LES TRANSFORMACIONS ADMISSIBLES LINEALS PER AL PROBLEMA DEL REPARTIMENT

X. BERENGUER

Un cert nombre de mètodes per a resoldre el problema del repartiment es basen en unes determinades transformacions de la matriu de distàncies. A la nova matriu obtinguda correspon una nova funció objectiu per a la qual intenta trobar-se una solució òptima.

Aquest treball tracta aquestes transformacions tot i analitzant la seva validesa en un context lineal. S'introdueix i es desenrotlla el concepte de "transformació admissible lineal". Sota les idees presentades són estudiades diverses transformacions aparegudes a la literatura per a resoldre el problema del repartiment, tot i analitzant la seva validesa.

1. INTRODUCCIÓ

El problema del repartiment, en la seva forma més senzilla es pot definir de la següent manera: cal repartir una certa mercaderia des de un dipòsit (simbolitzat aqui 0) a un conjunt de n clients. Aquest repartiment es fa sobre uns vehicles amb capacitat limitada, de manera que després de visitar un cert subconjunt dels clients la càrrega s'esgota i cal retornar al dipòsit. Cada client rep una sola visita. L'objectiu del problema és minimitzar la distància total recorreguda pels vehicles.

Hi ha força literatura dedicada a aquest problema típicamente combinatori, conegut amb els noms de "problème des tournées", "vehicle scheduling problem", "delivery problem", etc... Alguns plantejaments més a prop de la pràctica real afegeixen d'altres condicions com exigències d'horari de treball, lliurament amb determinats vehicles, etc.. Tanmateix aquestes variants no tenen més trascendència per al que ens proposem d'estudiar aqui.

Són molts els algorismes existents per a resoldre'l[1]. Alguns d'ells, o bé com a base per a tot un procediment, o bé com a regla particular, procedeixen aplicant unes transformacions sobre la matriu de distàncies.

Considerem, per exemple, un algorisme ja clàsic per a la resolució del problema del repartiment, degut a Clarke & Wright /4/. Aquest mètode comença calculant els anomenats "estalvis" a per a cada arc:

$$a_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij} \qquad (i,j=0,1,2...n).$$

A continuació es classifiquen els arcs en ordre decreixent dels seus estalvis. En base a aquesta llista i mitjançant una sèrie de regles heurístiques, se segueix amb una selecció progressiva dels arcs fins a obtenir una solució al problema.

El fet és que gairabé totes les variants existents d'aquest algorisme (i n'hi han moltes, donada la raonable qualitat de les solucions obtingudes a cost baixísim) intenten construir unes altres llistes d'arcs, que s'obtenen en base a d'altres valors a l'estil de l'estalvi. El mateix procediment de selecció dóna més bons o més mals resultats, segons el valor calculat per a cada arc.

Els procediments de selecció tendeixen a optimitzar el valor total de la solució. Per al cas de l'estalvi, per exemple, l'algorisme de Clarke & Wright tendeix a maximitzar l'estalvi total, cosa que es correspon perfectament amb l'objectiu del problema, que és de minimitzar la distància total[2]. Però hi pot haver valors, com ho veurem més avall, per als quals no es doni aquesta correspondència i el que és una solució millor en un

- X. Berenguer del Centre de Càlcul de la Universitat Politècnica de Barcelona. Av. Dr. Gregorio Marañón, s/n. Barcelona 28.
- Article rebut el Desembre de 1977.

context no ho sigui quan s'avalua aquesta mateixa solució amb les distàncies originals, amb la qual cosa s'està canviant l'objectiu del problema.

De manera més general, la transformació de la matriu de distàncies serà legal quan la "qualitat" relativa de les solucions obtinguda en la nova mètrica sigui idèntica a la "qualitat" relativa de les solucions avaluades amb la matriu de distàncies original. D'aquesta manera el que és òptim en una mètrica també ho serà en l'altra.

Aquest treball estudia la validesa de les transformacions aplicades sobre la matriu de distàncies en el problema del repartiment, de manera que amb les noves matrius d'avaluació la categorització de les solucions resti inalterada.

2. APLICACIÓ ADMISSIBLE, TRANSFORMACIÓ ADMISSIBLE I MATRIU ADMISSIBLE

Sigui un cert problema del repartiment (PR) amb una matriu de distàncies o costos. Representarem una solució particular mitjançant una matriu quadrada S d'ordre n+1

$$\begin{array}{cc|cccccc|} & & \text{a} & & & & & \\ & & 0 & 1 & 2 & . & . & n \\ \hline \text{de} & 0 & x & & & & & \\ & 1 & & x & & & & \\ & 2 & & & x & & & \\ & . & & & & . & & \\ & . & & & & & . & \\ & n & & & & & & x \\ \hline \end{array}$$

amb elements $s_{ij} \in \{0,1\}$ segons si un arc ij és inclòs (1) o no (0) en la solució i diagonal nul.la.

Sigui m el nombre de cicles o "pètals"[3] de les solucions[4]. Donades les condicions del PR es compleix que:

$$\sum_{i=0}^{n} s_{0i} = \sum_{i=0}^{n} s_{i0} = m$$

Per a: j=1,2,...,n

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ji} = \sum_{i=0}^{n} s_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ii} = 0$$

És obvi que l'objectiu del problema és:

$$[\text{MIN}] \sum_{i,j} s_{ij}\, d_{ij}$$

sota unes condicions que aquí no cal tractar.

Sigui S el conjunt de totes les solucions possibles del problema. L'aplicació F "càlcul del cost total" $S \xrightarrow{F} R$, defineix una relació d'ordre total de S en R

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq \dots \geq S_* \qquad S_i \in S$$

si es compleix:

$$F(S_1) \geq F(S_2) \geq F(S_3) \geq \dots \geq F(S_*)$$

És evident que S_* serà una solució òptima, si és que es tracta de minimitzar el cost total.

Una aplicació τ, $S \xrightarrow{\tau} R$ s'anomenarà <u>admissible</u> si indueix la mateixa relació d'ordre total en S, o bé si indueix la mateixa relació d'ordre total però en sentit oposat. Es a dir: τ és admissible si i només si

$$\tau(S_1) \geq \tau(S_2) \geq \dots \geq \tau(S_*) \quad \text{o bé}$$

$$\tau(S_1) \leq \tau(S_2) \leq \dots \leq \tau(S_*)$$

En el primer cas es dirà que τ és una aplicació admissible de <u>sentit directe</u>, i en el segon, de <u>sentit invers</u>.

És fàcil de demostrar que la condició necessària i suficient perquè una aplicació τ sigui admissible és que:

o bé

$$\tau(S_i)-\tau(S_j) \geq 0 \quad \forall S_i, S_j \in S \text{ si } S_i \geq S_j$$

o bé

$$\tau(S_i)-\tau(S_j) \leq 0 \quad \forall S_i, S_j \in S \text{ si } S_i \geq S_j$$

Definim, ara, les següents operacions:

- Operació ⊠ (producte element a element) -

entre dues matrius d'igual ordre:

$C = A \boxtimes B$ amb $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$

- Operació Γ (suma de tots els elements d'una matriu)

$\Gamma(B) = \beta$ amb $\beta = \sum_i \sum_j b_{ij}$

Observeu que l'aplicació "Càlcul del cost total" d'una solució és justament: $\Gamma(S \boxtimes D)$.

Considerem, ara, les aplicacions admissibles per les quals el valor induït en $\mathcal{R}$, per a cada solució, es pot expressar en la forma:

$\Gamma(S \boxtimes t(D))$

Llavors direm que a l'aplicació se li associa una matriu $t(D)$, que anomenarem matriu - admissible. L'operació t que permet obtenir aquesta matriu a partir de D es dirà transformació admissible.

Per exemple, per a l'aplicació admissible -- per excel.lència, el "càlcul del cost total", la matriu admissible associada és D, i la -- transformació admissible associada és la -- identitat.

És senzill de demostrar que si es compleix:

$$\Gamma(S \boxtimes t(D)) = \delta \cdot \Gamma(S \boxtimes D) + \alpha \qquad \forall S \in \mathcal{S} \quad (1)$$
$$\delta, \alpha \in \mathcal{R}$$

llavors t és una transformació admissible.

De les transformacions admissibles que compleixen l'expressió (1) en direm transformacions admissibles lineals (TAL), a les quals corresponen unes matrius admissibles lineals (MAL).

El concepte de sentit directe/invers és fàcilment traslladable a les TAL: es dedueix - immediatament a partir del coeficient δ. Si $\delta>0$ el sentit és directe; si $\delta<0$ el sentit - és invers.

3. L'ESPAI VECTORIAL DE LES MATRIUS ADMISSIBLES LINEALS

Sigui el conjunt $\mathcal{M}$ de totes les MAL d'un PR amb solucions $\mathcal{S}$. És a dir, si:

$$S_1 \geq S_2 \geq \ldots\ldots \geq S_*$$

ja que

$$\Gamma(S_1 \boxtimes D) \geq (S_2 \boxtimes D) \geq \ldots\ldots \geq \Gamma(S_* \boxtimes D)$$

llavors:

$$\mathcal{M} = \{M^+ \mid \Gamma(S_1 \boxtimes M^+) \geq \Gamma(S_2 \boxtimes M^+) \geq \ldots \geq \Gamma(S_* \boxtimes M^+)\} \cup$$
$$\cup \{M^- \mid \Gamma(S_1 \boxtimes M^-) \leq \Gamma(S_2 \boxtimes M^-) \leq \ldots \leq \Gamma(S_* \boxtimes M^-)\}$$

M^+: MAL de sentit directe
M^-: MAL de sentit invers

Si considerem la suma (i resta) d'aquestes matrius en sentit tradicional, és fàcil de demostrar que "la suma de dues MAL és una - altra MAL".

També, l'operació homotècia:

$$\lambda \in \mathcal{R} \quad M' = \lambda M \quad \text{amb} \quad m'_{ij} = \lambda m_{ij} \quad M \in \mathcal{M}$$

produeix la MAL M'.

D'acord amb les propietats d'aquestes operacions es té que $(\mathcal{M},+)$ és un espai vectorial en $\mathcal{R}$ i amb l'homotècia com a llei de composició externa. Es tracta d'un subespai de - l'espai vectorial de les matrius d'ordre -- $(n+1)(n+1)$ i diagonal nul.la, associat a les operacions suma i homotècia.

A continuació calcularem la dimensió d'aquest espai vectorial.

Teorema: La característica del sistema:

$$\Gamma(S \boxtimes M) = \delta \cdot \Gamma(S \boxtimes D) + \alpha \qquad \delta, \alpha \in \mathcal{R}$$
$$S \in \mathcal{S}$$
és $\leq n(n-1)$ $\qquad M \in \mathcal{M}$

La demostració es trobarà a l'Apèndix 1.

Teorema: La dimensió de l'espai vectorial $\mathcal{M}$ és $\geq 2n+2$.

Efectivament, la dimensió ρ de $\mathcal{M}$ serà precisament el nombre de graus de llibertat del sistema:

$\Gamma(S \boxtimes M) = \delta \cdot \Gamma(S \boxtimes D) + \alpha$, per tant

$$\rho = n(n+1) + 2 - c$$

essent c la característica del sistema. Segons el teorema previ $c \leq n(n-1)$ amb el qual s'en dedueix $\rho \geq 2n+2$, com volíem demostrar.

Si el nombre de solucions (Card(S)) del problema és $\geq n(n-1)$, llavors la dimensió de M és $2n+2$. Però si el nombre de solucions és $<n(n-1)$, llavors la dimensió creix a mesura que aquest número de solucions s'empetiteix. En el límit, per a un problema d'una sola solució resulta, ben lògicament, que qualsevol matriu és admissible.

Corol.lari: Si D és simètrica, la dimensió de M és $\geq (n(n+1)/2)+2-n(n-1)$ o sia $\geq n+2$.

Base de M

Definim les matrius (d'ordre $(n+1)(n+1)$) Ω_k^F, Ω_k^C, Ω_0 de la següent manera:

Per $\Omega \in R$, $i,j=0,1,2...n$

Ω_k^F d'elements $w_{ij}=0$ per $i \neq k$, $w_{kj}=\Omega$

Ω_k^C d'elements $w_{ij}=0$ per $j \neq k$, $w_{ik}=\Omega$

Ω_0 d'elements $w_{ij}=0$ per $i \neq 0$, $j \neq 0$; $w_{0j}=w_{i0}=\Omega$

És fàcil de veure que són MAL

$\Gamma(S \boxtimes \Omega_k^F) = \Gamma(S \boxtimes \Omega_k^C) = \Omega, \quad k \neq 0$

$\Gamma(S \boxtimes \Omega_0) = 2m\Omega$

Com a base de l'espai vectorial Ω prendrem el següent conjunt de MAL:

$D, \Omega_0, \Omega_1^F, \Omega_1^C, \Omega_2^F, \Omega_2^C, \ldots\ldots, \Omega_n^F, \Omega_n^C$

Ω arbitrari per a cada matriu.

A l'apèndix 2 es demostra que es tracta de matrius linealment independents.

Tota MAL és expressable com a combinació lineal de la base. Si $M \in M$

$$M = K_D D + K_0 \Omega_0 + K_1^F \Omega_1^F + \ldots\ldots + K_n^F \Omega_n^F + K_n^C \Omega_n^C$$

llavors:

$$\Gamma(S \boxtimes M) = K_D \Gamma(S \boxtimes D) + K_0 \Gamma(S \boxtimes \Omega_0) + \ldots +$$

$$+ K_n^C \Gamma(S \boxtimes \Omega_n^C) = K_D \Gamma(S \boxtimes D) + K \qquad (2)$$

i així hem retrobat l'expressió lineal (1) de les MAL. Per a ajustar-nos exactament a ella, fixarem els valors:

$\Omega = 1/2m$ per a Ω_0;

$\Omega = 1$ per a la resta de matrius.

La base és, doncs:

$$\left\{ D, \left(\frac{1}{2m}\right)_0, 1_1^F, 1_1^C, 1_2^F, 1_2^C, \ldots, 1_n^F, 1_n^C \right\}$$

Per exemple, per a n=3 heus ací la base a considerar:

$$\begin{bmatrix} x & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{10} & x & d_{12} & d_{13} \\ d_{20} & d_{21} & x & d_{23} \\ d_{30} & d_{31} & d_{32} & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 1/2m & 1/2m & 1/2m \\ 1/2m & x & 0 & 0 \\ 1/2m & 0 & x & 0 \\ 1/2m & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Així que, per a tota $M \in M$:

$$\Gamma(S \boxtimes M) = \delta \Gamma(S \boxtimes D) + K_0 \Gamma(S \boxtimes (1/2m)_0) +$$

$$+ K_1^F \Gamma(S \boxtimes 1_1^F) + \ldots + K_n^C \Gamma(S \boxtimes 1_n^C) \qquad (3)$$

Per tant, en l'expressió lineal (1) tenim que:

- El coeficient δ és la component de la MAL respecte a la matriu bàsica D.

- El coeficient α és la suma:

  $K_0 + K_1^F + K_1^C + \ldots\ldots + K_n^F + K_n^C$

  de les components de la MAL respecte a les matrius bàsiques $(1/2m)_0, 1_1^F, 1_1^C, \ldots, 1_n^C$

Si D és simètrica aquesta base es pot simplificar combinant les matrius Ω_k^F, Ω_k^C i formant la matriu Ω_k d'elements $w_{ij}=0$ per $i \neq k$, $j \neq k$, $w_{kj}=\Omega$, $w_{ik}=\Omega$, $i,j=0,1,2,\ldots,n$.

La base normalitzada per a aquest cas serà, doncs:

$$\left\{D,\ \left(\frac{1}{2m}\right)_0,\ 1_1,\ 1_2,\ldots\ldots,\ 1_n\right\}$$

En definitiva per a caracteritzar una MAL -- n'hi haurà prou amb indicar les components - respecte a la base. Per exemple, la matriu D és:

$$[1 \quad 0 \quad 0 \ \ldots\ldots \ 0]$$

Ara ja podem parlar pròpiament de transformació admissible lineal t: és una transforma-- ció lineal que opera sobre el vector

$$[1 \quad 0 \quad 0 \ \ldots\ldots \ 0]'$$

donant un altre vector

$$[K_D \ K_0 \ K_1^F \ \ldots\ldots \ K_n^C]'$$

$$[K_D \ K_0 \ K_1^F \ \ldots \ K_n^C]' = t\ [1 \quad 0 \quad 0 \ \ldots \ 0]' \qquad (4)$$

Com que la matriu de t ve caracteritzada per la seva primera columna, que és

$$[K_D \ K_0 \ K_1^F \ \ldots\ldots \ K_n^C]$$

i valors arbitraris en els elements restants, representarem tota TAL mitjançant aquest vector.

4. LES TRANSFORMACIONS ADMISSIBLES LINEALS - EN LA PRÀCTICA ALGORÍSMICA

Amb el que hem vist fins aquí és possible -- d'interpretar algunes TAL aparegudes a la literatura en resoldre problemes del reparti-- ment o de similars. Tanmateix abans presentarem unes transformacions "bàsiques", que ens ajudaran a interpretar les altres.

TAL bàsiques: Vo-Khac en /9/ es refereix a - unes "TAL bàsiques":

- homotècia λ: La seva representació serà

$$[\lambda \quad 0 \quad 0 \ \ldots\ldots \ 0]$$

- translació: consistent a afegir una cons-- tant θ a la fila i columna de D per un -- punt i $(i=0,1,2,\ldots,n)$. La seva representació és

$$[1 \quad 2m\theta \quad 0 \ \ldots\ldots \ 0] \qquad \text{si } i=0$$

$$[1 \quad 0..0\theta\theta 0..0] \qquad \text{si } i\neq 0$$

També es pot parlar d'altres TAL bàsiques - interessants: la translació-fila i la translació-columna.

- Translació-fila: consistent a afegir una constant θ a la fila de D per un punt i - $(i=0,1,2,\ldots,n)$. La seva representació és

$$\left[1 \ \ m\theta \ \ \frac{-\theta}{2} \ \frac{\theta}{2} \ \frac{-\theta}{2} \ \frac{\theta}{2} \cdots \frac{-\theta}{2} \ \frac{\theta}{2}\right] \qquad \text{si } i=0$$

$$[1 \ 0 \ \ldots \ 0\theta 0 \ \ldots \ 0] \qquad \text{si } i\neq 0$$

- Translació-columna: consistent a afegir - una constant θ a la columna de D per un - punt i $(i=0,1,2\ldots n)$. La seva representació és:

$$\left[1 \ \ m\theta \ \ \frac{\theta}{2} \ \frac{-\theta}{2} \ \frac{\theta}{2} \ \frac{-\theta}{2} \ \cdots \ \frac{\theta}{2} \ \frac{-\theta}{2}\right] \qquad \text{si } i=0$$

$$[1 \ 0 \ \ldots \ 00\theta 0 \ \ldots \ 0] \qquad \text{si } i\neq 0$$

A continuació plantejarem d'altres valors - apareguts a la literatura.

Reducció de la matriu de costos

Quan m=1, o si es vol, quan la capacitat -- dels vehicles es il.limitada, es té el conegut problema del viatjant de comerç. Doncs bé, per a resoldre el problema del viatjant de comerç Little et al. /6/ plantegen un mètode Branch & Bound. A la fase d'acotació - aquest mètode inclou un procediment dit "reducció" de la matriu de distàncies o costos. És senzill d'advertir que es tracta d'una-- TAL.

Si es $g_i = \min\limits_j d_{ij}$ per a cada fila i, la reducció per i=0 es la TAL

$$\left[0 \ \ -g_0 \ \ \frac{g_0}{2} \ \ \frac{-g_0}{2} \ \cdots \ \frac{g_0}{2} \ \ \frac{-g_0}{2}\right]$$

i la reducció per i=1,2...n es la TAL

$$[0 \quad 0 \quad 0 \ \ldots \ 0-g_i 0 \ \ldots \ 0]$$

Així que la reducció de D per files es la -

TAL

$$M = \left[1 \quad -g_0 \quad \left(-g_1+\frac{g_0}{2}\right) \quad \frac{-g_0}{2} \quad \left(-g_2+\frac{g_0}{2}\right) \quad \dots\right.$$

$$\left.\dots \quad \left(-g_n+\frac{g_0}{2}\right) \quad \frac{-g_0}{2}\right]$$

Un cop aplicada M s'obté una nova matriu D'.

Sigui

$$h_j = \min_i d'_{ij},$$

per a cada columna j.

Anàlogament s'aplica una altra reducció, que és la TAL

$$N = \left[0 \quad -h_0 \quad \frac{-h_0}{2} \quad \left(-h_1+\frac{h_0}{2}\right) \quad \frac{-h_0}{2} \quad \dots\right.$$

$$\left.\dots \quad \frac{-h_0}{2} \quad \left(-h_n+\frac{h_0}{2}\right)\right]$$

En definitiva, la regla de reducció en l'algorisme de Little et al. és la TAL M+N, o sia:

$$\left[1 \quad \left(-g_0-h_0\right) \quad \left(-g_1-\frac{h_0}{2}+\frac{g_0}{2}\right) \quad \left(-h_1+\frac{h_0}{2}-\frac{g_0}{2}\right) \quad \dots\right.$$

$$\left.\dots \quad \left(-g_n-\frac{h_0}{2}+\frac{g_0}{2}\right) \quad \left(-h_n+\frac{h_0}{2}-\frac{g_0}{2}\right)\right]$$

Estalvi

Per a resoldre el problema del repartiment, Clarke & Wright /4/ defineixen l'"estalvi", ja vist a l'apartat 1.

$$a_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$$

Es tracta de la TAL

$$\left[-1 \quad 0 \quad d_{10} \quad d_{01} \quad d_{20} \quad d_{02} \quad \dots \quad d_{n0} \quad d_{0n}\right]$$

Per a problemes simètrics que és el cas típic en què s'aplica l'algorisme de Clarke & Wright, és la TAL

$$\left[-1 \quad 0 \quad 2d_{01} \quad 2d_{02} \quad \dots \quad 2d_{0n}\right]$$

També es pot interpretar com a suma de n translacions $2d_{0i}$ i una homotècia (-n-1).

Alguns autors parlen d'"estalvi generalitzat"

$$a'_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - kd_{0j} \quad (k \text{ constant})$$

per a problemes simètrics. Es la TAL

$$\left[-k \quad 0 \quad 2d_{01} \quad 2d_{02} \quad \dots \quad 2d_{0n}\right]$$

Transformació π de Gaskell

Per a resoldre el PR, Gaskell /5/ assaja el valor π

$$\pi_{ij} = a_{ij} - d_{ij}$$

Es tracta d'una suma d'estalvi i homotècia -1 donant la TAL:

$$\left[-2 \quad 0 \quad 2d_{01} \quad 2d_{02} \quad \dots \quad 2d_{0n}\right]$$

Transformació λ de Gaskell

Pel mateix cas, Gaskell /5/ defineix el valor λ

$$\lambda_{ij} = a_{ij} \; (\bar{d} + |d_{0i}-d_{0j}| - d_{ij})$$

amb

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{0i}}{n}$$

No es pot dir, en aquest cas, que es tracti d'una TAL ja que el producte de dues MAL no dóna necessàriament una altra MAL. Es més, ni tan sols es pot parlar de transformació admissible d'una altra mena. Un exemple numèric ho il.lustrarà:

Sigui un PR amb m=2 i

$$D = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & & \\ 2 & 4 & 2 & \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{array}$$

La matriu transformada segons λ és

	0	1	2
1	0		
2	0	15	
3	0	0	12

Heus ací les tres solucions possibles amb -- les corresponents distàncies totals D_s i valors totals λ_s

S_1: 0-1-3-0/0-2-0 $\quad D_{S_1}=24, \; \lambda_{S_1}=0$
S_2: 0-1-2-0/0-3-0 $\quad D_{S_2}=19, \; \lambda_{S_2}=15$
S_3: 0-2-3-0/0-1-0 $\quad D_{S_3}=18, \; \lambda_{S_3}=12$

La jerarquia d'aquestes solucions segons D - és:

$S_1 \geq S_2 \geq S_3$ $\quad$ (S_3 es la millor)

En canvi, la jerarquia induïda per λ és:

$S_2 \geq S_3 \geq S_1$ $\quad$ (ó S_1 ó S_2 es la millor)

Així doncs, λ no es una transformació admissible car introdueix canvis en la jerarquia de les solucions.

Afinitat ponderada

Vo-Khac /9/ proposa el valor "afinitat ponderada" g_{ij}

$$g_{ij} = \gamma(i)+\gamma(j)+m(d_{0i}+d_{0j})-(n+m-2)d_{ij} \quad \text{si } i,j\neq 0$$

$$g_{0i} = \gamma(i)-(n-2)d_{0i}$$

amb

$$\gamma(i) = \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq i}} d_{ik}$$

Es tracta de la TAL resultant de la suma de n translacions $(2\gamma(i)+2md_{0i})$ per i=1,2...n i una homotècia (-n-m+2), o sigui

$$\left[-(n+m-2) \quad 0 \quad 2(\gamma(1)+md_{01}) \; \ldots \; 2(\gamma(n)+md_{0n})\right]$$

Transformació ψ del paquet ICL

En un programa desenvolupat per ICL (Vehicle Scheduling Program Mark I, II, III, citat -- NCC /7/) es proposa la transformació ψ

$$\psi_{ij} = \pi_{ij}(d_{0i}+d_{0j})-d_{ij} \qquad \pi\text{: transformació de Gaskell}$$

Com en el cas de la transformació λ de Gaskell, no es tracta d'una TAL, ja que

$$\pi_{ij}(d_{0i}+d_{0j})$$

no es necessàriament una TAL.

Fins aquí, en aquest apartat, hem vist diversos exemples de transformacions de la matriu de distàncies, algunes de les quals no són TAL i, per tant, s'han de rebutjar a l'hora de l'aplicació pràctica. Tanmateix la pràctica de resolució de problemes concrets, en els quals es tenen unes determinades restriccions, s'esdevé que els resultats amaguen la idea de la admissibilitat.

Vegeu per exemple la taula 1 en la qual es presenten les solucions obtingudes en resoldre 13 PR mitjançant diverses transformacions i emprant sempre el mateix procediment de selecció.

La transformació λ de Gaskell, que ja hem vist que no era admissible, dóna la millor solución (821) per al problema 10. Aquest resultat no ha de sorprendre, ja que el procediment de selecció de l'algorisme aplicat i les restriccions del problema juguen el seu paper, que en aquest cas és molt favorable a la transformació λ. Tanmateix, en la generalitat dels casos no s'han d'esperar circumstàncies felices[5] i cal rebutjar aquesta transformació que encara ara es va arrossegant en tota la literatura específica.

En definitiva, a l'hora de dissenyar una transformació de la matriu de distàncies cal tenir en compte els conceptes presentats aquí, que permeten garantir la validesa teòrica de la transformació.

D'altra banda, si l'algorisme emprat continua manipulant la nova matriu de costos, serà molt interessant de transformar també tots els paràmetres del problema a fi de que el procés es faci més eficient des d'un punt de vista informàtic.

Com a exemple d'aquestes transformacions presentarem aquí les fetes per a dos paràmetres típics en un PR el cost per parada -- (cost addicional degut a la descàrrega del vehicle) i la distància màxima del recorregut (distància límit que pot recórrer cada vehicle entre anada i tornada al/del dipò--

Taula 1.
Distància total de les solucions obtingudes segons - diverses transformacions i mitjançant un procediment de selecció "múltiple" (de Berenguer /1/).

Problema número	nº punts n	Estalvi a_{ij}	Gaskell λ_{ij}	Gaskell π_{ij}	Afinitat ponderada
1	6	119	---	---	119
2	8	132	---	---	109
3	10	122	---	---	122
4	11	591	---	---	605
5	12	290	---	---	290
6	21	598	602	518	598
7	22	956	988	1015	995
8	29	964	979	943	956
9	30	1427	1434	1500	1557
10	32	841	821	850	869
11	50	583	---	---	556
12	75	907	---	---	893
13	100	883	---	---	889

sit central):

Considerem un cicle o "pètal" com un subconjunt P de clients. Es pot considerar, així -- aïllat, com a solució d'un PR amb un nombre - de clients C_p=Card(P) i m=1 pètals a construir. Sigui S una solució a aquest problema i M una certa MAL. Sigui β el cost per parada i L la distància màxima de recorregut. Es complirà, doncs

$\Gamma(S\boxtimes D) + \beta \cdot C_p \leq L$ o sigui

$\Gamma(S\boxtimes D) \leq L - \beta \cdot C_p$

Si M és de sentit directe, llavors

$\Gamma(S\boxtimes M) - \alpha \leq \delta(L - \beta \cdot C_p)$, o sigui

$\Gamma(S\boxtimes M) + \delta \cdot \beta \cdot C_p \leq \delta \cdot L + \alpha$

Si M és de sentit invers, resulta

$\Gamma(S\boxtimes M) + \delta \cdot \beta \cdot C \geq \delta \cdot L + \alpha$

Aquestes últimes inequacions permeten assimilar β i L a la MAL aplicada M. En efecte, si β_M i L_M són els paràmetres "transformats", - es té

$\beta_M = \delta\beta$ i $L_M = \delta L + \alpha$

Si M és de sentit directe $\Gamma(S\boxtimes M)+\beta_M C_p$ ha de ser $\leq L_M$ i si M és de sentit invers $\Gamma(S\boxtimes M) + \beta_M C_p$ ha de ser $\geq L_M$.

5. CONCLUSIONS

En aquest treball s'han presentat les bases teòriques que permeten dissenyar transformacions admissibles lineals de la matriu de - distàncies per a problemes del repartiment.

Es pot resumir el resultat obtingut de la - manera següent: Per a un problema del repartiment les úniques transformacions admissibles lineals de la seva matriu de distàncies D són aquelles que s'obtenen afegint les -- constants θ_i i θ'_j a la fila i i a la columna j, respectivament, de la matriu λD (i,j= 0,1,2,...,n; λ constant).

Sota aquest punt de vista s'han analitzat - diverses transformacions aparegudes a la literatura, dissenyades específicament per resoldre problemes del repartiment i se n'han trobat algunes d'incorrectes.

També s'han tractat algunes qüestions pràctiques per a aquest tipus d'algorismes.

L'autor considera que altres transformacions que es puguin dissenyar per a aquest tipus de problemes s'haurien d'estudiar teòrica-- ment amb els conceptes presentats aquí, -- abans que sotmetre-les a estudis purament - pràctics com s'ha vingut fent fins ara a la majoria dels cassos.

Finalment es remarca que els conceptes pre-sentats aquí són traslladables gairabé directament a l'anomenat "problema del viatjant múltiple de comerç" del qual el problema del repartiment no n'és més que un problema particular (vegis aquest enfocament a /2/).

6. REFERENCIES

/1/ BERENGUER, X. "El problema del repartiment", Tesi Doctoral, Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials, Barcelona, 1975.

/2/ BERENGUER, X. "A Characterization of Linear Admissible Transformations for the M-Travelling Salesman Problem", European Journal of Operational Research, propera publicació.

/3/ CHRISTOFIDES, N. "The Vehicle Routing Problem", RAIRO, v. 10, nº 2, 1976. pp. 55.

/4/ CLARKE, G. & WRIGHT, J.W. "Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points", Operations Research, v. 11, 1963. pp. 568.

/5/ GASKELL, T.J. "Bases for Vehicle Fleet Scheduling", Operations Research Quarterly, v. 18, 1967. pp. 281.

/6/ LITTLE, J.D.C., MURTY, K.G., SWEENEY, D. W. & KAREL, C. "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem", Operations Research, v. 11, 1963. pp. 979.

/7/ NATIONAL COMPUTER CENTER, "Computers in Vehicle Scheduling", NCC, Manchester, 1969.

/8/ TURNER, W.C., GHARE, P.M., FOURDS, L.R. "Transportation Routing Problém: a survey", AIEE Transactions, v. 6, nº 4, 1974. pp. 288.

/9/ VO-KHAC, K. "La Régularisation dans les Problèmes Combinatoires et son Application dans les Problèmes de Tournées", Revue Française d'automatique, informatique et recherche opérationelle", v. 2, 1971, pp. 59.

/10/ WEBB, M.H.J. "Relative Performance of some Sequential Methods of Planning -- Multiple Delivery journeys" Operations Research Quarterly, v. 23, 1972. pp. 361.

7. APENDIX 1

Teorema

La característica del sistema

$$\Gamma(S \boxtimes M) = \delta \cdot \Gamma(S \boxtimes D) + \alpha \qquad \delta,\alpha \in \mathcal{R}, \; S \in \mathcal{S}, \; M \in \mathcal{M}$$

es $\leq n(n-1)$.

Demostració:

La matriu del corresponent sistema homogeni amb incògnites m_{ij} $(i,j=0,1,2\ldots n)$, α i δ, té w files, on $w=\mathrm{Card}(\mathcal{S})$ i $n(n+1)+2$ columnes (veure fig. 1).

Els elements d'aquesta matriu valen 0 o bé 1.

Cadascuna de les files té $n(n+1)$ elements que són precisament els elements d'una solució S, més 2 elements addicionals que corresponen a les columnes de les incògnites α i δ.

El primer grup de $n(n+1)$ elements el simbolitzarem s^k_{ij} on k indica fila $(k=1,2\ldots w)$ i el parell ij indica columna $(i,j=0,1,2\ldots n)$. Els altres dos elements quedaran simbolitzats per s^k_α i s^k_δ.

Eliminarem ara, columnes dependents.

- Els elements de la columna α són combinació lineal dels elements s^k_{ij}

$$s^k_\alpha = -1 = \frac{-1}{n-m} \sum_{i,j=1}^{n} s^k_{ij}$$

  ja que a cada solució hi han n-m arcs no adjacents al dipòsit.

- Els elements de la columna δ són combinació lineal dels elements s^k_{ij}

$$s^k_\delta = - \sum_{i,j=0}^{n} d_{ij} \, s^k_{ij}$$

ja que cada element d'aquesta columna és la distància real de cada solució, amb signe canviat.

- Els elements de les columnes m_{0j} (j=1,2..n) són també combinació lineal dels s^k_{ij}

$$s^k_{0q} = \frac{1}{n-m} \sum_{i,j=1}^{n} s^k_{ij} - \sum_{i=1}^{n} s^k_{iq} \qquad q=1,2...n$$

ja que a cada solució s'arriba a un cert punt q només un cop i si no s'hi ha arribat mitjançant arcs no adjacents al dipòsit (dels quals n'hi ha n-m) és que s'hi ha arribat des del dipòsit.

- Anàlogament per als elements de les columnes m_{j0} (j=1,2...n)

$$s^k_{q0} = \frac{1}{n-m} \sum_{i,j=1}^{n} s^k_{ij} - \sum_{j=1}^{n} s^k_{qj} \qquad q=1,2...n$$

ja que per a tota solució es surt d'un punt q només un cop i si no se n'ha sortit mitjançant arcs no adjacents al dipòsit és que se n'ha sortit dirigint-se cap al dipòsit.

Així doncs, a l'hora de calcular la característica del sistema només ens queden les columnes corresponents als arcs adjacents al dipòsit (fig. 2.).

Veurem tot seguit que la característica d'aquesta matriu reduïda és n(n-1), sempre que $w \geq n(n-1)$.

Donada la relació:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu^k_{ij}\, s^k_{ij} = 0$$

es tracta de provar que ha d'ésser $\mu^k_{ij}=0$, i,j=1,2...n i k=1,2...w.

Demostrem-ho per a una certa solució k.

En la mesura en que la dependència dels arcs adjacents al dipòsit ja ha sigut demostrada, hem d'afrontar el cas més desfavorable, que correspon a m=1 i una solució és un recorregut hamiltonià entre els n clients. Sigui aquesta solució la seqüència de clients $i_1\ i_2\ \ldots\ i_{n-1}\ i_n$. Prenem també les solucions formades per les seves permutacions circulars:

$$\begin{array}{llll}
i_2 & i_3 & \ldots\ldots & i_n \quad i_1 \\
i_3 & i_4 & \ldots\ldots & i_1 \quad i_2 \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
i_n & i_1 & \ldots\ldots & i_2 \quad i_{n-1}
\end{array}$$

Per a la primera solució:

$$\mu^k_{i_1 i_2} + \mu^k_{i_2 i_3} + \ldots + \mu^k_{i_{n-1} i_n} = 0$$

per a la segona:

$$\mu^k_{i_2 i_3} + \ldots\ldots + \mu^k_{i_n i_1} = 0$$

i així fins l'última

$$\mu^k_{i_n i_1} + \ldots\ldots + \mu^k_{i_2 i_{n-1}} = 0$$

Sumant aquestes equacions resulta

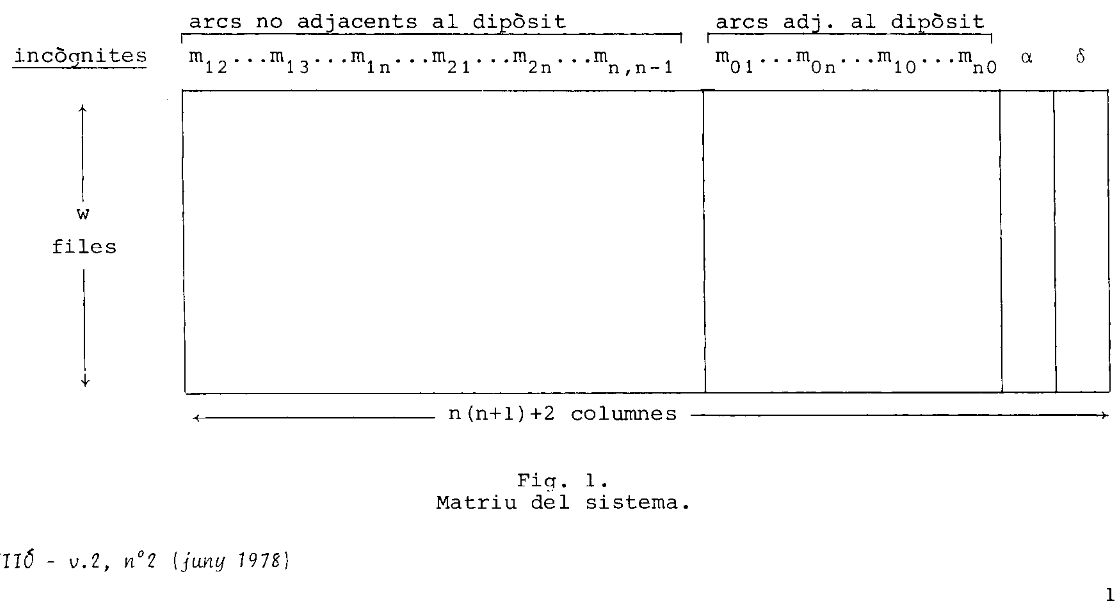

Fig. 1.
Matriu del sistema.

$$\mu^k_{i_1 i_2} + \mu^k_{i_2 i_3} + \dots + \mu^k_{i_{n-1} i_n} + \mu^k_{i_n i_1} = 0$$

Restant-la a la primera equació s'obté

$$\mu^k_{i_n i_1} = 0$$

Així mateix, restant les altres equacions - s'obté finalment

$$\mu^k_{i_1 i_2} = \mu^k_{i_2 i_3} = \dots = \mu^k_{i_{n-1} i_n} = \mu^k_{i_n i_1} = 0$$

El mètode seguit serveix per a qualsevol solució; així que queda provat que $\mu^k_{ij}=0$ per a $k=1,2...w$ i $i,j=1,2...n$.

D'aquesta manera queda demostrat que la característica del sistema és $n(n-1)$, sempre - que $\mathrm{Card}(S) \geq n(n-1)$. Si $\mathrm{Card}(S) < n(n-1)$, la característica del sistema serà llavors lògicament $\mathrm{Card}(S)$.

8. APÈNDIX 2

Teorema

Les matrius D, Ω_0, Ω^F_1, Ω^C_1, ..., Ω^F_n, Ω^C_n són - linealment independents.

Demostració

Donada la relació

$$\tau_D D + \tau_0 \Omega_0 + \tau^F_1 \Omega^F_1 + \dots + \tau^C_n \Omega^C_n = 0 \qquad (5)$$

hem de demostrar que tots els coeficients τ han d'ésser nuls.

Vegem, en primer lloc, que $\tau_D=0$.

Consideri's un cert element 0i. Li correspon la relació

$$\tau_D d_{0i} + \tau_0 \Omega + \tau^C_i \Omega = 0 \qquad (6)$$

Ara considerem un altre element 0j, al qual correspon

$$\tau_D d_{0j} + \tau_0 \Omega + \tau^C_j \Omega = 0 \qquad (7)$$

Restant amdúes equacions (6) i (7) tenim:

$$\tau_D (d_{0i} - d_{0j}) + \tau^C_i - \tau^C_j = 0 \qquad (8)$$

Per a un element ki tindrem:

$$\tau_D d_{ki} + \tau^F_k \Omega + \tau^C_i \Omega = 0 \qquad (9)$$

Per a un element kj tindrem:

$$\tau_D d_{kj} + \tau^F_k \Omega + \tau^C_j \Omega = 0 \qquad (10)$$

Restant aquestes dues últimes equacions (9) i (10) tenim:

$$\tau_D (d_{ki} - d_{kj}) + \tau^C_i - \tau^C_j = 0 \qquad (11)$$

Restant ara les equacions (8) i (11) obtenim:

$$\tau_D (d_{0i} - d_{0j} - d_{ki} + d_{kj}) = 0$$

Com que els elements de D són arbitraris, - haurà d'ésser $\tau_D=0$.

Prenent ara un element k0:

$$\tau_0 + \tau^F_k = 0 \qquad (12)$$

i un element ki:

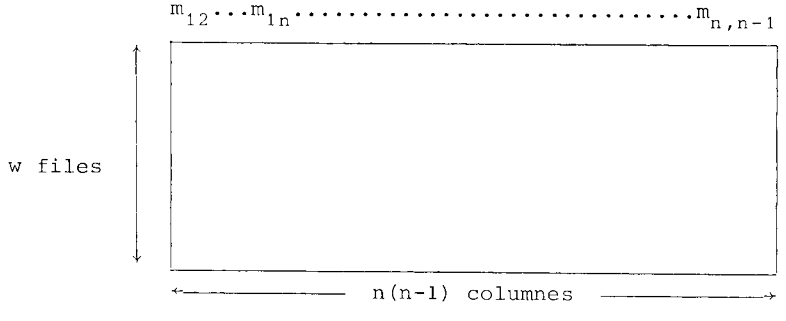

Fig. 2.
Matriu reduïda del sistema

$$\tau_k^F + \tau_i^C = 0 \qquad (13)$$

Restant aquestes dues últimes equacions -- (12) i (13) tenim:

$$\tau_0 - \tau_i^C = 0 \qquad (14)$$

i juntament amb la equació de l'element 0i s'obté $\tau_0=0$ així com $\tau_i^C=\tau_k^F=0$.

Com que el mètode és vàlid per a tot k,i=1,2, ,...,n queda demostrat que ha de ser:

$$\tau_D = \tau_0 = \tau_1^F = \ldots = \tau_n^C = 0 \qquad (15)$$

9. NOTES

[1] Per a un extens estudi del problema es pot veure Berenguer /1/. Dos "surveys" interessants i de fàcil lectura són el de Christofides /3/ i el de Turner et al. /8/.

[2] Si A_S es l'estalvi total d'una solució S i D_S la seva distància total, és fàcil de -- veure que es compleix

$$A_S + D_S = \sum_{i=1}^{n} d_{i0} + \sum_{j=1}^{n} d_{0j}$$

Essent el segon membre constant, la minimització de D_S es correspón amb la maximització de A_S i viceversa.

[3] En general la ruta total que es genera en - un PR té un aspecte "florejat" i és doncs - il.lustratiu dir-ne "pétals" als recorreguts parcials d'anada i tornada al/del dipòsit.

[4] A la pràctica el càlcul de m sol ésser una incògnita del PR. Fins i tot la seva minimització pot ésser l'objectiu del problema. Es tractaria en aquest cas d'una variant al PR que hem plantejat aquí, donat que la minimització de distància total no es correspon necessàriament amb un m mínim. Tanmateix el fet que aquí es fixi el valor de m només és limitatiu quant al fet que es contemplen les solucions d'igual m, sigui quin sigui l'objectiu final del problema.

[5] En un estudi estadístic en què s'analitza - el comportament pràctic de diverses transformacions, Webb /10/ ja assenyala que la - transformació λ no és gens bona des d'un -- punt de vista pràctic.