OPTIMIZACION DE TURBOMAQUINAS

Quaderns d'enginyeria
1(1979)3 p. 287-300

Por Eugenio Valencia Leonardo*

RESUMEN

El problema de optimización de turbomáquinas se planteó cuando el espacio destinado a las mismas se redujo y las características de funcionamiento se establecieron desde un plano cada vez más exigente. La solución a adoptar ante esta nueva circunstancia se halló replanteando y dando un nuevo enfoque a la cuestión: no se trataba simplemente de determinar unas dimensiones de la máquina empleando un modelo matemático cuya eficacia estaba comprobada, sino que además ahora se exigía que su configuración fuera tal, que el rendimiento en un amplio entorno alrededor del punto de diseño fuera ótpimo.

En este artículo se da una visión general del problema de optimización y se especifican las soluciones halladas para los casos concretos de bombas y compresores radiales y axiales. El procedimiento seguido ha consistido en exponer en dos cuadros sinópticos toda la problemática e ir comentando a lo largo del texto cada uno de los pormenores. Se explicita de esta forma la función rendimiento. El siguiente paso ha sido la obtención de los valores óptimos de este rendimiento: para máquinas radiales se prefiere emplear un método gráfico, pues la expresión de la función a optimizar es complicada; en cambio, para máquinas axiales pueden seguirse indistintamente el método analítico ó el gráfico, ya que ahora la ecuación del rendimiento es facilmente manejable.

Finalmente se incluye un ejemplo ilustrativo donde, para un problema concreto, se proponen tres soluciones, que a modo de iteraciones sucesivas nos conducen hasta el valor óptimo. Evidentemente todo el volumen de cálculo puede llevarse a cabo con ayuda de ordenadores que permiten obtener resultados de gran precisión.

SUMMARY

The problem of optimising turbomachines arose when the space destined to them was reduced and the working characteristics were established on a level each time more exigent. The solution to be adopted under this new circumstance was found by reconsidering the situation and giving a new approach to it. The endeavour was not simply to determine some dimensions of the machine by using a mathematical method of verified efficacy. Now not only that but as well it was required that its configuration was such that the efficiency around and ample environment of the design point was optimum.

In this article a general view of the problem of optimising is given and solutions obtained regarding the concrete cases of pumps and of axial and radial compressors are especified. The procedure that has been followed consists in expressing all about the problem in two synoptic tables and commenting on each detail throughout the text. In this way the efficiency function is precisely expressed. The following step has been the attainment of the optimum values of this efficiency. The use of a graphic method is preferred for radial machines because the expression of the function to be optimised is complicate but it is possible to follow indistinctly the analytic or the graphic method for axial machines because the efficiency equation is now easily managed.

Finally, an illustrative example is quoted. In same three solutions are proposed for a concrete problem, they lead to the optimum valve in the same manner as sucessive iterations. Evidently the bulk of all the calculation can be carried out with the help of computers which allow the attainment of results with great precission.

* Cátedra de Mecánica de Fluidos, Universidad Poltécnica de Barcelona.

1 - INTRODUCCION

Todo proceso de optimización se basa en ciertos criterios, va dirigido a determinadas cualidades y se considerará consumado cuando los resultados conseguidos son una respuesta a los conceptos de partida.

En el caso de una turbomáquina el criterio de fundamento lo constituye el rendimiento, que debe ser máximo, y las modalidades a optimizar son bien las condiciones de diseño, bien las dimensiones de la máquina.

El problema surgió cuando el espacio destinado en determinados vehículos (caminones, aviones) a las turbomáquinas se fue reduciendo, al mismo tiempo que las características de funcionamiento eran cada vez más severas. Si la energía disponible debía ser aprovechada al máximo, el rendimiento de ventiladores y turbinas debía ser elevado. Ello implicaba un replanteo del problema de diseño, explorando y ensayando todas las configuraciones posibles, con el fin de obtener la que mejor se ajustase al caso concreto presentado.

Las primeras investigaciones sobre el tema se llevaron a cabo en los años de la segunda guerra mundial, siendo entonces secreto militar. Poco después empezarón a publicarse algunos resultados, vagos e inconexos, y casi hasta 1.955 no empiezan a aparecer trabajos completos y de utilidad para el técnico. Las máquinas estudiadas en primer lugar fueron las axiales y como artículos dignos de consulta, entre otros muchos citaremos aquí los de H. Schlichting (1.955) N. Scholz (1.965), H. Marcinonski (1.959) y E. Ackermann (1.961).

De forma simultánea se llevaron a cabo exaustivas investigaciones sobre máquinas radiales, y de modo especial en el compresor utilizado en motores sobrealimentados. Las publicaciones aparecidas en este caso son más recientes y menos numerosas. Como las más representativas pueden citarse las de B. Eckert y E. Schnell (1.961), B. Eck (1.962) y W. Bolte (1.967, 1.971, 1.975, 1.978).

En la Bibliografía del final de éste trabajo se incluyen 12 referencias, que a juicio del autor pueden proporcionar una visión global del problema. Para la redacción, sin embargo, sólo se han empleado los cinco siguientes: [1], [2], [5], [7], [9]. Las demás constituyen un complemento a la teoría básica desarrollada en las 5 seleccionadas.

2 - EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

El diseño de una turbomáquina, o primer problema fundamental, consiste en la determinación de las dimensiones de la misma a partir de ciertas características de funcionamiento como el caudal $\dot{V}$, la altura de elevación H y el número de vueltas n. Este problema se resuelve mediante un conjunto de ecuaciones que representen lo más fielmente posible las condiciones de flujo. Puesto que las soluciones posibles son infinitas, la adopción de la más idónea se lleva a cabo empleando el criterio, ya indicado antes, de que el rendimiento sea máximo.

Luego el problema de optimización se reduce a obtener la expresión de η función de las cualidades a optimizar (que en unos casos serán las características de funcionamiento: φ, Ψ, Ψ_{th} y en otras la morfología de la máquina: D_2 β_2) y a hallar los valores de esas cualidades que permiten que el rendimiento sea máximo.

En realidad el problema no es nuevo, sino que su planteamiento data de las primeras décadas de este siglo, cuando se iniciaron los diseños de turbomáquinas. Su actualidad reside en que ahora se conocen con mucha más precisión las condiciones de flujo; y por tanto, pueden obtenerse facilmente los valores de φ, Ψ, Ψ_{th}, D, β_2 deseados.

Veamos en primer lugar cómo se define la expresión de η.

3 - FUNCION RENDIMIENTO η

Muchas son las expresiones de η existentes que con más o menos precisión representan las condiciones de funcionamiento de una turbomáquina. Para éste estudio se han seleccionado cuatro: tres de precisión aceptable [1], [2] y [7] ÷ [9] , pero cuya accesiblidad y manejabilidad las convierten en las más usadas y una [5] , de gran precisión, eleborada empleando las - más recientes investigaciones sobre flujo potencial y capa limite, aunque para su aplicación se precisa un ordenador electrónico de gran potencia. En [1] se estudia el caso de una compresor radial, en [2] y [5] el de una bomba radial y en [7] ÷ [9] un ventilador axial.

En todas ellas la función a optimizar es el rendimiento interno, definido mediante

$$\eta_s = \frac{\rho \dot{V} g H}{\rho \dot{V}_{bh} g H_{bh} + 2\pi \cdot ngM} = \frac{1}{\frac{1}{\eta_h}\frac{1}{\eta_{sp}} + \zeta_r} \qquad (1)$$

en que η_h es el rendimiento fluidodinámico (o hidráulico) igual a

$$\eta_h = \frac{\Psi_{th} - (\Delta\Psi_{La1} + \Delta\Psi_{La2} + \Delta\Psi_{Le} + \Delta\Psi_D)}{\Psi_{th}} = 1 - (\zeta_{La1} + \zeta_{La2} + \zeta_{Le} + \zeta_D) \qquad (2)$$

η_{sp} es el rendimiento volumétrico, que se expresa de la forma siguiente:

$$\eta_{sp} = \frac{\dot{V}}{\dot{V} + \dot{V}_{sp}} \quad (3) \text{ para bombas;} \quad \eta_{sp} = \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_{sp}} \quad (4) \text{ para compresores.}$$

ζ_r el coeficiente de valoración de las pérdidas por rozamiento en los discos igual a

$$\zeta_r = \frac{2\pi nM}{\rho \dot{V} H} \qquad (5)$$

A continuación se estudian con detalle cada uno de estos rendimientos para los distintos tipos de turbomáquina.

3 . 1 - Consideremos en primer lugar las máquinas radiales. Los términos de la ecuación (2) representan lo siguiente

- $\Psi_{th} = \frac{g H_{th}}{u_2^2/2}$ es la cifra de presión teórica

- $\Delta\Psi_{La1} = \frac{\Delta P_{La1}}{\rho u_2^2/2}$ es la pérdida de presión a la entrada del rodete por cambio de dirección de la corriente.

Se expresa en función de la cifra de caudal φ mediante la relación

$$\Delta\Psi_{La1} = \zeta_1 \left(\frac{c_1}{u_2}\right)^2 = \zeta_1 \left(\frac{\dot{V}}{\pi d_1 b_1 u_2}\right)^2 = \zeta_1 \left(\frac{\varphi}{4D^2 b_1/d_1}\right)^2 \qquad (2a)$$

Las magnitudes d_1, b_1 se han representado en las figuras del cuadro 1 y el valor de ζ_1 se halla en el Cuadro 2.

- $\Delta\Psi_{La2} = \frac{W_{wm}}{\dot{V}\rho u_2^2/2}$ es la pérdida por rozamiento en los canales de los álabes del rodete.

Consta de dos términos que representan, sucesivamente el rozamiento sobre las caras de succión y de presión del álabe

$$w_m \left[c_f \frac{\rho}{2} w_m^2 \; f_1(\beta_2) \; 2 \; z \; l \; b_m\right] / (\dot{V}\rho u_2^2/2) \qquad (1b)$$

y el rozamiento en la parte lateral del canal entre álabes

$$w_m \left[c_f \frac{\rho}{2} w_m^2 \; f_1(\beta_2) \; 2.\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\right] / (\dot{V}\rho u_2^2/2) \qquad (2c)$$

En [5] se emplea para $\Delta\Psi_{La2}$ una expresión mucho más exacta, obtenida aplicando la teoría de la capa limite al flujo en los canales formados por los álabes.

La pérdida total de presión ΔP_{gv} que allí aparece es igual a

$$\Delta P_{gv} \simeq \Delta P_{gv_o} \left(1 - \frac{Y}{\delta} \right)^2$$

siendo

$$\Delta P_{gv_o} = \frac{\rho}{2} U_\delta^2 \left[1 - \left(\frac{u_o}{U_\delta} \right)^2 + 2 \delta \left(\frac{2\omega}{U_\delta} I_1 - \frac{I_2}{R} \right) \right]$$

$$I_1 = \int_o^1 \frac{W}{U_\delta} d \frac{Y}{\delta}$$

$$I_2 = \int_o^1 \left(\frac{W}{U_\delta} \right)^2 d \frac{Y}{\delta}$$

- $\Delta \Psi_{Le} = \dfrac{\Delta P_{La2}}{u_2^2/2}$ es la pérdida de presión en la rueda directriz,

Puede expresarse mediante $\Delta \Psi_{Le} = \zeta_2 (c_3/u_2)^2$ (2d)

- $\Delta \Psi_D = \dfrac{\Delta P_{LD}}{u_2^2/2}$ es la pérdida de presión en el difusor, que se valora mediante $\Delta \Psi_D = \zeta_3 \, (c_3^2 - c_4^2)/u_2^2$

, y que teniendo en cuenta las relaciones del Cuadro 1 resulta ser

$$\Delta \Psi_D = \zeta_3 \left[\lambda^2 + \mu^2 \, (1 - \operatorname{cotg} \beta_2)^2 - \left(\frac{\varphi}{4D^2 \, b_1/d_1} \right)^2 \right] \qquad (2e)$$

La función $f_1 = f_1 \, (\beta_2)$ se ha representado en la fig. 1 c1

b) Los términos de la ecuación (3) equivalen, sucesivamente, a:

- $\dot{v}$ el caudal igual a $\dot{v} = \frac{\pi}{4} d_2^2 \, u_2$ (3a)

- $\dot{v}_{sp}$ el caudal perdido por fugas, de expresión

$$\dot{v}_{sp} = \mu_{sp} \, f_{sp} \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{sp} - P_1)} = \mu_{sp} \, \pi \, d_1 \, \delta_{sp} \sqrt{\left(1 - \frac{\Psi}{4_{2n}} \right) \Psi - \frac{1-D^2}{4}} \, ,$$

habiendo tomado

$$P_{sp} = P_2 - \frac{\rho}{8} \cdot (u_2^2 - u_1^2) = P_2 - \frac{\rho}{8} u_2^2 \, (1 - D^2)$$

$$P_2 \simeq P_1 + \tau \rho H = P_1 + \left(1 - \frac{\Psi}{4_{2n}} \right) \Psi \frac{u_2^2}{2} \rho \qquad (3b)$$

$$\Psi = 4 \eta_h \cdot (1 - \tau)$$

c) Los términos de la ecuación (4) son

- $\dot{m}$ el flujo máximo igual a $\dot{m} = \rho \varphi \frac{\pi}{4} d_2^2 \, u_2$
- $\dot{m}_{sp}$ el flujo másico de fuga, que se valora mediante

$$\dot{m}_{sp} = \pi \, d_1 \, \delta_{sp} \frac{0{,}64}{\sqrt{Z_{sp}}} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_{sp}} \right)^2 \right] \frac{P_{sp}}{\nu_{sp}}} = f_{sp} \, \phi \sqrt{\frac{P_{sp}}{\nu_{sp}}}$$

dividiendo por $\dot{m} = \rho \varphi \frac{\pi}{4} d_2^2 \, u_2$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{P_{sp}}{\nu_{sp}}} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{P_{sp}^2}{\nu_{sp} P_{sp}}} = \frac{1}{\rho} \frac{P_{sp}}{\sqrt{RT_{sp}}} = \frac{P_{sp} / \sqrt{RT_{sp}}}{P_2 / RT_2} \simeq \sqrt{RT_{sp}} = \frac{a_s}{\sqrt{k}}$$

$$\rho = \frac{P_2}{RT_2} \simeq \frac{P_{sp}}{RT_{sp}}$$

$$\text{y } M_{au2} = M_2 = u_2/a_s,$$

se llega a

$$\frac{\dot{m}_{sp}}{\dot{m}} = \frac{4}{\sqrt{k}} \; D \; \frac{\delta_{sp}}{d_2} \; \frac{\phi}{M_{au2}}$$

La relación de presiones P_{sp}/P_1 en función de Ψ y D se obtiene empleando las ecuaciones (3b) y sustituyendo ρ por $\rho_m \simeq P_1/RT_1$,

$$\frac{P_{sp}}{P_1} = 1 + \frac{k}{2} M_{au2}^2 \left[\left(1 - \frac{\Psi}{4\eta_n}\right) \Psi - \frac{1-D^2}{4} \right]$$

d) El coeficiente ζ_r se hace igual a

$$\zeta_r = \frac{2\pi n M}{\rho \dot{V} H} = \frac{2\pi n \; \frac{0{,}054}{(d_2 u_2/\nu)^{4/5}} \; \rho \, n^2 \, d_2^5}{\rho \dot{V} H} = \frac{b}{\varphi \Psi}$$

Según [1] $b = \frac{2.8.10^{-4}}{(d_2 u_2/\nu)^{1/5}} \left[1 - \frac{(0{,}9D)^{4,6}}{2}\right]$

3.2 - En el caso de <u>máquinas axiales</u> solo consideraremos el rendimiento fluidodinámico η_h, pues $\eta_{sp} \simeq 1$ y ζ_r no tiene sentido.

Para η_h se emplea la ecuación (2), observando que ahora los coeficientes ζ_{La} se expresan de forma distinta a como se hizo para máquinas radiales. Se emplieza definiendo un coeficiente local (para un radio r):

$$\zeta_{vLa}\,(r) = \frac{\Delta\Psi_{La}}{\Psi_{th}} = \frac{W \cdot w_\infty}{p_u \; u}$$

sustituyendo $\begin{cases} P_u = A_o \text{ se } \beta_\infty = A_o \; \frac{C_{ax}}{w_\infty} \\ W = \varepsilon_{La} \cdot A_o \end{cases}$

obtenemos

$$\zeta_{vLa}\,(r) = \varepsilon_{La} \; \frac{w_\infty^2}{u \; c_{ax}} \; ;$$

finalmente tendremos ζ_{vLa} como valor medio

$$\zeta_{vLa} = \frac{\int_{ri}^{ra} \zeta_{vLa}(r) \; d\,(\pi r^2)}{\pi (r_a^2 - r_i^2)}$$

Los valores de ζ_{vLa}, ζ_{vLe} y ζ_{vD} se presentan agrupados en el Cuadro n° 2

4 - OBTENCION DE VALORES OPTIMOS

Mediante los conceptos expuestos en el apartado anterior y junto con los valores contenidos en los cuadros 1° y 2° se deducen facilmente expresiones para el rendimiento de la forma:

$\eta_s = \eta_s\,(D, \beta_2, \varphi, \Psi)$, para máquinas radiales y
$\eta_h = \eta_h\,(\nu, \varphi, \Psi)$, para máquinas axiales.

La obtención de valores óptimos puede llevarse a cabo de varias formas. A continuación se expondrán dos de las más empleadas.

Para <u>máquinas radiales</u> se prefiere emplear la forma gráfica. Consiste en representar, empleando escalas apropiadas, los valores de $\Delta\Psi$ en función de β_2 (fig. 1a, 2a, 3a) (y si es posible en función de Z (fig. 3c) y utilizarlas juntamente con las expresiones contenidas en los cuadros 1.° y 2.° para construir las figuras 1b y 2b, que son las fundamentales y a partir de las cuales se trazan todas las demás como se indica a continuación:

a) figuras 1c y 2c: los puntos (η_s, β_2) y (Ψ, β_2) se obtienen mediante la INTERSECCION de las curvas que forman las figuras 1b ó 2b por un plano φ=cte determinado (φ = = 0,05 en la fig. 1c)

b) figuras 1d, e, f y 2d, e, f.- Los puntos de cualquiera de las curvas contenidas en estas figuras se obtienen de las puntos de TANGENCIA de la curva η_s = cte con la abscisa correspondiente (φ, ψ ó n_q; ver fig. 1g).

De esta forma de las figuras 1d, e, f (ó 2d, e, f) conseguimos valores óptimos de β_2, Ψ (fig. 1d), β_2, , Z (fig. 1e) y β_2, Ψ, Z (fig. 1f) ligeramente distintos para un mismo valor de $\eta_{smáx}$, según que el criterio seguido sea la tangencia de φ, ó de Ψ, ó de n_q; valores que sin embargo, tienden a coincidir cuando la curva $\eta_{smáx}$ = cte se reduce a un punto. Si esto no sucede, se adoptan las de la figuras 1f (ó 2f).

En el caso de máquinas axiales la ecuación de η es mucho más sencilla que para las radiales, por lo que se emplea de ordinario el método analítico, que consiste en derivar η en función de ν, φ ó Ψ e igualar a cero, para obtener los valores óptimos ν_{opt}, φ_{opt}, Ψ_{opt} correspondientes al valor η máximo.

En el caso estudiado por Marcinowski - Hausenblas [9] ÷ [7] se elimina la variable φ, empleando la condición de impulso mínimo de aguas muertas sobre el núcleo, que en [9] se expresa así:

$$\frac{r_K}{r_a} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2 - 2\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2}} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2\right] - 2\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\sqrt{1 + \left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2} + \left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2} - \frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right\}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi}{\Psi_{th}}\right)^2} - \frac{\varphi}{\Psi_{th}} \qquad \text{(ver cuadro n° 1)}$$

si $r_K = r_i$: $\frac{\varphi}{\Psi_{th}} = \frac{1 - \nu^2}{2\nu}$ pues $\frac{r_i}{r_a} = \nu$

relación que combinada con la del rendimiento permite llegar simplemente a:

$$\eta = \eta(\nu, \Psi) = 1 - (\varepsilon_{La} + \varepsilon_{Le})\frac{\Psi}{\eta}\left(\frac{k_1}{k_7} + k_4 k_7\right) + \varepsilon_{La}\left(k_2 k_7 \frac{\eta}{\Psi} - k_3 k_7\right) + \frac{k_6}{k_7^2}\frac{\Psi}{\eta}$$

Para la determinación de los valores óptimos se plantea la misma cuestión que en las máquinas radiales: depende de más de una variable (dos en este caso); si la curva $\eta_{máx}$ - (fig. 4a) se redujera a un punto, existirían dos únicos valores ν, ψ que serían los óptimos. Pero como puede observarse en esa figura no es este el caso, por lo que para obtener las óptimos hemos de adoptar uno de los criterios siguientes:

- buscar el óptimo suponiendo ν=cte y hallar el valor Ψ_{opt} a partir de la ecuación $d\eta/d\Psi = 0$; este camino es el seguido por Marcinowski, y equivale a obtener las curvas $\eta = \eta(\nu)$, $\Psi = \Psi(\nu)$ a partir de los puntos de TANGENCIA entre las líneas de igual rendimiento y las ν = cte correspondientes;

- buscar el óptimo partiendo de Ψ = cte y hallar ν_{opt} de la condición $d\eta/d\nu = 0$, método introducido por Hausenblas [7] y que equivale a trazar las curvas $\eta = \eta(\Psi)$, $\nu = \nu(\Psi)$ formadas por los puntos de TANGENCIA entre las líneas de igual rendimiento y las Ψ=cte.

La representación gráfica de los resultados obtenidos por uno y otro método se incluye en las figuras 4b y 4c, una observación de las cuales nos permite deducir que el procedimiento de Hausenblas es preferible al de Marcinowski, pues conduce a valores de η superiores para una gama de Ψ mucho más extensa. Hay que insistir, no obstante, que ambas curvas de η coincidirían si la línea $\eta_{máx}$ fuera tan pequeña que tendiera a ser un punto.

5 - CONCLUSION

Los problemas de optimización de turbomáquinas se presentan cuando en su diseño se pretende hallar una morfología tal que, para unas condiciones de funcionamiento dadas, el rendimiento sea máximo. Problemas que han podido resolverse solamente después de haber sido correctamente planteados, es decir que se han podido optimizar las dimensiones (d,b,β) y coeficientes funcionales (φ, Ψ) de una turbomáquina, en cuanto se ha conocido con la suficiente precisión la función rendimiento. Ese estado de conocimiento se ha alcanzado de forma progresiva, existiendo hoy día modelos matemáticos de gran precisión, tal el expuesto en [4] y [5] , en donde se emplean las más recientes investigaciones sobre la capa límite para determinar la pérdida de energía por rozamiento fluido.

Cuando la curva de $\eta_{máx}$ dista mucho de ser semejante a un punto, se obtienen distintos valores óptimos para distintos criterios aplicados. Los valores óptimos adoptados definitivamente serán aquellos que permitan que el rendimiento se mantenga constante en un amplio intervalo de los mismos.

Para finalizar se incluye un ejemplo numérico de cálculo de una bomba citado en [2] , en donde puede apreciarse la variación de sus dimensiones al ir modificando el rendimiento hasta llegar al máximo.

	Diseño para $\beta_2 = 26°$ (Pfleiderer)	Diseño para $\beta_2 = 30°$	Diseño óptimo $\beta_2 = 62°$
φ	0,0161	0,020	0,021
Ψ	1,0	1,100	1,315
$D=d_1/d_2$	0,468	0,443	0,48
d_1 mm	120	108	107
d_2 mm	256	243	223
b_1/d_2	0,082	0,079	0,086
b_2/d_2	0,045	0,035	0,040
b_1 mm	21,0	19,2	20,9
b_2 mm	11,5	8,5	9,7
β_1	16,3°	19,9°	19,9°
β_2	26°	30°	62°
Z	7	10	14
η_h	0,83	0,893	0,885
η_s	0,7115	0,783	0,814
u_2	19,4	18,5	16,9
μ	0,755	0,815	0,80

En la primera columna se presentan los resultados obtenidos por Pfleiderer hará cincuenta años al diseñar una bomba que debía funcionar según las condiciones $\dot{V}$ = 0,016 m^3/s, H = 19,2 m (se trata de la altura de elevación de una de las 5 células idénticas de que consta la bomba) y n = 1.450 rpm. Las otras dos columnas contiene los valores propuestos por Bolte [2] para la misma bomba. ¿A qué es debida esta variación en las apreciaciones de uno y otro autor si ambos emplean básicamente el mismo modelo matemático?. Simplemente a que Pfleiderer adopta un valor de η_h que supone constante, y no se plantea la posibilidad de que existan valores supériores del rendimiento, para otras combinaciones de d_1, d_2, b_1, b_2, β_1, β_2, Z, y Ψ. En cambio Bolte parte de la idea de que el rendimiento es hasta cierto punto mejorable reduciendo en lo posible las pérdidas y eligiendo las dimensiones más apropiadas.

En esto consiste la optimización en turbomáquinas.

NOMENCLARUTA

a_s	celeridad del sonido.
A	superficie
b, b_1, b_2	ancho del redete $b_m = (b_1+b_2)/2$
b	función n° de Reynolds
c	Velocidad absoluta
c_f	coeficiente de resistencia
I_1, I_2	parámetros
k	exponente politrópico
$k_1 \ldots k_6 k_{Di}$	funciones de ν
l	longitud álabe
$\dot{m}$, $\dot{m}_{sp}$	Flujo másico
M_{au2}	n° de Mach
M	momento
n_q	velocidad específica
n	n° de vueltas
p, p_1, p_2	presión
Δp	diferencia de presión
$\Delta P_{La1,2}$	pérdida de carga en el rodete
ΔP_{gv}	pérdida de presión total
r_K	radio aguas muertas en el núcleo
r_1, r_2, r_i, r_a	radios
R	constante de los gases
s	coordenada tangencial del rodete
T	temperatura
t	separación entre álabes
u	velocidad relativa
U_δ	velocidad relativa en la capa límite
$\dot{V}$, $\dot{V}_{sp}$	caudal
v_{sp}	volumen específico aire fugas
w	velocidad relativa
x, y, z	coordenadas
d_1, d_2	diámetros del rodete
$D = d_1/d_2$	
f_1	función de β_2
f_1, f_2	coeficiente de reducción sección
f_{sp}, F_1, F_2	superficie
H	altura de elevación
Z	n° de álabes
Z_{sp}	n° de anillos del laberinto (pérdida por fugas)
α	ángulo velocidad absoluta
β, β_1, β_2	ángulo velocidad relativa
δ_I, δ_{II}	espesor capa límite
δ_{sp}	Intersticio fugas caudal
ε_{La}, ε_{Le}	coeficientes pérdida de carga
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_{vD}$	coeficientes pérdida de carga
η	rendimiento
η_h	rendimiento fluidodinámico (hidráulico)
η_s	rendimiento interno
η_{sp}	rendimiento volumétrico
μ_{sp}	coeficiente de reducción de caudal
ν	viscosidad cinemática
ρ	densidad
ϕ	función
φ	coeficiente de caudal
Ψ, Ψ_{th}	id. de presión
$\Delta\Psi_{La1}$	pérdida entrada rodete
$\Delta\Psi_{La2}$	id. rodete
$\Delta\Psi_{Le}$	id. rueda directriz
$\Delta\Psi_D$	difusor
ω	velocidad angular

BIBLIOGRAFIA

[1] Walter Bolte "Ein Verfahren zur Abschätzung des Wirkungsgrades von Radialverdichtern" BWK 19(1967)8 p. 381-390.

[2] Walter Bolte "Ein Verfahren zur Abschätzung der Haupt-Abmessungen und des Wirkungsgrades von Kreiselpumpen" BWK 23(1971)11 p. 467-473.

[3] Walter Bolte "Zur Optimierung von Radialverdichtern" BWK 26(1974)6 p. 257-261.

[4] Walter Bolte "Zur Berechnung der reibungsbehafteten Strömung in der Laufrädern von Radialpumpen" Fortschritt-Berichte VDI-Z Reihe 7, Nr. 38(1975).

[5] Walter Bolte "Zur Optimierung von Radialpumpen" Fortschritt-Berichte VDI-Z Reihe 7, Nr. 46(1978).

[6] G. Flügel "Der optimal erreichbare Wirkungsgrad von Strömungsmaschinen" Z-VDI 96(1954) 22 p. 752-755.

[7] H. Hausenblas "Zur optimalen Auslegung von einstufigen Axialgeblasen" Konstruktion 23 (1971)4 p. 143-145.

[8] H. Linneken "Optimale Stufendruchkverhälthisse zwischen gekühlter Vardichter" Konstruktion 17(1965)5 p. 174-176.

[9] H. Marcinowski "Optimalprobleme bei Axialventilatoren" Voith Forschung und Konstruktion 5(1959) p. 3.1-3.27.

[10] Y. R. Reddy, S. Kar "Optimum Vane Number and Angle of Centrifugal Pumps with Logarithmic Vanes" ASME J. of Basic Engineering (1971) p. 411-425.

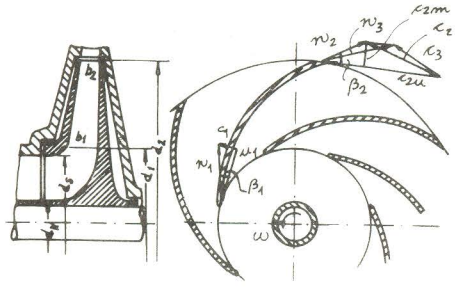
[11] J. Schröder "Abschätzung der Strömungsverluste im Optimalpunkt einer Radialverdichterstufe mit Hilfe von Dissipationskoeffizienten" VDI-Berichte 193(1973) p. 51-61.

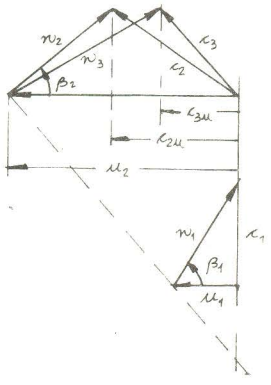
[12] D. Zweifel "Die Frage der optimalen Schaufelteilung bei Beschauflungen von Turbomaschinen, insbasonders bei grosser Umlenkung in den Schaufelreinhen" BBMitteilungen (1945) Dezember p. 436-444.

Cuadro nº 1

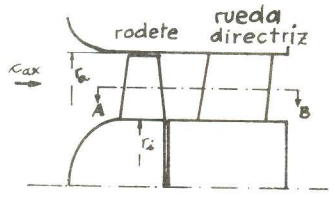
Geometría y Cinemática

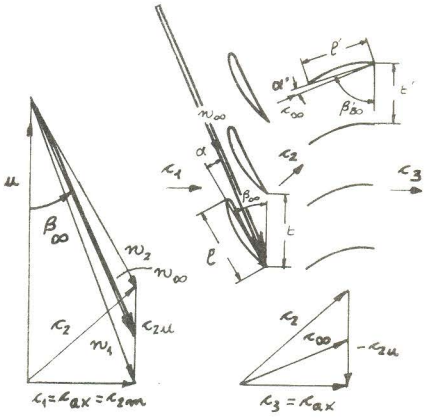
Máquinas radiales





Máquinas axiales





$\dot V = \varphi \frac{\pi}{4} d_2^2 u_2$					$\dot V = \varphi \pi r_a^2 u_a$			
$c_0 = \frac{\dot V}{\pi d_1 b_1} = \frac{\varphi u_2}{\Delta D^2 b_1/d_1}$ —	$c_1 = u_1 \operatorname{tg}\beta_1 = f_1 c_0$ —	$c_{2m} = \lambda u_2 = 0{,}9\, c_{1m} = f_2 c_{3m}$ $c_{2u} = (1 - \lambda \operatorname{cotg}\beta_2) u_2 = \psi_{th\infty} u_2/2$	$c_{3m} = \frac{\dot V}{\pi d_2 b_2} = \frac{\varphi u_2}{\Delta b_2/d_2}$ $c_{3u} = \mu c_{2u}$	$c_\Delta = c_0$ —	$c_{ax} = \frac{\dot V}{\pi (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{\varphi u_a}{1 - \nu^2}$ —	$c_{2m} = c_{ax}$ $c_{2u} = \psi_{th} u_2/2 = c_u$	$c_3 = c_{ax}$ c_u id	$c_a = \frac{\dot V}{\pi (r_a^2 - r_i^2)}$ —
$u_1 = \frac{\pi n d_1}{60}$ $w_0 = \frac{u_1}{\cos\beta_0}$	$u_1 = \frac{\pi n d_1}{60}$ $w_1 = \frac{u_1}{\cos\beta_1}$	$u_2 = \frac{\pi n d_2}{60}$ $w_2 = \frac{c_{2m}}{\operatorname{sen}\beta_2}$	$u_2 = \frac{\pi n d_2}{60}$ $w_3 = \frac{c_{3m}}{\operatorname{sen}\beta_3}$	—	$u_1 = \frac{\pi n d_1}{60}$	$u_2 = \frac{\pi n d}{60}$ $w_\infty^2 = c_{ax}^2 + \left(u - \frac{c_u}{2}\right)^2$	$c_{\infty}^2 = c_{ax}^2 + \left(\frac{c_u}{2}\right)^2$	—

$$w_m = \frac{w_1 + w_2}{2} = \left(\frac{D}{2\lambda \cos\beta_1} + \frac{1}{2 \operatorname{sen}\beta_2} \right) \lambda u_2$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{c_1}{u_1} = \frac{f_1 c_0}{u_1} = \frac{f_1 \dot V}{u_1 \pi d_1 b_1} = \frac{f_1 \varphi}{\Delta D^3 b_1/d_1} \rightarrow \frac{b_1}{d_1} = \frac{f_1 \varphi}{\Delta D^3 \operatorname{tg}\beta_1}$$

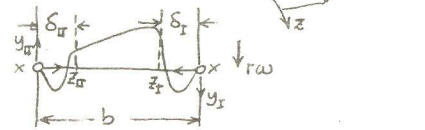
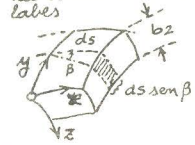
$$\lambda = \frac{c_{2m}}{u_2} = \frac{f_2 c_{3m}}{u_2} = \frac{f_2 \dot V}{u_2 \pi d_2 b_2} = \frac{f_2 \varphi}{b_2/d_2} \rightarrow \frac{b_2}{d_2} = \frac{f_2 \varphi}{\Delta \lambda}$$

$$f_1 = \frac{t_1}{t_1 - \sigma_1} \simeq 1 + 0{,}3\, D \qquad f_2 = \frac{t_2}{t_2 - \sigma_2} \simeq 1 + 0{,}3\, D^2$$

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{2}{z} \frac{\operatorname{sen}\beta_2}{1 - D}}$$

$$z = \frac{5\pi \operatorname{sen}\beta_m}{\ln 1/D} \quad ; \quad \beta_m = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$\frac{\varphi}{\psi_{th}} = \frac{1 - \nu^2}{2\nu}$$

Cuadro nº2	Bolte BWK 19(1967) 8 p. 381-390, [1]	Bolte BWK 23(1971) 11 p. 467-473 [2]	Bolte F.B.VDI-Z nº 46, 1978 [5]	Hausenblas K. 23(1971) 4 p. 143-145; [7] Marcinowski, Voith F-K 5(1959) p. 5-1-5-27; [9]
Entrada del rodete $\Delta\psi_{La1} =$ $= \frac{\Delta p_{La1}}{\frac{\rho}{2}u_2^2}$	$= \zeta_1 \left(\frac{c_1}{u_2}\right)^2$ $\frac{c_1}{u_2} = \frac{\dot V}{\pi d_1 b_1 u_2} = \frac{\varphi}{A D^2 b_1/d_1}$; $D = d_1/d_2$ $\frac{c_1}{u_1} = tg\,\beta_1$ $\frac{b_1}{d_1} = 0{,}15 \div 0{,}2 \rightarrow 0{,}18$ $\beta_1 = 30°$ $\zeta_1 = 0{,}129$	$= \zeta_1 \left(\frac{c_0}{u_2}\right)^2$ $\frac{c_0}{u_2} = \frac{\dot V}{\pi d_1 b_1 u_2} = \frac{\varphi}{A D^2 b_1/d_1}$ $\frac{c_0}{u_1} = tg\,\beta_0$ $\frac{b_1}{d_1} = 0{,}226\left[1 - 0{,}81\left(1 - \frac{10}{9}D\right)^2\right]$ $\beta_0 = 17{,}5°$ $\zeta_1 = 0{,}13$	$= \zeta_1 \left(\frac{c_0}{u_2}\right)^2$ $\frac{c_0}{u_2} = \frac{\dot V}{\pi d_1 b_1 u_2} = \frac{\varphi}{A D^2 b_1/d_1}$ $\frac{c_0}{u_1} = tg\,\beta_0$ $\frac{b_1}{d_1} = 0{,}1964$ $\beta_0 = 19{,}5°$ $\zeta_1 = 0{,}4$	$\frac{\Delta\psi_{La}}{\psi_{th}} = \frac{W w_\infty}{P_u u} = \varepsilon_{La}\frac{w_\infty^2}{u c_{ax}} =$ $= \zeta_{vLa}(r) = \varepsilon_{La}\left(\frac{c_{ax}}{u} + \frac{u}{c_{ax}} - \frac{c_a}{c_{ax}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{c_u}{u}\cdot\frac{c_u}{c_{ax}}\right)$ $\zeta_{vLa} = \frac{\int_{r_i}^{r_a}\zeta_{vLa}(r)\,d(\pi r^2)}{\pi(r_a^2 - r_i^2)} =$ $= \varepsilon_{La}\left(k_1\varphi + \frac{k_2}{\varphi} - k_3\frac{\psi_{th}}{\varphi} + k_4\frac{\psi_{th}^2}{\varphi}\right)$ $\varepsilon_{La} = \varepsilon_0 + \frac{k}{1-\nu}$ $k_1 = \frac{2}{1+\nu-\nu^2-\nu^3}$ $k_2 = \frac{2}{3}(1-\nu^3)$ $k_3 = 1-\nu$ $k_4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ $k_6 = \frac{1}{(1-\nu^2)^2}$ $k_{Di} = \frac{1}{\left[\left(r_4/r_3\right)^2 - \nu^2\right]^2}$ (A): rodete (B): rueda directriz (C): difusor
Rodete $\Delta\psi_{La2} =$	$= \frac{W w_m}{\dot V_2 \rho \frac{u_2^2}{2}}$ $W = c_f \frac{\rho}{2} w_m^2 A f_1(\beta_2)$ $c_f = 0{,}004$ $f_1(\beta_2)$ mínimo para $\beta_2 = 41°$ $w_m = \frac{w_1+w_2}{2} = w_m(D, \beta_2, \varphi)$ $b_m = \frac{b_1+b_2}{2} = b_m(D, \beta_2, \varphi)$ $\beta_m = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ $\bar z = \frac{5\pi\,sen\,\beta_m}{ln\,1/D} = \bar z(D, \beta_2)$ $A = 2\bar z \ell b_m$ (rozamiento álabes, caras presión y succión) $+ 2\frac{\pi}{4}d_2^2(1-D^2)$ (rozamiento DISCOS del canal entre álabes)	$= \frac{W w_m}{\dot V \rho \frac{u_2^2}{2}}$ $W = c_f \frac{\rho}{2} w_m^2 A f_1(\beta_2)$ $c_f = 0{,}0045$ $f_1(\beta_2)$ mínimo para $\beta_2 = 41°$ $w_m = \frac{w_1+w_2}{2}$ $b_m = \frac{b_1+b_2}{2}$ $\beta_m = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ $\bar z = \frac{5\pi\,sen\,\beta_m}{ln\,1/D}$ $A = 2\bar z \ell b_m + 2\frac{\pi}{4}d_2^2(1-D^2)$	$= \frac{\int_0^{\delta_3} w\,\Delta p_{gv}\,dF_1}{\dot V \rho u_2^2/2}$ (rozamiento álabes, caras presión y succión) $+ \frac{\int_0^{\delta_I;\,\delta_{II}} \frac{\rho}{2}(U_\delta^2 - w^2)\,w\,dF_2}{\dot V \rho u_2^2/2}$ (rozamiento DISCOS del canal entre álabes) $dF_1 = b_2\,sen\,\beta\,ds$ $dF_2 = t\,sen\,\beta_3\,dz$   	
Rueda directriz $\Delta\psi_{Le}$	$\Delta\psi_{Le} = \Delta\psi_D$	$\Delta\psi_{Le} = \Delta\psi_D$	$\Delta\psi_{Le} = \Delta\psi_D$	$\frac{\Delta\psi_{Le}}{\psi_{th}} = \frac{W' c_\infty}{P_u' u} = \varepsilon_{Le}\frac{c_\infty^2}{u c_{ax}} =$ $= \zeta_{vLe}(r) = \varepsilon_{Le}\left(\frac{c_{ax}}{u} + \frac{1}{4}\frac{c_u}{u}\frac{c_u}{c_{ax}}\right)$ $\zeta_{vLe} = \frac{\int_{r_i}^{r_a}\zeta_{vLe}(r)\,d(\pi r^2)}{\pi(r_a^2 - r_i^2)} = \varepsilon_{Le}\left(k_1\varphi + k_4\frac{\psi_{th}^2}{\varphi}\right)$
Difusor $\Delta\psi_D$	$= \zeta_3 \frac{c_3^2 - c_4^2}{u_2^2} = \zeta_3\left[\lambda^2 + \mu^2(1 - \lambda cot\beta_2)^2 - 1{,}93\frac{\varphi^2}{D^4}\right]$ $\zeta_3 = 0{,}25$ $\lambda = c_{2m}/u_2$; $\mu = c_{3u}/c_{2u}$	$\zeta_3 \frac{c_3^2 - c_4^2}{u_2^2}$ $\zeta_3 = 0{,}20 + \frac{1}{60}\left(\frac{c_3}{c_4} - 1\right)$	$\zeta_3 \left(\frac{c_3}{u_2}\right)^2$ $\zeta_3 = \frac{1}{1 - \frac{\delta_I + \delta_{II}}{b_2}}\left[0{,}16 + 0{,}071\left(\frac{c_3}{c_4} - 2{,}1\right)^{0{,}348}\right]$	$\zeta_{vD} = (1 - \eta_{Di})\frac{c_3^2 - c_4^2}{u_2^2} =$ $= (1 - \eta_{Di})\varphi^2(k_6 - k_{Di})$
η	$\eta_s = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{sp}\eta_h} + \zeta_r} = \eta_s(D, \beta_2, \varphi, \psi)$ $\eta_h = 1 - (\Delta\psi_{La1} + \Delta\psi_{La2} + \Delta\psi_{Le})$	id	id	$\eta_h = 1 - (\zeta_{vLa} + \zeta_{vLe} + \zeta_{vD}) =$ $= \eta_h(\nu, \psi)$

Ejemplo de W.Bolte [1]
(Compresor radial)

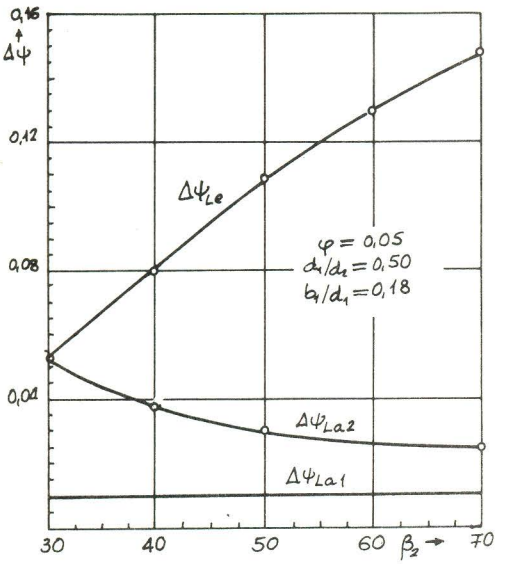


Fig. 1a

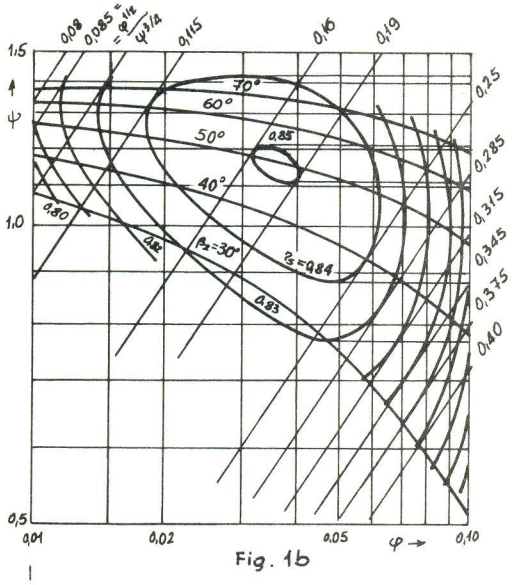


Fig. 1b

Ejemplo de W.Bolte [2]
(Bomba radial)

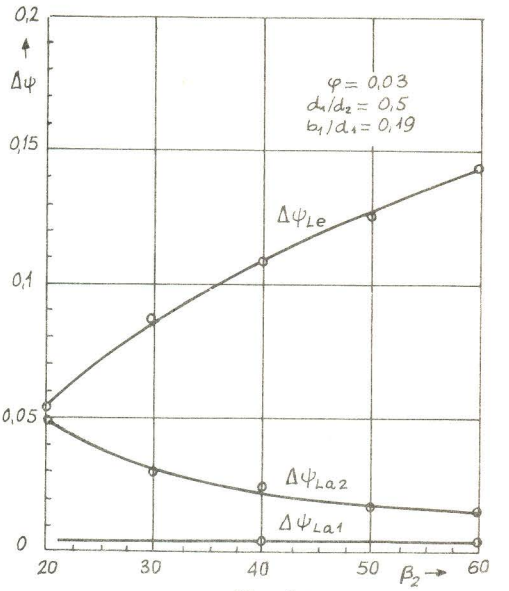


Fig. 2a

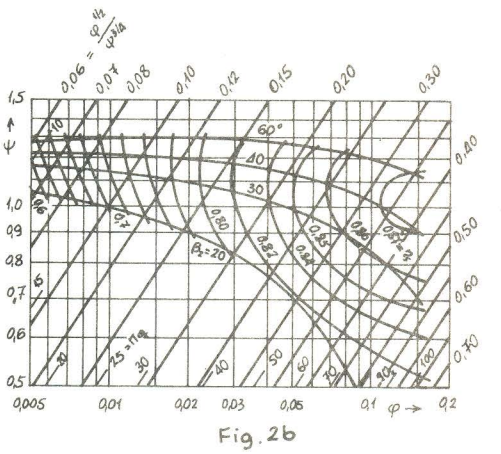


Fig. 2b

INTERSECCION

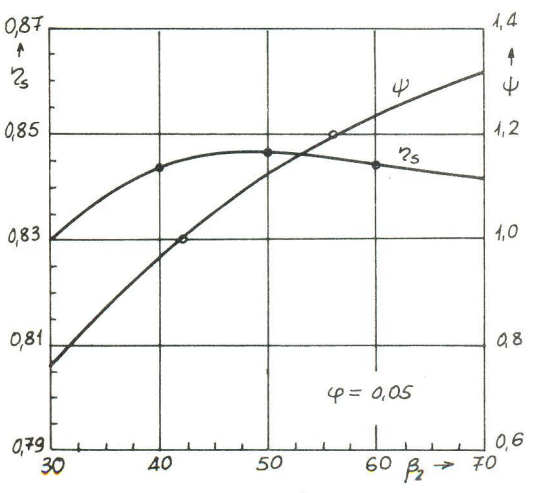


Fig. 1c

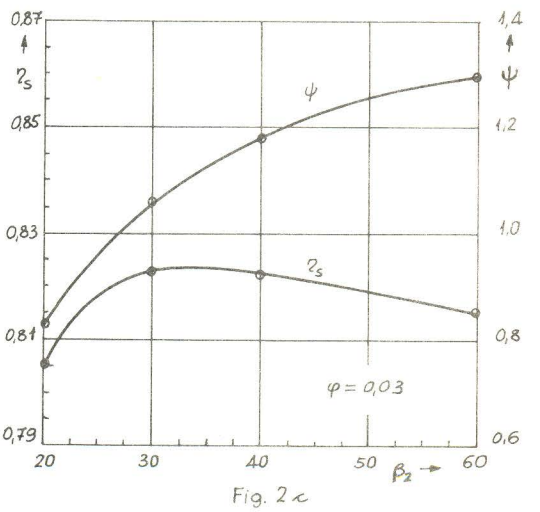


Fig. 2c

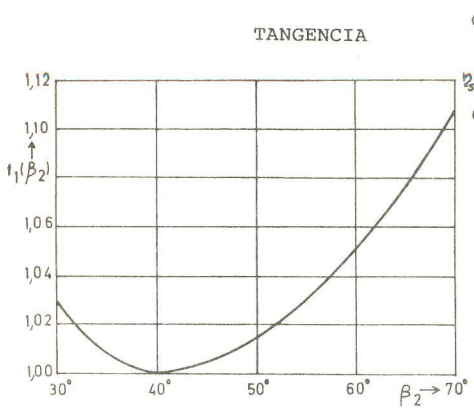


Fig. 1c1

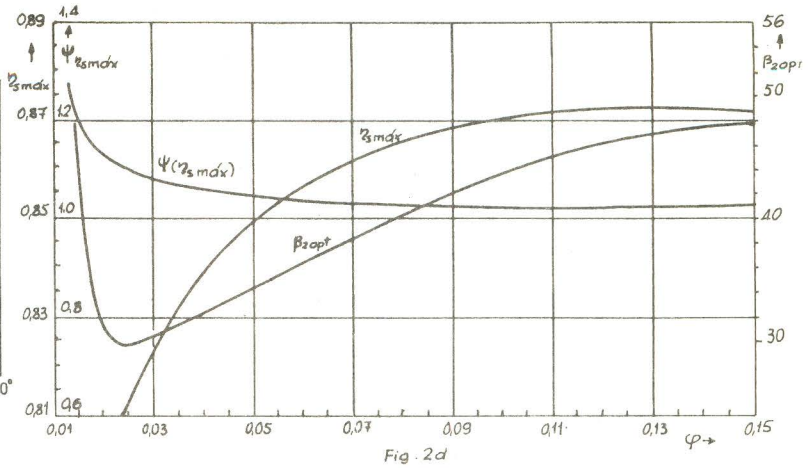


Fig. 2d

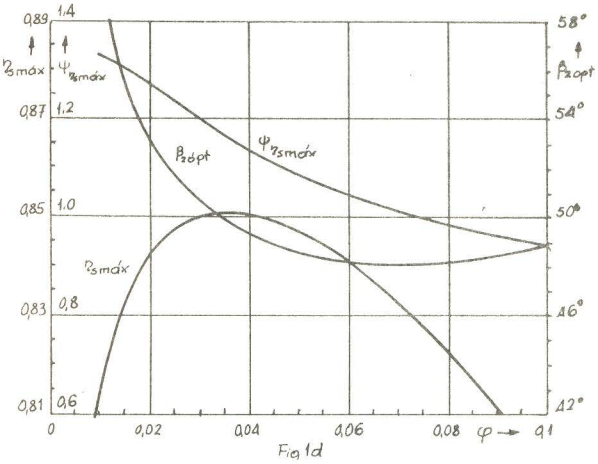


Fig 1d

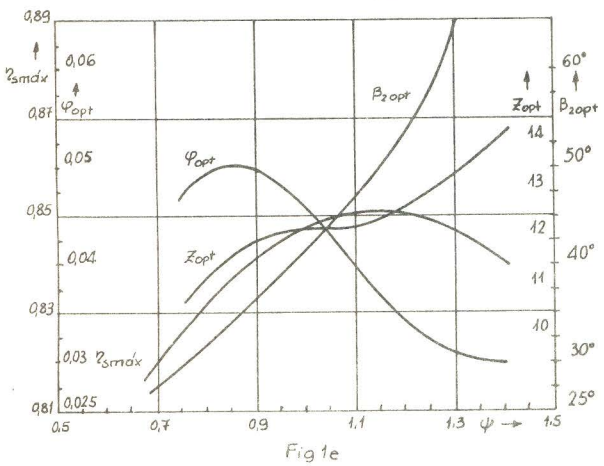


Fig 1e

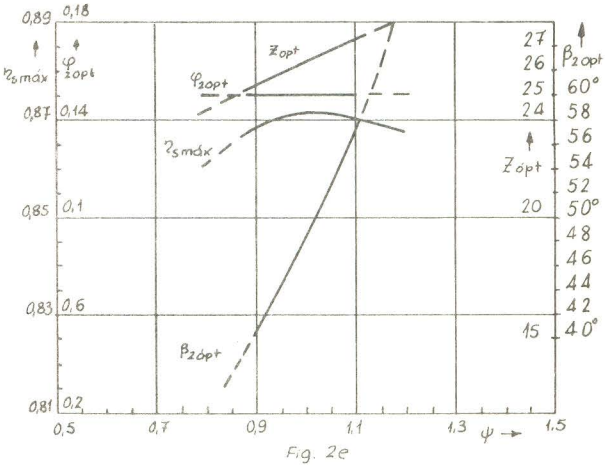


Fig. 2e

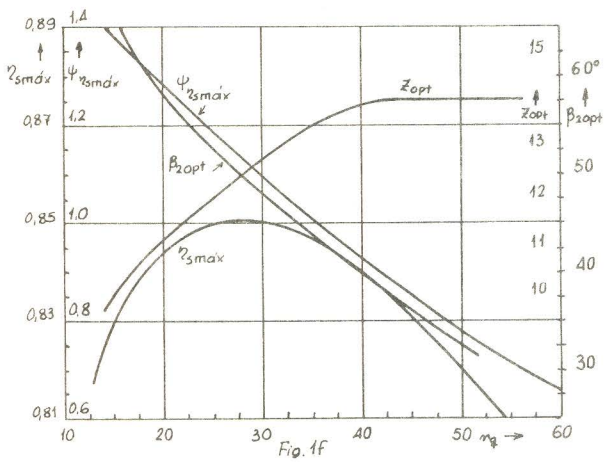


Fig. 1f

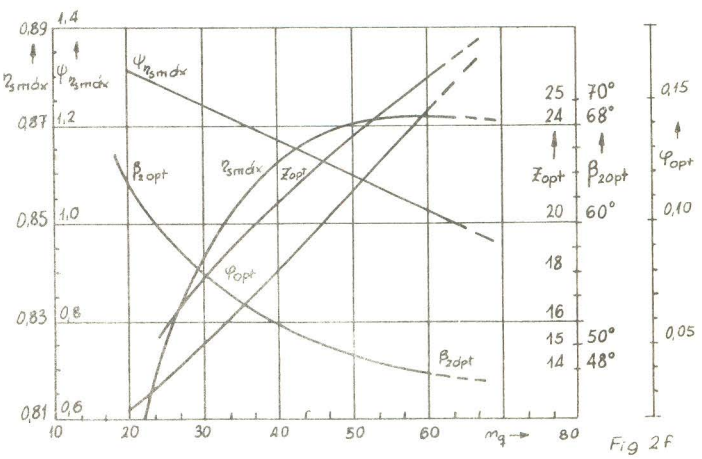


Fig 2f

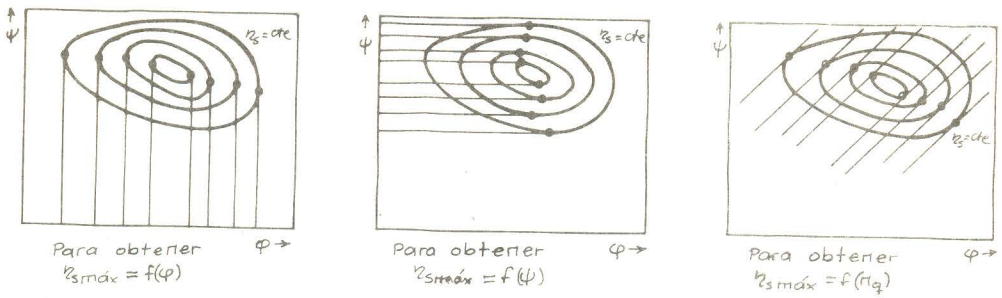


Fig. 1g

Ejemplo de W.Bolte [5]
(Bomba radial)

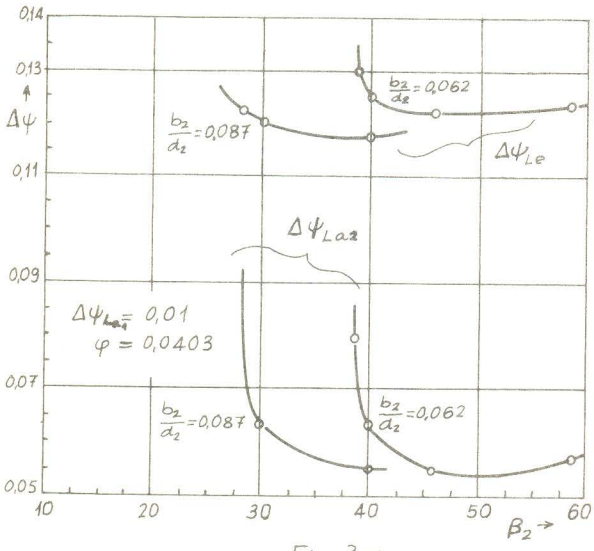


Fig. 3a

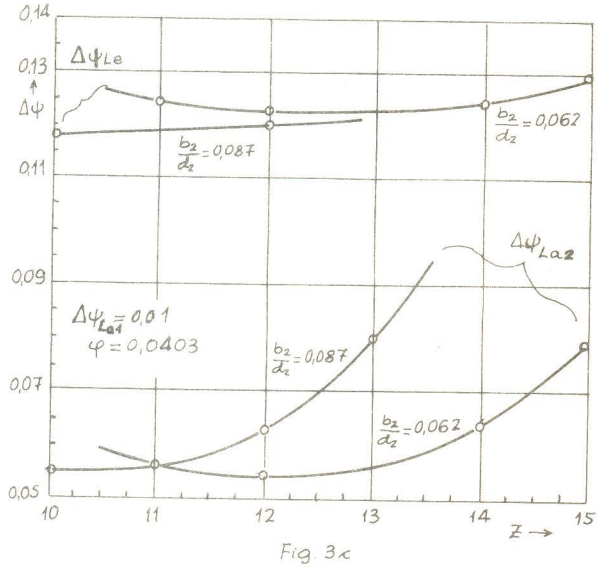


Fig. 3c

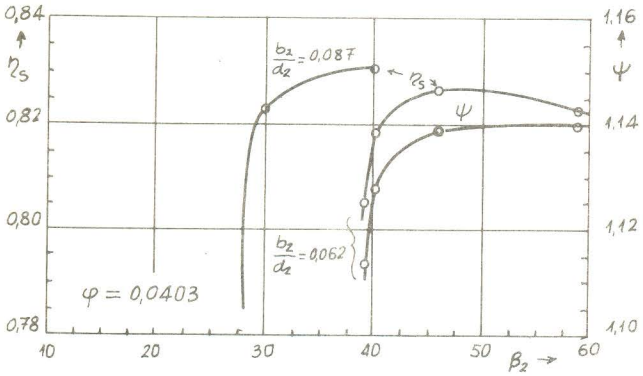


Fig. 3b

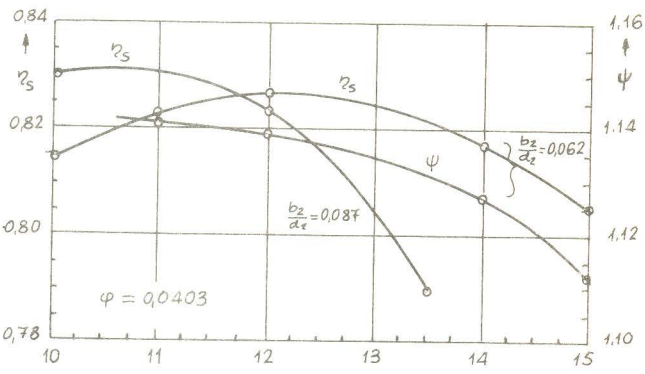


Fig. 3d

Ejemplo de H.Hausenblas [7]
(Ventilador axial)

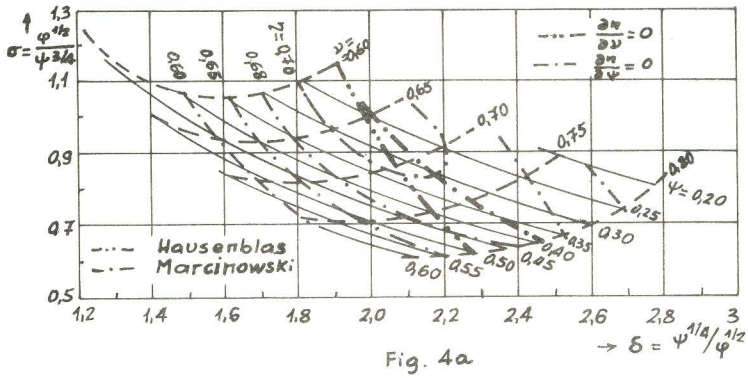


Fig. 4a

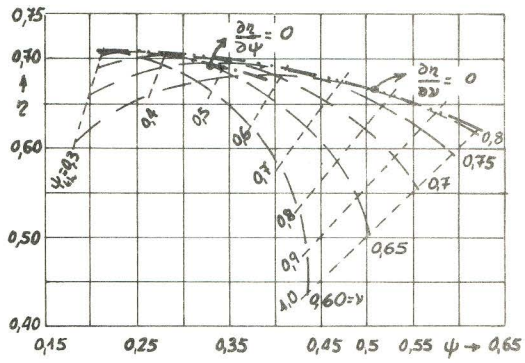


Fig. 4b

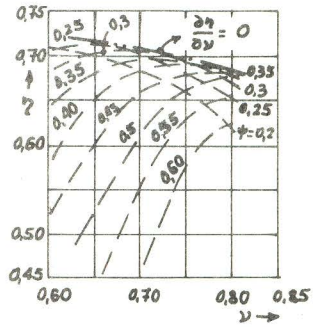


Fig. 4c

BIBLIOGRAFIA

[1] Walter Bolte "Ein Verfahren zur Abschätzung des Wirkungsgrades von Radialverdichtern" BWK 19(1967)8 p. 381-390.

[2] Walter Bolte "Ein Verfahren zur Abschätzung der Haupt-Abmessungen und des Wirkungsgrades von Kreiselpumpen BWK 23(1971)11 p. 467-473.

[3] Walter Bolte "Zur Optimierung von Radialverdichtern" BWK 26(1974)6 p. 257-261.

[4] Walter Bolte "Zur Verechnung der reibungsbehafteten Strömung in der Laufradern von Radialpumpen" Fortschritt-Berichte VDI-Z Reihe 7, Nr. 38 (1975).

[5] Walter Bolte "Zur Optimierung von Radialpumpen" Fortschritt-Berichte VDI-Z Reihe 7, Nr. 46(1978)

[6] G. Flügel "Der optimal erreichbare Wirkungsgrad von Strömungsmaschinen" Z-VDI 96(1.954)22 p. - 752-755.

[7] H. Hausenblas "Zur optimalen Auslegung von einstufigen Axialgebläsen" Konstruktion 23(1.971)4 p. 143-145.

[8] H. Linneken "Optimale Stufendurckverhaltnisse zwischengekühlter Verdichter" Konstruktion 17 (1965)5 p. 174-176.

[9] H. Marcinowski "Optimalprobleme bei Axialventilatoren" Voith-Forschung und Konstruktion 5 (1959) p. 3.1-3.27.

[10] Y.R. Reddy, S. Kar "Optimum Vane Number and Angle of Centrifugal Pumps with Logarithmic Vanes" ASME J. of Basic Engineering (1971) p. 411-425.

[11] J. Schröder "Abschätzung der Strömungsverluste im Optimalpunkt einer Radialverdichterstufe mit Hilfe von Dissipationskoeffizienten" VDI-Berichte 193(1.973) p. 51-61.

[12] O. Zweifel "Die Frage der optimalen Schaufelteilung bei Beschauflungen von Turbomaschinen, insbesondere bei grosser Umlenkung in den Schaufelreihen" BBMitteilungen (1945) Dezember p. 436-44.