ENSAYO SOBRE UN MÉTODO DE CÁLCULO VECTORIAL Y SU APLICACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE CUADRICAS EN UN ESPACIO EUCLIDEO N-DIMENSIONAL
(cont. de la p. 440 del tomo 2. 1980 de esta revista)

Quaderns d'enginyeria
3(1981)1 p.167-200

Javier Montoliu Siscar

C . CLASIFICACION DE LAS CUADRICAS

1.- En virtud de las propiedades de las cuádricas estudiadas en el capítulo anterior, se pueden clasificar las cuádricas.

Elegimos aquí las siguientes características:

1^a.- Dimensión n del espacio considerado

2^a.- Valor m cuando la cuádrica se considera un m-cilindro.

3^a.- Cantidad p de valores propios nulos de $\vec{\tau}$, o sea Dim Nuc $\vec{\tau}$. Tendremos cuádricas sin centro para p = m + 1 y cuádricas con centro para p = m.

4^a.- Cantidad s de valores propios no nulos de $\vec{\tau}$ que tienen el mismo signo. Consideraremos la mayor de las cantidades.

Además, para las cuádricas centradas consideraremos:

5^a.- Signo o nulidad de $\vec{\tau}' = \vec{\tau}\left[\alpha - \vec{\tau}\,(\vec{v} \otimes \vec{v})\right]$. Para $\vec{\tau}'$ nulo escribiremos $\vec{\tau}' = 0$ y en los demás casos, si tiene más valores propios positivos que negativos escribiremos $\vec{\tau}' = +$, si son mayoría los negativos : $\vec{\tau}' = -$ y si están en igual número, $\vec{\tau}' = \pm$.

2.- Observaciones:

a) Cuádricas con centro (p = m)

p = 0 La cuádrica no es cilíndrica , tiene n ejes, de ellos s reales para $\vec{\tau}' = -$, ó s imaginarios para $\vec{\tau}' = +$, y ambas cosas a la vez para $\vec{\tau}' = \pm$.

p ≠ 0 Tenemos m = p y la cuádrica es un p-cilindro. La sección recta, en su espacio de n-p dimensiones, tiene n-p ejes, de ellos s reales para $\vec{\tau}' = -$, s imaginarios para $\vec{\tau}' = +$, y ambas cosas a la vez para $\vec{\tau}' = \pm$.

b) Cuádricas sin centro (p = m + 1)

p = 1 No es cilindro. Las secciones principales son cuádricas centradas. Las que no contienen al vértice tienen según su posición s ejes reales o bien s ejes imaginarios.

Dedicado al Profesor FREIXA con motivo de su jubilación.

$p > 1$ Es un $(p - 1)$-cilindro que tiene por sección recta una cuádrica no centrada, que en su espacio de $n-p+1$ dimensiones es de las características anteriores.

Hacemos observar, para no inducir a confusión, que al decir que existen s ejes, por ejemplo reales, queremos significar que siempre podemor considerar sistemas ortonormales de s ejes reales, y nunca de más de s.

3.- Notaciones.

a) Cuádricas centradas simples. (no conos). Se denominarán con su nombre ordinario o a partir de $n = 3$, daremos el nombre de elipsoide real a la cuádrica que no tiene ejes imaginarios; elipsoide imaginario a la cuádrica que no tiene ejes reales; hiperboloide 1, 2, .. a la cuádrica que tiene un sistema ortonormal de 1, 2, .. ejes imaginarios.

b) Conos simples. No reciben aquí nombre normalizado y se distinguirán por las familias de las que pueden ser conos asintóticos.

c) Cuádricas simples no centradas. Su notación es la de la sección principal, precedida de la letra P. Así, P-elipse indica que la cuádrica no es centrada y que su sección principal es de las familia de las elipses.

d) m-cilindros. La notación será la de la sección recta precedida de la cifra valor de m. Ejemplos:

3-Elipse	Cuádrica entrada, 3-cilindro, cuya sección recta es una elipse.
2-P-2 puntos	Cuádrica sin centros, 2-cilindro. La sección principal de su sección recta es de la familia de dos puntos.

4.- Clasificaciones.

En los párrafos que siguen se desarrollan sucesivamente las clasificaciones de las cuádricas en espacios de 1, 2, 3 y 4 dimensiones.

A la vista de ellas se deduce fácilmente el proceso a seguir para clasificaciones de cuádricas para espacios de más de cuatro dimensiones.

5.- <u>n = 1</u>

En un análisis previo, vemos que $\vec{\tau}$ siempre tiene un valor propio λ , no nulo. Por tanto $\vec{\tau} = \lambda\ \vec{I}$ ($\vec{I}$ = tensor unitario o idéntico).

Todas las cuádricas serán centradas pues forzosamente se tiene siempre $\vec{v} \in \operatorname{Im} \vec{\tau}$.

La variedad central es un punto y su posición viene determinada por

$$\lambda\ \vec{I}\ \vec{x} + \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{c} = -\frac{\vec{v}}{\lambda}$$

El valor de $\vec{\tau}'$ será

$$\vec{\tau}' = \lambda\ \vec{I}\left[\alpha - \frac{\vec{I}}{\lambda}(\vec{v} \otimes \vec{v})\right] = \lambda\ \vec{I}\left(\alpha - \frac{v^2}{\lambda}\right) = (\lambda\ \alpha - v^2)\ \vec{I}$$

$$m = 0 \ldots\ p = 0 \ldots\ s = 1 \quad \begin{cases} \vec{\tau}' = -\ (v^2 - \lambda\alpha > 0) & \text{2 puntos reales} \\ \vec{\tau}' = 0\ (v^2 - \lambda\alpha = 0) & \text{1 punto real doble} \\ \vec{\tau}' = +\ (v^2 - \lambda\ \alpha < 0) & \text{2 puntos imaginarios} \end{cases}$$

6.- <u>n = 2</u>

$$m = 0 \begin{cases} p = 0 \begin{cases} s = 2 \begin{cases} \vec{\tau}' = - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Elipse real} \\ \vec{\tau}' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{1 punto real} \\ \vec{\tau}' = + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Elipse imaginaria} \end{cases} \\ s = 1 \begin{cases} \vec{\tau}' = \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Hipérbola} \\ \vec{\tau}' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Cono (2 rectas secantes)} \end{cases} \end{cases} \\ p = 1 \ldots\ s = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{P-2 puntos (parábola)} \end{cases}$$

$$m = 1 \ldots\ p = 1 \ldots\ s = 1 \quad \begin{cases} \vec{\tau}' = - \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{1 - 2 puntos reales} \\ \vec{\tau}' = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{1 - 1 punto real doble} \\ \vec{\tau}' = + \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{1 - 2 puntos imaginarios} \end{cases}$$

7.- <u>n = 3</u>

- $m = 0$
  - $p = 0$
    - $s = 3$
      - $\vec{\tau}' = -$ ...... Elipsoide real
      - $\vec{\tau}' = 0$ ...... Un punto real
      - $\vec{\tau}' = +$ ...... Elipsoide imaginario
    - $s = 2$
      - $\vec{\tau}' = -$ ...... Hiperboloide 1 (de una hoja)
      - $\vec{\tau}' = 0$ ...... Cono (cono ordinario)
      - $\vec{\tau}' = +$ ...... Hiperboloide 2 (de 2 hojas)
  - $p = 1$
    - $s = 2$ .... P-elipse (paraboloide elíptico)
    - $s = 1$ .... P-hipérbola (parab. hiperbólico)
- $m = 1$
  - $p = 1$
    - $s = 2$
      - $\vec{\tau}' = -$ ...... 1- Elipse real (cil. elíptico)
      - $\vec{\tau}' = 0$ ...... 1- Un punto (recta)
      - $\vec{\tau}' = +$ ...... 1- Elipse imaginaria
    - $s = 1$
      - $\vec{\tau}' = \pm$ ...... 1- Hipérbola (cil. hiperbólico)
      - $\vec{\tau}' = 0$ ...... 1-2 secantes (planos secantes)
  - $p = 2$ ..... $s = 1$ .... 1-P-2 puntos (cil. parabólico)
- $m = 2$ .... $p = 2$ ..... $s = 1$
  - $\vec{\tau}' = -$ ...... 2-2 puntos (planos paralelos)
  - $\vec{\tau}' = 0$ ...... 2-1 p. doble (plano doble)
  - $\vec{\tau}' = +$ ...... 2-2 puntos imaginarios

8.- $\underline{n = 4}$

- m = 0
  - p = 0
    - s = 4
      - $\vec{\tau}' = -$ ... Elipsoide real
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... Un punto real
      - $\vec{\tau}' = +$ ... Elipsoide imaginario
    - s = 3
      - $\vec{\tau}' = -$ ... Hiperboloide 1
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... Cono 1 - 3
      - $\vec{\tau}' = +$ ... Hiperboloide 3
    - s = 2
      - $\vec{\tau}' = \pm$ ... Hiperboloide 2
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... Cono 2 - 2
  - p = 1
    - s = 3 .... P-elipsoide (3n)
    - s = 2 .... P-hiperboloide 1, 2 (3n)
- m = 1
  - p = 1
    - s = 3
      - $\vec{\tau}' = -$ ... 1-elipsoide real (3n)
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... 1- Un punto real
      - $\vec{\tau}' = +$ ... 1-elipsoide imaginario (3n)
    - s = 2
      - $\vec{\tau}' = -$ ... 1-hiperboloide 1 (3n)
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... 1-cono 1-2 (3n)
      - $\vec{\tau}' = +$ ... 1-hiperboloide 2 (3n)
  - p = 2
    - s = 2 .... 1-P-elipse
    - s = 1 .... 1-P-hipérbola
- m = 2
  - p = 2
    - s = 2
      - $\vec{\tau}' = -$ ... 2-Elipse real
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... 2-Punto real
      - $\vec{\tau}' = +$ ... 2-Elipse imaginaria
    - s = 1
      - $\vec{\tau}' = \pm$ ... 2-Hipérbola
      - $\vec{\tau}' = 0$ ... 2-Rectas secantes
  - p = 3 ..... s = 1 .... 2-P-2 puntos
- m = 3 ... p = 3 .... s = 1
  - $\vec{\tau}' = -$ ... 3-2 puntos reales
  - $\vec{\tau}' = 0$ ... 3-1 punto doble
  - $\vec{\tau}' = +$ ... 3-2 puntos imaginarios

9.- Estudio del determinante

$$D = \left| \begin{array}{c|c} \{\vec{\tau}\}' & \{\vec{w}\} \\ \hline \{\vec{v}\}' & \alpha \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|c} t_1^{\,1} & t_2^{\,1} & \dots & t_n^{\,1} & w^1 \\ t_1^{\,2} & t_2^{\,2} & \dots & t_n^{\,2} & w^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ t_1^{\,n} & t_2^{\,n} & \dots & t_n^{\,n} & w^n \\ \hline v_1 & v_2 & \dots & v_n & \alpha \end{array} \right|$$

Llamemos $t_j^{\,i}$ al elemento de $\{\vec{\tau}\}'$de fila i y de columna j, $c_j^{\,i}$ a su cofactor, $\widetilde{\{\vec{\chi}\}}'$ a la matriz de los cofactores y $d_i^{\,j} = c_j^{\,i}$ al elemento correspondiente de $\{\vec{\chi}\}' =$ = Matriz adjunta de $\{\vec{\tau}\}'$. Denominemos m_j^i al determinante de la matriz que resulta de suprimir en $\{\vec{\tau}\}'$ la fila i y la columna j correspondientes al elemento t_j^i. Al desarrollar el determinante D sucesivamente por la última columna y la última fila y representando Det $\vec{\tau}$ por $|\vec{\tau}|$, tendremos:

$$D = \alpha\ |\vec{\tau}| + \sum_i \sum_j \left[(-1)^{n+i+1} w^i\ (-1)^{n+j} v_j m_j^{\,i}\right] =$$

$$= \alpha\ |\vec{\tau}| + \sum_i \sum_j (-1)^{i+j+1} m_j^{\,i} v_j w^i = \alpha |\vec{\tau}| - \sum_i \sum_j c_j^{\,i}\ w^i v_j =$$

$$= \alpha\ |\vec{\tau}| - d_i^{\,j} w^i v_j \quad = \alpha\ |\vec{\tau}| \quad - \ \vec{\chi}\ \ (\vec{w} \boxtimes \vec{v})$$

El valor de D es invariante al cambiar de base.

a) Para $\vec{\tau}$ simétrico y de rango n (Dim. Nuc $\vec{\tau}$ = 0) y $\vec{w} = \vec{v}$, se verifica:

$$\vec{\chi} * \vec{\tau} = \vec{\tau} * \vec{\chi} = |\vec{\tau}|\vec{I} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\chi} = |\vec{\tau}|\ \vec{\tau}^{-1} \neq \vec{0}$$

y por consiguiente:

$$D = \alpha\ |\vec{\tau}| - |\vec{\tau}|\ \vec{\tau}^{-1}\ (\vec{v} \boxtimes \vec{v}) = |\vec{\tau}| \left[\alpha - \vec{\tau}^{-1}\ (\vec{v} \boxtimes \vec{v})\right] = |\vec{\tau}'|$$

b) Para $\vec{\tau}$ simétrico y de rango n - 1 (Dim Nuc $\vec{\tau}$ = 1) y $\vec{w} = \vec{v}$, se verifica $\vec{\chi} \neq 0$, $|\vec{\tau}| = \vec{0}$ y también

$$\vec{\chi} * \vec{\tau} = \vec{\tau} * \vec{\chi} = 0 \Longrightarrow \quad \text{Im}\ \vec{\chi} = \text{Nuc}\ \vec{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \text{Dim Im}\ \vec{\chi} = 1$$

y por tanto el valor propio k de $\vec{\chi}$, que es su traza, coincidirá con δ_{n-1} = (n - 1) invariante de $\vec{\tau}'$.

Tendremos por consiguiente:

$$\vec{v} \in \text{Im}\ \vec{\tau} \Longrightarrow \quad \vec{\chi}\ \vec{v} = 0 \Longrightarrow \quad \vec{\chi}\ (\vec{v} \boxtimes \vec{v}) = 0 \Longrightarrow \quad D = 0$$

$$\vec{v} \notin \text{Im}\ \vec{\tau} \Longrightarrow \quad \vec{\chi}\ \vec{v} = k\ \vec{v}_n \Longrightarrow \vec{\chi}(\vec{v} \boxtimes \vec{v}) = (k\ \vec{v}_n)\vec{v} = k\ \vec{v}_n^{\,2} \Longrightarrow \ D = -\delta_{n-1}\vec{v}_n^{\,2} \neq 0$$

c) Para $\vec{\tau}$ simétrico y de rango inferior a n - 1, tenemos:

$$\vec{\chi} = 0\ ; \quad |\vec{\tau}\ | = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = 0$$

10.- Las propiedades señaladas para D, nos permiten utilizar D para la clasificación de las cuádricas por el método matricial de uso general.

Vamos a ver aquí una aplicación para n = 3.

10.1.- Vemos que se verifica:

a) Cuádricas simples centradas ($|\vec{\tau}| \neq 0$)

$D > 0 \iff |\vec{\tau}'| > 0 \implies \vec{\tau}'$ tiene 1 o 3 valores propios positivos, y ninguno nulo.

$D < 0 \iff |\vec{\tau}'| < 0 \implies \vec{\tau}'$ tiene 0 o 2 valores propios positivos, y ninguno nulo.

$D = 0 \iff |\vec{\tau}'| = 0 \implies$ Punto o cono ordinario

b) Cuádricas simples sin centros ($|\vec{\tau}| = 0$); rango = (n -1); $\vec{v} \notin \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$)

$D > 0 \iff \delta_2 < 0 \iff \vec{\tau}$ tiene los dos valores propios no nulos de distinto signo

$D < 0 \iff \delta_2 > 0 \iff \vec{\tau}$ tiene los dos valores propios no nulos de igual signo.

c) Cilindros. ($|\vec{\tau}| = 0$ y rango < (n-1) ó: $|\vec{\tau}| = 0$; rango = (n-1); $\vec{v} \in \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$):

$D = 0$

10.2.- Recordaremos que por las propiedades de la ecuación de 3° grado características de $\vec{\tau}$, siendo δ_1 = traza, δ_2 = 2° invariante y Δ = Determinante, se tiene:

$$\Delta \neq 0 \begin{cases} \delta_2 > 0;\ \Delta\,\delta_1 > 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{3 raíces no nulas del mismo signo.} \\ \delta_2 \not> 0;\ ó\ \Delta\,\delta_1 \not> 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{3 raíces no nulas de distintos signos.} \end{cases}$$

$\Delta = 0$ .... Una o más raíces nulas.

10.3.- Teniendo en cuenta nuestra clasificación y los párrafos anteriores, deducimos:

Elipsoide real $\iff \vec{\tau}' = -$; 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ del mismo signo

$\iff D < 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 > 0;\ \Delta\,\delta_1 > 0$

Punto $\iff \vec{\tau}' = 0$; 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ del mismo signo

$\iff D = 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 > 0;\ \Delta\,\delta_1 > 0$

Elipsoide imag. $\iff \vec{\tau}' = +$: 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ del mismo signo

$\iff D > 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 > 0;\ \Delta\,\delta_1 > 0$

Hiperboloide 1 $\iff \vec{\tau}' = -$; 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ de distintos signos

$\iff D > 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 \not> 0$ ó $\Delta\delta_1 \not> 0$

Cono ordinario $\iff \vec{\tau}' = 0$; 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ de distintos signos

$\iff D = 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 \not> 0$ ó $\Delta\delta_1 \not> 0$

Hiperboloide 2	$\Longleftrightarrow$	$\vec{\tau}' = + $; 3 raíces no nulas de $\vec{\tau}$ de distintos signos
	$\Longleftrightarrow$	$D < 0;\ \Delta \neq 0;\ \delta_2 \not> 0$ ó $\Delta\,\delta_1 \not> 0$
P-elipse	$\Longleftrightarrow$	$\vec{v} \notin \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$; 1 raíz nula, 2 de igual signo
	$\Longleftrightarrow$	$D < 0;\ \Delta = 0.$
P-hipérbola	$\Longleftrightarrow$	$\vec{v} \notin \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$; 1 raíz nula, 2 de signos opuestos
	$\Longleftrightarrow$	$D > 0;\ \Delta = 0.$
Cilindros	$\Longleftrightarrow$	$D = 0;\ \Delta = 0.$

E S F E R A S

ESFERA. RADIO

1.- Denominamos <u>esfera</u> a todo elipsoide cuyo coeficiente tensorial es $k\vec{I}$, siendo $\vec{I}$ el tensor idéntico y k un escalar no nulo. Su ecuación es pues:

$$k\vec{I}\,(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \alpha = 0 \Longleftrightarrow k\,\vec{x}^2 + 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \alpha = 0$$

Las esferas tienen variedad central, pues Nuc $\vec{I} = \vec{0}$, y ésta será el único punto solución de la ecuación $k\,\vec{I}\,\vec{x} + \vec{v} = 0$, o sea:

$$\vec{c} = -\frac{\vec{v}}{k}$$

2.- La ecuación de la esfera se acostumbra a expresar de otras maneras.

Dividiendo los miembros de la ecuación por k y sumando y restando un término $\vec{v}^2 / k^2$, queda así:

$$\vec{x}^2 + \frac{2\vec{v}\vec{x}}{k} + \frac{\vec{v}^2}{k^2} + \frac{\alpha}{k} - \frac{\vec{v}^2}{k^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\vec{x} + \frac{\vec{v}}{k}\right)^2 + \frac{k\,\alpha - \vec{v}^2}{k^2} = 0$$

y llamando radio de la esfera al escalar positivo (ó nulo)

$$r = \sqrt{\frac{\vec{v}^2 - \alpha\,k}{k^2}} \Longrightarrow r^2 = \frac{\vec{v}^2 - \alpha\,k}{k^2}$$

podemos escribir

$$\left(\vec{x} + \frac{\vec{v}}{k}\right)^2 = r^2$$

y en función de $\vec{c}$, tendremos

$$(\vec{x} - \vec{c})^2 = r^2$$

Tendremos evidentemente

$r^2 > 0 \iff v^2 > \alpha k$ .... Esfera real

$r^2 = 0 \iff v^2 = \alpha k$ .... Punto

$r^2 < 0 \iff v^2 < \alpha k$ .... Esfera imaginaria

y es fácil ver que la ecuación de la esfera referida al centro es:

$$\vec{x}^2 = r^2$$

3.- Para n = 3, la esfera coincide con el concepto habitual de superficie esférica.

Para n = 2, la esfera es el perímetro de un círculo.

Para n = 1, todas las cuádricas son esferas y con dos puntos distintos (o uno doble para r = 0).

4.- Llamamos <u>radio</u> de un punto $\vec{x}_1$ de una esfera, al vector

$$\vec{r}_1 = \vec{x}_1 - \vec{c}$$

y a la vista de la ecuación de la esfera, tenemos:

$$\vec{r}_i^{\,2} = r^2$$

o sea que el radio de la esfera es el módulo común de los radios de sus puntos, y que para $r \neq 0$ hay un radio para cada dirección y sentido.

5.- Volumen de una esfera

$$V = \frac{1}{n} \int_s \vec{r}\ \vec{ds} = \frac{1}{n} \text{ Area esfera por radio esfera.}$$

6.- Recordaremos las integrales $A_n = \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx$

Valores inmediatos:

$$A_0 = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad A_1 = r$$

Fórmula recurrente:

$$A_n = \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \left[x(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} \right]_0^r - \int_0^r x \frac{n-1}{2} (r^2 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} (-2x dx) =$$

$$= (n-1) \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} x^2 dx = (n-1) \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^2 - (r^2 - x^2) \right] dx =$$

$$= (n-1) \left[\int_0^r r^2 (r^2 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx - \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx \right] = (n-1)\, r^2 A_{n-2} - (n-1)\, A_n$$

Por consiguiente

$$n A_n = (n-1) r^2 A_{n-2} \Longleftrightarrow A_n = \frac{n-1}{n} r^2 A_{n-2} \Longrightarrow A_2 = \frac{1}{4} \pi r^2$$

7.- Producto $A_n A_{n-1}$.

Valores inmediatos: $A_1 A_0 = \frac{1}{2} \pi r$; $A_2 A_1 = \frac{\pi r^3}{4}$

Fórmula recurrente:

$$\left.\begin{array}{l} A_n = \dfrac{n-1}{n} r^2 A_{n-2} \\ A_{n-1} = \dfrac{n-2}{n-1} r^2 A_{n-3} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_n A_{n-1} = \frac{n-2}{n} r^4 A_{n-2} A_{n-3}$$

De aquí deducimos:

$$n = \text{par} \ldots \quad A_n A_{n-1} = \frac{n-2}{n} \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{4}{6} \frac{2}{4} r^{4\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_2 A_1 = \frac{2}{n} r^{2n-4} \frac{\pi r^3}{4}$$

$$n = \text{impar} \ldots \quad A_n A_{n-1} = \frac{n-2}{n} \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{3}{5} \frac{1}{3} r^{4\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_1 A_0 = \frac{1}{n} r^{2n-2} \frac{\pi r}{2}$$

Por consiguiente, para n par o impar, siempre se tiene:

$$A_n A_{n-1} = \frac{\pi}{2n} r^{2n-1}$$

8.- Sea V_n el volumen de una esfera de n dimensiones de radio r. El volumen de la esfera de radio $\sqrt{r^2 - x^2}$ será

$$V'_n = V_n \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{r^n}$$

Integrando el volumen de la esfera a partir de cilindros rectos de altura dx, tendremos.

$$V_n = 2 \int_0^r V'_{n-1} \, dx = 2 \int_0^r V_{n-1} \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{r^{n-1}} \, dx = 2 \frac{V_{n-1}}{r^{n-1}} A_n$$

Tenemos V_1 inmediato y V_2 deducido de aquí, que son

$$V_1 = 2r \qquad V_2 = \pi r^2$$

Para los volúmenes en más dimensiones, obtenemos una fórmula recurrente:

$$V_n = 2\,\frac{A_n}{r^{n-1}}\,V_{n-1} = 2\,\frac{A_n}{r^{n-1}}\,2\,\frac{A_{n-1}}{r^{n-2}}\,V_{n-2} =$$

$$= \frac{4}{r^{2n-3}}\,A_n\,A_{n-1}\,V_{n-2} = \frac{4}{r^{2n-3}}\,\frac{\pi}{2n}\,r^{2n-1}\,V_{n-2} = \frac{2}{n}\,\pi\,r^2\,V_{n-2}$$

Aplicando reiteradamente la fórmula, tenemos:

<u>n par</u>

$$V_2 = \frac{1}{1}\,\pi r^2 = \pi\,r^2$$

$$V_4 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1}\,\pi^2\,r^4 = \frac{1}{2!}\,\pi^2\,r^4$$

$$V_6 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1}\,\pi^3\,r^6 = \frac{1}{3!}\,\pi^3\,r^6$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{n}{2}!}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,r^n$$

$$\vdots$$

<u>n impar</u>

$$V_1 = \frac{2}{1}\,r = 2\,r$$

$$V_3 = \frac{2}{3}\,\frac{2}{1}\,\pi\,r^3 = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

$$V_5 = \frac{2}{5}\,\frac{2}{3}\,\frac{2}{1}\,\pi^2\,r^5 = \frac{8}{15}\,\pi^2\,r^5$$

$$V_7 = \frac{2}{7}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{3}\,\frac{2}{1}\,\pi^3\,r^7 = \frac{16}{105}\,\pi^3\,r^7$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{n(n-2)\;\ldots\;3.\;1}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\,r^n$$

$$\vdots$$

8.1.- Conociendo los semiejes r_i de un elipsoide podemos deducir de las expresiones anteriores los volúmenes de cada elipsoide sustituyendo r^n por $r_1 .\, r_2 \ldots .\; r_n$.

9.- Teniendo presente la fórmula

$$V_n = \frac{r}{n}\,S_n \iff S_n = \frac{n}{r}\,V_n$$

podemos obtener las áreas de las esferas a partir de las expresiones volumétricas.

<u>n par</u>

$$S_2 = 2\,\pi r$$

$$S_4 = 2\,\pi^2\,r^3$$

$$S_6 = \pi^3\,r^5$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{2}{(\frac{n}{2}-1)!}\,\pi^{\frac{n}{2}}\,r^{n-1}$$

<u>n impar</u>

$$S_3 = 4\,\pi r^2$$

$$S_5 = \frac{8}{3}\,\pi^2\,r^4$$

$$S_7 = \frac{16}{15}\,\pi^3\,r^6$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)(n-4)\;\ldots\;3.\;1}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\,r^{n-1}$$

Obsérvese que para S_1 resulta el valor $S_1 = 2$.

E.- ELIPSE, HIPERBOLA Y PARABOLA (ESPACIO DE DOS DIMENSIONES)

ELIPSE REAL E HIPERBOLA

1.- Sea la siguiente forma de la ecuación general de elipses reales e hipérbolas:

$$\vec{\tau}\,(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \alpha = 0 \qquad \begin{cases} \text{Nuc}\ \vec{\tau} = \vec{0} \\ \vec{\tau} \not< 0 \\ \alpha' = \alpha - \vec{\tau}^{-1}\,(\vec{v} \boxtimes \vec{v}) < 0 \end{cases}$$

que puede implicar la previa multiplicación por -1 de los dos miembros. Para $\vec{\tau} > 0$ tendremos una elipse real y para $\vec{\tau} \gtrless 0$ una hipérbola.

Llamaremos μ y $\vec{m}$ al menor valor propio positivo de $\vec{\tau}$ y al versor correspondiente y ν al valor propio de otro versor propio $\vec{n}$ ortogonal a $\vec{m}$. Podremos escribir:

$$\vec{\tau} = \mu(\vec{m} \boxtimes \vec{m}) + \nu(\vec{n} \boxtimes \vec{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\tau}^{-1} = \frac{1}{\mu}(\vec{m} \boxtimes \vec{m}) + \frac{1}{\nu}(\vec{n} \boxtimes \vec{n})$$

1.1.- El centro será $-\vec{\tau}^{-1}\,\vec{v}$, y la ecuación de la cónica respecto al centro

$$\vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + \alpha' = 0$$

que podemos transformar como sigue:

$$\left[\mu(\vec{m} \boxtimes \vec{m}) + \nu(\vec{n} \boxtimes \vec{n})\right] (\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + \alpha' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\vec{m}\,\vec{x})^2 + \nu(\vec{n}\,\vec{x})^2 + \alpha' = 0$$

y estableciendo

$$-\alpha' = a^2\,\mu = b^2\,\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = -\frac{\alpha'}{a^2}\,; \quad \nu = -\frac{\alpha'}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad a^2 > 0$$

obtenemos

$$-\frac{\alpha'\,(\vec{m}\,\vec{x})^2}{a^2} - \frac{\alpha'\,(\vec{n}\,\vec{x})^2}{b^2} + \alpha' = 0$$

$$\frac{(\vec{m}\,\vec{x})^2}{a^2} + \frac{(\vec{n}\,\vec{x})^2}{b^2} = 1$$

Si y solo si la cónica es una hipérbola, tendremos $\nu < 0 \Longrightarrow b^2 < 0$, y b será imaginario. Escribiremos para tal caso

$$\frac{(\vec{m}\,\vec{x})^2}{a^2} - \frac{(\vec{n}\,\vec{x})^2}{|b|^2} = 1$$

De estas expresiones, que referidas a los ejes $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son las comunmente adoptadas, se deduce inmediatamente que, en una elipse, a y b son los semiejes o distancias del centro a los vértices y que por tener $a^2 > b^2$, a será el semieje mayor. En una hipérbola el semieje real será a y el módulo del semieje imaginario será $|b|$.

1.2.- Además de los semiejes definidos por las expresiones

Semieje mayor $\qquad a = \sqrt{- \dfrac{\alpha'}{\mu}}$

Semieje menor o imaginario $\qquad b = \sqrt{- \dfrac{\alpha}{\nu}}$

se utilizan las siguientes magnitudes características:

Distancia focal : $\qquad f = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad = \sqrt{- \alpha' \left(\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\nu} \right)} \geqslant 0$

Parámetro : $\qquad 2p = 2 \dfrac{b^2}{a} \qquad = - 2 \dfrac{\alpha'}{\nu} \sqrt{- \dfrac{\mu}{\alpha'}}$

Excentricidad: $\qquad e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{f}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{\mu}{\nu}} \geqslant 0$

de cuyas expresiones se deduce :

$$f = \frac{pe}{1 - e^2}$$

$$\frac{\mu}{\alpha'} = - \frac{(1 - e^2)^2}{p^2} \qquad\qquad a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$\frac{\nu}{\alpha'} = - \frac{(1 - e^2)}{p^2} \qquad\qquad b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

Elipse: $\quad 0 \leqslant f < a; \quad 0 \leqslant e < 1; \quad p > 0 ; \quad 0 < 1-e^2 \leqslant 1$

Hipérbola: $\quad f > a; \quad e > 1; \quad p < 0; \quad 1-e^2 < 0$

Corrientemente las letras b y p se utilizan con el significado $|b|$, $|p|$.

1.3.- La ecuación de la elipse real o hipérbola referida al centro, que es

$$\left[\mu(\vec{m} \otimes \vec{m}) + \nu(\vec{n} \otimes \vec{n})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) + \alpha' = 0 \iff \left[\frac{\mu}{\alpha'}(\vec{m} \otimes \vec{m}) + \frac{\nu}{\alpha'}(\vec{n} \otimes \vec{n})\right](\vec{x} \otimes \vec{x}) + 1 = 0$$

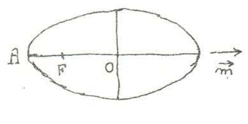
teniendo presente que $\vec{m} \otimes \vec{m} + \vec{n} \otimes \vec{n} = \vec{I}$, y en virtud de las definiciones precedentes, puede escribirse también:

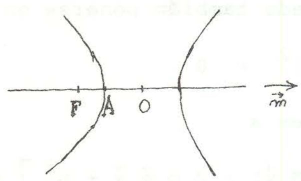
$$\left[- \frac{(1 - e^2)^2}{p^2} (\vec{m} \otimes \vec{m}) - \frac{1 - e^2}{p^2} (\vec{n} \otimes \vec{n})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) + 1 = 0$$

$$\left[(1 - e^2) (\vec{m} \otimes \vec{m}) + (\vec{n} \otimes \vec{n})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) - \frac{p^2}{1 - e^2} = 0$$

$$\left[\vec{I} - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) - \frac{p^2}{1 - e^2} = 0$$

1.4.- Sea, con $f \neq 0$ el vector $- f \vec{m}$ cuyo origen es el centro.





Determina un punto F llamado foco de la cónica. Como para una elipse se tiene $p > 0$; $a > f$ y para una hipérbola $p < 0$; $a < f$, en todos los casos, si A es el vértice correspondiente a F, el versor de $p\vec{AF}$ es $\vec{m}$.

Análogamente, el vector $f\vec{m}$ determina otro foco F' tal que el versor de $p\vec{AF'}$ es $-\vec{m}$. Solo en el caso $f = 0$, es decir $a = b$, y por tanto cuando la cónica es una circunferencia, los dos focos se confunden con el centro.

En la circunferencia, además puede verse que $a = b = p = r$ (r = radio) y que $e = 0$.

1.5.- Ecuación de la cónica referida a un foco F determinado por $\pm f\vec{m}$

Como la ecuación respecto al centro es

$$\left[\vec{I} - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) - \frac{p^2}{1 - e^2} = 0$$

y tendremos

$$v'' = \left[\vec{I} - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right] (\pm f\vec{m}) = \left[I - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right] (\pm \frac{pe}{1 - e^2} \vec{m}) = \pm \frac{pe}{1 - e^2} \vec{m} \pm \frac{e^2\, pe}{1 - e^2} \vec{m} =$$

$$= \pm \frac{pe(1 - e^2)}{1 - e^2} \vec{m} = \pm pe\vec{m}.$$

$$\alpha'' = \left[\vec{I} - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right]\left[(\pm \frac{pe}{1 - e^2} \vec{m}) \otimes (\pm \frac{pe}{1 - e^2} \vec{m})\right] - \frac{p^2}{1 - e^2} =$$

$$= \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2}{1 - e^2} = \frac{p^2 e^2 (1 - e^2)}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2}{1 - e^2} =$$

$$= \frac{p^2 (e^2 - 1)}{1 - e^2} = - p^2$$

resulta

$$\left[\vec{I} - e^2 (\vec{m} \otimes \vec{m})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) \pm 2\, pe\vec{m}\vec{x} - p^2 = 0$$

Haciendo $\vec{e} = e\,\vec{m}$, tenemos finalmente

$$\left[\vec{I} - (\vec{e} \otimes \vec{e})\right] (\vec{x} \otimes \vec{x}) \pm 2\, p\, \vec{e}\, \vec{x} - p^2 = 0$$

Según tomemos el signo inferior o superior, nos referiremos al foco para el que $p\,\vec{AF}$ y $\vec{e}$ tienen igual sentido o contrario respectivamente.

La ecuación puede también ponerse en la forma

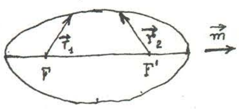
$$\vec{x}^2 - (\vec{e}\,\vec{x} \pm p)^2 = 0$$

ya que ambas son equivalentes a

$$0 = \vec{I} (\vec{x} \otimes \vec{x}) - \left[(\vec{e} \otimes \vec{e}) (\vec{x} \otimes \vec{x}) \pm 2\, p\, \vec{e}\, \vec{x} + p^2\right] = \vec{x}^2 - \left[(\vec{e}\,\vec{x})^2 \pm 2\, p\, \vec{e}\, \vec{x} + p^2\right]$$

1.6.- Radios vectores de un punto de una cónica son los dos vectores que determinan su posición con referencia a cada uno de los focos.

Expresión de su norma en función de su proyección en $\vec{m}$.



$$\vec{r}_1^{\,2} = (\vec{e}\,\vec{r}_1 + p)^2 = (e\,\vec{m}\,\vec{r}_1 + a - a\,e^2)^2 =$$
$$= \left[e(\vec{m}\,\vec{r}_1) + a - f\,e\right]^2 = \left[a + e(\vec{m}\,\vec{r}_1 - f)\right]^2$$

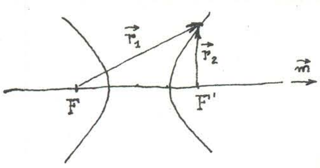
Para $\vec{r}_2$ tendremos por consiguiente com $-\vec{m}$ en lugar de $\vec{m}$:

$$\vec{r}_2^{\,2} = \left[a + e(-\vec{m}\,\vec{r}_2 - f)\right]^2$$

y cuando $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ se refieren a un mismo punto se tiene

$$\vec{m}\,\vec{r}_1 - \vec{m}\,\vec{r}_2 = 2\,f$$

a) Elipse. Los módulos de los radios vectores son:



$$r_1 = a + e(\vec{m}\,\vec{r}_1 - f) > 0$$
$$r_2 = a + e(-\vec{m}\,\vec{r}_2 - f) > 0$$

y por tanto, para un mismo punto tenemos:

$$r_1 + r_2 = 2\,a + e(\vec{m}\,\vec{r}_1 - \vec{m}\,\vec{r}_2 - 2\,f) = 2\,a$$

b) Hipérbola. Los módulos de los radios vectores son :

Radio vector largo --- $r_1 = a + e(\vec{m}\,\vec{r}_1 - f) > 0$

Radio vector corto --- $r_2 = -a + e(\vec{m}\,\vec{r}_2 + f) > 0$

y por tanto, para un mismo punto tenemos:

$$r_1 - r_2 = 2\,a + e(\vec{m}\,\vec{r}_1 - \vec{m}\,\vec{r}_2 - 2\,f) = 2\,a$$

1.7.- Posición del centro respecto a un foco origen.

Sean la ecuación de la cónica respecto a dicho foco:

$$\vec{x}^2 - (\vec{e}\,\vec{x} \pm p)^2 = 0 \iff \left[\vec{I} - (\vec{e} \boxtimes \vec{e})\right](\vec{x} \boxtimes \vec{x}) \pm 2\,p\,\vec{e}\,\vec{x} - p^2 = 0$$

El centro será $\vec{c} = \pm\, a\,\vec{e}$, puesto que tenemos $\vec{c} = -\vec{\tau}^{-1}\vec{v} \iff \vec{\tau}\,\vec{c} = -\,v$, y se verifica:

$$\left[\vec{I} - (\vec{e} \boxtimes \vec{e})\right](\pm\,a\,\vec{e}) = \pm\,a\,\vec{e} \pm a\,e^2\,\vec{e} = \pm\,a\,\vec{e}(1 - e^2) = \pm\,\frac{p}{1 - e^2}(1-e^2)\vec{e} = \pm\,p\,\vec{e}$$

<u>PARABOLA</u>

2.- La ecuación general de una parábola es

$$\vec{\tau}\,(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \alpha = 0 \qquad \begin{cases} \text{Versores propios de } \vec{\tau} : \vec{m} \text{ y } \vec{n} \\ \text{Valores propios: } 0 \text{ de } \vec{m} \text{ y } \nu \text{ de } \vec{n} \\ \vec{V}\,\vec{m} \neq 0 \end{cases}$$

Podemos escribir $\vec{\tau} = \nu(\vec{n} \boxtimes \vec{n})$

La dirección del eje es la de $\vec{m}$ y la ecuación respecto al vértice es:

$$\vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\, \vec{v}_m\, \vec{x} = 0$$

pero tenemos $\vec{v}_m\, \vec{x} = \vec{v}_m\, \vec{x}_m = (\vec{v}\, \vec{m})(\vec{x}\, \vec{m})$

con lo que, llamando parámetro al valor $2p = -\dfrac{2\vec{v}\,\vec{m}}{\nu}$, tendremos también por ecuación:

$$0 = \nu(\vec{n} \boxtimes \vec{n})(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) - 2\,p\,\nu(\vec{x}\,\vec{m}) \iff (\vec{n} \boxtimes \vec{n})(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) - 2\,p(\vec{x}\,\vec{m}) = 0$$

$$\iff (\vec{n}\,\vec{x})^2 - 2\,p(\vec{x}\,\vec{m}) = 0$$

siendo esta última formulación la utilizada corrientemente.

Obsérvese que el sentido del eje desde el vértice al interior es el de $p\,\vec{m}$.

2.1.- Foco de una parábola es el punto determinado por el vector $\frac{1}{2}p\,\vec{m}$ con origen en el vértice.

Para la obtención de la ecuación respecto al foco, partiremos de la ecuación respecto al vértice de coeficiente vectorial $-p\,\vec{m}$:

$$v' = (\vec{n} \boxtimes \vec{n})\left(\frac{1}{2}\,p\,\vec{m}\right) - p\,\vec{m} = -\,p\,\vec{m}$$

$$\alpha' = (\vec{n} \boxtimes \vec{n})\left(\frac{1}{2}\,p\,\vec{m} \boxtimes \frac{1}{2}\,p\,\vec{m}\right) - 2\,p\,\vec{m}\left(\frac{1}{2}\,p\,\vec{m}\right) = -\,p^2$$

y será por lo tanto

$$(\vec{n} \boxtimes \vec{n})(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) - 2\,p\,\vec{m}\,\vec{x} - p^2 = 0$$

2.2.- Llamamos radio vector de un punto de la parábola al vector de posición del punto respecto al foco.

La ecuación general respecto al foco, puede transformarse así:

$$(\vec{I} - \vec{m} \boxtimes \vec{m})(\vec{r} \boxtimes \vec{r}) - 2\,p\,\vec{m}\,\vec{r} - p^2 = 0 \iff \vec{r}^{\,2} - (\vec{m}\,\vec{r} + p)^2 = 0$$

y por tanto, el módulo de $\vec{r}$ es

$$r = |\,\vec{m}\,\vec{r} + p\,|$$

Observaremos que la expresión de r^2 coincide con la obtenida para la elipse real y hipérbola con $\vec{e} = \vec{m}$.

ELIPSE, HIPERBOLA Y PARABOLA

3.- Considerando $e\,\vec{m} = \vec{e}$ y $e = 1$ en la parábolas, la ecuación general para las cónicas propias reales es:

$$\left[\vec{I} - (\vec{e} \boxtimes \vec{e})\right](\vec{x} \boxtimes \vec{x}) - 2\,p\,\vec{e}\,\vec{x} - p^2 = 0 \iff \vec{x}^{\,2} - (\vec{e}\,\vec{x} + p)^2 = 0$$

en cuya expresión, e = excentricidad, p = semiparámetro, $\vec{e} = e\,\vec{m}$, $\vec{m}$ = versor de la dirección del eje mayor real y sentido $p\,\vec{AF}$, siendo F el foco de referencia y A el vértice correspondiente.

Tendremos

$e = 0$ .... Circunferencia.

$0 < e < 1$ .... Elipse real.

$e = 1$ .... Parábola

$e > 1$ .... Hipérbola.

3.1.- La sección ortogonal al eje mayor real por un foco de la cónica determina dos puntos de la cónica, cuya distancia a dicho foco es el semiparámetro.

Pues entonces $\vec{r}$ es ortogonal a $\vec{e}$, siendo $\vec{e}\,\vec{r} = 0$, la última ecuación general de la cónica referida al foco se convierte en :

$$x^2 - p^2 = 0 \iff x = |p|$$

3.2.- Los vectores $\vec{\tau}\,\vec{x} + \vec{v}$, normales al punto $\vec{x}$ de la cónica que se obtienen de las ecuaciones referidas a cada foco, coinciden.

Sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ los radios vectores de un punto y $\vec{v}_1 = -p\,\vec{e}$ y $\vec{v}_2 = p\,\vec{e}$, los coeficientes vectoriales correspondientes para cada foco de referencia. Tendremos:

$$\vec{\tau}\,\vec{r}_1 + \vec{v}_1 - (\vec{\tau}\,\vec{r}_2 + \vec{v}_2) = \vec{\tau}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - 2\,p\,\vec{e} = \vec{\tau}\,(2\,f\,\vec{m}) - 2\,p\,e\,\vec{m} =$$

$$= 2(\,f\,\vec{\tau}\,\vec{m} - p\,e\,\vec{m}) = 2\left[f(\vec{I} - \vec{e} \otimes \vec{e})\,\vec{m} - f(1 - e^2)\,\vec{m}\right] =$$

$$= 2\left[f(\vec{m} - e^2\vec{m}) - f(1 - e^2)\,\vec{m}\right] = 0$$

3.3.- La proyección del vector anterior sobre un radio vector del punto de la cónica, tiene el mismo módulo que p.

$$(\vec{\tau}\,\vec{r} + \vec{v})\,\frac{\vec{r}}{r} = \left[\vec{r} - (\vec{e}\,\vec{r})\,\vec{e} - p\vec{e}\right]\frac{\vec{r}}{r} = \left[\vec{r} - \vec{e}(\vec{e}\,\vec{r} + p)\right]\frac{\vec{r}}{r} = r - \frac{(\vec{e}\,\vec{r})(\vec{e}\,\vec{r} + p)}{r}$$

El cuadrado de la proyección será:

$$r^2 - 2(\vec{e}\,\vec{r})(\vec{e}\,\vec{r} + p) + \frac{(\vec{e}\,\vec{r})^2\cancel{(\vec{e}\,\vec{r} + p)^2}}{\cancel{r^2}} = r^2 - (\vec{e}\,\vec{r})^2 - 2\,\vec{e}\,\vec{r}\,p =$$

$$= r^2 - (\vec{e}\,\vec{r} + p)^2 + p^2 = p^2$$

3.4.- Consecuencia del párrafo anterior y de que la parábola se puede considerar como límite de una elipse o hipérbola cuyo centro se aleja indefinidamente, tenemos que las direcciones de tangente y normal en un punto de una cónica, son bisectrices del ángulo formado por sus radios vectores, o por el único radio vector y la dirección del eje.

3.5.- De la ecuación general de las cónicas deducimos:

$$\vec{e}\,\vec{r} + p = \pm\, r$$

El signo superior corresponde a puntos de:

Elipse.

Rama de hipérbola, opuesta al foco origen

Parábola con $p > 0$

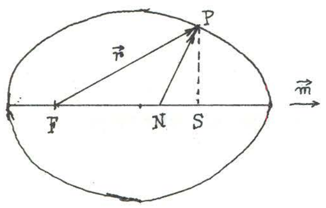
y el signo inferior a puntos de :

Rama de hipérbola correspondiente al foco origen

Parábola con $p < 0$

En lo sucesivo la presencia de dos signos se interpretará del modo que hemos descrito.

3.6.- La proyección de un radio vector sobre el eje mayor real, es:



$$(\vec{m}\,\vec{r})\vec{m} = \frac{\pm r - p}{e}\,\vec{m}$$

Tendremos pues:

$$\vec{FS} = (\vec{m}\,\vec{r})\vec{m} = \frac{\vec{e}\,\vec{r}}{e}\,\vec{m} = \frac{\pm r - p}{e}\,\vec{m}$$

3.7.- Para un punto de una cónica, tendremos los siguientes valores para la distancia del foco al pie de la normal, para la normal y para la subnormal:

$$\vec{NP} = \vec{\tau}\vec{r} + \vec{v} = \vec{r} \mp \vec{e}\,r\;; \qquad NP = \sqrt{(e^2 - 1)\,r^2 \pm 2\,r\,p}$$

$$\vec{FN} = \pm\,\vec{e}\,r$$

$$\vec{SN} = \frac{p \mp (1 - e^2)\,r}{e}\,\vec{m}$$

Para los dos primeros vectores bastará demostrar que el vector $\vec{r}$ es la suma vectorial del vector $\vec{\tau}\,\vec{r} + \vec{v}$ y de un vector de dirección $\vec{m}$. Efectivamente:

$$\vec{\tau}\,\vec{r} + \vec{v} = (\,\vec{I} - \vec{e} \otimes \vec{e})\,\vec{r} - p\,\vec{e} = \vec{r} - (\vec{e}\,\vec{r})\vec{e} - p\,\vec{e} = \vec{r} - \vec{e}(\vec{e}\,\vec{r} + p) = \vec{r} \mp \vec{e}\,r$$

Para el módulo de la normal, tenemos

$$NP = \sqrt{(\vec{r} \mp \vec{e}\,r)^2} = \sqrt{r^2 + e^2\,r^2 \mp 2\,r(\pm r - p)} = \sqrt{(1 + e^2)\,r^2 - 2\,r^2 \pm 2\,r\,p} =$$
$$= \sqrt{(e^2 - 1)\,r^2 \pm 2\,r\,p}$$

Finalmente para la subnormal podemos escribir:

$$\vec{SN} = -\,\vec{FS} + \vec{FN} = (-\vec{m}\,\vec{r} \pm e\,r)\,\vec{m} = \left(\frac{p \mp r}{e} \pm e\,r\right)\vec{m} = \frac{p \mp r \pm e^2\,r}{e}\,\vec{m} = \frac{p \mp (1 - e^2)r}{e}\,\vec{m}$$

En una parábola, tendremos $e = 1$, y los valores serán :

$$\vec{NP} = \vec{r} \mp \vec{m}\,r; \quad NP = \sqrt{\pm\,2\,r\,p}\;; \quad \vec{FN} = \pm\,r\,\vec{m}\;; \quad \vec{SN} = p\,\vec{m}$$

APLICACION AL MOVIMIENTO DEFINIDO POR LA ECUACION $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k_1 \frac{\vec{r}}{\rho^3}$ EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL ORDINARIO (ρ = módulo de $\vec{r}$)

4.- Constancia del valor $\vec{r} \times \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \frac{\vec{C}}{m}$ $\left\{\begin{array}{l}\vec{C} = \text{Mom}^\circ \text{ cinético} \\ m = \text{masa}\end{array}\right.$

Este valor es constante para el caso más general:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2} = \psi\,\vec{r} \qquad (\ \psi = \text{función escalar de } \vec{r})$$

Efectivamente:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \frac{d\,\vec{r}}{d\,t}) = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \times \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} + \vec{r} \times \frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2} = \vec{0} + (\vec{r} \times \vec{r})\ \psi = \vec{0}$$

Salvo el factor constante masa, este vector corresponde al momento cinético, que será constante.

4.-1.- De lo anterior se deduce inmediatamente que el movimiento es plano cuando la constante no es nula, único caso que consideraremos.

También se deduce que las áreas barridas por $\vec{r}$ en el movimiento, son iguales para tiempos iguales (teorema de las áreas).

Si $\vec{\tau}_1$ es un tensor antisimétrico de giro de 90 grados en el plano del movimiento, podremos expresar el teorema de las áreas en la forma siguiente:

$$(\ \vec{\tau}_1\ \vec{r})\ \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = k_2 \quad \text{(constante del movimiento)}$$

Observaremos que k_2 (que corresponde al módulo del momento cinético específico), puede tomar valores opuestos según el sentido de giro adoptado, pero, como se verá, para los resultados que perseguimos, es indiferente cualquier elección adoptada.

5.- A las anteriores constantes del movimiento, es interesante añadir una constante vectorial $\vec{s}$, de valor

$$\vec{s} = \frac{k_2}{k_1}\vec{\tau}_1\ \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} + \frac{\vec{r}}{\rho}$$

cuyo valor resulta independiente del sentido de rotación adoptado para $\vec{\tau}_1$.

5.1.- La constancia de $\vec{s}$ la demostraremos a continuación por integración de la ecuación diferencial del movimiento.

Efectivamente, si multiplicamos ambos miembros por $\frac{k_2}{k_1}\ \vec{\tau}_1$, tendremos:

$$\frac{k_2}{k_1}\vec{\tau}_1 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{k_2}{k_1}\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\frac{k_2}{k_1}\vec{\tau}_1\left(-k_1\frac{\vec{r}}{\rho^3}\right) = -\left[(\vec{\tau}_1\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right]\frac{\vec{\tau}_1\vec{r}}{\rho^3} = -\frac{1}{\rho}\frac{\vec{\tau}_1\vec{r}\otimes\vec{\tau}_1\vec{r}}{\rho^2}\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$-\frac{1}{\rho}\left(\vec{I}-\frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{\rho^2}\right)\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\vec{r}}{\rho^2}\left(\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{\rho}$$

Por consiguiente la ecuación integral es :

$$\frac{k_2}{k_1}\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{\vec{r}}{\rho} = \text{Constante} = \vec{s}$$

5.2.- La constante $\vec{s}$ es la constante de Rongelet dividida por $-k_1 m$.

Efectivamente:

$$\vec{s} = \frac{1}{k_1}\left(k_2\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{k_1\vec{r}}{\rho}\right) = \frac{1}{k_1}\left\{\left[(\vec{\tau}_1\vec{r})\frac{d\vec{r}}{dt}\right](\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{k_1\vec{r}}{\rho}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k_1}\left\{\left(\vec{\tau}_1\vec{r}\times\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\times\frac{d\vec{r}}{dt}-\left[\cancel{(\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt})\frac{d\vec{r}}{dt}}\right](\vec{\tau}_1\vec{r})+\frac{k_1\vec{r}}{\rho}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k_1}\left\{(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt})\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{k_1\vec{r}}{\rho}\right\} = \frac{1}{k_1 m}\left(\vec{C}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{k_1 m\vec{r}}{\rho}\right)$$

y designando por α el valor $-k_1 m$, tenemos:

$$\vec{s} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{C}+\alpha\frac{\vec{r}}{\rho}\right)$$

6.- Para determinar la trayectoria bastará, si es posible, eliminar $\frac{d\vec{r}}{dt}$ entre las expresiones de las constantes.

Efectivamente, multiplicando la expresión de $\vec{s}$, miembro a miembro por $\vec{r}$, y teniendo en cuenta que se tiene

$$\vec{r}(\vec{\tau}_1\frac{d\vec{r}}{dt}) = -(\vec{\tau}_1\vec{r})\frac{d\vec{r}}{dt} = -k_2$$

obtenemos:

$$\vec{s}\,\vec{r} = -\frac{k_2^2}{k_1}+\rho \iff \rho = \vec{s}\,\vec{r}+\frac{k_2^2}{k_1}$$

La trayectoria es pues un arco ilimitado de la cónica con un foco en el punto de referencia, de ecuación:

$$r^2 = (\vec{e}\,\vec{r}+p)^2 \qquad \left\{\begin{array}{l}\vec{e} = \pm\vec{s}\\ p = \pm\dfrac{k_2^2}{k_1}\end{array}\right.$$

Para que p represente el semiparámetro y $\vec{e}$ al vector definido en §1. 5, habremos de elegir el par de valores que verifica:

Hipérbola $(e > 1) \Longrightarrow p < 0$

Elipse $(e < 1) \Longrightarrow p > 0$

Parábola $(e = 1) \Longrightarrow$ cualquier par

El cálculo de e puede hacerse previamente a la elección de pareja, puesto que verifica evidentemente

$$e = |\vec{s}|$$

7.- Constante de las energías por unidad de masa.

En este problema que estudiamos se verifica:

$$0 = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + k_1\frac{\vec{r}}{\rho^3}\right)\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,\frac{d\vec{r}}{dt} + k_1\frac{\vec{r}}{\rho^3}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{k_1}{\rho}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{k_1}{\rho} = k_3 \quad \text{(constante)}$$

y para $k_1 < 0$, siempre es positivo k_3.

7.1.- Evidentemente, k_3 es función de k_1, k_2 y $\vec{e}$. Puede comprobarse que es la siguiente:

$$k_3 = -\frac{(1 - \vec{e}^{\,2})\,k_1^2}{2\,k_2^2}$$

De aquí deducimos

$$k_3 > 0 \iff e^2 > 1 \iff \text{Hipérbola}$$

$$k_3 = 0 \iff e^2 = 1 \iff \text{Parábola}$$

$$k_3 < 0 \iff e^2 < 1 \iff \text{Elipse}$$

De esta relación, deducimos también:

$$b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} = \frac{k_2^4}{k_1^2\,(1 - e^2)} = -\frac{k_2^2}{2\,k_3}$$

$$a = \frac{b^2}{p}\quad \left|\frac{k_1}{2\,k_3}\right|$$

8.- Ejemplo 1°.- Determinar la trayectoria de un punto con las siguientes características de una posición (base ortonormal).

$$\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_A\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\vec{r}_A\right\} = \left\{\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right\} \qquad k_1 = 4$$

Tomaremos por ejemplo $\left\{\vec{\tau}_1\right\}' = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\-1 & 0\end{matrix}\right\}$ y tendremos:

$\rho = 3$

$$k_2 = \frac{d\vec{r}}{dt}(\vec{\tau}_1\ \vec{r}) = \{1\quad 2\}\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = 3$$

$$\{\vec{s}\} = \frac{3}{4}\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\left[\begin{Bmatrix} 6 \\ -3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$e = \frac{\sqrt{37}}{4} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hipérbola} \quad \Longrightarrow \quad p < 0$$

$$p = -\frac{k_2^2}{k_1} = -\frac{9}{4}$$

$$\{\vec{e}\} = -\frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{12}{7}$$

$$b^2 = a\,p = -\frac{27}{7}$$

$$f = a\,e = \frac{3\sqrt{37}}{7}$$

$$\text{Centro}: \left\{\frac{f}{e}\,\vec{e}\right\} = \{a\,\vec{e}\} = -\frac{3}{7}\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Por otra parte tenemos:

$$k_3 = \frac{1}{2}\{1\quad 2\}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{4}{3} = \frac{7}{6} > 0 \quad \xrightarrow{\text{(Comprobación)}} \quad \begin{cases} a = \left|\dfrac{k_1}{2k_3}\right| = \dfrac{12}{7} \\ b^2 = -\dfrac{k_2^2}{2k_3} = -\dfrac{27}{7} \end{cases}$$

8.1.- Ejemplo 2°. *(Base ortonormal)*

$$\left\{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_A\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \{\vec{r}_A\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \qquad k_1 = 10$$

Tendremos:

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$k_2 = \frac{d\vec{r}}{dt}(\vec{\tau}_1\ \vec{r}) = \{0\quad 2\}\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \{0\quad 2\}\begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \end{Bmatrix} = -6$$

$$\{\vec{s}\} = \frac{-6}{10}\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{5}\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}\left\{\begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}\right\} = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$e = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Parábola}$$

$$p = \frac{k_2^2}{k_1} = \frac{18}{5}$$

$$\{\vec{e}\} = + \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Vértice $\quad - \left\{ \frac{1}{2} \, p \, \vec{e} \right\} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{5} \begin{Bmatrix} -3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{9}{25}\begin{Bmatrix} 3 \\ -4 \end{Bmatrix}$

Tenemos también

$$k_3 = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{10}{5} = 0$$

F.- CUADRICAS OSCULATRICES Y CURVATURA (ESPACIO DIMENSION > 1)

1.- Sean dos cuádricas A_1 y A_2 con un punto $\vec{a}$ común, y que las respectivas tangentes por $\vec{a}$ sean planos.

O lo que es lo mismo:

Sean dos cuádricas propias reales A_1 y A_2, y un punto $\vec{a}$ común a ambas y no central de ninguna.

Decimos que las dos cuádricas son tangentes en $\vec{a}$ cuando los respectivos planos tangentes por a , coinciden, coincidiendo también por tanto, las respectivas normales por $\vec{a}$.

Decimos que las dos cuádricas son osculatrices en $\vec{a}$ cuando, siendo tangentes en $\vec{a}$, verifican la siguiente condición:

Consideremos las dos cuádricas y el punto que resulta de cortar A_1, A_2 y la normal en $\vec{a}$, por un plano paralelo al tangente en $\vec{a}$ y a una distancia n del mismo. Consideremos las ecuaciones de dichas dos cuádricas respecto al punto, en el espacio del plano secante.

La condición es que las dos ecuaciones sean equivalentes en un entorno infinitesimal de $\vec{a}$, al tender n a cero.

1.1.- Sean dos puntos $\vec{b}$ y $\vec{b}'$ uno de cada cuádrica (de las tangentes en $\vec{a}$), tales que $\vec{b}-\vec{a}$ y $\vec{b}'-\vec{a}$ tienen la misma componente tangencial $\vec{z}$. La anterior condición para que las cuádricas sean osculatrices en $\vec{a}$, es equivalente a la siguiente:

La diferencia entre el versor de la normal en $\vec{b}$ y el de la normal en $\vec{a}$, tiende a coincidir con la diferencia entre el versor de la normal en $\vec{b}'$ y el de la normal en $\vec{a}$, cuando $\vec{z}$ tiende a cero.

Esta equivalencia se estudiará más adelante (§ 17).

2.- En adelante, y de no indicar expresamente lo contrario, cuando digamos que dos cuádricas son tangentes u osculatrices en un punto, entenderemos que las cuádricas son reales y propias, que el punto es común a las mismas y que tal punto no es central para ninguna de ellas.

3.- TEOREMA 1°.- Dos cuádricas A_1 y A_2 son tangentes en un punto, si, y solo si, los coeficientes vectoriales $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de sus ecuaciones respecto al punto son vectores de igual dirección.

Sean, referidas al punto las siguientes ecuaciones de las cuádricas:

$$A_1 \qquad \vec{\tau}_1\,(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{x} = 0$$

$$A_2 \qquad \vec{\tau}_2\,(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{x} = 0$$

en las cuales $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no son nulos, pues las ecuaciones no se refieren a un centro.

Las ecuaciones de las respectivas tangentes en el origen son:

$$\vec{v}_1\,\vec{x} = 0 \qquad\qquad \vec{v}_2\,\vec{x} = 0$$

y como las tangentes deben coincidir, sus ecuaciones serán equivalentes y por consiguiente

$$(\exists\lambda\ ;\ \lambda \neq 0) : \quad \vec{v}_1 = \lambda\,\vec{v}_2$$

4.- TEOREMA 2°.- Sean dos cuádricas A_1 y A_2 tangentes en un punto y sea $\vec{v}_1 = \lambda\,\vec{v}_2$ la relación entre los coeficientes vectoriales de sus ecuaciones referidas al punto. Tales cuádricas serán osculatrices en el mismo punto, si, y solo si, las proyecciones de los coeficientes tensoriales $\vec{\tau}_1$ y $\vec{\tau}_2$ sobre el plano tangente verifican la relación $\vec{\tau}'_1 = \lambda\,\vec{\tau}'_2$.

Sean las ecuaciones respecto al punto de tangencia de las cuádricas tangentes, las siguientes:

$$\vec{\tau}_1\,(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{x} = 0$$

$$\vec{\tau}_2\,(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{x} = 0$$

Las ecuaciones respecto al punto $\vec{n}$ en dirección de la normal serán:

$$\vec{\tau}_1(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2(\vec{\tau}_1\,\vec{n} + \vec{v}_1)\,\vec{x} + \vec{\tau}_1(\vec{n} \otimes \vec{n}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{n} = 0$$

$$\vec{\tau}_2(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2(\vec{\tau}_2\,\vec{n} + \vec{v}_2)\,\vec{x} + \vec{\tau}_2(\vec{n} \otimes \vec{n}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{n} = 0$$

y desarrollando las expresiones:

$$\vec{\tau}_1(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2(\vec{\tau}_1\,\vec{x})\,\vec{n} + 2\,\vec{v}_1\,\vec{x} + (\vec{\tau}_1\,\vec{n}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{n} = 0$$

$$\vec{\tau}_2(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2(\vec{\tau}_2\,\vec{x})\,\vec{n} + 2\,\vec{v}_2\,\vec{x} + (\vec{\tau}_2\,\vec{n}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{n} = 0$$

Cuando $\vec{n}$ y $\vec{x}$ tienden a cero, pueden despreciarse en cada ecuación los valores de los términos segundo y cuarto frente al valor del quinto, con lo que queda:

$$\vec{\tau}_1(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{x} + 2\,\vec{v}_1\,\vec{n} = 0$$

$\vec{\tau}_2(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{x} + 2\,\vec{v}_2\,\vec{n} = 0$

Como $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen la dirección normal a la tangente común, tendrán una proyección nula sobre el plano tangente. Por lo tanto, designando por $\vec{\tau}'_1$ y $\vec{\tau}'_2$ a las proyecciones de $\vec{\tau}_1$ y $\vec{\tau}_2$ respectivamente sobre dicho plano, tendremos por ecuaciones de las cuádricas intersecciones de las cuádricas originales por un plano paralelo al tangente común y a la distancia $\vec{n}$, referidas al espacio de dicho plano, y al punto $\vec{n}$, las siguientes:

$$\vec{\tau}'_1\,(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_1\,\vec{n} = 0$$

$$\vec{\tau}'_2\,(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}_2\,\vec{n} = 0$$

Sabemos que por ser tangentes las cuádricas en el punto común, tenemos $\vec{v}_1 = \lambda\,\vec{v}_2$. Por consiguiente las anteriores ecuaciones serán equivalentes si, y solo si, se verifica $\vec{\tau}'_1 = \lambda\,\vec{\tau}'_2$.

En consecuencia queda demostrada la proposición.

5.- Consecuencias de los párrafos anteriores.

1ª.- Si dos cuádricas son osculatrices (resp. tangentes) en $\vec{a}$, sus intersecciones con una variedad de dimensión $\vec{n}' > 1$ que contenga a $\vec{a}$, son también osculatrices (resp. tangentes) en $\vec{a}$.

2ª.- Si dos cuádricas son osculatrices en un punto y una de ellas es un m-cilindro, también lo es la otra, y coinciden las direcciones de las generatrices cilíndricas.

3ª.- Si dos cuádricas son osculatrices en un punto, también lo son en cualquiera de su generatriz cilíndrica.

4ª.- Si, en un punto, dos cuádricas son osculatrices (resp. tangentes) de una tercera, son osculatrices (resp. tangentes) entre sí.

6.- Vamos a considerar ahora algunas propiedades del tensor $\vec{\tau}'$ proyección del coeficiente tensorial $\vec{\tau}$ de la ecuación de una cuádrica sobre el plano tangente en uno de sus puntos.

6. 1.- El tensor $\vec{\tau}'$ es invariante respecto al punto de referencia utilizado en el cálculo.

Puesto que tanto el coeficiente $\vec{\tau}$ como el plano tangente y su coeficiente $\vec{\tau}_1^{\,0}$ tienen esta invariancia.

6. 2.- El tensor $\vec{\tau}'$ coincide con $\vec{\tau}$ (en el espacio de $\vec{\tau}$) si, y solo si, el

punto de tangencia pertenece al vértice de una cuádrica sin centros.

Sea la ecuación de la cuádrica respecto al punto de tangencia:

$\vec{\tau}(\vec{x} \otimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}\ \vec{x} = 0$ (con $\vec{v} \neq 0$)

La ecuación de la tangente será por tanto:

$$\vec{v}\ \vec{x} = 0 \iff \frac{\vec{v}}{\vec{v}^2}\ \vec{v}\ \vec{x} = \vec{0} \iff (\vec{\tau}^0_1 = \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{\vec{v}^2} : \vec{\tau}^0_1\ \vec{x} = \vec{0}$$

Evidentemente, $\vec{\tau}\,' = \vec{\tau}$ si y solo si $\mathrm{Im}(I - \vec{\tau}^0_1) \supset \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$ o lo que es lo mismo ($\mathrm{Im}\ \vec{\tau}^0_1$ = conjunto vectores dirección $\vec{v}$)

$$\mathrm{Im}\ \vec{\tau}^0_1 = \mathrm{Nuc}\ (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) \subset \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau} \iff \vec{v} \in \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$$

La ecuación de la cuádrica es pues la de una cuádrica sin centros referida a un punto del vértice.

6. 3.- El tensor τ' es nulo si, y solo si, la cuádrica consiste en dos planos paralelos o en dos planos secantes.

Partamos de las anteriores ecuaciones de cuádrica y tangente y de que, por lo visto en el párrafo anterior, es necesario $\vec{v} \notin \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$.

a) $\vec{v} \notin \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$; $\vec{v} \notin \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$.

Tendremos:

$$\mathrm{Im}\ \vec{\tau}^0_1 \not\subset \mathrm{Im}\ \vec{\tau} \iff \mathrm{Im}\ (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) \not\supset \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$$

y siendo $\mathrm{Im}(\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)$ un plano y no teniendo $\mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$ dimensión superior a la de un plano, existirá siempre un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \in \mathrm{Im}(\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)$; $\vec{w} \notin \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$, para el que tendremos:

$$\vec{\tau}\,'\ \vec{w} = \left[(\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) * \vec{\tau} * (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)\right] \vec{w} = (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)\ \vec{\tau}\ \vec{w}$$

Ahora bien, el vector $\vec{\tau}\ \vec{w}$ no es nulo puesto que $\vec{w} \notin \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$ y no tiene la dirección de $\vec{v}$, que es la de $\mathrm{Nuc}(\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)$ porque $\vec{\tau}\ \vec{w}$ pertenece a $\mathrm{Im}\ \vec{\tau}$ y $\vec{v}$ no.

Por consiguiente la expresión de $\vec{\tau}\,'\vec{w}$ no se anula y por tanto $\vec{\tau}\,' \neq 0$.

b) $\vec{v} \in \mathrm{Im}\ \vec{\tau}$.

Tendremos:

$$\mathrm{Nuc}\ (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) \subset \mathrm{Im}\ \vec{\tau} \iff \mathrm{Im}\ (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) \supset \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}$$

Por otra parte, de la expresión

$$\vec{\tau}\,' = (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) * \vec{\tau} * (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)$$

deducimos que para que $\vec{\tau}'$ sea nulo es necesario y suficiente que cada vector $\vec{I}$ de $\mathrm{Im}(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0)$, verifique $\vec{\tau}\,\vec{I} = \lambda\,\vec{v}$, siendo λ cualquier escalar nulo o finito, y así pertenezca $\vec{\tau}\,\vec{I}$ a $\mathrm{Nuc}\,(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0)$.

El conjunto de vectores $\vec{I}$ que verifica la condición anterior es

$$\bigcup_{\lambda} \lambda\,\vec{\tau}^{-1}\,\vec{v} + \mathrm{Nuc}\,\vec{\tau}$$

Por consiguiente, de la condición anterior y de la hipótesis inicial se desprende que tendremos $\vec{\tau}' = 0$ si y solo si se verifica

$$\mathrm{Nuc}\,\vec{\tau} \subset \mathrm{Im}(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0) \subset \bigcup_{\lambda} \lambda\,\vec{\tau}^{-1}\,\vec{v} + \mathrm{Nuc}\,\vec{\tau}$$

y como $\mathrm{Im}\,(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0)$ es un plano, solo se verificará la condición en dos casos:

1°.- $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau} = n - 1$ (o sea $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau} = \mathrm{Dim}\ \mathrm{Im}\ (\vec{I} - \vec{\tau}_1^0)$)

Entonces la expresión condicionante se reduce a

$$\mathrm{Im}\,(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0) = \mathrm{Nuc}\,\vec{\tau}$$

y la cuádrica consiste en dos planos paralelos.

2°.- $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau} = n - 2$

Entonces la condición para que se anule $\vec{\tau}'$ es

$$\mathrm{Im}\,(\vec{I} - \vec{\tau}_1^0) = \bigcup_{\lambda} \lambda\,\vec{\tau}^{-1}\,\vec{v} + \mathrm{Nuc}\,\vec{\tau}$$

lo que equivale a su vez a:

$$(\forall\ \vec{\tau})(\forall \vec{n};\ \vec{n} \in \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}):\quad \vec{v}(\lambda\,\vec{\tau}^{-1}\,\vec{v} + \vec{n}) = 0 \iff \vec{\tau}^{-1}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = 0.$$

y la cuádrica es un cono con $\dim\ \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau} = n - 2$, o lo que es lo mismo, la cuádrica consiste en dos planos secantes.

6. 4.- Observación.

Si bien el coeficiente tensorial $\vec{\tau}$ de la ecuación de una cuádrica o de una variedad lineal, y por tanto el tensor $\vec{\tau}'$ proyección de $\vec{\tau}$ sobre la variedad no varían por razón del punto de referencia, no debemos olvidar que, para un mismo punto de referencia, podemos establecer una infinidad de ecuaciones equivalentes cuyos coeficientes tensoriales solo difieren en un factor escalar no nulo.

Pero habida cuenta que este factor escalar afecta a todos los demás coeficientes, no variarán muchas características de los tensores como, por ejemplo, los vectores propios, núcleo, imagen, razón entre valores propios, cocientes de los valores propios por el módulo de otro coeficiente, etc.

7.- TEOREMA 3°.- Dos cuádricas sin centros, osculatrices en un punto común de sus vértices, coinciden.

Las ecuaciones de las dos cuádricas, referidas al punto común del vértice, son:

$(\vec{v}_1 \neq 0;\ \vec{v}_1 \in \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}_1)$: $\quad \vec{\tau}_1(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}_1\ \vec{x} = 0$

$(\vec{v}_2 \neq 0;\ \vec{v}_2 \in \mathrm{Nuc}\ \vec{\tau}_1)$: $\quad \vec{\tau}_2(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}_2\ \vec{x} = 0$

Siendo tangentes en el vértice, tendremos $\vec{v}_1 = \lambda\ \vec{v}_2$,
y siendo osc latrices en el vértice, tendremos $\vec{\tau}'_1 = \lambda\ \vec{\tau}'_2$,
y, como se ha visto en §6.3, se verifica $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}'_1;\ \vec{\tau}_2 = \vec{\tau}'_2$

Por consiguiente tendremos también $\vec{\tau}_1 = \lambda\vec{\tau}_2$ y las ecuaciones son equivalentes.

8.- TEOREMA 4°.- Dada una cuádrica propia real cualquiera, para todo punto no central de la misma existe siempre una cuádrica osculatriz sin centros, con vértice en el punto, y es única. Para $\vec{\tau}' = 0$ degenera en el plano tangente.

La ecuación general de la cuádrica referida al punto es de la forma:

$(\vec{v} \neq 0)$: $\quad \vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}\ \vec{x} = 0$

Si $\vec{\tau}'$ es la proyección de $\vec{\tau}$ sobre la tangente en el punto, tendremos que la ecuación

$$\vec{\tau}'(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}\ \vec{x} = 0$$

por ser $\vec{v}$ ortogonal a la tangente en el origen y por tanto a $\mathrm{Im}\ \vec{\tau}'$, es la ecuación de una cuádrica sin centros y con vértice en el origen. Es también osculatriz en el origen con la cuádrica original, puesto que la proyección de $\vec{\tau}'$ sobre la tangente común es $\vec{\tau}'$ (§ 6.2)

Es única, puesto que si hubiese otra, su ecuación debería tener iguales coeficientes o proporcionales.

Para $\vec{\tau}' = 0$, la ecuación se convierte en

$$\vec{v}\ \vec{x} = 0$$

o sea la cuádrica degenera en la tangente.

9.- En un espacio bidimensional, una parábola tiene un solo circulo osculador en el vértice. Dada la parábola por su ecuación general relativa al vértice:

$$\mu(\vec{t} \boxtimes \vec{t})(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\ \vec{v}\ \vec{x} = 0$$

($\vec{t}$ = versor de la dirección de la tangente en el vértice; $\vec{v}$= vector normal a la tangente en el vértice)

el centro del círculo osculador es $\quad \vec{c} = -\dfrac{\vec{v}}{\mu}$

Pues la ecuación del círculo osculador, por ser tangente en el vértice, ha de tener la forma:

$$(\exists \lambda \neq 0): \quad \lambda \vec{I}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\vec{v}\,\vec{x} = 0$$

y por ser osculador tendremos

$$(\vec{I} - \vec{\tau}^0) * \lambda \vec{I} * (\vec{I} - \vec{\tau}^0) = \mu (\vec{t} \boxtimes \vec{t}) \iff \lambda (\vec{I} - \vec{\tau}^0) = \mu(\vec{t} \boxtimes \vec{t})$$

Pero tenemos

$$\vec{\tau}^0 = \frac{\vec{v} \boxtimes \vec{v}}{\vec{v}^2}; \quad \vec{I} = \vec{t} \boxtimes \vec{t} + \frac{\vec{v} \boxtimes \vec{v}}{\vec{v}^2} \quad \text{y por tanto} \quad \vec{I} - \vec{\tau}^0 = \vec{t} \boxtimes \vec{t} \iff \mu = \lambda$$

El círculo osculador queda pues determinado por la siguiente ecuación:

$$\mu \vec{I}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2 \vec{v}\,\vec{x} = 0$$

El centro del círculo será

$$\vec{c} = -(\mu \vec{I})^{-1} \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{\mu}$$

9.1.- Consecuencia

En un espacio bidimensional y en un punto de una cuádrica, hay un círculo osculador y uno solo. En el límite coincide con la tangente y su radio es infinito.

10.- Llamamos radio de curvatura de una cuádrica real propia en uno de sus puntos y respecto a una variedad bidimensional perpendicular en el punto a su tangente, al radio del círculo osculador, en el punto, de la cuádrica intersección de cuádrica original y variedad.

Llamamos curvatura de una cuádrica real propia en uno de sus puntos y respecto a una variedad bidimensional perpendicular en el punto a su tangente al valor inverso del radio de curvatura.

TEOREMA 5°.- Sea la cuádrica real propia de ecuación $\vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}\,\vec{x} = 0$ referida a uno de sus puntos, y una variedad bidimensional, que lo contiene y es perpendicular a la tangente del punto, de ecuación $\vec{\tau}_1\,\vec{x} = 0$.

Si la proyección ortogonal $\vec{\tau}'$ de $\vec{\tau}$ sobre la tangente, expresada en el sistema ortonormal de vectores y valores propios de su espacio imagen es $\vec{\tau}' = \alpha_i (\vec{e}_i \boxtimes \vec{e}_i)$ y si $\vec{t} = \beta_j \vec{e}_j$ es el versor de la intersección de variedad y tangente, la expresión del radio de curvatura y curvatura de la cuádrica correspondiente al punto y variedad, es:

$$\rho = \left| \frac{v}{\sum \alpha_i \beta_i^2} \right| ; \qquad \frac{1}{\rho} = \left| \frac{\sum \alpha_i \beta_i^2}{v} \right|$$

Evidentemente, para un mismo punto y variedad bidimensional tanto el radio de curvatura como la curvatura, son los mismos para todas las cuádricas osculatrices en el punto. Podremos pues sustituir la cuádrica dada, para el cálculo de curvaturas, por la cuádrica de ecuación:

$$\vec{\tau}'(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\vec{v}\,\vec{x} = 0$$

que no tiene centros y es osculatriz en el punto, que resulta su vértice.

Si llamamos $\vec{n}$ al versor de la normal en el punto, será $\vec{n}$ ortogonal a $\vec{t}$ y el tensor unidad del espacio de la variedad bidimensional será:

$$\vec{I} - \vec{\tau}^0_1 = \vec{t} \boxtimes \vec{t} + \vec{n} \boxtimes \vec{n}$$

La proyección de $\vec{\tau}'$ sobre dicho espacio es

$$\vec{\tau}'' = (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) * \vec{\tau}' * (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1) =$$

$$= (\vec{t} \boxtimes \vec{t} + \vec{n} \boxtimes \vec{n}) * \left[\sum \alpha_i (\vec{e}_i \boxtimes \vec{e}_i) * (\vec{t} \boxtimes \vec{t} + \vec{n} \boxtimes \vec{n})\right] =$$

$$= (\vec{t} \boxtimes \vec{t}) * \left[\sum \alpha_i (\vec{e}_i \boxtimes \vec{e}_i) * (\vec{t} \boxtimes \vec{t})\right] = (\vec{t} \boxtimes \vec{t}) * \sum\left[\alpha_i (\vec{t}\,\vec{e}_i)(\vec{t} \boxtimes \vec{e}_i)\right] =$$

$$= \left[\sum \alpha_i (\vec{t}\,\vec{e}_i)^2\right] (\vec{t} \boxtimes \vec{t}) = \left(\sum \alpha_i \beta_i^2\right) (\vec{t} \boxtimes \vec{t})$$

La proyección de $\vec{v}$ es

$$\vec{v}'' = (\vec{I} - \vec{\tau}^0_1)\vec{v} = (\vec{t} \boxtimes \vec{t} + \vec{n} \boxtimes \vec{n})\vec{v} = \vec{v}$$

La cuádrica bidimensional intersección tendrá por ecuación:

$$\left(k = \sum \alpha_i \beta_i^2\right): \qquad k(\vec{t} \boxtimes \vec{t})(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\vec{v}\,\vec{x} = 0$$

que en el espacio de la variedad corresponde a una parábola con vértice en el origen.

El centro del círculo osculador será por lo tanto

$$\vec{c} = -\frac{\vec{v}}{\sum \alpha_i \beta_i^2}$$

y en consecuencia, el radio de curvatura y la curvatura son, respectivamente:

$$\rho = \left|\frac{v}{\sum \alpha_i \beta_i^2}\right| \quad ; \quad \frac{1}{\rho} = \left|\frac{\sum \alpha_i \beta_i^2}{v}\right|$$

11.- Sea una cuádrica real propia y uno se sus puntos no central.

Llamamos <u>direcciones principales</u> de la cuádrica en el punto, a las direcciones propias del tensor $\vec{\tau}'$, proyección ortogonal del coeficiente $\vec{\tau}$ de su ecuación, sobre la tangente en el punto.

<u>Variedades normales principales</u> de la cuádrica en el punto, son las variedades bidimensionales determinadas por la normal en el punto y una dirección principal. Son por lo tanto ortogonales al plano tangente.

Tanto las direcciones principales como las variedades normales principales son evidentemente comunes a todas las cuádricas osculatrices en el punto.

Secciones normales principales .- Son las cuádricas que resultan de la intersección de la cuádrica con una variedad normal principal. Para dos cuádricas osculatrices en el punto, son dos cuádricas también osculatrices en el mismo, del espacio de la variedad normal principal común.

Rádios de curvatura principales y curvaturas principales. Son los correspondientes a secciones normales principales en el punto. Para dos cuádricas osculatrices en el mismo, sus valores son comunes.

12.- TEOREMA 6°.- Si los versores propios de $\vec{\tau}'$ (proyección ortogonal del coeficiente $\vec{\tau}$ de la ecuación de una cuádrica sobre la tangente en un punto), es decir, de las direcciones propias de la cuádrica en el punto, son $(\vec{e}_i)$ con valores propios (α_i), y el coeficiente vectorial de la ecuación de la cuádrica referida al punto es $\vec{v}$, los radios de curvatura y curvaturas principales de la cuádrica en el punto son, para cada dirección principal $\vec{e}_i$, los siguientes:

$$\rho_i = \left| \frac{v}{\alpha_i} \right| \qquad\qquad \frac{1}{\rho_i} = \left| \frac{\alpha_i}{v} \right|$$

Pues el coeficiente β_j será nulo para $j \neq i$ y valdrá 1 para $j = i$, convirtiéndose así las expresiones generales en las anteriores.

Vemos que las curvaturas principales nulas o radios de curvatura infinitos, corresponden a vectores propios de valor propio nulo, o sea a los vectores de Nuc $\vec{\tau}'$.

13.- Aunque los radios de curvatura son módulos y por tanto siempre positivos, podrá convenir considerarlos como módulos del vector centro -c = n y darles valores de distinto signo cuando los centros caigan en distinta zona de las dos en que el plano tangente divide al espacio. Podemos convenir a tal efecto, por ejemplo, que un radio principal de curvatura tiene siempre el signo del valor propio correspondiente.

Con tal convenio podemos escribir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \alpha_i \beta_i^2}{v} = \sum \frac{1}{\rho_i} \beta_i^2$$

y tendremos que, algebraicamente, los máximos y mínimos de la curvatura corresponden a los valores propios máximo y mínimo respectivamente.

También se deduce que si hay curvaturas principales de signos opuestos existen siempre secciones normales con curvatura nula.

14.- De los valores $\vec{\tau}'$ y $\vec{v}$ que determinan las curvaturas de una cuádrica en un punto, se pueden deducir diversos escalares característicos.

Así por ejemplo:

a) <u>Curvatura media</u> (valor medio aritmético de las curvaturas principales):

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{n-1} \sum \frac{\alpha_i}{v} = \frac{\delta_1}{(n-1)\,v}$$

(δ_1 = Traza de $\vec{\tau}'$)

b) <u>Coeficiente de curvatura de Gauss</u> (producto de las curvaturas principales):

$$\prod_i \frac{1}{\rho_i} = \prod_i \frac{\alpha_i}{v} = \frac{\delta_{n-1}}{v^{n-1}}$$

(δ_{n-1} = Determinante de $\vec{\tau}'$ en el espacio de la tangente, ó invariante n - 1 de la ecuación característica de $\vec{\tau}'$, considerando $\vec{\tau}'$ en el espacio total).

15.- Todo los dicho respecto a la curvatura de una cuádrica es aplicable a la curvatura en un punto de una superficie cualquiera cuya ecuación referida al punto sea

$$0 = 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + \vec{\tau}_3(\vec{x} \boxtimes \vec{x} \boxtimes \vec{x}) + \ldots\ldots\ldots$$

si sustituimos la superficie por la cuádrica osc latriz en el punto cuya ecuación será:

$$0 = 2\,\vec{v}\,\vec{x} + \vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x})$$

16.- Consideremos en el centorno del punto un sistema coordenado curvilíneo de las siguientes características:

1ª.- A todo punto de la superficie corresponden n - 1 curvas coordenadas que están en dicha superficie, de manera que esta puede estudiarse como un espacio riemanniano de n - 1 dimensiones.

2ª.- En todo punto de la superficie la enésima curva coordenada, para la que solo varía la coordenada y^n, es ortogonal a la misma y el vector base correspondiente a la misma es unitario. Por tanto, $\vec{e}_n = \vec{e}^{\,n}$ y es perpendicular a los demás vectores de la base natural $(\vec{e}_i)$ y a sus duales $(\vec{e}^{\,i})$, en los puntos de la superficie: $\delta_i(\vec{e}_j\,\vec{e}_n) = 0$.

Se verifica:

17.- TEOREMA 7°.- Consideremos, para un punto de la cuádrica, el sentido de $\vec{e}_n$

opuesto al del coeficiente $\vec{v}$ de su ecuación $\vec{\tau}(\vec{x} \boxtimes \vec{x}) + 2\,\vec{v}\,\vec{x} = 0$ respecto al punto.

Resulta:

El tensor simétrico $\frac{\vec{\tau}'}{v} = \vec{L}$ del espacio tangente, es la proyección sobre el mismo de $\nabla \boxtimes \vec{e}_n$ y $\nabla \boxtimes \vec{e}^n$ y las coordenadas de $\vec{L}$ en el espacio tangente son las magnitudes fundamentales de Gauss de segundo orden correspondientes a cuádrica y punto.

a).- Vamos a hallar una expresión de $d\vec{e}_n = d\vec{e}^n$ al pasar del punto origen- al punto $d\vec{x}$ de la superficie:

Versor normal en el punto origen: $\vec{e}^n = \vec{e}_n = -\frac{\vec{v}}{v}$

Versor normal en el punto $d\vec{x}$: $-\frac{\vec{\tau}\,d\vec{x} + \vec{v}}{\sqrt{(\vec{\tau}d\vec{x} + \vec{v})^2}}$

Pero se verifica:

$$-\frac{\vec{\tau}d\vec{x} + \vec{v}}{\sqrt{(\vec{\tau}d\vec{x} + \vec{v})^2}} = \frac{\vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}\,d\vec{x}}{v}}{\sqrt{(\vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v})^2}} = \frac{\vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}\,d\vec{x}}{v}}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}\vec{e}_n}} = \frac{\vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}}{1 - \frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}\vec{e}_n} =$$

$$= (\vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v})(1 + \frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}\vec{e}_n) = \vec{e}_n - \frac{\vec{\tau}\,d\vec{x}}{v} + (\frac{\vec{\tau}\,d\vec{x}}{v}\vec{e}_n)\,\vec{e}_n =$$

$$= \vec{e}_n - \vec{I}\,\frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v} + (\vec{e}_n \boxtimes \vec{e}_n)\,\frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v} = \vec{e}_n - (\vec{I} - \vec{e}_n \boxtimes \vec{e}_n)\,\frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}$$

Ahora bien, $\vec{I} - \vec{e}_n \boxtimes \vec{e}_n$ es el tensor unitario $\vec{G}$ del espacio tangente y por tanto:

$$d\vec{e}^n = d\vec{e}_n = -\vec{G}\,\frac{\vec{\tau}d\vec{x}}{v}$$

Por ser $d\vec{x}$ un punto de la cuádrica, se diferencia infinitamente poco de $\vec{G}d\vec{x}$, y como $\vec{G} * \vec{\tau} * \vec{G}$ es la proyección de $\vec{\tau}$ sobre el plano tangente, se verifica:

$$d\vec{e}^n = d\vec{e}_n = -\frac{\vec{\tau}'}{v}\,d\vec{x} = -\vec{L}d\vec{x}$$

Por consiguiente, $-\vec{L}$ coincide con la proyección sobre el plano tangente de los tensores $\nabla \boxtimes \vec{e}^n$ y $\nabla \boxtimes \vec{e}_n$. (Derivadas).

b) Sea el tensor $\vec{\tau} = \vec{m}_j \boxtimes \vec{n}^j$ y su proyección $\vec{\tau}'$ sobre una variedad. Si $\vec{\sigma}$ es un tensor de dicha variedad, o sea, expresable por $\vec{\sigma} = \vec{a}_i \boxtimes \vec{b}^i$, perteneciendo a la variedad las direcciones de los $\vec{a}_i$ y $\vec{b}^i$, se verifica:

$$\vec{\tau}'\vec{\sigma} = \vec{\tau}\,\vec{\sigma}$$

Efectivamente, si $\vec{G}$ es el tensor unitario del espacio de la variedad, por ser simétrico tendremos:

$$\vec{\tau}'\vec{\sigma} = (\vec{G}\vec{m}_j \boxtimes \vec{G}\vec{n}^j)(\vec{a}_i \boxtimes \vec{b}^i) = \left[(\vec{G}\vec{m}_j)\vec{a}_i\right]\left[(\vec{G}\vec{n}^j)\ \vec{b}^i\right] = \left[\vec{m}_j(\ \vec{G}\vec{a}_i\ )\right]\left[\vec{n}^j\ (\vec{G}\vec{b}^i)\right] =$$

$$= (\vec{m}_j\ \vec{a}_i)\ (\vec{n}^j\ \vec{b}^i) = (\vec{m}_j \boxtimes \vec{n}^j)(\vec{a}_i \boxtimes \vec{b}^i) = \vec{\tau}\ \vec{\sigma}$$

c) Por consiguiente, adoptando una base $(\vec{e}_k)$ para el espacio tangente se tendrá:

$$-L_{ij} = (\ \nabla \boxtimes \vec{e}_n)(\vec{e}_i \boxtimes \vec{e}_j) = \left[(\vec{e}_i\nabla\ )\vec{e}_n\right]\ \vec{e}_j = (\ \delta_i\ \vec{e}_n\ )\vec{e}_j =$$

$$= -\ \vec{e}_n(\delta_i\ \vec{e}_j\ ) = -\ \vec{e}_n(\ \delta_{ij}\ \vec{x})$$

Las L_{ij} son pues las magnitudes fundamentales de Gauss de segundo orden correspondientes al punto.

18.- Consecuencias de los párrafos anteriores.

1^a.- $L_{ij} = -\ \Gamma_{ijn} = \Gamma_{inj} = \Gamma_{i\ j}^{\ n} = \frac{1}{2}\ \delta_n\ g_{ij}$

$$L_i^{\ j} = -\ \Gamma_{i\ n}^{\ j}$$

2^a.- Los radios de curvatura y la curvatura en dirección del versor t se pueden expresar por

$$\rho = \frac{1}{\vec{L}(\vec{t} \boxtimes \vec{t})}\ ; \qquad \frac{1}{\rho} = \vec{L}(\vec{t} \boxtimes \vec{t})$$

Puesto que para la base ortonormal $(\vec{p}_i)$ de versores propios de $\vec{\tau}'$, con $\vec{t} = \beta_j\ p_j$ se verifica:

$$\vec{L}(\vec{t} \boxtimes \vec{t}) = \frac{\vec{\tau}'}{v}(\vec{t} \boxtimes \vec{t}) = \frac{\sum \alpha_i(\vec{p}_i \boxtimes \vec{p}_i)}{v}(\sum\beta_j\ \vec{p}_j \boxtimes \sum\beta_k\ \vec{p}_k) = \frac{\sum\alpha_i\beta_i^2}{v}$$

3^a.- En vez de utilizar un versor $\vec{t}$, podemos utilizar un vector $\vec{u}$ de igual dirección. Tomando una base $(\vec{e}_i)$ del espacio tangente, si este vector lo representamos por $\vec{u} = s\ \vec{t} = u^k\ \vec{e}_k$, tendremos:

$$\frac{1}{\rho}\quad \frac{\vec{L}(s\vec{t} \boxtimes s\vec{t})}{s^2} = \frac{\vec{L}\ (s\vec{t} \boxtimes s\vec{t})}{\vec{G}(s\vec{t} \boxtimes s\vec{t})} = \frac{\vec{L}(\vec{u} \boxtimes \vec{u})}{\vec{G}(\vec{u} \boxtimes \vec{u})} = \frac{L_{ij}\ u^i\ u^j}{g_{mn}\ u^m\ u^n}$$