

UNA APLICACIÓN DE LA INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO PARA LA SOLUCIÓN DE UNA CUESTIÓN DE INFORMÁTICA GRÁFICA

ANTONIO LÓPEZ LÓPEZ
FERNANDO SAINZ-EZQUERRA DOMINGUEZ

El siguiente artículo desarrolla la aplicación de un método analítico para decidir acerca de la posición, en el plano cartesiano, de un punto respecto a un polígono cerrado. La idea principal es usar la integración compleja, en particular uno de los teoremas más importantes de esta disciplina, y obtener un algoritmo muy simple aplicable no solamente a regiones poligonales, (de cualquier clase), con tantos vértices como deseemos, sino a dominios más generales con curvas de Jordan rectificables a trozos como frontera.

An application of complex integration for solving a topic on graphic computation

Keywords: Computational geometry, Complex integration, Computer aided design, Searching geometry

1. INTRODUCCIÓN

Uniendo por medio de segmentos rectilíneos, en un orden predeterminado, un conjunto finito de puntos A del mapa, se delimita una zona geográfica acotada concreta G . Los puntos P_j , $j = 1, 2, \dots, n$ de A son conocidos por sus coordenadas cartesianas.

-Departamento de Informática de Hidroeléctrica Española. Madrid.

-Article rebut el setembre de 1990.

Se dispone de otra familia finita de puntos B , también conocidos por el mismo tipo de coordenadas y que corresponden a determinados lugares. Se trata de decidir sobre la posición de estos puntos respecto al polígono, (generalmente estrellado), G . Esto es, cuales son interiores, cuales exteriores y cuales frontera.

Naturalmente un método de solución es efectuar en cada caso una representación gráfica de la situación, y decidir sobre el papel. Tal representación se lleva a cabo bien mediante el trabajo de un delineante, o mediante algún dispositivo de dibujo mecanizado si el número n de los puntos P_j del conjunto A es elevado.

Sin embargo incluso este último sistema presenta inconvenientes, pues cualquier cambio, por insignificante que pueda parecer, en los conjuntos A ó B , obliga a repetir el dibujo con el consiguiente gasto de tiempo y papel.

La solución que expondremos a continuación, conduce a un algoritmo muy fácilmente programable en cualquiera de los lenguajes más usuales (Fortran, Pascal, Basic, etc.).

El recinto G aludido al comienzo puede ser la representación de un determinado municipio, y por lo tanto estarse tratando de decidir si un cierto lugar le pertenece o no. Puede, también, que G represente un tendido eléctrico con centros de transformación en los vértices P_j , $j = 1, 2, \dots, n$ y se pretende decidir si un determinado lugar debe recibir suministro o no según sea su situación respecto de G .

Naturalmente la aplicación repetitiva del algoritmo a exponer permitirá decisiones más complejas, como por ejemplo el que un cierto punto sea exterior a varios recintos G_1, G_2, \dots, G_k pero interior a otro G_{k+1} que contenga a los anteriores; o como el que ese punto sea común a varios de tales recintos etc.

2. SOLUCIÓN TEÓRICA DEL PROBLEMA

Sea $A = \{P_j(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de vértices cuyas uniones rectilíneas, en el orden del crecimiento del índice j definen nuestro polígono G , que generalmente será estrellado y de forma geométrica acaso complicada. Se exigen las condiciones evidentes:

$$P_j \neq P_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n - 1; P_n \equiv P_1$$

Sea $Q_0(x_0, y_0) \in B$, el punto cuya posición respecto a G vamos a estudiar. Evidentemente, un elemental bucle en el programa a confeccionar permitirá el examen de todos los puntos de B .

examen de todos los puntos de B.

Denotemos por Γ la poligonal cerrada por los lados de G. La realidad física de la mayoría de las aplicaciones hace suponer que Γ no se debe cortar a sí misma salvo en el vértice común $P_1 \equiv P_n$ o sea expresándonos con precisión, que la poligonal Γ constituye una curva cerrada simple de Jordan.

Sin embargo, como se indicará más adelante esta condición no es necesaria, de forma que el resultado que obtendremos podría ser aplicado a regiones como la representada en la figura 1.

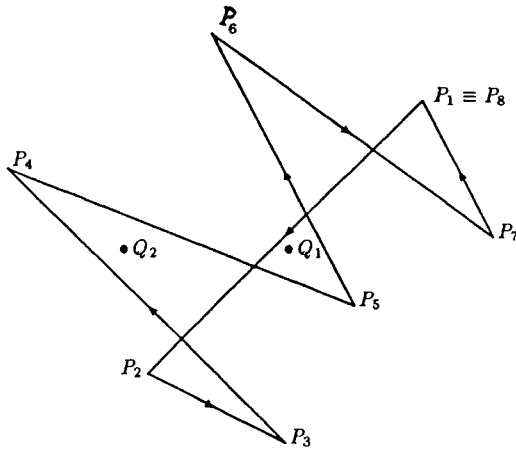


Figura 1

Como se indicó, esta región se ha delimitado uniendo P_1 con P_2 , P_2 con P_3 , etc., P_7 con $P_8 \equiv P_1$.

También, a modo de adelanto, indiquemos que el método que pasamos a exponer será válido incluso cuando las uniones entre los vértices P_j, P_{j+1} ; $j = 1, 2, \dots, n - 1$ no sean necesariamente segmentos rectilíneos, sino arcos simples de Jordan. De esto hablaremos al final. Sin embargo puesto que el origen de este trabajo fue un caso en que Γ era ciertamente un polígono, operaremos en esta situación, indicando luego el método de proceso en el caso más general.

Consideremos nuestra realidad geométrica situada en el plano complejo, de modo que los puntos $P_j(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$; y el $Q_0(x_0, y_0)$ son los afijos de los correspondientes números complejos $z_j = x_j + iy_j$; $z_0 = x_0 + iy_0$.

Formemos la función compleja de variable compleja $w = f(z) = \frac{1}{z - z_0}$.

De cualquier curso elemental sobre teoría de funciones de variable compleja se sabe trivialmente que $w = f(z)$ es uniforme y analítica en todo el plano complejo finito excepto en z_0 , donde presenta un polo simple. Por consiguiente en los casos en que $z_0 \notin \Gamma$ puede efectuarse el cálculo de la integral $\oint_{\Gamma} f(z) dz$, y aplicar el teorema de los residuos. Como Γ es una poligonal cerrada, el teorema aludido nos permite concluir que el valor de la anterior integral sólo puede ser $0 + 0i$ si z_0 es exterior a G , ó $0 \pm 2\pi i$ si es interior. En este último caso el doble signo de la parte imaginaria corresponde al sentido del recorrido que llevemos sobre Γ respecto del interior de G . Así por ejemplo en el caso de la figura 1, si el punto en estudio fuese el Q_1 el valor sería $0 + 2\pi i$, (el interior de G queda a la izquierda del viajero que recorre Γ en el sentido indicado). Si el punto en discusión es Q_2 la integral valdría $0 - 2\pi i$.

Por lo tanto, una vez verificado que $z_0 \notin \Gamma$, lo que se hace fácilmente, sólo resta calcular la mencionada integral, lo cual usando los teoremas relativos a las propiedades de la integración compleja, (en concreto la aditividad respecto al camino de integración), nos lleva a

$$(1) \quad \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

siendo γ_j el segmento que une P_j con P_{j+1} .

Los enunciados y demostraciones de los teoremas aludidos pueden encontrarse en [1].

A efectos de la verificación de si $z_0 \in \Gamma$ en primer lugar, y del cálculo directo de las integrales del segundo miembro de (1) después, obtenemos la ecuación analítica del segmento γ_j ,

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_j + (x_{j+1} - x_j)t \\ y(t) &= y_j + (y_{j+1} - y_j)t \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

O también efectuando el cambio de notación $x_{j+1} - x_j = h_j$; $y_{j+1} - y_j = k_j$, escribimos la ecuación del lado γ_j así:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= x_j + h_j t \\ y(t) &= y_j + k_j t \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

Decidir si z_0 pertenece o no al lado γ_j es decidir sobre la compatibilidad o incompatibilidad del sistema

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_j + h_j t \\ y_0 &= y_j + k_j t \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

Tal examen es trivial, basta tener presente que nunca es a la vez $h_j = k_j = 0$, (o sea $h_j^2 + k_j^2 \neq 0$), ya que lo contrario implicaría que $P_j = P_{j+1}$, cosa prohibida por hipótesis al estar variando j en $1, 2, \dots, n-1$. Una posible forma de efectuar la verificación aludida es la indicada en el organigrama de la figura 2.

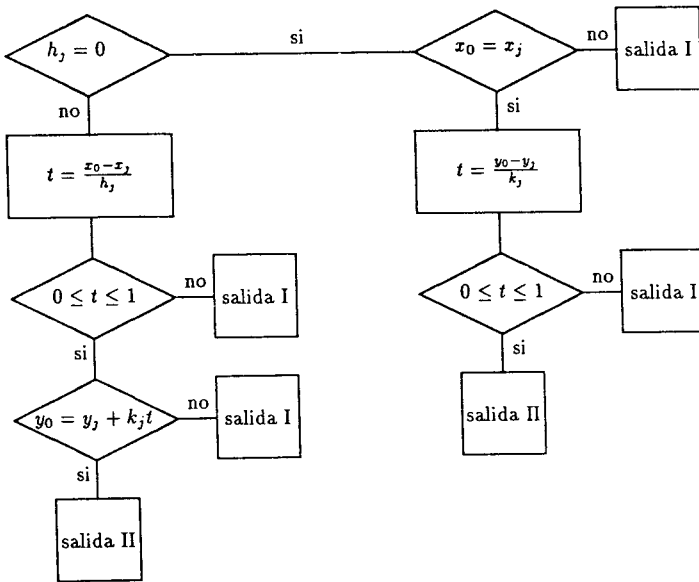


Figura 2

Siendo:

- SALIDA I. El punto $Q_0(x_0, y_0)$ en estudio no yace en el segmento γ_j , y por lo tanto se calcula la integral correspondiente en el segundo miembro de (1).
- SALIDA II. El punto Q_0 pertenece al segmento γ_j , por lo que se imprime un mensaje indicando este hecho y, o bien se pasa al siguiente punto de B, o bien se termina el proceso.

Para los casos en que z_0 no pertenezca al borde γ_j efectuamos el cálculo de la integral en la forma siguiente:

Nuestra función integrando es:

$$w = f(z) = \frac{1}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i \frac{-(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Efectuemos para abreviar los cambios $x_j - x_0 = A_j$; $y_j - y_0 = B_j$ entonces usando las ecuaciones (2), resulta, (véase [1], pg. 211)

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_0^1 \left(\frac{h_j^2 t + A_j h_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} + \frac{k_j^2 t + B_j k_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} \right) dt + \\ + i \int_0^1 \left(\frac{-k_j h_j t - B_j h_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} + \frac{h_j k_j t + A_j k_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} \right) dt$$

O lo que es lo mismo

(3)

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_0^1 \frac{(h_j^2 + k_j^2)t + A_j h_j + B_j k_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} dt + i \int_0^1 \frac{A_j k_j - B_j h_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} dt$$

Antes de proseguir observemos que una posible anulación en el denominador de nuestros integrandos sólo es posible cuando sea $h_j t + A_j = k_j t + B_j = 0$, lo cual según las (2) implica que z_0 pertenece a la recta definida por P_j y P_{j+1} , pero no al segmento acotado γ_j pues este caso ya fue estudiado previamente y habríamos detenido el proceso si acaso hubiese resultado, $0 \leq t \leq 1$. Así pues aunque sea compatible y determinado el sistema $h_j t + A_j = k_j t + B_j = 0$, es seguro que $t \notin [0, 1]$, por lo que los integrandos de los segundos miembros de (3) son funciones continuas de t en $[0, 1]$, y por lo tanto las integrales siempre existen.

Abordando el cálculo analítico de las mismas resulta que para la parte real queda inmediatamente

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{(h_j^2 + k_j^2)t + A_j h_j + B_j k_j}{(h_j t + A_j)^2 + (k_j t + B_j)^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{(h_j + A_j)^2 + (k_j + B_j)^2}{A_j^2 + B_j^2}$$

Obsérvese como no puede ser $A_j^2 + B_j^2 = 0$ pues esto implicaría que nuestro punto es el P_j , lo cual ya habría sido detectado antes.

En cuanto a la integral que define la parte imaginaria en la (3) tenemos que si $A_j k_j - B_j h_j = 0$ la misma también vale cero. En caso contrario resulta observando que las raíces del denominador del integrando son:

$$\left(-\frac{A_j h_j + B_j k_j}{h_j^2 + k_j^2} + i \frac{A_j k_j - B_j h_j}{h_j^2 + k_j^2} \right); \left(-\frac{A_j h_j + B_j k_j}{h_j^2 + k_j^2} - i \frac{A_j k_j - B_j h_j}{h_j^2 + k_j^2} \right)$$

que el valor de la mencionada integral es:

$$\arctan \frac{1 - \alpha_j}{\beta_j} - \arctan \frac{-\alpha_j}{\beta_j}; \quad \text{siendo } \alpha_j = -\frac{A_j h_j + B_j k_j}{h_j^2 + k_j^2} \quad \text{y} \quad \beta_j = \frac{A_j k_j - B_j h_j}{h_j^2 + k_j^2}$$

Téngase en cuenta que al ser $A_j k_j - B_j h_j \neq 0$ también es $\beta_j \neq 0$.

Definitivamente, con las notaciones indicadas anteriormente resulta

(5)

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{(h_j + A_j)^2 + (k_j + B_j)^2}{A_j^2 + B_j^2} + 0i & \text{si } A_j k_j = B_j h_j \\ \frac{1}{2} \ln \frac{(h_j + A_j)^2 + (k_j + B_j)^2}{A_j^2 + B_j^2} + (\arctan \frac{1 - \alpha_j}{\beta_j} - \arctan \frac{-\alpha_j}{\beta_j})i & \text{si } A_j k_j \neq B_j h_j \end{cases}$$

En consecuencia el programa, una vez verificado que $z_0 \notin \Gamma$, sólo tiene que ir acumulando las partes real e imaginarias indicadas en (5). Al final la parte real siempre debe ser cero, salvo los errores debidos a la precisión del ordenador con el que se trabaje; la parte imaginaria sin embargo solo tomará valores $\pm 2\pi$, (con la misma salvedad relativa a la aproximación), si z_0 es interior a G , o también será nula si z_0 es exterior.

3. APÉNDICE

El teorema de los residuos ha sido la base sobre la que se ha construido la solución expuesta. Sin embargo este teorema (véase [1], pg. 435), no exige que la frontera Γ de G sea una poligonal, basta con pedir que sea una curva cerrada rectificable. Esto da la posibilidad de ampliar la solución desarrollada al caso en que los puntos P_j y P_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n - 1$ se unan por medio de arcos rectificables γ_j que vendrán dados por sus ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x = x_j(t) \\ y = y_j(t) \end{array} \right\} a_j \leq t \leq b_j$$

Naturalmente la comprobación de si $z_0 \in \gamma_j$ o no, hay que hacerla ahora en función de las anteriores ecuaciones, y cuando $z_0 \notin \gamma_j$ puesto que nuestra función es

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i \frac{-(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

según la teoría, (ver [1], pg. 211, tom. I), tendríamos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z) dz &= \int_{a_j}^{b_j} \frac{(x_j(t) - x_0)x'_j(t) + (y_j(t) - y_0)y'_j(t)}{(x_j(t) - x_0)^2 + (y_j(t) - y_0)^2} dt \\ &+ i \int_{a_j}^{b_j} \frac{(x_j(t) - x_0)y'_j(t) - (y_j(t) - y_0)x'_j(t)}{(x_j(t) - x_0)^2 + (y_j(t) - y_0)^2} dt \end{aligned}$$

Ahora procedería calcular estas integrales y pasar a su acumulación como antes. Por supuesto que tal vez sea mucho más rentable, recurrir a alguna de las muchas y precisas rutinas existentes sobre integración numérica, ya que no es seguro que, como en el caso de la poligonal sucedía, lleguemos a integrales inmediatas.

También puede sugerirse que, en el caso más general que ahora comentamos, a la vista de las ecuaciones de nuestros arcos γ_j , escojamos la función $w = f(z)$ convenientemente, (pero siempre teniendo a z_0 como único polo simple en el plano complejo), de forma que sus partes real, $u = u(x, y)$, e imaginaria, $v = v(x, y)$ puedan hacer más sencillas las integrales últimamente escritas.

Consultando la solución expuesta para este mismo problema en [2], se concluye la diferencia de enfoque, pues allí se usa la realidad geométrica, que lleva a la distinción de una mayor casuística. La aquí presentada, al ser puramente analítica, es independiente de la forma del polígono y evita cualquier discusión sobre su figura.

Finalicemos señalando que en el departamento de informática de Hidroeléctrica Española se ha realizado un programa en Fortran para el algoritmo presentado, que confirmó los resultados teóricos. Procesado en un ordenador

de 12.5 MIPS, invirtió cinco centésimas de segundo en leer los 263 vértices del contorno del término municipal tratado, y una centésima de segundo por cada punto estudiado.

4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Markushevich, A.I.** (1970). "Teoría de las funciones analíticas". Editorial Mir. Moscú.
- [2] **Preparata Franco P.** Computational Geometry. Springer Verlag, 1985.

