = \alpha g(y)$, luego

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = \alpha g(x).\alpha g(y)$$

Para y fijo, cambiando x por -x vemos que

$$g(x) = g(-x)$$

luego g es una función par en x, es decir, $g(x) = Q(x^2)$. Luego

$$Q(x^2+y^2) = \alpha^2 Q(x^2)Q(y^2)$$

Poniendo $H = \log Q$, resulta que

$$H(x^2+y^2) = H(x^2)\ H(y^2)\ 2\log\alpha$$

Con H es contínua en toda la recta real, H es la siguiente función

$$H(t) = \beta t - 2\log\alpha$$

luego

$$Q(x^2) = \alpha^{-2}\ e^{\beta x^2}$$

y por lo tanto

$$f(x) = \alpha Q(x^2) = \alpha^{-1}\ e^{\beta x^2} = f(0)\ e^{\beta x^2}$$

Como esta función es positiva en toda la recta real, deducimos que $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria normal de media 0.