Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **20**, **3**, 277–295 (2004)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Método aproximado para estimar el estado límite último en entramados metálicos esbeltos

Antonio Agüero y José Ramón Atienza

Departamento de mecánica de los medios continuos y teoría de estructuras
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Valencia
Campus Vera s/n, 46020 Valencia, España
Tel.: 34-96-387 76 75
e-mail: anagra@mes.upv.es

Eugenio Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Igeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Gran Capitán s/n, Edificio C1, Campus Norte
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-205 70 16 ; Fax: 34-93-401 65 17
e-mail: cimne@cimne.upc.es

Resumen

El objeto de este artículo es presentar un método práctico para el diseño de estructuras metálicas, basado en un análisis de segundo orden de la estructura con una imperfección geométrica equivalente. Este método se puede enmarcar dentro de los denominados en la literatura anglosajona como "advanced analysis". Los efectos de segundo orden se obtienen usando las propiedades de ortogonalidad de los modos de pandeo. La imperfección geométrica tiene la forma del primer modo de pandeo, que se escala adecuadamente empleando una generalización del método de Dutheil.

Palabras clave: *análisis avanzado, no lineal geométrico, estructuras metálicas, imperfección geométrica equivalente.*

PRACTICAL ADVANCED ANALYSIS FOR STEEL STRUCTURES

Summary

The aim of this paper is to present a practical advanced analysis method for steel frame design, based on a simplified second-order elastic analysis of the structure with an equivalent geometric imperfection. The second order effects are calculated using the orthogonality properties of the buckling modes. The geometric imperfection is obtained from the buckling mode by a suitable scaling procedure using a generalization of Dutheil's method.

Keywords: *advanced analysis, geometric nonlinearity, steel design, steel frames, geometric imperfection.*

INTRODUCCIÓN

La obtención de la carga de colapso de una estructura metálica requiere tener en cuenta la no linealidad geométrica y mecánica. La no linealidad geométrica incluye los efectos de segundo orden asociados con los efectos $P - \delta$ (intraslacional) y $P - \Delta$ (traslacional) y las imperfecciones geométricas y la no linealidad mecánica incluye la plastificación gradual ligada con la existencia de tensiones residuales.

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 2003Aceptado: Febrero 2004

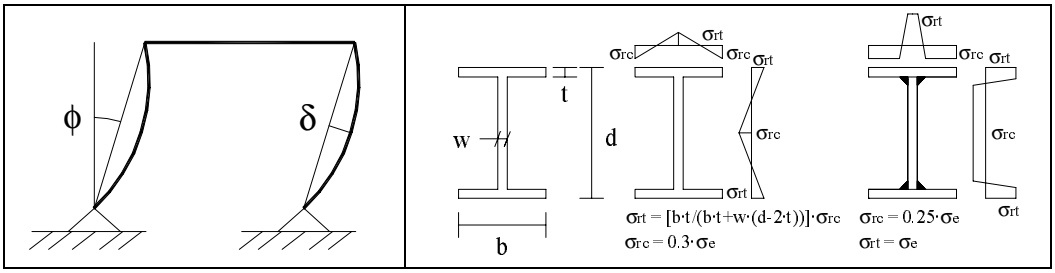

Figura 1. Imperfección de la barra combadura (δ), imperfección del pórtico desplome (Φ) y patrones de tensiones residuales

El método práctico, que se presenta para el dimensionamiento de entramados metálicos espaciales constituidos por piezas prismáticas, estima de forma simplificada la carga de colapso y se basa en:

1. Un cálculo lineal de la estructura sin imperfecciones del que se obtienen los esfuerzos primarios.
2. Un cálculo de inestabilidad inicial del que se obtienen los esfuerzos secundarios asociados a todos los factores no considerados en el cálculo lineal.
3. Un criterio de agotamiento de la sección (inicio de fluencia o formación de la primera rótula plástica).
4. Se utilizan las propiedades de ortogonalidad de los modos de pandeo para simplificar los cálculos.
5. Se propone una metodología para definir imperfecciones geométricas equivalentes, generalizando la teoría de la preflecha latente de Dutheil que sirve de base para el método ω de la EA-95.

El método propuesto se puede utilizar fácilmente para el diseño práctico de estructuras dada su sencillez y su compatibilidad con la norma de diseño que se seleccione como referencia. También puede ser empleado a nivel de investigación para aproximarnos al comportamiento real de la estructura. El método puede ser empleado de forma práctica ,sin necesidad de realizar comprobaciones adicionales a nivel barra, por lo que se enmarca junto con las propuestas de Chan[1] y Kim[6] en los métodos denominados "advanced analysis".

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Análisis no lineal de estructuras con imperfecciones geométricas

Ecuaciones que rigen el equilibrio de la pieza comprimida y flectada imperfecta

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -p_x$$

$$EI_y\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4} + P\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = -P\frac{\mathrm{d}^2w_i}{\mathrm{d}x^2} + p_z$$

$$EI_z\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4} + M_y\frac{\mathrm{d}^2\theta_x}{\mathrm{d}x^2} + P\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} = -M_y\frac{\mathrm{d}^2\theta_{xi}}{\mathrm{d}x^2} - P\frac{\mathrm{d}^2v_i}{\mathrm{d}x^2} + p_y$$

$$(-GI_t + Pr_0^2)\frac{\mathrm{d}^2\theta_x}{\mathrm{d}x^2} + M_y\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} + EI_a\frac{\mathrm{d}^4\theta_x}{\mathrm{d}x^4} = -Pr_0^2\frac{\mathrm{d}^2\theta_{xi}}{\mathrm{d}x^2} - M_y\frac{\mathrm{d}^2v_i}{\mathrm{d}x^2} + m_x$$

Los desplazamientos vienen dados por

$$u(x) = a_1 + a_2x - \frac{p_x}{2EA}x^2$$

$$v(x) = a_3\,\mathrm{senh}(\mu x) + a_4\cosh(\mu x) + a_5\,\mathrm{senh}(\beta x) + a_6\cosh(\beta x) + a_7 + a_8 x + \\ + \frac{M_y m_x + p_y(GI_t - Pr_0^2)}{2(P(GI_t - Pr_0^2) + M_y^2)}x^2 + v_{ia}(x)$$

$$w(x) = a_9 + a_{10}x + a_{11}\cos(kx) + a_{12}\,\mathrm{sen}(kx) + \frac{p_z}{2P}x^2 + w_{ia}(x); k = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}$$

$$\theta(x) = \eta(a_3\,\mathrm{senh}(\mu x) + a_4\cosh(\mu x)) + \psi(a_5\,\mathrm{senh}(\beta x) + a_6\cosh(\beta x)) + a_{13} + a_{14}x + \\ + \frac{M_y p_y - m_x P}{2(P(GI_t - Pr_0^2) + M_y^2}x^2 + \theta_{xia}(x)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\rho - P(I_z r_0^2 + I_a) + \sqrt{4I_z I_a M_y^2 + \rho^2 + 2P\rho(I_a - I_z r_0^2) + P^2(I_z r_0^2 - 2I_a) + I_a^2)}}}{\sqrt{2EI_z I_a}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\rho - P(I_z r_0^2 + I_a) + \sqrt{4I_z I_a M_y^2 + \rho^2 + 2P\rho(I_a - I_z r_0^2) + P^2(I_z r_0^2(I_z r_0^2 - 2I_a) + I_a^2)}}}{\sqrt{2EI_z I_a}}$$

$$\eta = -\frac{EI_z\mu^2 + P}{M_y}; \quad \psi - \frac{EI_z\beta^2 + P}{M_y}; \quad \rho = GI_z I_t$$

Si la imperfección $\{v_i, w_i, \theta_{xi}\}$ viene dada por el primer modo de pandeo, la solución particular asociada con la imperfección $\{v_{ia}, w_{ia}, \theta_{xia}\}$ se obtiene amplificando la imperfección por el factor $1/\mu_{1MN} - 1$, resultando

$$v_{ia} = \frac{v_i}{\mu_{1MN} - 1}; \quad w_{ia} = \frac{w_i}{\mu_{1MN} - 1}; \quad \theta_{xia} = \frac{\theta_{xi}}{\mu_{1MN} - 1}$$

Los esfuerzos consistentes son

$$N = EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$Q_y = -EI_z\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} - M_y\frac{\mathrm{d}(\theta_x + \theta_{xi})}{\mathrm{d}x} - P\frac{\mathrm{d}(v + v_i)}{\mathrm{d}x}$$

$$Q_z = -EI_y\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} - P\frac{\mathrm{d}(w + w_i)}{\mathrm{d}x}$$

$$M_x = -EI_a\frac{\mathrm{d}^3\theta_x}{\mathrm{d}x^3} + GI_t\frac{\mathrm{d}\theta_x}{\mathrm{d}x} - M_y\frac{\mathrm{d}(v + v_i)}{\mathrm{d}x} - Pr_0^2\frac{\mathrm{d}(\theta_x + \theta_{xi})}{\mathrm{d}x}$$

$$M_y = -EI_y\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

$$M_z = EI_z\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}$$

$$Bi = EI_a\frac{\mathrm{d}^2\theta_x}{\mathrm{d}x^2}$$

Las relaciones entre fuerzas y desplazamientos (Figura 2) en extremos de barra vienen dadas por las matrices de rigidez:

Comportamiento de extensión

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{ex_1} \\ f_{ex_2} \end{array} \right\}$$

Comportamiento de flexión de eje fuerte

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{z_1} \\ M_{y_1} \\ f_{y_2} \\ M_{y_2} \end{array} \right\} = \frac{k^2 EI_y}{2-2c-kLs} \left[\begin{array}{cccc} sk & c-1 & -sk & c-1 \\ c-1 & \frac{s-kLc}{k} & 1-c & \frac{kL-s}{k} \\ -sk & 1-c & sk & 1-c \\ c-1 & \frac{kL-s}{k} & 1-c & \frac{s-kLc}{k} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{y_2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{ez_1} \\ M_{ey_1} \\ f_{ez_2} \\ M_{ey_2} \end{array} \right\}$$

$c = \cos(kL)$; $s = \mathrm{sen}(kL)$

Comportamiento de flexión de eje débil acoplada con la torsión

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{y_1} \\ M_{x_1} \\ M_{z_1} \\ Bi_1 \\ f_{y_2} \\ M_{x_2} \\ M_{z_2} \\ Bi_2 \end{array} \right\} = \mathbf{AB}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{z_1} \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{z_2} \\ \phi_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{ey_1} \\ M_{ex_1} \\ M_{ez_1} \\ Bi_{e1} \\ f_{ey_2} \\ M_{ex_2} \\ M_{ez_2} \\ Bi_{e2} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 & M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_y & 0 & -GI_t + Pr_0^2 \\ 0 & -EI_z\mu^2 & 0 & -EI_z\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EI_a\eta\mu^2 & 0 & -EI_a\psi\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P & 0 & -M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_y & 0 & GI_t - Pr_0^2 \\ EI_z\mu^2 sh & EI_z\mu^2 ch & EI_z\beta^2 sha & EI_z\beta^2 cha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EI_a\eta\mu^2 sh & EI_a\eta\mu^2 ch & EI_a\psi\beta^2 sha & EI_a\psi\beta^2 cha & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \psi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & \beta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu\eta & 0 & \beta\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ sh & ch & sha & cha & 1 & L & 0 & 0 \\ \eta sh & \eta ch & \psi sha & \psi cha & 0 & 0 & 1 & L \\ \mu ch & \mu sh & \beta cha & \beta sha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu\eta ch & \mu\eta sh & \beta\psi cha & \beta\psi sha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$ch = \cosh(\mu L);\ sh = senh(\mu L);\ cha = cosh(\beta L);\ sha = \operatorname{senh}(\beta L);$$

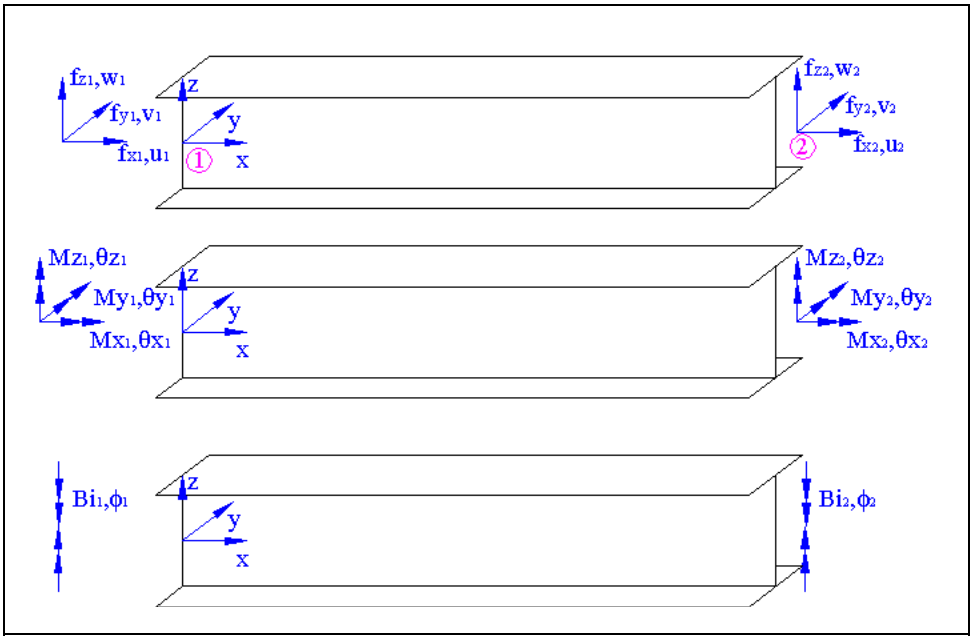

Figura 2. Fuerzas y movimientos en extremo de barra

La posición de equilibrio también se puede determinar haciendo uso de una formulación global. Para aplicar el método de los elementos finitos se parte de la condición de equilibrio dada por la estacionariedad de la primera variación del potencial, que para una sección doblemente simétrica resulta ser

$$\begin{aligned}
\delta V^e = & \int (EAu_p'u' + EI_y w_p'' w'' + EI_z v_p'' v'' + GI_T \theta_{xp}' \theta_x' + EI_a \theta_{xp}'' \theta_x'')\,\mathrm{d}x - \\
& - f_{x_1} u_{p_1} - f_{y_1} v_{p_1} - f_{z_1} w_{p_1} - f_{x_2} u_{p_2} - f_{y_2} v_{p_2} - f_{z_2} w_{p_2} - \\
& - M_{x_1} \theta_{xp_1} - M_{y_1} \theta_{yp_1} - M_{z_1} \theta_{zp_1} - M_{x_2} \theta_{xp_2} - M_{y_2} \theta_{yp_2} - M_{z_2} \theta_{zp_2} - \\
& - Bi_1 \phi_{p_1} - Bi_2 \phi_{p_2} - \int_L (p_x u_p + p_y v_p + p_z w_p + m_x \theta_{xp})\,\mathrm{d}x - \\
& - \int M_y [(v' + v_i')\theta_{xp}' + (\theta_x' + \theta_{xi}')v_p']\,\mathrm{d}x - \\
& - \int P[(v' + v_i')v_p' + ((w' + w_i')w_p' + r_0^2(\theta_x' + \theta_{xi}')\theta_{xp}']\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio de la estructura se pueden escribir de forma matricial como

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G)\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{K}_G \mathbf{d}_{\text{imp}}$$

definiendo $\mathbf{d}_{\text{imp}}$ las imperfecciones de la estructura.

Obtención de los efectos de segundo orden de forma simplificada

Las propiedades de ortogonalidad de los modos de pandeo definidos por $\{\phi_{vi};\ \phi_{wi};\ \phi_{\theta xi}\}$ para una pieza sin ejes de simetría, se pueden escribir como:

para la pieza comprimida

$$\int P(\phi'_{vi}\phi'_{vj} + \phi'_{wi}\phi'_{wj} + r_0^2\phi'_{\theta_x i}\boldsymbol{\phi}'_{\theta_x j} + 2zc\phi'_{vi}\phi'_{\theta_x j} - 2yc\phi'_{wi}\phi'_{\theta_x j}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{GN}\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

$$\int_L [EI_y\phi''_{wi}\phi''_{wj} + EI_z\phi''_{vi}\phi''_{vj} + GI_t\phi'_{\theta_x i}\phi'_{\theta_x j} + EI_a\phi''_{\theta_x i}\phi''_{\theta_x j}]\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

$$r_0^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + yc^2 + zc^2$$

para la pieza con flexión de eje fuerte

$$\int_L [2M_y(\beta_y\phi'_{\theta x j}\phi'_{\theta x i} + \phi'''_{vi}\phi'_{\theta x j})]\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{GM}\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

$$\int_L [EI_z\phi''_{vi}\phi''_{vj} + GI_t\phi'_{\theta_x i}\phi'_{\theta_x j} + EI_a\phi''_{\theta_x} i\phi''_{\theta_x j}]\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

para la pieza comprimida y flectada

$$\int [2M_y(\beta_y\phi'_{\theta x j}\phi'_{\theta x i} + \phi'''_{vi}\phi'_{\theta x j}) + P(\phi'_{vi}\phi'_{vj} + \phi'_{wi}\phi'_{wj} + r_0^2\phi'_{\theta_x i}\phi'_{\theta_x j} + 2zc\phi'_{vi}\phi'_{\theta x j} -$$
$$- 2yc\phi'_{wi}\phi'_{\theta x j})]\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{GNM}\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

$$\int_L [EI_y\phi''_{wi}\phi''_{wj} + EI_z\phi''_{vi}\phi''_{vj} + GI_t\phi'_{\theta_x i}\phi'_{\theta_x j} + EI_a\phi''_{\theta_x i}\phi''_{\theta_x j}]\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_i = 0$$

siendo $\beta_y = \frac{1}{2I_y}\int\int_A z(y^2+z^2)\,\mathrm{d}A$ e yc, zc las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes.

Los desplazamientos no lineales se pueden obtener empleando estas propiedades como

$$\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{d} + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{(\mu_j - 1)}\boldsymbol{\phi}_j + \frac{F_{\mathrm{actgeo}}}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1 \approx \mathbf{d} + \frac{a_1 + F_{\mathrm{actgeo}}}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1$$

$$\mathbf{a}_j = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{\boldsymbol{\phi}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_j}$$

siendo $\mathbf{d}$ los desplazamientos del cálculo lineal; F_{actgeo} define la magnitud de la imperfección y $\boldsymbol{\phi}_1$ el primer modo de pandeo. En una estructura con axil y flexiones de eje fuerte primarios que pueden inducir pandeo, los desplazamientos no lineales se pueden obtener como

$$\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{d} + \frac{a_{1MN}}{(\mu_{1MN}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1MN} + \frac{F_{\text{actgeo}}}{(\mu_{1MN}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1MN}$$

$$a_{1MN} = \frac{\int [EI_y w''\phi''_{w1} + EI_z v''\phi''_{v1} + GI_t\theta'_x\phi'_{\theta x1} + EI_a\theta''_x\phi''_{\theta x1}]\,\mathrm{d}x}{\int [EI_y\phi''^2_{w1} + EI_z\phi''^2_{v1} + GI_t\phi'^2_{\theta x1} + EI_a\phi''^2_{\theta xi}]\,\mathrm{d}x} = \frac{\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}_{1MN}\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}_{1MN}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_{1MN}}$$

Los desplazamientos no lineales se pueden obtener de forma simplificada como

$$\mathbf{d}_{NL} \approx \mathbf{d} + \frac{a_{1M}}{(\mu_{1N}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1N} + \frac{F_{\text{actgeo}_{\text{N}}}}{(\mu_{1N}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1N} + \frac{a_{1M}}{(\mu_{1M}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1M} + \frac{F_{\text{actgeo}_{\text{M}}}}{(\mu_{1M}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1M}$$

Nótese que se está suponiendo, que los efecto secundarios, inducidos por el axil primario y por la flexión de eje fuerte primaria están desacoplados y se pueden superponer. Esta simplificación supone un pequeño error (el efecto secundario de la flexión de eje fuerte se supone que se debe sólo a la parte lineal de la flexión de eje fuerte). Se adopta porque en los casos reales el error cometido es muy pequeño y los cálculos se simplifican extraordinariamente.

Método simplificado para obtener la imperfección geométrica equivalente

Para poder generalizar la propuesta de Dutheil con coherencia se acepta la carga de colapso obtenida con las normas actuales en caso de considerar únicamente la acción de los axiles primarios o los momentos de eje fuerte primarios.

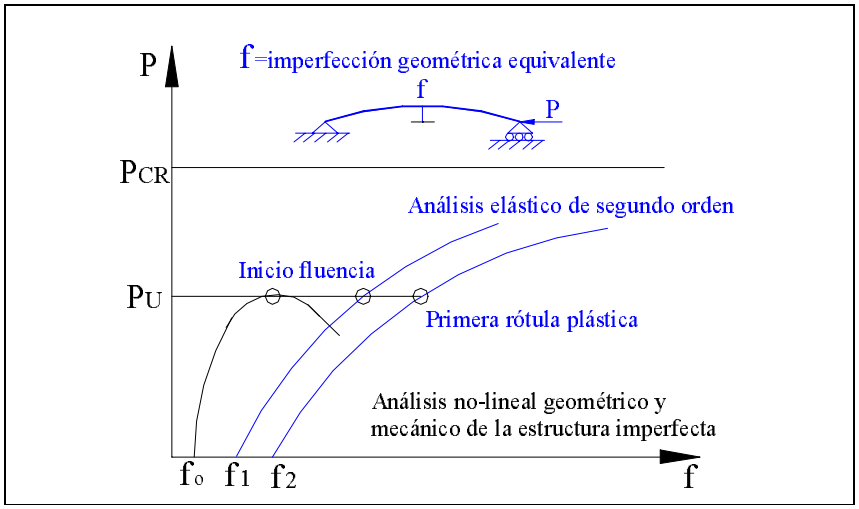

Figura 3. Calcular la imperfección geométrica equivalente

El factor de escala de la imperfección geométrica se obtiene igualando la carga de colapso obtenida con el método propuesto, considerando sólo los axiles primarios (F_{actgeo_N}) o flexiones de eje fuerte (F_{actgeo_M}), con las obtenidas haciendo uso de las normas actuales (Figura 3).

De esta manera se obtienen dos tipos de imperfección:

A. considerando sólo esfuerzos primarios de axil (F_{actgeo_N}),
B. considerando sólo flexiones primarias de eje fuerte (F_{actgeo_M}).

Caso A. Sólo se considera el axil primario

La primera carga crítica en caso de considerar los esfuerzos primarios de axil es $\mu_{1N} = \mu_{\text{critica}_\text{N}}$

$$(\mathbf{K}_L + \mu_{1N}\mathbf{K}_{GN})\boldsymbol{\phi}_{1N} = \mathbf{0}$$

La carga de colapso en caso de considerar sólo los esfuerzos axiles $\mu_{\text{collapse_N}}$ se obtiene determinando la carga de colapso de cada columna, empleando la norma española EA-95 $P_U^{KB} = \frac{A^{KB}\sigma_e}{\omega^{KB}}$ y el Eurocódigo EC-3 $P_U^{KB} = \frac{A^{KB}\sigma_e\chi^{KB}}{\gamma_{m1}}$ en donde ω y χ dependen de la esbeltez normalizada $\bar{\lambda}^{KB} = \sqrt{\frac{A\sigma_e}{\mu_{1N}P_{KB}}}$. De aquí, para la EA-95 $\mu^{KB}_{\text{collapse_N}} = \frac{A^{KB}\sigma_e}{P_{KB}\bar{\omega}^{KB}}$; y para el EC-3 $\mu^{KB}_{\text{collapse_N}} = \frac{A^{KB}\sigma_e\chi^{KB}}{P_{KB}\gamma_{m1}}$ y la carga de colapso de la estructura es: $\mu_{\text{collapse_N}} = \text{mínimo}\{\mu^1_{\text{collapse_N}}, \ldots, \mu^{NB}_{\text{collapse_N}}\}$.

El análisis de inestabilidad inicial nos proporciona los modos de pandeo y, por tanto, los esfuerzos internos secundarios que se desarrollan cuando la estructura tiene una imperfección dada por el primer modo de pandeo. Estos esfuerzos particularizados para la carga de colapso obtenida previamente$\mu_{\text{collapse_N}}$ resultan ser

$$M_{ys} = -EI_y\frac{F_{\text{actgeo}_N}}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}^2\phi_w}{\mathrm{d}x^2}$$

$$M_{zs} = EI_z\frac{F_{\text{actgeo}_N}}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}^2\phi_v}{\mathrm{d}x^2}$$

$$Bi_s = EI_a\frac{F_{\text{actgeo}_N}}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}^2\phi_{\theta x}}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\gamma = \frac{\mu_{\text{critica_N}}}{\mu_{\text{collapse_N}}}$$

La imperfección geométrica (F_{actgeo_N}) se obtiene imponiendo que la estructura debe colapsar para el nivel de carga de colapso $\mu_{\text{collapse_N}}$ con los esfuerzos secundarios $\{M_{zs}, M_{ys}, Bi_s\}$ y primarios calculados $\mathbf{N}$

$$\frac{N_{KB}\mu_{\text{collapse_N}}}{N^{KB}_{pl}} + \frac{M^{KB}_{ZS}}{M^{KB}_{zpl}} + \frac{M^{KB}_{YS}}{M^{KB}_{ypl}} + \frac{Bi^{KB}_s}{Bi^{KB}_{pl}} \leq 1$$

Para secciones de Clase 2 el colapso vendrá dado por la formación de la primera rótula plástica. (Esta se puede obtener de forma más precisa empleando la fórmula de interacción apropiada para cada tipo de sección)

$$\frac{N_{KB}\mu_{\text{collapse_N}}}{N^{KB}_{pl}} + \frac{M^{KB}_{ZS}}{M^{KB}_{zpl}} + \frac{M^{KB}_{YS}}{M^{KB}_{ypl}} + \frac{Bi^{KB}_s}{Bi^{KB}_{pl}} \leq 1$$

Ejemplo 1

La definición geométrica y carga viene dada en la Figura 4.

$$\mathbf{d}_{NL} \approx \mathbf{d} + \frac{a_{1N}}{(\mu_{1N}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1N} + \frac{F_{\text{actgeo}_N}}{(\mu_{1N}-1)}\boldsymbol{\phi}_{1N}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{1N} = \boldsymbol{\phi}_v = \left\{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right\}; \qquad F_{\text{actgeo}_N} = \frac{\sigma_e\left(1-\frac{1}{\omega}\right)W_z}{P_{\text{cr}}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$$

$$\nu \approx \frac{M}{2EI_z}x(L-x) + \left(\frac{4ML^2}{\pi^3 EI_z} + \frac{\sigma_e\left(1-\frac{1}{\omega}\right)W_z}{P_{\text{cr}}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{(\mu_1-1)}$$

donde

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

De forma analítica estos desplazamientos son

$$v = \frac{M_a}{P}\left[\left(\frac{\sin(kx)}{\tan(kL)} - \cos(kx) - \frac{x}{L} + 1\right) - \left(\frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} - \frac{x}{L}\right)\right] + \frac{F_{\text{actgeo}_N}}{(\mu_1-1)}\boldsymbol{\phi}_{1N}; \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Como se puede apreciar en la Figura 4, la ley de momentos flectores se puede obtener como suma de los lineales (primarios en la estructura sin imperfecciones), más la amplificación de los esfuerzos lineales inducidos por los axiles primarios, más los efectos inducidos por el axil en la estructura imperfecta.

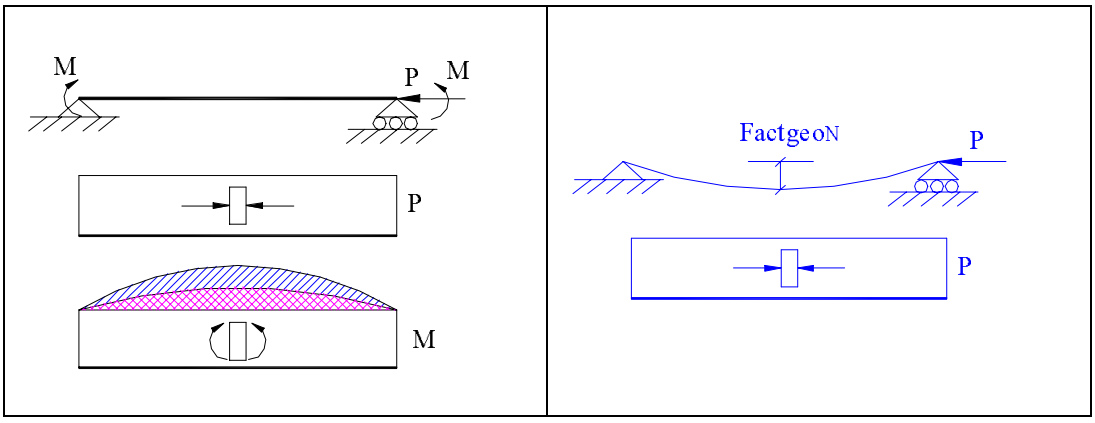

Figura 4. Ejemplo 1: definición geométrica y esfuerzos

Caso B. Sólo se consideran las flexiones primarias de eje fuerte

La primera carga crítica considerando sólo las flexiones primarias de eje fuerte es $\mu_{1M} = \mu_{\text{critica_M}}$; $(\mathbf{K}_L + \mu_{1M}\mathbf{K}_{GM})\boldsymbol{\phi}_{1M} = \mathbf{0}$. La carga de colapso tomando en consideración sólo las flexiones primarias $\mu_{\text{collapse_M}}$.

La carga de colapso para cada viga se puede obtener con el Eurocódigo 3 como $M_U^{KB} = \frac{W_y^{KB}\sigma_e\chi_{LT}^{KB}}{\gamma_{m1}}$ donde χ_{LT} depende de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}_{LT}^{KB} = \sqrt{\frac{W_y\sigma_e}{\mu_{1M}M_{y_{KB}}}}$.

De aquí, $\mu_{\text{collapse_M}}^{KB} = \frac{W_y\sigma_e\chi_{LT}^{KB}}{M_{y_{KB}}\gamma_{m1}}$ y la carga de colapso de la estructura es: $\mu_{\text{collapse_M}} = \text{mínimo}\{\mu_{\text{collapse_M}}^1, \ldots, \mu_{\text{collapse_M}}^{NB}\}$

El análisis de inestabilidad inicial nos proporciona el modo de pandeo y los esfuerzos secundarios que se desarrollan cuando la estructura tiene una imperfección dada por el primer modo de pandeo. Estos esfuerzos secundarios particularizados para el nivel de carga de colapso de la estructura son

$$M_{zs} = EI_z \frac{F_{\text{actgeo}_M}}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}^2\phi_v}{\mathrm{d}x^2}$$

$$Bi_s = EI_a \frac{F_{\text{actgeo}_M}}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}^2\phi_{\theta x}}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\gamma = \frac{\mu_{\text{critica_M}}}{\mu_{\text{collapse_M}}}$$

La imperfección geométrica (F_{actgeo_M}) se obtiene imponiendo que la estructura debe colapsar para el nivel de carga de colapso $\mu_{\text{collapse_M}}$ con los esfuerzos secundarios $\{M_{zs}, Bi_s\}$ y primarios $\{M_y\}$ calculados

$$\frac{M_y^{KB}\mu_{\text{collapse_M}}}{M_{yel}^{KB}} + \frac{M_{zs}^{KB}}{M_{zel}^{KB}} + \frac{Bi_s^{KB}}{Bi_{el}} \leq 1$$

Para secciones de Clase 2 el colapso vendrá dado por la formación de la primera rótula plástica. (Ésta se puede obtener de forma más precisa empleando la fórmula de interacción apropiada para cada tipo de sección)

$$\frac{M_y^{KB}\mu_{\text{collapse_M}}}{M_{ypl}^{KB}} + \frac{M_{zs}^{KB}}{M_{zpl}^{KB}} + \frac{Bi_s^{KB}}{Bi_{pl}} \leq 1$$

Ejemplo 2

La definición geométrica y carga viene dada en la Figura 5.

$$\mathbf{d}_{NL} \approx \mathbf{d} + \frac{a_{1M}}{(\mu_{1M} - 1)}\boldsymbol{\phi}_{1M} + \frac{F_{\text{actgeo}_M}}{(\mu_{1M} - 1)}\boldsymbol{\phi}_{1M}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{1M} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\phi}_v \\ \phi_{\theta x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \frac{\frac{\pi^2 EI_z}{L^2}}{M_{\text{cr}}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{array} \right\}; \qquad F_{\text{actgeo}_M} = \frac{\sigma_e(1 - \chi_{LT})(\gamma - 1)}{\gamma_{m1}M_{z_0}\left[\frac{1}{W_{zel}} + \frac{EI_a\pi^2}{W_{Biel}M_{\text{cr}}L^2}\right]}$$

Los desplazamientos se pueden obtener como

$$a_{1M} = \frac{\int (EI_z v''\phi''_{v1} + GI_t\theta'_x\phi'_{\theta_{x1}} + EI_a\theta''_x\phi''_{\theta_{x1}})\,\mathrm{d}x}{\int [EI_z\phi''_{w1})^2 + GI_t(\phi'_{\theta_{x1}})^2 + EI_a(\phi''_{\theta_{xi}})^2]\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\pi^2 M_{z_0}}{2L}}{\frac{\pi^4 EI_z}{L^3}} = \frac{1}{2}\frac{L^2 M_{z_0}}{\pi^2 EI_z}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v \\ \theta_x \end{array} \right\} = \frac{M_{z_0}}{P_z}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} + \left(\frac{1}{2(\mu_1 - 1)} + \frac{\frac{\sigma_e(1-\chi_{LT})(\gamma-1)}{\gamma_{m1}M_{z_0}\left[\frac{1}{W_{zel}} + \frac{EI_a\pi^2}{W_{Biel}M_{\mathrm{cr}}L^2}\right]}}{(\mu_1 - 1)} \right) \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{P_z} \\ \frac{}{M_{\mathrm{cr}}} \end{array} \right\}\right]$$

donde $M_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$; $\sqrt{\left(\frac{I_a}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2}\frac{G}{E}\frac{I_t}{I_z}\right)}$; $P_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$

De forma analítica estos desplazamientos son

$$\left\{ \begin{array}{c} v \\ \theta_x \end{array} \right\} = \frac{M_{z_0}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{M_{\mathrm{cr}}^2 - M_y^2}\left\{ \begin{array}{c} \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_a}{L^2}\right) \\ M_y \end{array} \right\} + \frac{F_{\mathrm{actgeo}_M}}{(\mu_{1M} - 1)}\boldsymbol{\phi}_{1M}$$

Como se puede apreciar en la Figura 5, la ley de momentos flectores de eje débil se puede obtener como suma de los lineales (primarios en la estructura sin imperfecciones), más la amplificación de los esfuerzos lineales inducidos por los flectores primarios, más los efectos inducidos por el flector primario en la estructura imperfecta. Los bimomentos se obtienen como suma de los efectos de segundo orden inducidos por los flectores primarios, más los efectos inducidos por el flector primario en la estructura imperfecta

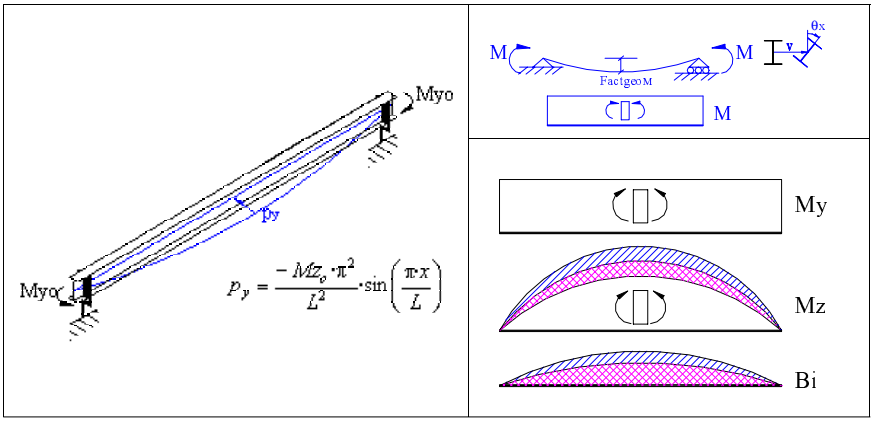

Figura 5. Ejemplo 2: definición geométrica y esfuerzos

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

La implementación del método propuesto se esquematiza en el diagrama de flujo de la Figura 5, siguiendo los pasos descritos en el apartado anterior.

En caso de optar por el método simplificado, la comprobación de resistencia para secciones de Clase 3 se reduce a

$$\frac{N_{KB}}{N_{el}^{KB}} + \frac{M_z^{KB} + M_{ZSN}^{KB} + M_{ZSM}^{KB}}{M_{zel}^{KB}} + \frac{M_Y^{KB} + M_{YSN}^{KB}}{M_{yel}^{KB}} + \frac{Bi^{KB} + Bi_{SN}^{KB} + Bi_{SM}^{KB}}{Bi_{el}} \leq 1$$

donde N^{KB}, M_z^{KB}, M_y^{KB} y Bi^{KB} son los esfuerzos primarios lineales, mientras que M_{zSN}^{KB}, M_{ySN}^{KB} y Bi_{SN}^{KB} son los esfuerzos no lineales adicionales debidos a la imperfección geométrica equivalente asociada a los esfuerzos de axil, más la amplificación de los esfuerzos lineales inducida por los esfuerzos primarios de axil. Análogamente, M_{zSM}^{KB} y Bi_{SM}^{KB} son los esfuerzos adicionales debidos a la imperfección geométrica equivalente asociada a los esfuerzos primarios de flexión de eje fuerte, más la amplificación de los esfuerzo lineales inducida por los esfuerzos primarios de flexión de eje fuerte.

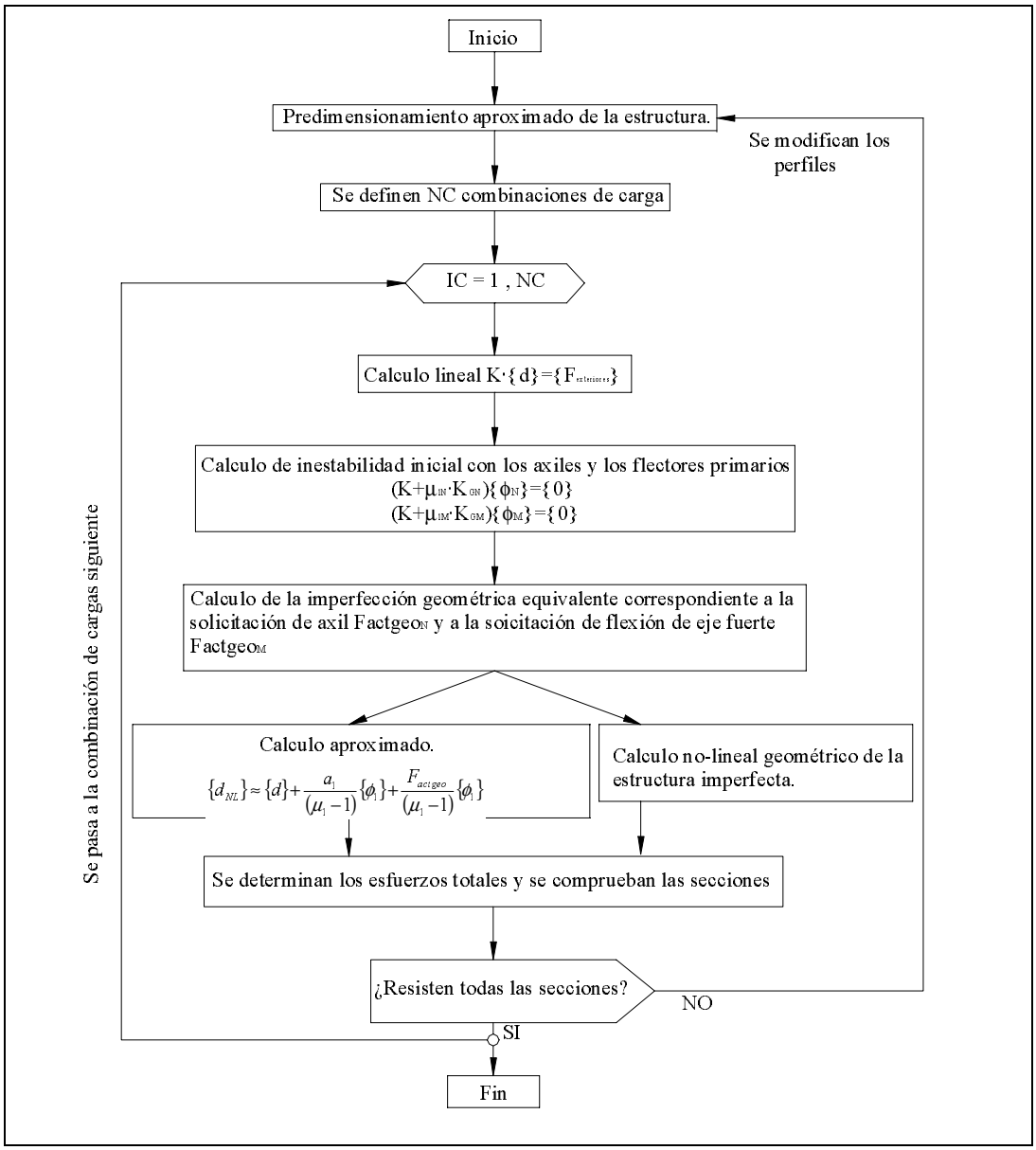

Figura 6. Diseño e implementación

EJEMPLOS

Consideraciones para el diseño

Pórticos de acero

En el ejemplo de la Figura 7 se determinan los efectos de segundo orden de forma simplificada para un pórtico sencillo.

$$\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{d} + \frac{a_1}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1 + \frac{F_{\text{actgeo}_N}}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1$$

donde $\mathbf{d} + \frac{a_1}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1$ viene dado por

$$a_1 = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{T}}\boldsymbol{\phi}_1}{\boldsymbol{\phi}_1^{\text{T}}\mathbf{K}_L\boldsymbol{\phi}_1} = \frac{HL\left(\frac{13}{15} + \frac{\sqrt{646}}{30}\right)}{\frac{EIz}{L}\frac{4(646+11\sqrt{646})}{75}}$$

$$\Delta = \frac{HL^3[(12200\sqrt{646} - 516800)EI_z + (216\sqrt{646} - 5499)PL^2]}{168EI_z(646 + 11\sqrt{646})EI_z(4\sqrt{646} - 124)3PL^2)}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{-HL^2((2440\sqrt{646} - 103360)EI_z + (39\sqrt{646} - 1146)PL^2)}{56EI_z(646 + 11\sqrt{646})EI_z(4\sqrt{646} - 124)3PL^2)}$$

Los desplazamientos analíticos son

$$\{\,\Delta \quad \theta_1 \quad \theta_2\,\} = \frac{-HL^2}{2\{PL^2(6+s) - EI_z[s^2(1-c^2) + 12s(1+c)]\}}\{(s+6)L - s(1+c) - s(1+c)\}$$

donde s y c son las conocidas funciones de estabilidad.

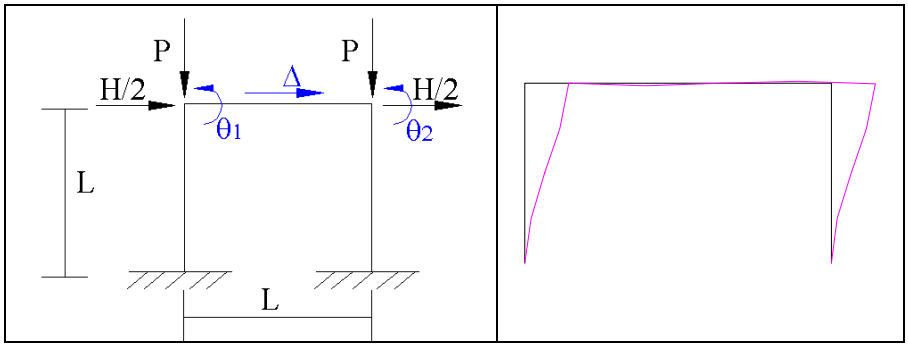

Figura 7. Carga, definición geométrica y primer modo de pandeo $\boldsymbol{\phi}_1$

Como se aprecia en la Figura 8, la precisión obtenida es excelente incluso para cargas próximas a la crítica.

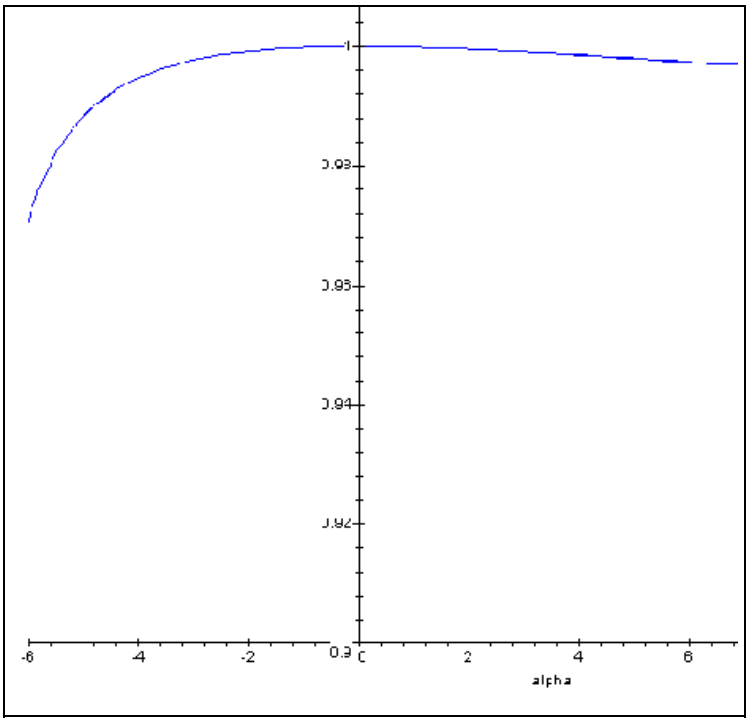

Figura 8. $\frac{\Delta_{\text{aproximado}}}{\Delta_{\text{exacta}}}$ y $\frac{\Delta_{\text{aproximada_MEF}}}{\Delta_{\text{exacta}}}$ vs $\alpha = \frac{PL^2}{EI_z}$

Naves a dos aguas

En las naves a dos aguas los primeros dos modos de pandeo pueden estar muy próximos, por lo que es necesario considerar los dos modos de pandeo para evaluar de forma precisa los efectos de segundo orden.

$$\mathbf{d}_{NL} = \mathbf{d} + \frac{a_1}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1 + \frac{a_2}{(\mu_2 - 1)}\boldsymbol{\phi}_2 + \max\left\{\frac{F_{\text{actgeo}_N_1}}{(\mu_1 - 1)}\boldsymbol{\phi}_1, \quad \frac{F_{\text{actgeo}_N_2}}{(\mu_2 - 1)}\boldsymbol{\phi}_2\right\}$$

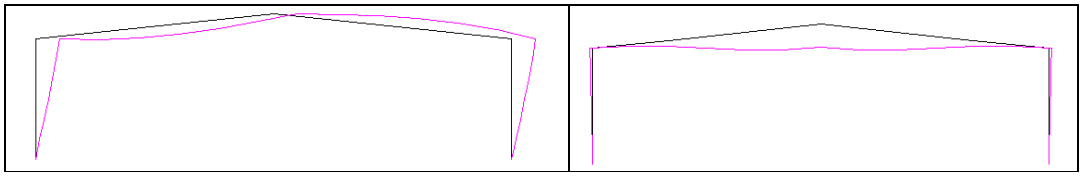

Figura 9. Modos de pandeo $\boldsymbol{\phi}_1$; $\boldsymbol{\phi}_2$ usuales en naves a dos aguas

Imperfección geométrica equivalente propuesta vs Eurocódigo 3[5]

Pórticos de acero

El objeto del presente ejemplo es comparar la imperfección que se obtiene empleando la generalización del método de Dutheil propuesta y el Eurocódigo.

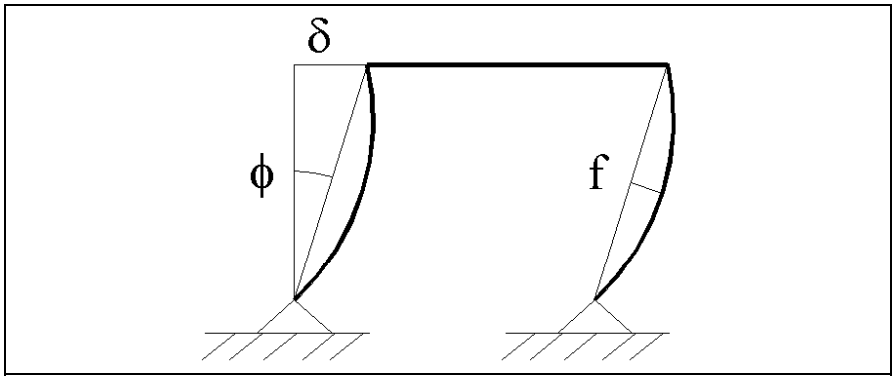

Figura 10. Imperfección geométrica según el Eurocódigo: $\phi = k_c\, k_s\, \phi_0$; $\quad \phi_1 = \frac{1}{200}$

A continuación se muestra la imperfección a nivel cuantitativo y cualitativo con la propuesta presentada en caso de que las columnas sean HEB-200 y la viga sea un IPE-400.

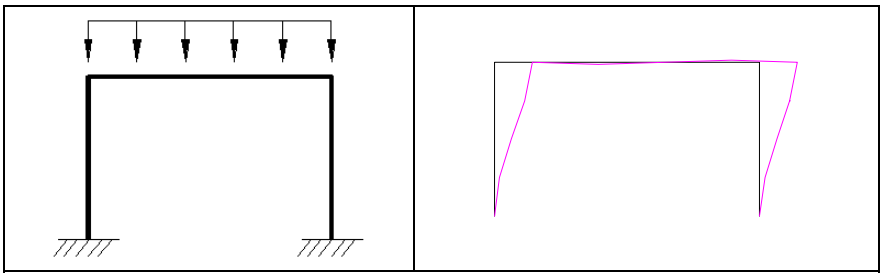

Figura 11. Carga, definición geométrica y primer modo de pandeo. Base empotrada $\phi_1 = \frac{1}{370}$

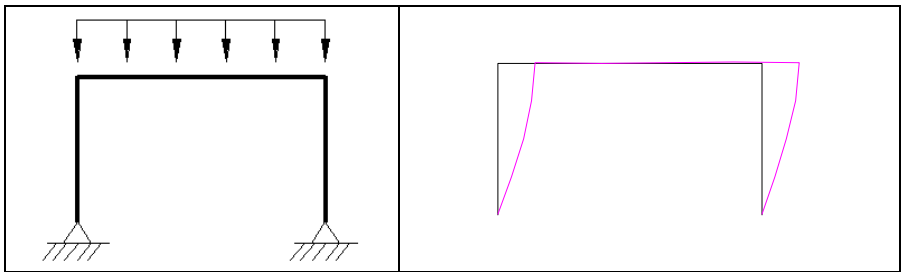

Figura 12. Carga, definición geométrica y primer modo de pandeo. Base apoyada $\phi_1 = \frac{1}{160}$

Se puede observar como, para pórticos con pilares simplemente apoyados, la imperfección es muy similar a la propuesta por el Eurocódigo, mientras que para pilares empotrados en cimentación existe una diferencia importante tanto a nivel cuantitativo, la imperfección con el método propuesto es más pequeña, como cualitativo, la forma difiere bastante en los pilares (Figuras 11 y 12).

Pórtico de Vogel

En el presente ejemplo se comparan las imperfecciones a emplear en el pórtico de Vogel de la Figura 13 ampliamente utilizado como estructura de referencia.

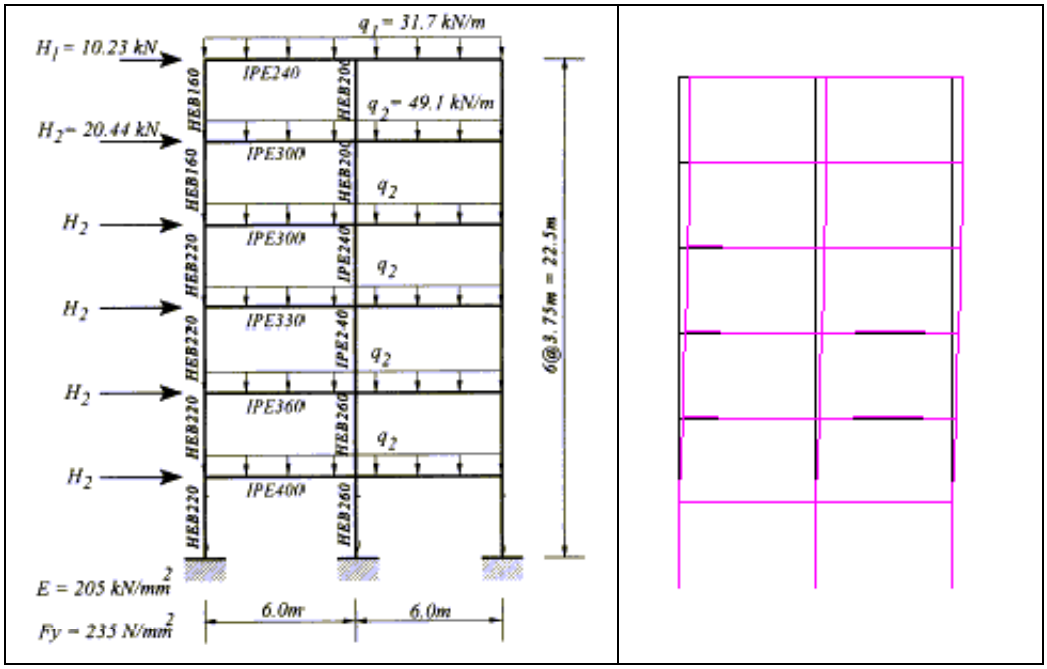

Figura 13. Carga, definición geométrica y primer modo de pandeo

Según el Eurocódigo

$$\phi = k_c \, k_s \, \phi_0$$

$$\phi_1 = \ldots = \phi_6 = \sqrt{0,5 + \frac{1}{3}} \sqrt{0,2 + \frac{1}{6}} \, \frac{1}{200} = 0,9 \cdot 0,6 \, \frac{1}{200} = \frac{1}{362}$$

Según la propuesta

$$\phi_1 = \frac{1}{416}; \quad \phi_2 = \frac{1}{200}; \quad \phi_3 = \frac{1}{172}; \quad \phi_4 = \frac{1}{238}; \quad \phi_5 = \frac{1}{268}; \quad \phi_1 = \frac{1}{1250}$$

Se observa que a nivel cualitativo el EC-3 asigna el mismo desplome a todos los pisos, mientras que en la propuesta realizada al ir ligada al primer modo de pandeo este va variando.

Arcos

En el presente ejemplo se compara la imperfección establecida por la recomendación para el proyecto de puentes metálicos (RPM-95) y el método propuesto. La deficiencia principal de estas recomendaciones es que no hace depender la imperfección de la esbeltez, como ocurre en barras rectas coherentemente con todos los ensayos experimentales y estudios numéricos realizados a los largo de la historia. En la Figura 15 se compara la recomendación de la RPM-95 con la propuesta realizada.

En particular se estudian arcos de sección en cajón # $400 \times 400 \times 10$ (mm). La directriz es parabólica y viene caracterizada por la luz (L) y la flecha (f).

f/L	Casos analizados valores de f y L en métros					
0,1	1/10	2/20	3/30	4/40	5/50	6/60
0,2	2/10	4/20	6/30	8/40	10/50	12/60

Tabla I. Rango de arcos analizados

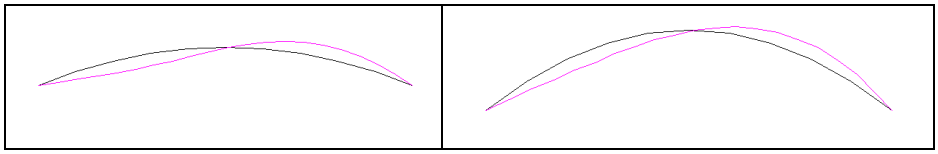

Figura 14. Modos de pandeo

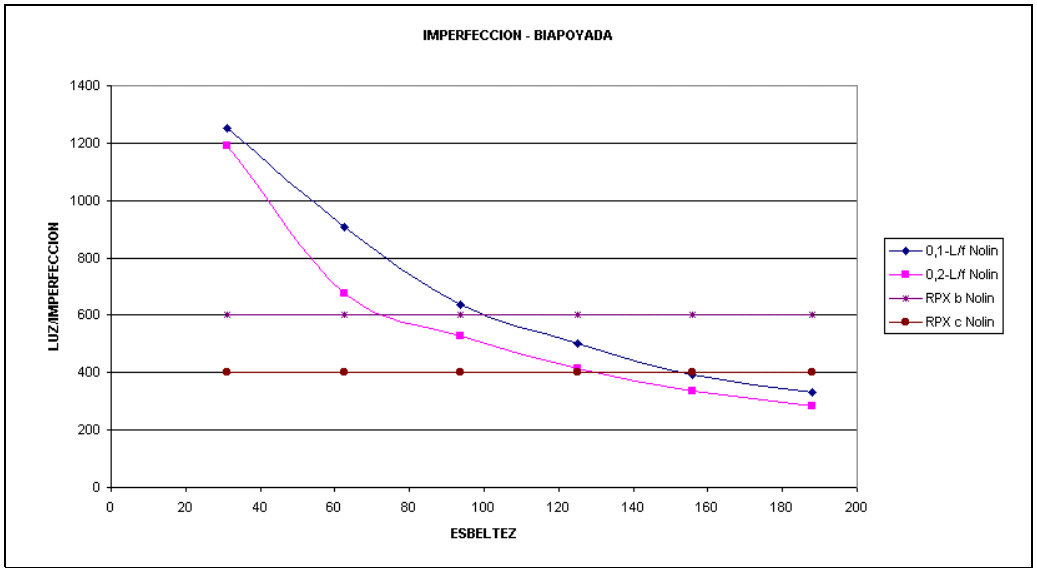

Figura 15. Comparación de (luz/imperfección) vs esbeltez con la propuesta y la RPM-95

CONCLUSIONES

Las conclusiones principales son:

1. Se muestra que para predecir el estado límite último de un entramado metálico esbelto basta con realizar un cálculo lineal de esfuerzos y un análisis de inestabilidad inicial (menor carga crítica y primer modo de pandeo).
2. La menor carga crítica y el primer modo de pandeo contienen mucha información y hasta la fecha no se ha utilizado en toda su extensión. Su información es equivalente a la que se obtiene con un análisis no lineal geométrico de la estructura imperfecta. Sin embargo, el esfuerzo necesario para obtenerla es mucho menor.

3. Se propone un método simplificado para evaluar los efectos de segundo orden geométricos inducidos por el axil primario y la flexión de eje fuerte primaria.
4. Se propone un método sistemático para fijar la magnitud de las imperfecciones equivalentes con las que simular los defectos geométricos, excentricidades inevitables, tensiones residuales, etc.
5. Se justifica que la geometría de la imperfección más desfavorable es la definida por el primer modo de pandeo que además tiene la virtud de simplificar el análisis.
6. Se obtiene una mejor comprensión del fenómeno del pandeo al asociarlo a movimientos y esfuerzos de las secciones, frente a las formulaciones poco transparentes en las que dicho efecto se asocia a coeficientes auxiliares (ω, χ). Con la formulación propuesta los esfuerzos se desglosan en (Figura 4, Ejemplo 1 y Figura 5, Ejemplo 2):

   a) Esfuerzos lineales (primarios en la estructura sin imperfecciones).
   b) Amplificación de los esfuerzos lineales inducidos por los axiles primarios.
   c) Los efectos inducidos por el axil en la estructura imperfecta.
   d) Amplificación de los esfuerzos lineales inducidos por los flectores de eje fuerte primario.
   e) Los efectos inducidos por los flectores primarios en la estructura imperfecta.

7. La comprobación resistente se realiza con los esfuerzos "reales" que solicitan a la sección. De este modo se evitan complejas fórmulas de interacción que definen el agotamiento de la barra con múltiples coeficientes que pretenden introducir en el dimensionamiento los efectos despreciados en el cálculo.
8. El pandeo se trata como un problema global, a diferencia del análisis tradicional en donde el pandeo sólo se considera en los elementos directamente solicitados por las cargas que provocan la inestabilidad.
9. Los esfuerzos secundarios en los que se basa el dimensionamiento de los arriostramientos y las piezas compuestas (presillas y triangulaciones) aparecen de forma natural.
10. Se aplica el método a diversas tipologías, discutiendo las diferencias cualitativas y cuantitativas con respecto a los métodos propugnados por la normativa vigente (EA-95, EC-3 y RPM-95):

    a) Pórticos: la formulación del eurocódigo en la que se proponen combaduras y desplomes es una forma aproximada de reproducir la geometría correspondiente al primer modo de pandeo, con la limitación de que sólo se aplica a pórticos y que en casos complejos queda indefinida la combinación de desplomes y combaduras que producen el efecto más desfavorable.
    b) Naves a dos aguas: para evaluar efectos de segundo orden es necesario trabajar con los dos primeros modos de pandeo.
    c) Arcos: se ha puesto de manifiesto que la imperfección geométrica equivalente en estas estructuras debe depender de la esbeltez del arco, a diferencia de lo que se indica en la recomendación RPM-95, en la que se define una imperfección constante para todas las esbelteces.

REFERENCIAS

1 A. Agüero, "Método aproximado para estimar el estado límite último en entramados metálicos esbeltos", Tesis doctoral, Valencia, (2003).

2 S.L. Chan, "Second-order elastic analysis of frames using single imperfect element per member", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **121**, N° 6, pp. 939, (1995).

3 W.F. Chen y Atsuta, "*Theory of beam columns*", Vol. 2: "*Space behaviour and design*", McGraw Hill, EE.UU., (1976).

4 M.A. Crisfield, "*Non-linear finite element analysis of solids and structures*", Vol. 2, John Wiley and Sons, (1997).

5 C.G. Culver, "Initial imperfections in biaxial bending equations", *Journal of the structural Division*, ASCE, Vol. **92**, N° ST2, *Proc. Paper 4772*, Abril, pp. 63–83, (1966).

6 Eurocódigo-3, Proyecto de estructuras de Acero, Parte 1-1: "Reglas generales y reglas para edificación", (1996).

7 Kim, Seung-Eock *et al.*, "Design guide for steel frames using advanced analysis program", *Engineering Structures*, Vol. **21**, pp. 352–364, (1999).

8 S. Timoshenko y Gere, "*Theory of elastic stability*", McGraw Hill, New York, (1961).

9 N.S. Trahair, "*Flexural-torsional buckling of structures*", E & FN SPON, (1993).

10 O.C. Zienkiewicz, "*El método de los elementos finitos*", Reverté, S.A., Barcelona, (2000).