

# CONTROL DE CALIDAD POR SUMAS ACUMULADAS

M. PEPIÓ y C. POLO

E.T.S.E.I.T. - U.P.C.

*Los métodos de Sumas Acumuladas son alternativos de los gráficos de Shewhart para el control de las fabricaciones y se presentan convenientemente elaborados para su determinación, eligiendo el tamaño de la muestra y las características del control, en función del porcentaje defectuoso que se desea detectar y la protección deseada. Asimismo se analizan las ventajas relativas de ambos métodos.*

**Cumulate sum quality control method selection.**

**Keywords:** Cusum; Shewhart Charts; average run length; defective level.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la competencia, no sólo en precio sino también, en calidad, ha motivado, en todos los países desarrollados, un renacer del interés por los temas de Control de Calidad y Productividad.

En España, la reciente entrada en el Mercado Común ha sido la que ha provocado ese interés, dando lugar a que diversos entes, tanto públicos como privados, promocionen, incentiven y desarrollen la calidad de los productos y la productividad de las empresas nacionales, para hacer frente, con éxito, a la apertura del mercado que tal ingreso ha representado.

Los métodos estadísticos de control, por una parte, si bien no mejoran la calidad, evitan su degradación, y por otra, detectando prontamente las perturbaciones, mantienen la productividad del proceso de producción en un nivel óptimo. En el área de calidad, la productividad puede incrementarse notablemente mediante la robotización de la toma de muestras y medición de la característica a controlar, por la informatización de la metodología estadística propiamente dicha, [5], así como por la utilización de la técnica estadística más idónea, en cada caso.

---

—M. Pepió y C. Polo - U.P.C - E.T.S.E.I.T. - Lab. d'Estadística - Terrassa.

—Article rebut al novembre del 1987.

En este último aspecto, aquí se presenta un procedimiento de control, alternativo de los gráficos de Shewhart, que probablemente sean los utilizados en forma exclusiva para el control de la producción. Este método alternativo se denomina Gráficos de Sumas Acumuladas, SUMAC, (Cusum Charts), y se expone de una forma totalmente operativa, listo para su utilización inmediata, ya que una de las razones por las que su uso no ha proliferado sea, posiblemente, que su exposición se ha realizado en un nivel teórico, cuya aplicación no es simple, sin unos conocimientos estadísticos adecuados, para saber, a ciencia cierta, lo que se está haciendo.

## 2. LOS MÉTODOS SUMAC

Con los gráficos de Shewhart, de medias y amplitudes, por ejemplo, la decisión de actuar sobre el proceso, para subsanar posibles anomalías, se basa en la información aportada por cada muestra, única y exclusivamente.

Este es el comportamiento óptimo cuando el proceso está bajo control, pero no lo es si, realmente, ha sufrido una perturbación que lo ha desplazado, o lo está desplazando, a una situación fuera de control. Si éste es el caso, aún cuando es posible, por la aleatoriedad del muestreo, que la observación (muestra) no aporte, individualmente, información suficiente para constatar la degradación del proceso, puesto que el estadístico muestral utilizado es un estimador, de la característica en cuestión del proceso, incorpora cierta cantidad de información que convendría considerar. Conscientes de esta circunstancia, una adecuada gestión de los gráficos de Shewhart, preconiza un examen vigilante para detectar posibles tendencias de los puntos, dentro de la zona de control, aproximándose sistemáticamente a las líneas de intervención, ya que, si continúa esa tendencia, posiblemente, la próxima observación puede quedar fuera de los límites, por lo que lo procedente sería reducir el intervalo de tiempo establecido hasta la siguiente observación y constatar si, efectivamente, el proceso está degradándose o, por el contrario, ha sido una tendencia aparente, debida al azar del muestreo.

Los métodos de las Sumas Acumuladas (SUMAC) sistematizan esta actitud de vigilancia de posibles tendencias en los gráficos de Shewhart, ya que acumulan las desviaciones de las observaciones respecto a un valor de referencia,  $Q$ . Sea  $Y$  el estadístico muestral utilizado para controlar la característica del proceso, entonces para las sucesivas muestras, se calcula

$$S_i = \text{máx} (0, (Y_i - Q) + S_{i-1}),$$

con  $S_0 = 0$ , y se considera que el proceso está fuera de control si el valor acumulado,  $S_i$  supera el valor  $H$ .

Lucas y Crosier [3], para mejorar la eficacia del gráfico SUMAC, recomiendan iniciar el control con una Rápida Respuesta Inicial, FIR (Fast Initial Response), para lo cual indican que se tome  $S_0 = H/2$ . De esta forma, cuando se implanta el control, o bien después de un reajuste, si el proceso está descentrado se detectará con mayor rapidez, mientras que si está correctamente centrado,  $S_i$  decrecerá prontamente a cero.

Los valores  $Q$  y  $H$  se determinan en función de las características del proceso, específicamente el nivel en que interesa opere, y aquel otro nivel que, representando una situación fuera de control, se desea detectar rápidamente para su corrección. Usualmente se determinaría el plan de control estableciendo los riesgos correspondientes a esas situaciones, sin embargo los métodos SUMAC lo hacen mediante las denominadas Longitudes de Ráfaga Media, LRM (Average Run Length).

Diversos autores [3] han puesto de manifiesto la relación entre los métodos SUMAC y el secuencial de la razón de probabilidades de Wald; de hecho, un esquema SUMAC es una secuencia de pruebas de Wald, con una hipótesis nula de que el proceso está centrado, frente a una hipótesis alternativa de que el descentramiento es  $2Q$ .

### 3. LA LONGITUD DE RÁFAGA MEDIA

La longitud de ráfaga media es el número de muestras que se examinará, en promedio, para obtener una señal de que el proceso está fuera de control (es decir, para que  $S_i$  supere el valor límite  $H$ ). Por tanto, si el proceso está en el nivel de calidad deseado, la LRM deberá ser grande, pues, en este caso, superar  $H$  representaría una falsa señal; en cambio, si el proceso está degradado, la LRM debe ser muy pequeña, al objeto de detectarlo rápidamente y corregirlo.

Para determinar las propiedades de un gráfico SUMAC, es decir, fijados  $Q$  y  $H$ , evaluar la LRM y su distribución en función del desplazamiento, se pueden utilizar dos procedimientos. El primero, debido a Page, resuelve una ecuación integral mediante un sistema de ecuaciones lineales, empleando una cuadratura de Gauss de 24 puntos. El procedimiento alternativo, propuesto por Brook y Evans, utiliza unas cadenas de Markov, sustituyendo el esquema continuo SUMAC por otro que presenta  $t + 1$  estados posibles, el inicial corresponde al SUMAC en el nivel cero, y el último, que es el de absorción, a un nivel mayor que  $H$ .

Fijados  $Q$  y  $H$ , la longitud de la ráfaga depende del valor del SUMAC,  $S$ , en el instante en que se produce la degradación del proceso, desplazándose del nivel deseado, un valor  $D$ , medido tomando como unidad la desviación tipo del estadístico utilizado en el SUMAC.

Diversos autores han obtenido las LRM situando el SUMAC en cero,  $S_0 = 0$ , que siendo el menor valor posible, implica que esas LRM son conservadoras, en el sentido de que las reales son ligeramente inferiores.

Debido a esta circunstancia, otros autores han definido la LRM estabilizada, como promedio ponderado de las LRM, dado el valor inicial del SUMAC, utilizando como elemento ponderador la distribución de los valores del SUMAC. Estos autores han evaluado dos tipos de LRM estabilizadas: las condicionales y las cíclicas. El procedimiento consiste en generar  $M$  valores SUMAC antes de la degradación del proceso y, seguidamente, los necesarios hasta advertir dicha degradación, siendo estos últimos los promediados para determinar las LRM condicional. Sin embargo, durante la generación de esos  $M$  valores, el SUMAC puede superar el intervalo de decisión  $H$ , en cuyo caso el método condicional descarta esa secuencia (de ahí el nombre, pues la evaluación de la LRM queda condicionada al hecho de que el SUMAC no haya superado a  $H$ ). Si se produce esa circunstancia, el método cíclico restablece el SUMAC a cero, y no descarta ninguna secuencia.

Los valores publicados muestran que las diferencias, entre las LRM, con el SUMAC en su valor inicial y las estabilizadas, oscilan entre un +3%, para pequeños desplazamientos, y un -3%, para los desplazamientos del orden de 4 o 5 desviaciones tipo.

Una forma objetiva, si bien particular, de tener en cuenta que, raramente, cuando se produzca la degradación del proceso,  $S$  será cero, es adoptar el FIR de Lucas y Crosier, que establece como valor inicial  $S_0 = H/2$ , y cuyas tablas de las LRM se han evaluado a partir de ese valor, [3]. Considerando que las diferencias entre las LRM, según las especificaciones alternativas, no son substanciales, ante el interés del FIR, se han adoptado y reproducido sus tablas; si bien ello no es imperativo, en esta exposición, pudiendo utilizarse idénticamente, para la especificación del SUMAC, las tablas que se consideren más idóneas.

#### 4. DETERMINACIÓN DEL GRÁFICO SUMAC

Por razones obvias de espacio, y por ser los de mayor utilización, se limitará la exposición a los gráficos SUMAC para la media del proceso, cuya característica a controlar sigue, razonablemente, una distribución normal.

Lo mismo que en los gráficos de Shewart, se requiere conocer la variancia,  $\sigma^2$ , de la característica que se controla, al objeto de, comparando la variabilidad del proceso con el intervalo entre tolerancias, saber si aquél es o no, apto, es decir, si su capacidad es la adecuada.

#### 4.1. CASO DE UN PROCESO PRECISO

Esta situación, especificada por  $6,18\sigma < (TS - TI)$ , donde  $TS$  y  $TI$  son, respectivamente, las tolerancias superior e inferior de la característica del proceso, queda esquematizada en la Figura 1, en la

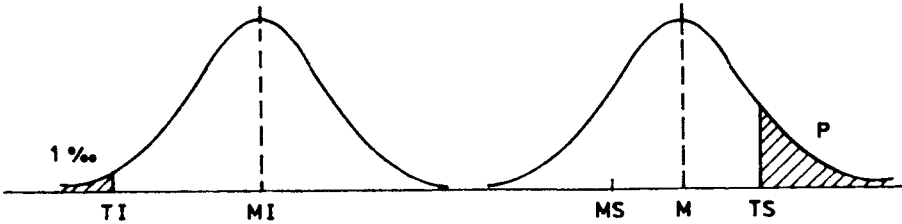


Figura 1

que el intervalo  $(MI, MS)$ , en forma similar al establecimiento de los gráficos de Shewhart, representa la zona en la que el proceso se considera bajo control. Si el proceso está centrado en un valor  $M$ , entonces los desplazamientos reducidos respecto a los extremos del intervalo de control son

$$D_s = (M - MS)\sqrt{n}/\sigma, \quad y$$

$$D_i = (M - MI)\sqrt{n}/\sigma.$$

Estos desplazamientos representan situaciones que deben corregirse cuando  $D_s > 0$ , o bien,  $D_i < 0$ . No obstante, puesto que, a igual valor de  $D_s$  y  $-D_i$ , especifican procesos similares, por simetría, el desplazamiento se toma como cero si  $D_s < 0$  y  $D_i > 0$ , ya que ésta es una situación bajo control, como  $D_s$  si  $D_i > D_s > 0$ , puesto que en este caso la degradación ha sido en la dirección de  $TS$ , y como  $-D_i$  si  $D_s < D_i < 0$ , desviación hacia  $TI$ , al ir a consultar las tablas de las LRM.

Dado que deben detectarse ambos tipos de desplazamiento mediante la media,  $\bar{X}$ , de una muestra de tamaño  $n$ , la forma operativa de realizar el control SUMAC consiste en calcular

$$Z_i = (\bar{X}_i - MS)\sqrt{n}/\sigma \quad e \quad Y_i = (\bar{X}_i - MI)\sqrt{n}/\sigma$$

donde el subíndice  $i$  representa la cronología de la muestra, a partir del inicio del control, o desde la última revisión del proceso.

Obviamente, por todo lo ya comentado, estos estadísticos requieren ser vigilados cuando  $Z_i > 0$ , que equivale a  $\bar{X}_i > MS$ , o bien, si  $Y_i < 0$ , es decir  $\bar{X}_i < MI$ ; para lo cual se evalúan los acumuladores, superior e inferior, respectivamente.

$$U_i = \text{máx} (0, Z_i - Q + U_{i-1}), \quad y$$

$$L_i = \text{máx} (0, -Y_i - Q + L_{i-1}),$$

donde  $Q$  es el valor de referencia y  $U_0 = L_0 = H/2$ , siendo  $H$  el valor límite. Si  $U_i > H$ , o bien  $L_i > H$ , se constata una situación que, casi seguramente, representa un proceso degradado que debe corregirse.

Si se desea visualizar la evolución del control en un gráfico similar al de Shewhart, se puede optar por un esquema tal como el de la Figura 2, en el que el acumulador inferior  $L_i$  se marca cambiando de signo (ya que, por el sistema empleado en su cálculo, siempre resulta positivo, es decir, con signo contrario al que realmente le corresponde), y sólo se señala el acumulador distinto de cero, o bien una marca en la zona central rayada, si ambos son nulos.

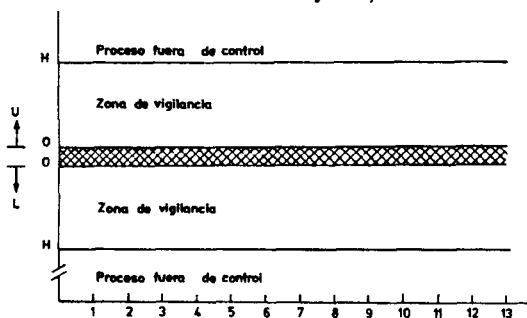


Figura 2

**TABLA I**

Porcentaje defectuoso en función del valor de referencia ( $Q$ ) y del tamaño de muestra ( $n$ ). Caso preciso

$n$	Características $Q$					
	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,5
2	< 0,1	0,31	0,86	2,12	4,69	16,63
3	< 0,1	0,25	0,60	1,31	2,65	8,72
4	< 0,1	0,23	0,48	0,96	1,83	5,60
5	< 0,1	0,21	0,41	0,78	1,41	4,02
6	< 0,1	0,19	0,36	0,66	1,15	3,11

Para la elección del esquema de control (valores de  $Q$  y  $H$ ) en el caso preciso, la Tabla I presenta, en función del tamaño de la muestra,  $n$ , y de  $Q$ , el porcentaje defectuoso de la fabricación, que se designa CR (calidad rechazable), asociado a un desplazamiento  $D = 2Q$ . Esta tabla permite, entonces, en función de la calidad rechazable contra la que se desea protección, elegir simultáneamente  $n$  y  $Q$ .

**TABLA II**

Longitudes de ráfaga media en función de las características del SUMAC y del desplazamiento. Caso preciso.

Características		Desplazamiento $D$						
$H$	$Q$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
4,0	0,25	66,57	20,25	3,70	2,35	1,77	1,44	1,23
6,0	0,25	224,5	38,76	5,05	3,17	2,37	1,93	1,64
8,0	0,25	684,3	63,25	6,39	3,97	2,94	2,38	2,05
10,0	0,25	197,2	93,75	7,72	4,77	3,51	2,82	2,38
3,0	0,50	108,0	33,99	4,21	2,35	1,68	1,35	1,16
4,0	0,50	316,4	66,57	5,29	2,86	2,01	1,59	1,32
5,0	0,50	895,9	124,9	6,35	3,37	2,36	1,86	1,54
6,0	0,50	2492	225,4	7,38	3,88	2,70	2,12	1,77
2,25	0,75	131,9	46,22	5,14	2,50	1,67	1,31	1,14
3,0	0,75	426,6	108,0	6,76	3,01	1,95	1,49	1,24
3,75	0,75	1345	242,8	8,43	3,53	2,25	1,70	1,39
4,5	0,75	4193	534,0	10,1	4,04	2,56	1,92	1,56
1,5	1,0	89,74	39,44	5,66	2,61	1,66	1,28	1,12
2,0	1,0	250,2	88,45	7,78	3,13	1,87	1,40	1,17
2,5	1,0	699,9	195,9	10,3	3,66	2,11	1,53	1,25
3,0	1,0	1934	426,6	13,2	4,21	2,35	1,68	1,35
0,7	1,5	66,43	34,92	6,97	3,20	1,89	1,37	1,15
1,1	1,5	181,2	83,78	11,4	4,30	2,22	1,50	1,21
1,5	1,5	542,8	216,1	18,7	5,66	2,61	1,66	1,28
1,9	1,5	1748	585,5	30,5	7,32	3,02	1,83	1,37

Con el valor de  $Q$  se consulta la Tabla II, de las LRM, al objeto de fijar  $H$ ; para ello se localizan las líneas asociadas al valor de  $Q$  y las dos columnas encabezadas con los desplazamientos 0 y  $2Q$ , (estas columnas representan, respectivamente, un proceso bajo control y fuera de control, con la calidad rechazable, CR). En la subtabla, determinada por las líneas y columnas especificadas, se elige el valor de  $H$  al que se asocie la LRM mayor posible en la columna encabezada 0, compatible con la LRM más pequeña posible en la otra columna.

Si no se consideran adecuadas las LRM de esta subtabla, se puede realizar otra elección de  $n$  y  $Q$  mediante la Tabla I, y constatar si, con estos nuevos valores, existe en la Tabla II una  $H$  cuyas LRM concuerden más con los deseos del usuario, reiterando este proceso hasta llegar a un compromiso entre lo ideal y las posibilidades reales de este método.

#### 4.2. CASO DE UN PROCESO POCO PRECISO

Si el proceso no es apto,  $6, 18\sigma > (TS - TI)$ , se considera bajo control si está perfectamente centrado respecto a las tolerancias, y se desea detectar cualquier desplazamiento respecto a esa situación. La proporción de piezas defectuosas, aún con ese centraje ideal, es superior al dos por mil, y depende de la tolerancia,  $TS - TI$ , y de la variancia del proceso.

En esta situación, la proporción de piezas defectuosas, para un desplazamiento dado, depende de la relación entre la tolerancia y la variabilidad del proceso, por lo que no puede calcularse de forma única, como acontece en el caso preciso. Por ello, fijado un determinado tamaño de la muestra,  $n$ , y para los valores de la característica  $Q$ , especificados en la Tabla III, se debe calcular la proporción defectuosa, asociada a cada valor de  $Q$  tal como expone la Figura 3, donde  $CT = (TI + TS)/2$ , calculando

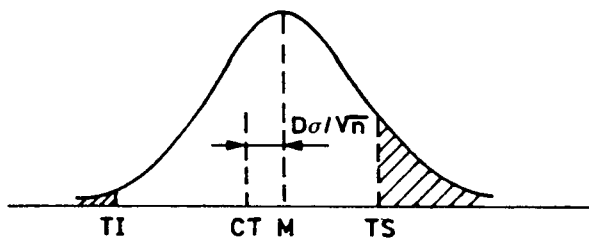


Figura 3

$$Z_s = (TS - TI)/2\sigma - 2Q/\sqrt{n},$$

$$Z_i = (TS - TI)/2\sigma + 2Q/\sqrt{n}$$

con ayuda de las tablas de la ley normal, se obtiene



$$P(Z > Z_s) = p, \quad \text{y} \quad P(Z > Z_i) = q$$

La proporción de piezas defectuosas, asociadas al valor de  $Q$ , utilizado en las expresiones anteriores, es  $p + q$ , y es de señalar que, para enjuiciar en su justo valor esta proporción, se ha de tener presente la que se produce con un centraje perfecto de la fabricación. (Realizados estos cálculos, para un valor de  $n$  y todos los de  $Q$  de la Tabla III, se dispone del equivalente a la línea de la Tabla I, del caso preciso, para la  $n$  en cuestión.)

**TABLA III**

Longitudes de ráfaga media en función de las características del SUMAC y del desplazamiento. Caso poco preciso.

Características		Desplazamiento $D$						
$H$	$Q$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
4,0	0,25	28,03	8,682	3,690	2,345	1,770	1,441	1,233
6,0	0,25	100,0	13,38	5,053	3,169	2,372	1,932	1,638
8,0	0,25	315,9	17,83	6,390	3,967	2,940	2,383	2,046
10,0	0,25	936,2	22,12	7,724	4,767	3,509	2,815	2,381
3,0	0,50	49,19	12,88	4,125	2,352	1,680	1,348	1,165
4,0	0,50	148,7	20,06	5,287	2,862	2,014	1,586	1,325
5,0	0,50	430,4	28,67	6,347	3,372	2,362	1,856	1,540
6,0	0,50	1215	38,71	7,382	3,875	2,703	2,125	1,774
2,25	0,75	62,08	18,16	5,121	2,497	1,670	1,314	1,138
3,00	0,75	205,2	33,03	6,747	3,009	1,949	1,489	1,243
3,75	0,75	656,9	56,19	8,425	3,528	2,251	1,696	1,386
4,50	0,75	2068	91,62	10,12	4,042	2,560	1,922	1,559
1,5	1,0	42,82	17,75	5,627	2,606	1,657	1,282	1,115
2,0	1,0	120,8	33,57	7,767	3,125	1,873	1,395	1,174
2,5	1,0	341,9	61,02	10,31	3,663	2,107	1,529	1,252
3,0	1,0	952,6	107,5	13,25	4,208	2,353	1,680	1,348
1,1	1,5	89,02	38,71	11,33	4,287	2,225	1,502	1,207
1,5	1,5	267,9	87,31	18,67	5,657	2,608	1,657	1,282
1,9	1,5	866,4	200,6	30,49	7,325	3,020	1,828	1,371
2,3	1,5	2990	461,1	48,98	9,260	3,447	2,012	1,473

A partir de las proporciones defectuosas, se elige un valor de  $Q$ , y utilizando la Tabla III, en forma análoga al empleo de la Tabla II, se fija el valor de  $H$ , según las LRM más idóneas. Si las LRM de la subtabla, asociada a la  $Q$  elegida y los desplazamientos  $D = 0$  y  $D = 2Q$ , no son satisfactorias, se puede proceder a aumentar el tamaño de la muestra, y reiterar el procedimiento de elección de  $Q$  y  $H$ .

Definidos, mediante este procedimiento,  $n$ ,  $Q$ , y  $H$ , el control se aplica como en el caso preciso, si bien aquí el estadístico es único:

$$W_i = (\bar{X}_i - CT)\sqrt{n}/\sigma ,$$

y los acumuladores son:

$$U_i = \text{máx} (0, W_i - Q - U_{i-1}), \text{ y}$$

$$L_i = \text{máx} (0, -W_i - Q + L_{i-1}).$$

## 5. LOS GRÁFICOS DE SHEWHART

Al presentar un método alternativo (los gráficos SUMAC), parece ineludible compararlo con el tradicional y ampliamente difundido: los gráficos de Shewhart. La base idónea de comparación posiblemente sea la evolución de la LRM, en función de los desplazamientos reducidos, ya que éstos están relacionados, para un tamaño de muestra y una capacidad de calidad específicos, con las proporciones defectuosas; por tanto será útil disponer de las LRM asociadas a un gráfico de Shewhart.

La peculiaridad de estos gráficos es que, además de las líneas de intervención, gestionan el control del proceso mediante las líneas de atención, que, alternativamente, en su caso, pueden dar lugar a intervenir el proceso. La regla operativa consiste en, dada la señal de atención, extraer inmediatamente (es decir, no se debe esperar a que transcurra el intervalo intermuestral establecido) otra muestra, cuya información permite tomar la decisión pertinente.

Por ello, para determinar las LRM asociadas a un gráfico de Shewhart, por no corresponder a los períodos intermuestrales, las muestras adicionales, requeridas por las señales de atención, no se contabilizan para determinar la longitud de la ráfaga. Sobre esta base, las LRM de ambos métodos son totalmente equiparables.

Definiendo como variables,  $X$  el número de períodos entre muestras hasta, e inclusive, la señal de intervenir, las condiciones del sistema corresponden a las de un modelo geométrico:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < p < 1,$$

donde  $p$  es la probabilidad de que, al final de un período entre muestras, se produzca la señal de intervención. La Figura 4

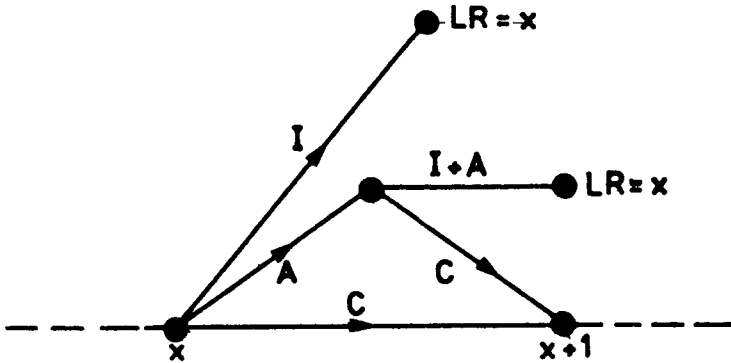


Figura 4

esquematiza esa posibilidad; en ella  $I$  representa la probabilidad de que, para un desplazamiento reducido  $D$ , de la media del proceso, la media de la muestra quede en la zona de intervención, a la probabilidad de que se sitúe entre una línea de intervención y una de atención, y  $C$  la de que el proceso esté bajo control; obviamente  $I + A + C = 1$ , y

$$p = I + A * (I + A).$$

La longitud de ráfaga media es, entonces,  $E(X) = 1/p$ , y su variancia es  $V(X) = 1/p^2$ , y la Tabla IV resume, para ambos casos, preciso y poco preciso, los valores de  $p$  y LRM asociados a los mismos desplazamientos reducidos que las Tablas de SUMAC.

**TABLA IV**

Longitudes de ráfaga media asociada a los gráficos de Shewhart.

Desplazamiento $D$	Caso preciso		Caso poco preciso	
	$p$	$LRM$	$p$	$LRM$
0	0,0016	625	0,0044	227,3
0,5	0,0097	103,5	0,0108	92,3
1	0,0436	22,9	0,0441	22,7
1,5	0,1420	7,04	0,1422	7,03
2	0,3330	3,00	0,3330	3,00
2,5	0,5794	1,73	0,5794	1,73
3	0,7931	1,26	0,7931	1,26

## 6. COMPARACIÓN Y CONCLUSIONES

Dado que la elección del método SUMAC requiere especificar el desplazamiento reducido,  $D_0$ , contra el que se quiere protección ( $Q$  el valor de referencia, uno de los parámetros del SUMAC, es la mitad de ese desplazamiento), la comparación de la evolución de las LRM debe realizarse teniendo en cuenta el valor  $D_0$  que delimita las calidades aceptable y rechazable. Efectivamente, para valores del desplazamiento inferiores a  $D_0$  se deseeara una LRM grande, y para desplazamientos no menores la LRM deberá ser lo más pequeña posible. Sin embargo, conviene tener presente que, de hecho, todo desplazamiento es indeseable y que si se acepta, como mal menor, es por limitaciones de la metodología, pues una discriminación perfecta es costossima, sólo exigible en industrias cuyos productos afecten a la seguridad humana; por ello, y matizado por la capacidad de calidad del proceso, el mejor método de control es aquel que presenta la máxima LRM para  $D = 0$ , y cuya LRM es uniformemente mínima para  $D > 0$ .

Comparando, a la luz de estas consideraciones, las LRM asociadas a ambos métodos, lo primero que se constata es que ninguno es uniformemente mejor que el otro, seguidamente se aprecia que las LRM asociadas a los gráficos SUMAC son más discriminatorias que las de Shewhart, y, finalmente, que, para grandes desplazamientos, éstas tienden a ser mejores que aquéllas. Todo esto queda ilustrado en la Figura 5, para una situación representada por un proceso preciso,

con una calidad rechazable especificada por los desplazamientos reducidos no menores que 1, lo cual lleva aparejado, al utilizar el método SUMAC, que el valor de referencia es  $Q = 0,5$ . En dicha figura se expone la evolución del logaritmo neperiano de las LRM, en función del desplazamiento reducido, para los valores del intervalo de decisión,  $H$ , según la Tabla II, mediante las líneas de trazo fino; la de trazo grueso corresponde al método de Shewhart. En esta situación específica, si bien ningún SUMAC es uniformemente mejor, hay dos, los correspondientes a los valores 5 y 6 de  $H$ , cuyas ventajas respecto a Shewhart compensan sobradamente sus desventajas: la disminución de la LRM para  $D = .5$  (que realmente es una situación degradada) es compensada por el valor para  $D = 0$ ; y para  $D = 2.5$  y 3 las diferencias son de menor cuantía y, además, quedan mitigadas, en el caso de causas de degradación que produzcan un desplazamiento progresivo, por la mayor capacidad del SUMAC de detectarlas en desplazamientos intermedios.

En la Tabla V se comparan ambos métodos en otra situación concreta: caso poco preciso y valor de referencia  $Q = 0,25$ , por lo que la calidad rechazable corresponde a desplazamientos reducidos no menores de 0,5, y que en la tabla queda delimitada por la raya horizontal discontinua. Las LRM recuadradas corresponden a los valores peores que los de Shewhart. Los comentarios que se desprenden son similares a los de la Figura 5.

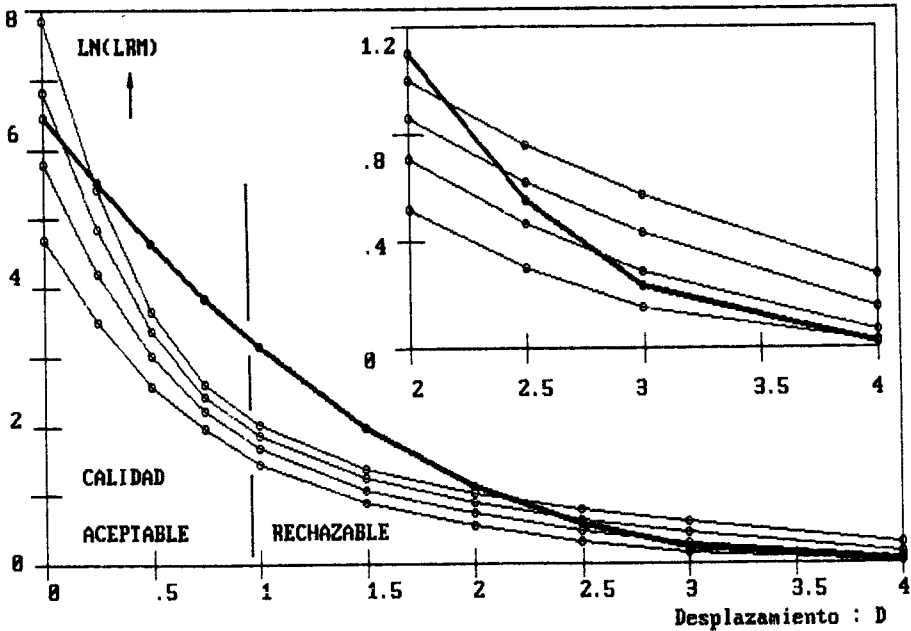


Figura 5

**TABLA V**

Longitudes de ráfaga media en función de  $D$  y  $H$  y su comparación con las de Shewhart.

$D$	$H$ : 4	6	8	10
0	28,3	100	316	936
0,5	8,7	13,4	17,8	22,1
1	3,7	5,1	6,4	7,7
1,5	2,3	3,2	4,0	4,8
2	1,8	2,4	2,9	3,5
2,5	1,4	1,9	2,4	2,8
3	1,2	1,6	2,0	2,4

La conclusión, pues, a la que se llega es que, salvo criterios específicos, los gráficos SUMAC, si bien no uniformemente mejores que los de Shewhart, son más discriminatorios y de utilización más recomendable, particularmente los relativos a valores de  $H$  intermedios-altos.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Crosier, R.B.** (1986), "A New Two-sided Cumulative Sum Quality Control Scheme", *Technometrics*, 28, 187-194.
- [2] **Goel, A.L.** (1971), "Determination of ARL and a Contour Nomogram for CUSUM Charts to Control Normal Mean", *Technometrics*, 13, 221-230.
- [3] **Lucas, J.M. y Crosier, R.B.** (1982), "Fast Initial Response for CUSUM Charts to Control Normal Schemes", *Technometrics*, 24, 199-205.
- [4] **Lucas, J.M.** (1985), "Counted Data CUSUM'S", *Technometrics*, 27, 129-144.
- [5] **Pepió, M. y Polo, C.** (1986), "Esquemas de Control por Sumas Acumuladas", *CEAM*, 197, 23-28.
- [6] **Pepió, M. y Polo, C.** (1987), "Informatización del Control de Calidad", *Novamáquina*, 131, 135-139.

- [7] **Vardeman, S. y Ray D.** (1985), "Average Run Length for CUSUM Schemes when Observations are Exponentially Distributed", *Technometrics*, 27, 145-150.
- [8] **Waldmann, K.H.** (1986), "Bounds for the Distribution of the Run Length of One-sided and Two-sided CUSUM Quality Control Schemes", *Technometrics*, 28, 61-68.
- [9] **Woodall, W. H.** (1983), "The Distribution of the Run Length of One-sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables", *Technometrics*, 25, 295-301.
- [10] **Woodall, W.H.** (1984), "On Markov Chain Approach to the Two-sided CUSUM", *Technometrics*, 26, 41-46.
- [11] **Woodall, W.H. y Ncube, M.M.** (1986), "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures", *Technometrics*, 27, 185-199.

