QÜESTIIÓ, Vol 16, 1,2,3 pp. 59-75, 1992

AMPLIACIÓN AL ESPACIO DE UNA APLICACIÓN DE LA INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO PARA LA SOLUCIÓN DE UNA CUESTIÓN DE INFORMÁTICA GRÁFICA

MIGUEL ÁNGEL LERMA USERO*

El teorema de los residuos de Cauchy sirve como base para un algoritmo que permite determinar la posición relativa de un punto respecto a una curva cerrada simple. La ampliación de este método al espacio tropieza con la dificultad derivada de la inexistencia de campos complejos n−dimensionales para $n > 2$. En el presente artículo se supera dicha dificultad reformulando el procedimiento en términos de geometría diferencial.

Extension to the space of an application of complex integration for solving a topic on graphic computation.

Keywords: Computational geometry, Differential geometry, Computer aided design, Searching geometry.

---

*Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid.

–Article rebut el març de 1992.

–Acceptat el juny de 1992.

1. INTRODUCCIÓN

En [4] se describe un método analítico destinado a decidir la posición relativa de un punto del plano respecto a un polígono cerrado. Varias son las posibles situaciones prácticas que motivan la necesidad de dicha determinación. En [4] se menciona un problema relacionado con el suministro de energía en una red eléctrica. Otro ejemplo son los operadores "infill", "instroke" e "ineofill" usados en PostScript ([2]).

El método expuesto en [4] descansa en la aplicación del teorema de los residuos de Cauchy, como se detalla a continuación.

Dada una curva cerrada simple Γ en el plano, el teorema de Jordan asegura que $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ consta exactamente de dos componentes conexas: una acotada Γ_{int} (la "región interior" a Γ) y otra no acotada Γ_{ext} (la "región exterior" a Γ). Dado $z_0 \in \mathbb{R}^2 - \Gamma$ se puede determinar a cuál de las dos regiones pertenece aplicando el teorema de los residuos a la integral:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} \tag{1}$$

El resultado es el siguiente ([3]):

$$\begin{cases} z_0 \in \Gamma_{\text{int}} & \Leftrightarrow \quad I = \pm 2\pi i \\ z_0 \in \Gamma_{\text{ext}} & \Leftrightarrow \quad I = 0 \end{cases} \tag{2}$$

En el caso de que Γ sea una poligonal, la integral se puede expresar como una suma de integrales extendidas a cada uno de los lados γ_j de Γ:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{\gamma_j} \frac{dz}{z - z_0} \tag{3}$$

Todo se reduce ahora a dar expresiones analíticas para las integrales:

$$I_j = \oint_{\gamma_j} \frac{dz}{z - z_0} \tag{4}$$

Puesto que I será un número imaginario puro, las partes reales de las integrales I_j se cancelarán, y sólo es necesario acumular sus partes imaginarias. Llamando (x_0, y_0) a las coordenadas de z_0, (x_j, y_j) a las coordenadas del vértice

P_j del polígono, y suponiendo que γ_j es el segmento $P_jP_{j+1}\,(P_1 \equiv P_n)$, se tiene ([4]):

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Im}\oint_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } A_jk_j = B_jh_j \\ \arctan\dfrac{1-a_j}{b_j} - \arctan\dfrac{-a_j}{b_j} & \text{si } A_jk_j \neq B_jh_j \end{cases}$$

donde $A_j = x_j - x_0$, $B_j = y_j - y_0$, $h_j = x_{j+1} - x_j$, $k_j = y_{j+1} - y_j$, $a_j = -(A_jh_j + B_jk_j)/(h_j^2 + k_j^2)$, $b_j = (A_jk_j - B_jh_j)/(h_j^2 + k_j^2)$.

La principal dificultad para la ampliación de este procedimiento al espacio es la inexistencia de campos de números complejos n–dimensionales para $n > 2$. De hecho para $n = 4$ existe el cuerpo de cuaterniones de Hamilton, pero se trata de un cuerpo no conmutativo. Sin embargo, la formulación del problema en el campo complejo, aunque útil, es innecesaria para $n = 2$, como veremos.

Otra dificultad para la citada extensión es la representación de la frontera ∂M de una región M de $\mathbb{R}^n$, de modo que la misma pueda expresarse como una colección de datos numéricos análogos a la sucesión de coordenadas de los vértices de una poligonal en $\mathbb{R}^2$. También daremos una solución a este problema.

2. ANÁLISIS GEOMÉTRICO DEL PROBLEMA

Veremos ahora un enfoque puramente geométrico, todavía en el plano, que conduce a un resultado equivalente al obtenido mediante integración compleja.

Se denomina argumento de un complejo $z \neq 0$ de afijo $P(x,y)$, y se denota $\arg(z)$, al ángulo que forma el vector $\overrightarrow{0P}$ con el semieje real positivo (0 es el origen de coordenadas). Este ángulo está indeterminado por un sumando $2\pi k$ (k entero), y por tanto $\arg(z)$ es una función multiforme. Es elemental comprobar que la parte imaginaria del integrando de (1) es precisamente la diferencial de $\arg(z - z_0)$, y por tanto la integral mide la variación total del argumento de $z - z_0$ al recorrer Γ.

Tomando ahora un valor inicial de $\arg(z - z_0)$ para un punto de la curva Γ, y recorriendo ésta en un sentido, con la condición de que $\arg(z)$ vaya cambiando de valor con continuidad, al regresar al punto inicial el valor de $\arg(z)$ habrá variado en $\pm 2\pi$ radianes si $z_0 \in \Gamma_{\text{int}}$, y 0 radianes si $z_0 \in \Gamma_{\text{ext}}$.

En el caso particular de que Γ sea un poligonal, para cada lado γ_j de vértices P_jP_{j+1} (recorrido de P_j hacia P_{j+1}) la función $\arg(z)$ cambia en una cantidad igual al ángulo orientado entre el vector $\overrightarrow{P_0P_j}$ y el $\overrightarrow{P_0P_{j+1}}$, donde P_0 es el afijo de z_0. Si llamamos α_j a dicho ángulo, el cambio total en $\arg(z)$ será:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \tag{6}$$

El valor de α_j puede hallarse por procedimientos trigonométricos, y de hecho se puede comprobar con facilidad que su valor coindide con el dado por la expresión (5).

3. EXTENSIÓN AL ESPACIO

Los objetivos a cubrir son:

1. Hallar una extensión de la integral (1) al espacio.
2. Hallar una representación del borde de una región poliédrica del espacio, adecuada para el cálculo automático del valor de la integral sobre dicho borde.

Interesa además que la extensión sea válida no sólo para $\mathbb{R}^3$, sino en general para $\mathbb{R}^n$.

Extensión de la integral al espacio $\mathbb{R}^n$

Para simplificar supondremos que $z_0 = 0$, y $z - z_0 = z$.

Observemos que la parte imaginaria del integrando de (1) se puede escribir así:

$$\operatorname{Im} \frac{dz}{z} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{r\,dr}{|r|^2} \tag{7}$$

donde $r = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es el vector asociado al complejo $z = x + yi$, y $r\,dr = x\,dy - y\,dx$.

Por lo tanto se tendrá

$$\oint_\Gamma \frac{r\,dr}{|r|^2} = \begin{cases} \pm 2\pi & \text{si } 0 \in \Gamma_{\text{int}} \\ 0 & \text{si } 0 \in \Gamma_{\text{ext}} \end{cases} \tag{8}$$

Veremos que esta expresión se generaliza a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$(9) \qquad \oint_{\partial M} \frac{x\,dS}{|x|^n} = \begin{cases} \pm S_{n-1}(1) & \text{si } 0 \in M - \partial M \\ 0 & \text{si } 0 \in \mathbb{R}^n - M \end{cases}$$

Ahora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ es el módulo de x, M es una subvariedad n-dimensional cerrada de $\mathbb{R}^n$, ∂M es su borde, y $S_{n-1}(r)$ es el volumen $(n-1)$-dimensional de la hiper-superficie esférica de radio r en $\mathbb{R}^n$:

$$(10) \qquad S_{n-1}(r) = 2\pi^{n/2} r^{n-1} \Big/ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma de Euler ([1]). Para $r = 1$ se tiene:

$$(11) \qquad S_{n-1}(r) = 2\pi^{n/2} \Big/ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

Además la definición de $x\,dS$ es la siguiente:

$$(12) \qquad x\,dS = \sum_{i=1}^{n} x_i\,dS_i$$

donde $dS_i = (-1)^{i-1}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$; $\widehat{dx_i}$ significa que dx_i está ausente en la expresión, y $\wedge$ representa el producto exterior (estos conceptos pueden hallarse en tratados de geometría diferencial, como los mencionados en la bibliografía, [6], [7], [8]).

El signo de $S_{n-1}(1)$ en (9) depende de la orientación de M: si ésta es positiva, el signo es $+$, y si es negativa el signo es $-$.

Prueba de (9):

Consta de cuatro etapas:

1) Prueba de que $d(x\,dS/|x|^n) = 0$ para todo $x \neq 0$:

Sea $\omega = x\,dS/|x|^n$. Entonces, teniendo en cuenta que $dx_i \wedge dS_j = 0$ si $i \neq j$, tenemos:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|^n}\right) dx_i \wedge dS_i$$

Tenemos que $dx_i \wedge dS_i = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = dV$ (elemento de volumen en $\mathbb{R}^n$), y además:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x|^n - n x_i^2 |x|^{n-2}}{|x|^{2n}} = 0$$

Luego $d\omega = 0$, c.q.d.

2) Dada la bola abierta $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ de centro 0 y radio r, se considera la subvariedad $M' = M - B(0,r)$ de M, con la orientación inducida por M. Puesto que $0 \neq M'$, se tiene $d(x\, dS/|x|^n) = 0$, y por el teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial M'} x\, dS/|x|^n = \int_{M'} d(x\, dS/|x|^n) = 0$$

3) Si $0 \in \mathbb{R}^n - M$, basta tomar r lo bastante pequeño para que $M' \cap B(0,r) = \emptyset$, luego $M' = M$, y se obtiene el resultado apetecido.

4) Si $0 \in M - \partial M$, tomando r lo bastante pequeño resultará que la bola cerrada $B^c(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ estará completamente contenida en M, y entonces $\partial M'$ será la unión de ∂M y $\partial B^c(0,r)$ con la orientación inducida por M', que es la opuesta a la que induce $B^c(0,r)$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que M posee orientación positiva, entendiendo que cuando ésta sea negativa el resultado final tendrá el signo opuesto al que se muestra. De aquí se deduce:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial M'} x\, dS/|x|^n = \\ &= \oint_{\partial M} x\, dS/|x|^n - \oint_{\partial B^c(0,r)} x\, dS/|x|^n \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} x\, dS/|x|^n &= \oint_{\partial B^c(0,r)} x\, dS/|x|^n = \\ &= r^{1-n} \oint_{\partial B^c(0,r)} u\, dS = r^{1-n} S_{n-1}(r) = S_{n-1}(1) \end{aligned}$$

donde $u = x/|x|$, y la última igualdad expresa el volumen $(n-1)$–dimensional de una hiper-superficie esférica de radio 1.

■

Representación del borde de la variedad

Sea M una variedad politópica, es decir, limitada por caras planas. Supondremos sin pérdida de generalidad que dichas caras son símplices. En $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, se tendría una variedad poliédrica limitada por caras triangulares. Entonces cada cara queda unívocamente determinada por la sucesión de sus vértices $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$, y el orden de éstos determina su orientación. Consideraremos que el conjunto de caras orientadas así representadas constituyen datos del problema, y no entraremos en la forma de obtener dichos datos en problemas concretos, dado que ello depende de la forma en que la propia variedad M sea representada en cada caso. Mostraremos, no obstante, un ejemplo.

Ejemplo:

Sea en $\mathbb{R}^3$ un cubo de vértices $v_0 = (0,0,0), v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,0), v_4 = (0,0,1), v_5 = (1,0,1), v_6 = (0,1,1), v_7 = (1,1,1)$. Puesto que las caras del cubo son cuadrados, debemos dividir cada una de ellas en dos triángulos mediante una diagonal, con lo que el borde del cubo quedará representado por 12 caras triangulares (se representa cada vértice por su subíndice): $\partial M = \{< 0,2,1 >, < 1,2,3 >, < 0,1,4 >, < 1,5,4 >, < 0,4,2 >, < 2,4,6 >, < 5,7,6 >, < 4,5,6 >, < 3,6,7 >, < 2,6,3 >, < 3,7,5 >, < 1,3,5 >\}$.

Una condición necesaria para que las orientaciones de las caras sean compatibles con una orientación de M se deriva de la relación $\partial\partial M = \emptyset$. Para aplicarla, se hallan los bordes de las caras de M, los cuales estarán compuestos por símplices $(n-2)$–dimensionales, y se comprueba que cada uno de estos símplices aparece dos veces con orientaciones opuestas. En el ejemplo del cubo tendríamos: $\partial\partial M = \{< 0,2 >, < 2,1 >, < 1,0 >, < 1,2 >, < 2,3 >, < 3,1 >, < 0,1 >, \cdots, < 5,1 >\}$, comprobándose cómo efectivamente cada arista aparece dos veces, una vez con cada orientación.

4. APLICACIÓN DEL MÉTODO A VARIEDADES POLITÓPICAS

Para una variedad politópica en $\mathbb{R}^n$, la integral (9) se puede descomponer en suma de integrales sobre sus caras C_j :

$$\oint_{\partial M} \frac{x\,dS}{|x|^n} = \sum_j \oint_{C_j} \frac{x\,dS}{|x|^n} \tag{13}$$

Todo se reduce, pues, a calcular las integrales:

$$\oint_{C_j} \frac{x\,dS}{|x|^n} \tag{14}$$

sobre caras simpliciales. Veremos un modo de simplificar dicho cálculo.

Lema:

Si C_j' es la proyección de C_j sobre la hiper-superfice esférica de centro 0 y radio 1 a lo largo de semirrectas que parten del origen, entonces:

$$\oint_{C_j} \frac{x\,dS}{|x|^n} = \oint_{C_j'} u\,dS \tag{15}$$

es decir, la integral (14) es igual al volumen $(n-1)$–dimensional de C_j'.

Prueba:

Basta hacer el cambio de variable $\xi = x/|x|$ y usar la relación (12).

■

Aplicación a $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ las caras de una variedad poliédrica serán triángulos, y la proyección de éstos sobre la superficie esférica de centro 0 y radio 1 serán triángulos esféricos. El área de cada uno de dichos triángulos esféricos no es otra cosa que el ángulo sólido bajo el que se ve la cara correspondiente desde el origen (es decir, desde el punto cuya posición relativa tratamos de determinar). Por otro lado se sabe que el área de un triángulo esférico es el producto del cuadrado del radio por su exceso esférico en radianes, es decir, la suma de los ángulos de sus vértices menos π.

Sean A, B y C los vértices de una cara triangular, y A', B', C' los vértices del triángulo esférico que resulta como proyección de ABC sobre la superficie esférica de centro 0 y radio 1. El problema ahora es hallar el exceso esférico de $A'B'C'$ en función de las coordenadas de A, B y C.

El ángulo A' del triángulo esférico $A'B'C'$ es igual al que forman los planos $0AB$ y $0AC$, e igual al de los vectores normales $m = 0A \times 0B$ y $n = 0A \times 0C$ ($u \times v$ representa el producto vectorial de los vectores u y v). El coseno de dicho ángulo es igual a $m \cdot n/(|m||n|)$, y esto es suficiente para calcularlo.

Si las coordenadas de A, B y C son respectivamente $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, (x_3, y_3, z_3), el cálculo se haría así:

- Vectores normales:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \\
n_2 &= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right) \\
n_3 &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

  Estos resultados se almacenarán en una tabla para evitar tener que rehacerlos al operar con las caras contiguas a ABC. Por ejemplo, el vector n_1 es el vector normal al plano $0BC$, pero este plano tendrá que ser reconsiderado al operar sobre la cara DCB, que comparte con ABC la arista BC. La única diferencia a tener en cuenta es que al operar sobre DCB se obtiene como vector normal a $0CB$ el $-n_1$.

- Ángulos del triángulo esférico $A'B'C'$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \text{arc cos} \frac{-n_2 \cdot n_3}{|n_2||n_3|} \\
\alpha_2 &= \text{arc cos} \frac{-n_3 \cdot n_1}{|n_3||n_1|} \\
\alpha_3 &= \text{arc cos} \frac{-n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}
\end{aligned}
$$

  El signo negativo de los numeradores se justifica fácilmente. Por ejemplo, en el cálculo de α_1 (ángulo en A') se tiene en el numerador: $(0A \times 0B) \cdot (0A \times 0C) = (0A \times 0B) \cdot (-0C \times 0A) = n_3 \cdot (-n_2)$.

- Exceso esférico de $A'B'C'$:

$$e = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

– Área orientada de $A'B'C'$:

El exceso esférico recién calculado representa el área de $A'B'C'$ en valor absoluto. Su signo depende de la orientación de la cara, y resulta ser igual al del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Este determinante será nulo cuando el origen esté en el plano de ABC, y entonces el área del triángulo esférico$A'B'C'$ será nula. En cualquier otro caso, multiplicando el exceso esférico por el signo de este determinante, se obtiene el área orientada del triángulo esférico $A'B'C'$.

Reiterando estos cálculos sobre cada una de las caras del poliedro y sumando respecto a todas ellas se obtendrá el valor de la integral (9).

5. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE LA SEMIRRECTA

En [5] se expone un método clásico, que llamaremos "de la semirrecta", para resolver el problema de inclusión de un punto P en un polígono de N lados. Consiste en tomar una semirrecta que parte del punto P y contar el número de cortes de ésta con el borde Γ del polígono. Si el número de cortes es par, el punto es exterior, y si es impar entonces es interior. Como es necesario recorrer los N lados uno a uno para comprobar si existe intersección con la semirrecta, el tiempo de ejecución es proporcional a N.

Por otro lado, el procedimiento aquí expuesto, que denominaremos "analítico", aplicado al plano se reduce al de [4], y exige recorrer también los N lados del polígono uno a uno para calcular la diferencia de arcotangentes de la fórmula (5). El tiempo de cómputo, por lo tanto, es también proporcional a N, aunque es de esperar que la constante de proporcionalidad sea mayor a causa del tiempo que ha de consumir el ordenador en calcular las arcotangentes, en contraste con el método de la semirrecta, que sólo exige emplear operaciones aritméticas. Para comprobarlo se han realizado simulaciones numéricas de ambos métodos, mediante programas escritos en C y ejecutados en un ordenador IBM PS/2 50-Z sin coprocesador. Para polígonos de 100 lados, el método de la semirrecta decide la posición relativa de un punto en 0,3 seg., mientras que el método analítico tarda 0,8 seg. Esto confirma que el método analítico es algo más lento.

La generalización al espacio del método de la semirrecta es obvia. En vez de contar las intersecciones de una semirrecta con los lados de un polígono, se contarían las intersecciones de dicha semirrecta con las caras del borde ∂M de la variedad. En consecuencia, para un valor fijo de la dimensión n, el tiempo de ejecución sería proporcional al número N de caras de la variedad, y lo mismo sucedería con el método que se propone en el presente trabajo. La complejidad relativa de los algoritmos, por tanto, sólo dependerá del tiempo necesario para decidir si una semirrecta interseca a un símplex n−dimensional, y el tiempo de cálculo del volumen de un símplex esférico n−dimensional.

Para finalizar la comparación de los dos métodos, señalaremos una ventaja obvia del aquí propuesto: al depender del valor de una integral, el resultado obtenido es independiente de conjuntos de medida cero (de volumen $(n-1)$−dimensional nulo). En particular, no importa que las integrales de la fórmula (15) se extiendan a conjuntos (las caras de un politopo) que se solapan ligeramente (en los bordes de las caras), ya que dicho solape es un conjunto de medida cero. Sin embargo, el método de la semirrecta (en el plano) necesita contemplar la posibilidad de que el punto de corte coincida con un vértice, a fin de evitar que la intersección sea contada dos veces (una por cada uno de los lados a que pertenece dicho vértice). En [5] se resuelve correctamente esta dificultad, pero será necesario tenerla en cuenta si se desea aplicar una versión generalizada al espacio.

6. CONCLUSIONES

Se conoce un procedimiento que aplica el teorema de los residuos para determinar la posición relativa de un punto respecto a una curva cerrada simple en el plano. Dicho procedimiento se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} \pm 2\pi i & \Leftrightarrow \quad z_0 \in \Gamma_{\text{int}} \\ 0 & \Leftrightarrow \quad z_0 \in \Gamma_{\text{ext}} \end{cases} \tag{16}$$

Cambiando el enfoque, basado en la teoría de funciones de variable compleja, por consideraciones tomadas de la geometría diferencial, se ha conseguido ampliar el resultado al espacio $\mathbb{R}^n$, donde la fórmula (16) queda sustituída por la siguiente:

$$\oint_{\partial M} \frac{(x-p)\,dS}{|x-p|^n} = \begin{cases} \pm S_{n-1}(1) & \text{si } p \in M - \partial M \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{R}^n - M \end{cases} \tag{17}$$

Se ha particularizado el método a variedades politópicas, donde el problema se reduce a la evaluación de volúmenes de símplices $(n-1)$–dimensionales esféricos, y se ha indicado el modo de disponer los cálculos, usando trigonometría esférica, en el caso de variedades poliédricas en $\mathbb{R}^3$.

Al comparar el método aquí propuesto con el de [5] y con la generalización de éste al espacio, se obtiene que el tiempo de cómputo es en todos los casos proporcional al número de caras del polígono o politopo al que se aplica, aunque la constante de proporcionalidad dependerá, como es obvio, del tiempo consumido para cada cara. Por otro lado, el método de [4] y el aquí propuesto presentan la ventaja de ser independientes de subconjuntos del borde de la variedad que tengan medida cero.

7. FUTURA INVESTIGACIÓN

La investigación futura puede encaminarse en las siguientes direcciones:

1. Hallar fórmulas exactas o aproximadas para los volúmenes de símplices esféricos $(n-1)$–dimensionales, de modo que el método teórico expuesto sea susceptible de ser aplicado en la práctica.

2. Comparación de los métodos analíticos desarrollados en [4] y en el presente artículo con algoritmos previamente conocidos, como el de [5], tanto desde un punto de vista teórico como práctico.

   En el parágrafo 5 se muestran algunos resultados de dicha comparación, aunque el estudio podría prolongarse, por ejemplo para conocer la dependencia de la dimensión n.

3. Generalizar los dos métodos, el analítico y el de la semirrecta.

No es sorprendente que los dos métodos conduzcan a los mismos resultados. En un planteamiento poco riguroso, ambos pueden considerarse particularizaciones de un enfoque más general. La relación resulta más evidente en coordenadas polares $(r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$.

Una generalización inmediata de la expresión (9) consiste en usar una forma diferencial ω cerrada $(d\omega = 0)$, que verificará:

$$\oint_{\partial M} \omega = \begin{cases} \pm K & \text{si } 0 \in M - \partial M \\ 0 & \text{si } 0 \in \mathbb{R}^n - M \end{cases} \tag{18}$$

donde:

$$K = \oint_{\partial B^c(0,1)} \omega$$

De hecho la prueba de (9) se apoya sobre la propiedad de que la forma $dA = x\, dS/|x|^n$ es cerrada. Esta forma dA no es otra cosa que la diferencial de ángulo sólido (en n dimensiones); en otras palabras, es independiente de la coordenada radial, y su integral extendida a una región de $\partial B^c(0,1)$ es igual al volumen $(n-1)$−dimensional de dicha región. En coordenadas esféricas se puede expresar:

$$dA = J(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})\, d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{n-1}$$

donde J es una función sólo de las coordenadas angulares.

Si se toma $\omega = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})\, dA$, donde f es una función de las coordenadas angulares, entonces ω es cerrada, y se puede usar en la expresión (18). Entonces, el método expuesto en el presente artículo equivaldrá a usar en la definición de ω la función $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = 1$, mientras que el método de la semirrecta equivaldría a tomar $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ igual a una delta de Dirac.

Este planteamiento carece realmente de rigor, entre otras razones porque la detalde Dirac no es propiamente una función, sino un distribución. Un desarrollo teórico que combine adecuadamente la teoría de distribuciones con la geometría diferencial sería útil para el establecimiento de la generalización deseada.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Abramowitz, M & Stegun, I.A.** (1970). "*Handbook of Mathematical Functions*". New York: Dover Publications, Inc.

[2] **Adobe System Incorporated** (1990). *PostScript Language Reference Manual.* New York: Addison-Wesley Publishing, Inc.

[3] **Cartan, H.** (1968). *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Madrid: Selecciones Científicas.

[4] **López López, A. & Sainz-Ezquerra Domínguez, F.** (1990). "Una aplicación de la integración en el campo complejo para la solución de una cuestión de informática gráfica". *Qüestiió,* Vol. 14, nº 1,2,3 pp. 97-105.

[5] **Preparata, F.P. & Shamos, M.I.** (1985). *Computational Geometry - An Introduction.* New York: Springer-Verlag.

[6] **Spivak, M.** (1965). *Calculus on Manifolds.* New York: W.A. Benjamin, Inc.

[7] **Spivak, M.** (1979). *Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* (5 vol.). Berkeley, CA: Publish or Perish.

[8] **Struik, D.** (1961). *Lectures on Classical Differential Geometry.* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

ENGLISH SUMMARY:

EXTENSION TO THE SPACE OF AN APPLICATION OF COMPLEX INTEGRATION FOR SOLVING A TOPIC ON GRAPHIC COMPUTATION

Miguel Ángel Lerma Usero

1. INTRODUCTION

In [4] a method is described for determining if a given point is internal to a polygon. Putting the problem in the complex plane and using Cauchy's residue theorem, if z_0 is the point and Γ is the polygon, the integral of $dz/(z-z_0)$ over Γ is equal to $\pm 2\pi i$ if z_0 is internal to Γ, and equal to zero if z_0 is external. If $z_0 = (x_0, y_0)$, and the vertices of the polygon are $P_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, \dots, n$, formula (5) can be used in practical computations.

The main obstacle in extending this method to the space is that there is no n−dimensional complex field for $n > 2$. Another difficulty is representing the boundary ∂M of a region M in $\mathbb{R}^n$.

2. GEOMETRICAL ANALYSIS OF THE PROBLEM

The method used in [4] can be interpreted from a geometrical point of view. Expression (5) gives the angle $\alpha_j = P_j P_0 P_{j+1}$, where P_0 is the affix of z_0.

Expression (3) is equivalent to the sum of the angles α_j for $j = 1, \ldots, n-1$. This sum will be equal to $\pm 2\pi i$ if P_0 is internal to Γ, and equal to zero if P_0 is external.

3. EXTENSION TO THE SPACE

To extend the above results to the space it is enough to use the Stokes theorem instead of Cauchy's residue theorem. The differential form dz/z (we put $z_0 = 0$ for simplicity's sake) is generalized as $xdS/|x|^n$, where $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$, and dS is the differential of hypersurface. Then, expression (1) is generalized as (9), where M is a closed n-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^n$, ∂M is its boundary, and $S_{n-1}(r)$ is the $(n-1)$-dimensional volume of a spherical hypersurface of radius r.

To represent the oriented boundary ∂M of a polytope M it is enough to represent its faces, which we will assume without loss of generality are n-dimensional simplex. Each one of them can be represented by the sequence of its vertex $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, and its orientation is determined by the order of the vertex.

4. APPLICATION TO POLYTOPIC MANIFOLDS

For a polytope, integral (9) can be decomposed as a sum of integrals over its faces C_j (13). Each of them can be shown to be equal to the $(n-1)$-dimensional volume of C'_j, projection of C_j over a spherical hypersurface of center 0 and radius 1 along lines passing through the origin. Then the problem is reduced to computing $(n-1)$-dimensional volumes of spherical simplex. In $\mathbb{R}^3$ this means computing volumes of spherical triangles, and exact formulas are known to do it.

5. COMPARISON WITH THE SEMILINE METHOD

In [5] a classical method is exposed to solve the polygon inclusion problem. It consists of taking a semiline starting at point P and counting how many intersections it has with polygon Γ. If the number is even, the point is external, and if it is odd, the point is internal. The algorithm can be performed in $O(N)$ time for a N-side polygon.

The method from [4] can be performed in $O(N)$ time too, but in practice it is slower than that from [5] one. The complexity of their extension to space is the same $O(N)$, in respect to the number N of the faces of the polytope. Its dependence in respect to the dimension n is related to the time needed to decide if a semiline intersects an $(n-1)$-dimensional simplex, and to compute the volume of an $(n-1)$-dimensional spherical simplex.

Finally, we can see that the method presented here has the advantage of being independent in respect to zero measure sets, because it depends on the value of an integral. On the other hand, the method from [5] and its generalization to the space could be sensible to point-wise features of the boundary of the manifold.

6. CONCLUSIONS

Changing the approach of [4], based on the use of Cauchy's residue theorem, by differential geometry considerations, we have extended to the space a method for determining if a given point is internal to a simple closed curve. This method has been applied to polytopes, and, by using spherical trigonometry, to polyhedral manifolds. The computing time is $O(N)$ in respect to the number N of the faces of the polytope.

7. FUTURE RESEARCH

Future research can be done in the following directions:

1. Find exact or approximate formulae to compute the volume of $(n-1)$-dimensional spherical simplex involved in the method.

2. Compare the present method with other point inclusion algorithms, and find its complexity in respect to the dimension n.

3. Generalize this method and other point inclusion algorithms.

The generalization could consist of computing the integral of a closed differential form over the boundary of the manifold. That form is the differential of the n–dimensional solid angle for the method presented here, and its product with a Dirac delta of the angular coordinates for the generalization to the space of the semiline method.