OPTIMITZACIÓ AMB HORITZONS PASSAT
I FUTUR, MÒBILS I LIMITATS

J. AGUILAR   O. TANTAWY

En aquest article ens proposem d'estudiar el funcionament de processos d'optimització que fan dependre l'acció present d'una informació reduïda a un temps passat finit, i d'un criteri de qualitat avaluat sobre un horitzó futur, tots dos mòbils, enganxats a l'instant present i de durades constants.

Estudiem la sèrie de 9 problemes de complexitat creixent basats en un sistema linial amb criteri quadràtic, partint del cas òptim determinista ben conegut, passant pel problema de filtratge amb passat limitat i mòbil, per a arribar al control sub-òptim i al càlcul dels millors valors a donar als horitzons passat i futur quan el procés és de durada total limitada i coneguda.

1. INTRODUCCIÓ

L'home d'estat o el director d'una empresa, o fins i tot l'individu en general, governen o accionen avui a partir de la informació recollida al passat i amb l'esperança de satisfer un criteri de qualitat definit sobre el futur. El període sobre el qual es desenvolupa llur acció és sempre afitat i va d'un començament, naixença o nomenament fins a una fi, mort o enderrocament.

Tanmateix la informació passada desborda d'aquesta fita inicial i el criteri d'èxit segueix més enllà de la fita final.

Tenir en compte el passat més remot possible, si bé sembla favorable a la saviesa de les decisions té el gran inconvenient de fer-les assentar sobre informacions de menys en menys segures.

De manera simètrica, la política que pretén preveure un futur molt allunyat sembla ésser la millor sempre i quan s'estigui disposat a suportar una gran insatisfacció en un futur immediat, i inexorablement arribarà el temps de la fi del període d'acció.

Ens hem proposat, doncs, d'estudiar en casos prou fàcils -on l'anàlisi matemàtica completa es fa possible- el funcionament de processos d'optimització que fan dependre l'acció present de la informació recollida en un horitzó passat, i d'un criteri de qualitat sobre un horitzó futur "h" (tots dos limitats i fixos durant el període total i finit sobre el qual un balanç global del funcionament pot ésser calculat).

2. PROBLEMES DE CONTROL DE SISTEMES DETERMINISTES

2.1 Problema 0: Control òptim

Començarem pel més senzill dels casos que podem analitzar: és el sistema dinàmic linial determinista

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0)=x_0 \qquad (1)$$

$$x \in R^n \,, \quad u \in R^r$$

La seva evolució serà considerada únicament entre els instants t_0 i t_f.

Hi associarem un índex de qualitat o cost sota la forma d'una funció quadràtica de la trajectòria $x(t)$, de les accions de control

- J. Aguilar i O. Tantawy. LAAS du CNRS. 7 Avenue du Colonel Roche. 31500 Toulouse.
- Article rebut el Feber de 1979.

$u(t)$ i de l'estat final $x(t_f)$.

$$V(t_0,t_f,u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt + x^T(P_f x(t_f) \qquad (2)$$

A causa de l'equació (1) aquest cost sols depèn en $u(t)$, tot i essent descomposat en dues parts, l'una on $u(t)$ hi és explícitament i l'altre on $u(t)$ hi és per l'intermediari de $x(t)$ i de l'equació (1).

La solució d'aquest problema d'optimització, és a dir, de minimització de $V(t_0,t_f,u(t))$ respecte a $u(t)$, és ben coneguda i ens porta a definir una llei de control en bucle tancat (feedback) donada per /1/:

$$u^0(t) = K(t)\ x(t) \qquad t\in[t_0,t_f]$$

amb

$$K(t) = -R^{-1}\ B^T\ P(t) \qquad (3)$$

que depèn de la trajectòria de l'equació matricial quadràtica dita de Riccati:

$$-\frac{dP}{dt} = A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q \qquad (4)$$

$$P(t_f) = P_f \quad \text{condició final}$$

2.2 Problema 1: Control subòptim a horitzó mòbil limitat

Volem reemplaçar la llei de control $u^0(t)$ per una llei subòptima $u^h(t)$ obtinguda per un òrgan de control que, a cada instant t tractarà de resoldre el mateix problema 0 però on l'interval $[t_0,t_f]$ es troba reemplaçat per l'interval $[t,t+h]$ amb $h>0$.

És a dir que $u^h(t)$ és el valor que la llei de control

$$\{u^h(\theta),\ \theta\in[t,t+h]\}$$

pren a l'instant $\theta=t$.

Podem calcular la llei de control $u^h(\theta)$ tractant de minimitzar el criteri

$$V(t,t+h,u(\theta)) = \int_t^{t+h} [x^T(\theta)Qx(\theta)+u^T(\theta)Ru(\theta)]d\theta + x^T(t+h)P_f x(t+h) \qquad (5)$$

Aquesta llei $u^h(\theta)$ és doncs donada per:

$$u^h(\theta) = K^h(\theta)\ x(\theta) \qquad \theta\in[t,t+h] \qquad (6)$$

amb

$$K^h(\theta) = -R^{-1}B^TP^h(\theta)$$

i $P^h(\theta)$, com a (4) ve calculat per l'equació de Riccati:

$$-\frac{dP^h}{d\theta} = A^TP^h+P^hA-P^hBR^{-1}B^TP^h+Q \qquad (7)$$

$$P^h(t+h) = P_f \qquad \text{Condició final}$$

Podem constatar fàcilment, comparant (7) amb (4), (/2/, /3/), que:

$$P^h(t) = P(t_f-h)$$

i, doncs,

$$u^h(t) = K^h(t)\ x(t)$$

amb

$$K^h(t) = -R^{-1}B^TP^h(t) = -R^{-1}B^TP(t_f-h)$$

$K^h(t)$ no depèn de t i podem escriure:

$$K_h = -R^{-1}B^TP(t_f-h) \quad \text{i} \quad u^h(t) = K_h x(t) \qquad (8)$$

Enunciarem, doncs, la proposició següent:

PROPOSICIO 1

El control subòptim a horitzó mòbil futur h per a un sistema linial constant i determinista relativament a un criteri quadràtic constant consisteix en l'aplicació d'una contra-reacció (feedback) linial de guany constant. El valor d'aquest guany, o matriu de contra-reacció, ve donat pel valor que pren el guany òptim a l'instant t_f-h.

2.3 Problema 2: Millor control sub-òptim amb horitzó limitat

Ara ens proposem d'escollir l'horitzó $h=h^0$ que doni el millor criteri de qualitat global

$$V(t_0,t_f,u^h(t)) =$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)Qx(t)+u^{h^T}(t)Ru^h(t)\right]dt +$$

$$+ x^T(t_f)P_f x(t_f) \qquad (9)$$

Podem escriure (9), gràcies a (8) com

$$V(t_0,t_f,u^h(t)) =$$

$$=\int_{t_0}^{t_f} x^T(t)(Q+K_h^T RK_h)x(t)dt+x^T(t_f)P_f x(t_f) \qquad (10)$$

També podem escriure l'equació del sistema - (1) utilitzant (8) amb la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A + K_h B)x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

amb això podem explicitar x(t) $\forall t\in[t_0,t_f]$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{(A+K_hB)(t-t_0)} \\ x_0 &= \phi_h(t-t_0)x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Finalment el criteri de qualitat serà:

$$V(t_0 t_f,u^h(t)) = x_0^T M(h)x_0 \qquad (13)$$

amb

$$M(h) = \int_{t_0}^{t_f}\phi_h(t-t_0)(Q+K_h^T RK_h)\phi(t-t_0)dt +$$

$$+ (t_f-t_0)P_f\phi(t_f-t_0) \qquad (14)$$

El valor òptim h^0 que minimitza (13) és doncs donat teòricament per

$$\frac{d}{dh}(x_0^T M(h)x_0) = 0 \quad \text{o} \quad x_0^T\frac{dM(h)}{dh}x_0 = 0 \qquad (15)$$

Només si

$$\frac{dM(h)}{dh} = 0$$

té una solució es pot trobar un valor h^0 independent de x_0. Això esdevé en particular - en el cas escalar. També podem notar que la solució de (15) depèn únicament de la direcció definida per x_0 ja que si es reemplaça - x_0 per $x_0'=\lambda x_0$ amb $\lambda\in R$, la solució no varia.

2.4 Problema 3: Millor control subòptim en - mitjana

Per tal d'evitar aquesta dependència de la - condició inicial x_0, i aprofitant de la sola dependència relativa a la direcció de x_0, podem considerar aquest últim com una variable aleatòria vectorial de mitjana nul-la i de - covariància

$$E[x_0x_0^T] = X_0$$

El criteri per a minimitzar serà l'esperança matemàtica del cost determinista, és a dir

$$E\,V(t_0,t_f,u^h(t)) = E[x_0^T M(h)x_0] =$$

$$= \text{traça}[M(h)\ X_0] \qquad (16)$$

Si agafem $X_0=\lambda I_n$ de manera a donar la mateixa probabilitat a totes les direccions a R^n, -- constatarem que el mínim de (16) no depèn de λ i serà donat per l'equació

$$\frac{d}{dh}(\text{traça}[M(h)]) = 0 \qquad (17)$$

2.5 Cas discret (Resum dels resultats precedents)

Les notacions emprades aquí seran les mateixes que per al cas continu. Tots els resultats - precedents són vàlids si reemplacem el sistema (1) pel seu anàleg en discret, és a dir, per t=0,1,2,...,f, $t\in N$

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (D1)$$

El criteri de qualitat s'escriu:

$$V(0,f,u(t)) = \sum_{i=0}^{f-1}(x^T(i)Qx(i)+u^T(i)Ru(i))+$$

$$+ x^T(f)P_f x(f) \qquad (D2)$$

La llei de control òptim és:

$$u^0(t) = K(t)\ x(t)$$

$$K(t) = -(R+B^T P(t+1)B)^{-1}B^T P(t+1)A$$

i l'equació de Riccati s'escriu:

$$P(t) = A^T P(t+1) A - (A\ P(t+1)\ B) \cdot$$

$$\cdot\ (R+B^T\ P(t+1)\ B)^{-1}\ (B^T P(t+1) A) + Q \qquad (D4)$$

$$P(f) = P_f$$

L'horitzó h ha d'ésser un nombre enter i el criteri instantani (5) es torna:

$$V(t,t+h,u(\theta)) = \sum_{\theta=t}^{\theta=t+h-1} (x^T(\theta) Q x(\theta) +$$

$$+ u^T(\theta) R u(\theta)) + x^T(t+h) \cdot$$

$$\cdot\ P_f x^T(t+h) \qquad (D5)$$

La llei de control corresponent és:

$$u^h(\theta) = K^h(\theta)\ x(\theta)$$

amb

$$K^h(\theta) = -(R+B^T P^h(\theta+1) B)^{-1} B^T P^h(\theta+1) A \qquad (D6)$$

$$\theta \in [t,t+h]$$

i l'equació de Riccati és

$$P^h(\theta) = A^T P^h(\theta+1) A - A^T P^h(\theta+1) B (R+B^T P^h(\theta+1) B)^{-1} \cdot$$

$$\cdot\ B^T P^h(\theta+1) A + Q$$

i

$$P^h(\theta+h) = P_f \qquad (D7)$$

Això ens porta al mateix resultat que (8), - és a dir

$$K^h(t) = K_h$$

constant, i

$$K_h = -(R+B^T P(f-h+1) B)^{-1} B^T P(f-h+1) A \qquad (D8)$$

El millor control subòptim a horitzó limitat s'obté per la minimització respecte a h de

$$V(t_0,t_f,u^h(t)) = \sum_{i=0}^{f-1} x^T(i)\,(Q+K_h R K_h)\, x(i) +$$

$$+ x^T(f) P_f x(f) \qquad (D10)$$

on es pot calcular x(i) amb

$$x(i) = (A+K_h B)\ x(i-1) \qquad (D11)$$

$$x(0) = x_0$$

o sia

$$x(i) = (A+K_h B)^i x_0 = \phi^i x_0$$

i doncs (D10) es torna

$$V(t_0,t_f,u^h(t)) = x_0 M(h) x_0 \qquad (D13)$$

amb

$$M(h) = \sum_{i=0}^{f-1} (\phi^{iT} (Q+K_h^T R K_h) \phi^i) + \phi^{fT} P_f \phi^f \qquad (D14)$$

Els resultats (15), (16) i (17) són idèntics per al cas discret.

2.6 Exemples

La versió en temps discret ens ha permès d'elaborar un programa de càlcul numèric del criteri global en funció de h i de traçar les corbes corresponents que mostren l'existència d'un h^0. L'anàlisi matemàtica de la convexitat d'aquestes funcions de h no ha estat encara feta. La recerca automàtica del valor h^0 sense traçar les corbes es pot fer per programació no linial ja que semble que la funció a minimitzar sigui ben condicionada. Les figures 1, 2 i 3 il.lustran tres exemples diferents.

3. PROBLEMES DE CONTROL DE SISTEMES ESTOCÀSTICS

3.1 Problema 4: Filtre linial òptim

El més simple dels sistemes estocàstics que considerem és el linial amb pertorbacions -- gaussianes i observacions linials:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + w \qquad (18)$$

$$y = Hx + v \qquad y \in R^m$$

on v(t) i w(t) són sorolls blancs gaussians, independents de x_0 i, entre ells, i definits per llur potència, o covariància instantania.

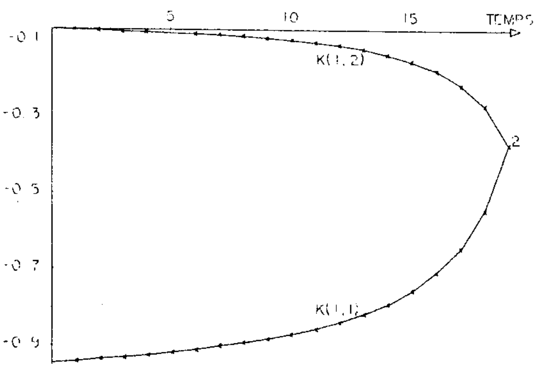

Fig. 1-a.
Guanys de comandament òptim

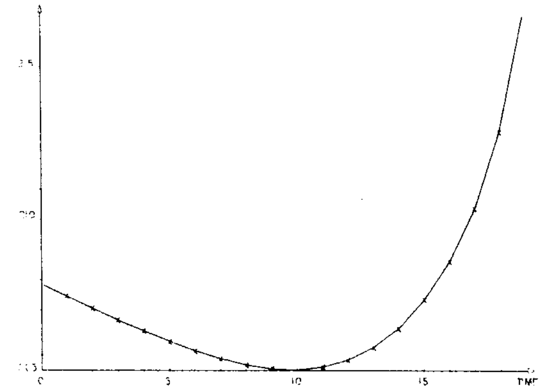

Fig. 1-b.
Corba de criteri subòptim en funció de h

Sistema discret equacions (D1) i (D2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = [20] \quad P_f = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ .0 & 12 \end{bmatrix}$$

Mínim del criteri subòptim = 199.980   Valor del criteri òptim = 196.230

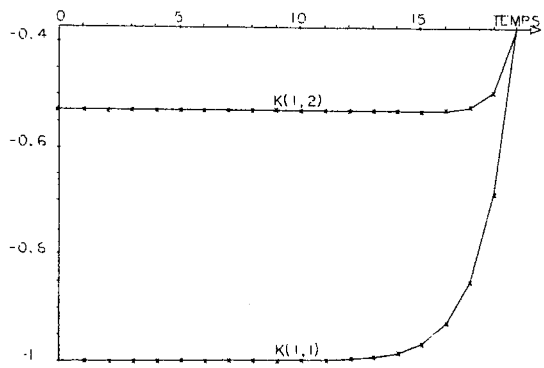

Fig. 2-a.
Guanys de comandament òptim

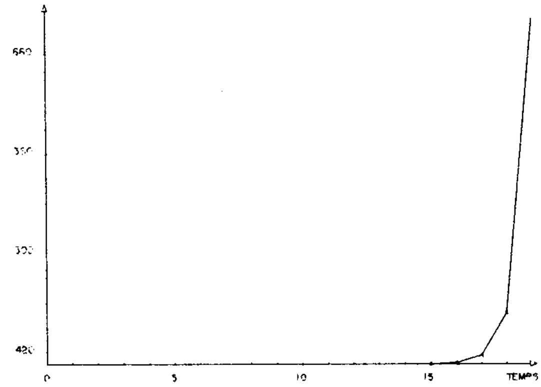

Fig. 2-b.
Corba de criteri subòptim en funció de h

Sistema discret equacions (D1) i (D2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad R = [20] \quad P_f = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Mínim del criteri subòptim = 409.822   Valor del criteri òptim = 401.153

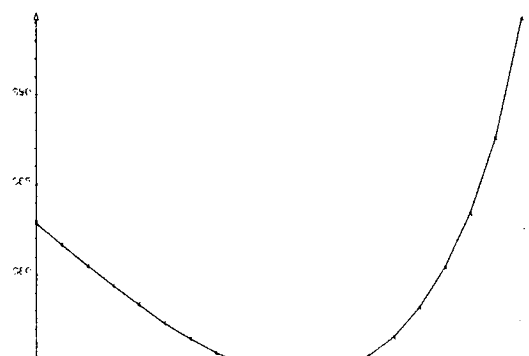

Fig. 3.
Corba del criteri subòptim en funció de h

Sistema discret equacions (D1) i (D2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = [20] \quad P_f = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Mínim del criteri subòptim = 869.429   Valor del criteri òptim = 863.806

*La evolució del guany òptim és la mateixa de la Fig. 2-a.

$$Ew(t)w^T(s) = \delta(t-s)W \tag{19}$$

$$Ev(t)v^T(s) = \delta(t-s)V$$

La condició inicial x_0 serà també considerada gaussiana i definida per la seva mitjana i la seva covariància:

$$E[x(t_0)] = \bar{x}_0$$

$$E[(x(t_0)-\bar{x}_0)(x(t_0)-\bar{x}_0)^T] = X_0$$

Es ben conegut que el control òptim del sistema (18) amb referència al mateix criteri de qualitat del problema 0, (2), ve donat per la mateixa llei de contra-reacció (3) però on l'estat $x(t)$, que en el cas (18) és inaccesible, es troba reemplaçat per l'estimador òptim $\hat{x}(t)$ donat pel filtre linial òptim, o filtre de Kalman-Bucy /4/:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}(t) + L(t)(y(t)-H\hat{x}(t)) \tag{20}$$

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

on el guany és variable amb el temps:

$$L(t) = f(t)H^TV^{-1} \tag{21}$$

i depèn de l'equació de Riccati

$$\frac{dF}{dt} = AF+FA^T-FH^TV^{-1}HF+W \tag{22}$$

$F(t_0) = X_0$ condició inicial.

El vector $\hat{x}\in R^n$ és l'esperança condicional de $x(t)$ i la matriu simètrica nxn: $F(t)$ és la covariància condicional relativament a les observacions, és a dir

$$\hat{x}(t) = E[x(t) \mid y(s),\ s\in[t_0,t]]$$

i

$$F(t) = E[(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))^T \mid y(s),\ s\in[t_0,t]]$$

3.2 Problema 5: Filtre subòptim constant

Suposem que l'estimador de l'estat del sistema (18), després d'haver observat la seva sortida $y(s)$ a l'interval $[t-1,t]$, és $\hat{x}_1(t)$. Suposem també que a l'instant t-1 tenim

$$\bar{x}(t-1) = E[x(t-1)] \tag{23}$$

i

$$E[(x(t-1)-\bar{x}(t-1)(x(t-1)-\bar{x}(t-1)^T] = X_0$$

El filtre linial òptim a dins de l'interval $[t-1,t]$ és donat per les equacions següents

$$\frac{d\hat{x}_1(s)}{ds} = A\hat{x}_1(s)+L_1(s)(y(s)-H\hat{x}_1(s)) \tag{24}$$

$$\hat{x}_1(0) = \bar{x}(t-1)$$

amb

$$L_1(s) = F^1(s)HV^{-1} \tag{25}$$

depenent de l'equació de Riccati

$$\frac{dF^1}{ds} = F^1A^T+AF^1-F^1H^TV^{-1}HF^1+W \tag{26}$$

$$F^1(0) = X_0$$

Comparant les equacions (22) i (26) veiem que

$$F^1(t) = F(1)$$

El filtre construït amb el guany constant

$$L_1 = L_1(t) = F(1)HV^{-1}$$

correspon a l'equació

$$\frac{d\hat{x}^1(t)}{dt} = A\hat{x}^1(t)+L_1(y(s)-H\hat{x}^1(s)) \tag{27}$$

i es pot considerar com generador de l'esperança condicional:

$$\hat{x}^1(t) = E[x(t) \mid y(s),\ s\in[t-1,t]\ \ \bar{x}(t-1)] \tag{28}$$

que depèn de $\bar{x}(t-1)$, condició al començament de l'interval $[t-1,t]$.

Si imposem

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}^1(t)$$

podem reconstruir el valor de $\bar{x}(t-l)$, ja que l'equació (24) que correspon a $\hat{x}_1(s)$ és determinista i depèn de la solució de (26) i dels valors de $y(s)$ per $s\in[t-l,t]$. Podem, doncs, escriure

$$\hat{x}_1(t) = \Psi_1(t,t-l)\bar{x}(t-l) + \int_{t-l}^{t} \Psi_1(t,s)\cdot L_1(s)y(s)\,ds \qquad (29)$$

amb

$$\Psi_1(t,s) = \mathrm{Exp}\left[\int_s^t (A-L_1(s)HV^{-1})\,ds\right]$$

Si posem

$$\Psi_1^*(t,s) = \Psi_1^{-1}(t,s) = \Psi_1(s,t) \qquad (30)$$

tindrem, doncs:

$$\bar{x}_1(t-l) = \Psi_1^*(t-l,t)\hat{x}_1(t) + \int_t^{t-l} \Psi_1^*(t-l,s)L_1(s)y(s)\,ds \qquad (31)$$

El filtre constant de l'equació (28) correspon a un filtre òptim a memòria limitada de longitud l a condició de tenir

$$E[\bar{x}(t-l)] = \bar{x}_1(t-l)$$

a tot instant t-l.

És evident que aquest estimador no té, en ge general, cap justificació i, per tant, perd tot interès.

3.3 Problema 6: Filtre subòptim amb horitzó passat limitat

Reemplacem al problema 5 la informació al començament de l'interval $[t-l,t]$ per una ignorància total, és a dir, posem $X_0=\infty$.

Aquesta suposició és realista si considerem que volem un estimador amb memòria realment limitada. A més, la situació així definida treu qualsevol interès a un coneixement eventual de $E[\bar{x}(t-l)]=\bar{x}(t-l)$ ja que es tractaria del valor mitjà d'una distribució de variància infinita.

Podrem doncs reemplaçar (28) per

$$\hat{x}_1(t) = E[x(t) \mid y(s),\ s\in[t-l,t]\,] \qquad (32)$$

amb l'equació (27) per equació del filtre, és a dir

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = A\hat{x}_1+L_1(y-H\hat{x}_1) \qquad (33)$$

i

$$L_1 = F_1H^TV^{-1}$$

on $F_1=F(l)$ ve donat per l'equació de Riccati (26) però amb $X_0=\infty$.

Per a poder resoldre aquesta equació hem d'efectuar el canvi de variable

$$E(s) = -F^{-1}(s)$$

i obtenim l'equació equivalent

$$\frac{-dE}{ds} = A^TE(s)+E(s)A-E(s)WE(s)+H^TV^{-1}H \qquad (34)$$

$$E(0) = 0$$

i, doncs,

$$L_1 = -E^{-1}(l)H^TV^{-1}$$

PROPOSICIÓ 2

El filtre subòptim amb un horitzó mòbil passat limitat l (o amb memòria limitada) és un filtre linial amb guany constant. El valor d'aquest guany ve donat pel valor que pren el guany del filtre òptim (de Kalman-Bucy) a l'instant l (o t_0+l), /5/.

3.4 Problema 7: Regulador subòptim amb horitzons mòbils limitats al passat i al futur

Ens proposem de resoldre el problema següent de regulació: El sistema és

$$\frac{dx}{dt} = Ax+Bu+w \qquad (35)$$

$$y = Hx + v \qquad (36)$$

on w i v són sorolls blancs centrats gaussians i independents entre ells; les seves covariàncies són

$$E[w(t)w^T(t)] = W \qquad (37)$$

$$E[v(t)v^T(t)] = V \qquad (38)$$

La condició inicial de l'estat és desconeguda i considerada com una variable aleatòria gaussiana amb

$$E[x(t_0)] = 0 \quad i \quad E[x(t_0)x^T(t_0)] = X_0 \qquad (39)$$

El criteri de qualitat de la regulació és quadràtic i ve donat per

$$V(t_0\, t_f, u(t)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^T Qx(t) + u^T(t)Ru(t))\,dt \qquad (40)$$

Escollim els valors de dos horitzons mòbils:

α) h = horitzó futur

β) l = horitzó passat

i, per tant, podem definir dos valors de guanys constants:

α) guany de control

$$K_h = -R^{-1}B^TP(t_f-h) \qquad (41)$$

on $P(t_f-h)$ és el valor de $P(s)$ per $s=t_f-h$ donat per l'equació de Riccati

$$-\frac{dP}{ds} = A^TP\ PA-PBR^{-1}B^TP+Q \qquad (42)$$

$$P(t_f) = 0$$

β) guany de filtratge

$$L_l = -E^{-1}(t_0+l)H^TV^{-1} \qquad (43)$$

on $E(t_0+l)$ és el valor de $E(s)$ per $s=t_0+l$ donat per l'equació de Riccati

$$-\frac{dE}{dt} = A^TE+EA-EWE+H^TV^{-1}H \qquad (44)$$

$$E(t_0) = 0$$

El control subòptim corresponent a aquesta situació serà, doncs

$$u_{lh}(t) = K_h\ \hat{x}_l(t)$$

amb $\hat{x}_l(t)$ donat per

$$\frac{d\hat{x}_l}{dt} = A\hat{x}_l + L_l(y-H\hat{x}_l) + Bu_{lh}(t) \qquad (47)$$

$$\hat{x}_l(t_0) = 0$$

o sia

$$\frac{d\hat{x}_l}{dt} = (A+BK_h-L_lH)\hat{x}_l + L_ly \qquad (48)$$

3.5 Problema 8: millor control subòptim estocàstic amb horitzons mòbils limitats al futur i al passat

Lògicament ens proposem de trobar el parell d'horitzons h^0 i l^0 que produeixen el millor control respecte al criteri

$$E[V(t_0t_f, u_{lh}(t))]$$

Reunint les equacions (35), (36) i (48) tenim el sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BK_h\hat{x}_l + w \qquad (49)$$

$$\frac{d\hat{x}_l}{dt} = (A+BK_h-L_lH)\hat{x}_l + L_lHx + L_lv$$

Si definim l'estat de (49)

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hline \hat{x}_l(t) \end{bmatrix}$$

obtenim la forma

$$\frac{dz}{dt} = Dz + \varepsilon \qquad (50)$$

$$\text{amb } D = \left[\begin{array}{c|c} A & Bk_h \\ \hline L_lH & A+BK_h-L_lH \end{array}\right] \qquad (51)$$

i $\quad \varepsilon(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \hline Lv(t) \end{bmatrix}$

és un soroll blanc centrat de covariància

$$E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] = U = \begin{bmatrix} W & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \vdots & L_1 V L_1^T \end{bmatrix} \tag{52}$$

L'expressió del criteri de qualitat serà

$$V(t_0, t_f, u_{1h}(t)) = \int_{t0}^{tf} (x^T Q x + \hat{x}_1^T K_h R K_h \hat{x}_1) dt$$

$$= \int_{t0}^{tf} z^T(t) C z(t) dt \tag{53}$$

amb

$$C = \begin{bmatrix} Q & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \vdots & K_h^T R K \end{bmatrix} \tag{54}$$

La matriu D és constant i podem expressar la matriu de transició del sistema (50)

$$\phi_D(t-t_0) = \exp[\bar{D}(t-t_0)] \tag{55}$$

i doncs

$$z(t) = \phi_D(t-t_0) z_0 + \int_{t0}^{t} \phi_D(t-s) d\varepsilon(s) \tag{56}$$

on

$$z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

és un vector aleatori de valor mitjà

$$E[z_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

i de covariància

$$E[z_0 z_0^T] = \begin{bmatrix} X_0 & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = Z_0 \tag{58}$$

El criteri de qualitat es pot escriure

$$V(t_0, t_f, u_{1h}(t)) = \int_{t0}^{t} z_0^T \phi_D^T(t-t_0) C \cdot$$

$$\cdot \phi_D(t-t_0) z_0 dt + \int_{t0}^{t} \left[\int_{t0}^{t} d\varepsilon^T(s) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \phi_D^T(t-s) ds \right] C \left[\int_{t0}^{t} \phi_D(t-r) d\varepsilon(r) \right] dt \tag{59}$$

i la seva esperança matemàtica serà

$$E[\bar{V}(t_0, t_f, u_{1h}(t))] = \int_{t0}^{tf} \text{traça}[\phi_D^T(t-t_0) C \cdot$$

$$\cdot \phi_D(t-t_0) \cdot Z_0] dt + \int_{t0}^{tf} \int_{t0}^{t} \text{traça}[\phi_D^T(t-s) \cdot$$

$$\cdot C \phi_D(t-s) \bar{U}] ds\, dt \tag{60}$$

Aquesta expressió no depèn de x_0, només de Z_0 i U donats per (52) i (58).

La influència de l i h es troba a C segons l'equació (54), a D segons (51), i a U segons (52).

Un algorisme de programació no linial permet d'obtenir els valors h^0 i l^0 que minimitzen (60).

4. CONCLUSIONS

Pel control d'un sistema lineal amb criteri quadràtic i horitzó finit, existeix una llargada òptima de l'horitzó si se suposa que aquest horitzó pot anar més enllà del punt final del període total de control. Aquest òptim es pot calcular numèricament per a cada cas. Així mateix existeix una llargada òptima de l'horitzó de filtratge si se suposa que el sistema dinàmic és pertorbat per soroll.

5. BIBLIOGRAFIA

/1/ KWAKERNAAK & SIVAN. "Linear Optimal Control Systems". John Wiley. New York-1972.

/2/ KLEINMAN & ATHANS. "The design of suboptimal linear time varying systems". IEEE Trans. AC. Vol. AC13, April 1968.

/3/ KOSUT. "Suboptimal Control Linear Time - Invariant Systems Subject to Control -- Structure Constraints". IEEE Trans. AC. Vol. AC15, Oct 1970.

/4/ JAZOINSKI. "Stochastic Processes and Filtering Theory". Academic Press. 1970.

/5/ AGUILAR-MARTIN et TANTAWY. "Filtre linéaire à mémoire (vraiement) limitee". - Colloque GRETSI. Nice Mai 1979.