APORTACION AL ESTUDIO DE CONSTANTES DE TIEMPO EN REDES ELECTRICAS

Quaderns d'enginyeria
1(1979)3 p.223-231

por: Miguel Salichs Vivancos*

RESUMEN

Mediante el concepto de norma de una matriz asociada a una norma de vector en los apartados (1) y (3) se acotan las constantes de tiempo en circuitos de tipo R-L y R-C disipativos. Su interés reside en la determinación práctica de la duración de cualquier regimen transitorio ó de descarga (aproximadamente 4 veces la constante de tiempo mayor). La formulación se ha efectuado a través del método de los bucles, no existiendo dificultad alguna en hacerlo a través del método de pares de nudos.

Conjuntamente con la acotación de la constante de tiempo mayor, el apartado (2) pone de manifiesto la relación de tal valor con el cociente de potencia reactiva y activa en redes trabajando en c.a. senoidal y regimen permanete.

En el apartado (4) se extiende el estudio a redes R-L-C donde condiciones suficientes para que tales redes no den lugar a oscilaciones en la respuesta y acotando en tales casos la mayor constante de tiempo; se dan además condiciones suficientes para la forzosa existencia de oscilaciones, dando asimismo la mayor costante de tiempo así como acotaciones de las frecuencias de oscilación propias de la red.

SUMMARY

In parts I and III the time constants concerning dissipative R-L and R-C circuits are bounded by means of the concept of associated matrix norm to a vector norm. Its interest rests on the practical determination of any transient or discharge state duration (about four times the largest time constant). The formulation has been carried out through the mesh current method although there is no difficulty in doing so through the cut-set method.

In part II the bound of the largest time constant is exposed as well as the relation between its value and the ratio of the reactive power to the active power for networks assuming sinusoidal a. c. and steady state conditions.

In part IV the study is extended to R-L-C circuits. Sufficient conditions are given in order that these networks do not bring about oscillations during the response and in such cases the largest time constant is bounded. Sufficient conditions for the needful oscillations existence, the largest time constant, and the bounds of the oscillation frequencies proper to the network are given.

* Profesor adjunto grupo 21 ETSIIB

1 Constantes de tiempo en circuitos R-L disipativos.

De acuerdo con el método de los bucles y la transformada de Laplace, se sabe que la determinación operacional de las corrientes de bucle se efectúa con,

$$(R + SL)\ I = E$$

en donde

R (bxb) es la matríz simétrica de resistencias de bucle; en circuitos disipativos es definida positiva.

L (bxb) es la matríz simétrica de inductancias de bucle; es semidefinida positiva, pudiendo adoptar la forma.

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con L_{11} (bxb) simétrica definida positiva (posibles acoplamientos magnéticos no perfectos).

I (bx1) es la matriz columna de corrientes operacionales de bucle.

E (bx1) es la matriz columna de ff. ee. mm. operacionales de bucle; eventualmente contiene las condiciones iniciales.

Al determinar las corrientes de bucle aparecerán en cada una de ellas sumandos de tipo, $P_{k-1}(t).\ \exp(-t/\tau)$ siendo $-\frac{1}{\tau}$ una raíz de la ecuación $|R+SL| = 0$ cuyo orden de multiplicidad es k y P_{k-1} un polinomio de grado k-1 en t. La duración de tales corrientes (transitorias) vendrá dada por los distintos valores de τ, interesando determinar ó acotar sus valores máximo (τ_M) y mínimo (τ_m).

Para ello precisamos del siguiente resultado,

- Si R y L son las matrices de bucle definidas anteriormente y λ es una raíz de $|R + SL| = 0$, entonces λ es real negativo (no nulo); τ_M = máximo valor propio de $(L_{11}R_{01}^{-1})$ y τ_m el mínimo valor propio de $(L_{11}\ R_{01}^{-1})$, siendo $R_{01} = R_{11} - R_{12}\ R_{22}^{-1}\ R_{21}$.

Para verlo obsérvese que si es $|R + \lambda L| = 0$ existirá un vector (v) tal que $(R+\lambda L)\ v = 0$ y $Lv \neq 0$ (si $Lv = 0$ sería $Rv = 0$ y $v = 0$ al ser R regular); consecuentemente,

$$v^*Rv + \lambda(v^*Lv) = 0$$

$$\lambda = -\frac{v^*Rv}{v^*Lv} \quad (Lv \neq 0)$$

Ello muestra que λ es real negativo no nulo. La constante de tiempo asociada a λ es,

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{v^*Lv}{v^*Rv} \qquad (Lv \neq 0)$$

Siendo v el vector definido anteriormente. Al ser $(R + \lambda\ L)\ v = 0$ y dada la forma especial de L es,

$$v^*Lv = v_1^*\ L_{11}\ v_1 \qquad (v_1 \neq 0)$$

$$R_{11}\ v_1 + R_{12}\ v_2 + \lambda\ L_{11}\ v_1 = 0$$

$$R_{21}\ v_1 + R_{22}\ v_2 = 0$$

Luego,

$$v^* Rv = v^*_1 (R_{11} v_1 + R_{12} v_2) + v^*_2 (R_{21} v_1 + R_{22} v_2) =$$

$$= v^*_1 \{R_{11} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}\} v_1 = v^*_1 R_{01} v_1$$

Las constantes de tiempo vendrán dadas por,

$$\tau = \frac{v^*_1 L_{11} v_1}{v^*_1 R_{01} v_1} \qquad (v_1 \neq 0)$$

En el apéndice se demuestra que,

$$\tau_M = \text{máximo valor propio } (L_{11} R_{01}^{-1}) \leq N (L_{11} R_{01}^{-1})$$

$$\tau_m = \text{mínimo valor propio } (L_{11} R_{01}^{-1}) \geq \frac{1}{N (R_{01} L_{11}^{-1})}$$

2 Relación entre τ_M y la potencia reactiva puesta en juego en regimen senoidal permanente.

En c.a. senoidal y regimen permanente, se notará por X a la matriz de reactancias de bucle ($X = \omega L$; ω = pulsación de la c. a.). Las potencias activa y reactiva vienen dadas por,

$$P = I^*RI \; ; \quad Q = I^*XI$$

siendo I el vector columna de corrientes de bucle dado por, $(R + j X) I = E$

La forma de $\underline{X}$ induce a la anterior ecuación a partirse en,

$$R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + j X_{11} I_1 = E_1$$

$$R_{22} I_1 + R_{22} I_2 = E_2$$

Consecuentemente, $Q = I^*_1 X_{11} I_1$

$$P = I^*_1 (R_{11} I_1 + R_{12} I_2) + (R_{21} I_1 + R_{22} I_2) =$$

$$= I^*_1 R_{01} I_1 + E^*_2 R_{22}^{-1} E_2$$

Así pués $tg\varphi$ de la red (proponemos tal concepto al cociente Q/R) viene acotado por,

$$tg\varphi = \frac{I^*_1 X_{11} I_1}{I^*_1 R_{01} I_1 + R_{22}^{-1} E_2} \leq \frac{I^*_1 X_{11} I_1}{I^*_1 R_{01} I_1} \leq \omega \tau_M$$

3 Constantes de tiempo en circuitos R-C disipativos.

Análogamente el caso anterior; el planteo de las ecuaciones de bucles es aquí,

$$(R + \frac{1}{S} \Gamma) I = E$$

en donde Γ (bxb) es simétrica semidefinida positiva; con una elección adecuada de bucles es,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con Γ_{11} $(b_1 \times b_1)$ definida positiva.

Mediante idéntico proceso se llega a,

$$\tau_M = \text{máximo valor propio } (R_{01}\ \Gamma_{11}^{-1}) \leq N\ (R_{01}\ \Gamma_{11}^{-1})$$

$$\tau_m = \text{mínimo valor propio } (R_{01}\ \Gamma_{11}^{-1}) \geq \frac{1}{N\ (\Gamma_{11} R_{01}^{-1})}$$

Análogamente, en regimen permanente senoidal, se llega a,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{I_1^*\ X_{11}\ I_2}{I_1^*\ R_{01}\ I_1 + E_2^*\ R_{22}^{-1}\ E_2} \leq \frac{I_1^*\ X_{11}\ I_2}{I_1^*\ R_{01}\ I_1} \leq$$

$$\leq \text{máximo valor propio } (X_{11}\ R_{01}^{-1}) \leq N\ (X_{11}\ R_{01}^{-1}) = \frac{1}{\omega} N\ (\Gamma_{11}\ R_{01}^{-1})$$

4 Constantes de tiempo en circuitos R-L-C.

Al igual que en los circuitos tratados anteriormente, la determinación de las corrientes operacionales de bucle se efectúa con,

$$(R + SL + \frac{1}{S}\Gamma) = E$$

interesando las raíces de, $\quad |R + SL + \frac{1}{S}\Gamma| = 0$

Se supondrá hasta el resto de este apartado que R, L, Γ (ó R, $X_L = \omega L$, $X_c = \frac{1}{\omega}\Gamma$) son definidas positivas. Sea S una raíz de la ecuación anterior; entonces existirá v $(v \neq 0)$ verificando a,

$$(R + SL + \frac{1}{S}\Gamma)\ v = 0$$

y en consecuencia, S satisface a la ecuación,

$$(v^*\ L\ v)\ S^2 + (v^*\ R\ v)\ S + (v^*\ \Gamma\ v) = 0$$

Así pues, las raíces S serán negativas ó complejas de parte real negativa. Las raíces de la ecuación son,

$$\frac{\omega}{2\ (v^*\ X_L\ v)} \left\{ -\ v^*\ R\ v \pm \sqrt{(v^*\ R\ v)^2 - 4\ (v^*\ X_L\ v)\ (v^*\ X_c\ v)} \right\} \qquad \text{(a)}$$

ó bien,

$$-\frac{\omega}{2}\ \frac{v^*\ R\ v}{v^*\ X_L v} \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\left(\frac{v^*\ R\ v}{v^*\ X_L v}\right)^2 - 4\ \frac{v^*\ X_c\ v}{v^*\ X_L\ v}} \qquad \text{(b)}$$

Es obvio que aquí no se conoce la naturaleza de las raíces (reales ó imaginarias); no obstante pueden darse las siguientes condiciones <u>suficientes</u>,

(S1) Para que la red no de lugar a oscilaciones en la respuesta (o sea, todas las raíces negativas) es suficiente que se verifique (a1) ó (b1).

$$\frac{1}{N^2\ (R^{-1})} \geq 4\ N\ (X_L)\ N\ (X_c) \qquad \text{(a1)}$$

(*)

$$\frac{1}{N^2\ (X_L\ R^{-1})} \geq 4\ N\ (X_c\ X_L^{-1}) \qquad \text{(b1)}$$

(*) No se crea que las dos condiciones son equivalentes. Véase ejemplo 2.

Tales condiciones son sencillas de deducir al imponer la condición en (a) ó (b) de ser el discriminante ≥ 0 para todo v. La máxima constante de tiempo se deduce sencillamente con,

$$\tau_M \leq \frac{1}{2\omega}\left\{ N(R)\,N(X_c^{-1}) + \sqrt{N^2(R)\,N^2(X_c^{-1}) - 4\,\frac{N(X_c^{-1})}{N(X_L^{-1})}}\right\} \qquad \text{(a 1-1)}$$

$$\tau_M \leq \frac{1}{2\omega}\left\{ N(RX_c^{-1}) + \sqrt{N^2(RX_c^{-1}) - \frac{4}{N(X_c\,X_L^{-1})}}\right\} \qquad \text{(b1 - 1)}$$

(S2) Habrá forzosamente oscilaciones en la respuesta si se verifica (a2) ó (b2)

$$\frac{4}{N(X_L^{-1})\,N(X_c^{-1})} > N^2(R) \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{4}{N(X_L\,X_c^{-1})} > N^2(RX_L^{-1}) \qquad \text{(b2)}$$

En este caso la mayor constante de tiempo se obtiene con la mayor inversa de la parte real de la raíz, luego

$$\tau_M \leq \frac{2}{\omega}\,N(X_L\,R^{-1})$$

Asimismo puede acotarse la máxima y mínima pulsación de las oscilaciones (Ω); es sencillo obtener,

$$\frac{1}{N^2(X_L)}\left\{\frac{4}{N(X_L^{-1})\,N(X_c^{-1})} - N^2(R)\right\} \leq \left(\frac{2\,\Omega}{\omega}\right)^2 \leq$$

$$\leq N^2(X_L^{-1})\left\{4\,N(X_L)\,N(X_c) - \frac{1}{N^2(R^{-1})}\right\} \qquad \text{(a2-1)}$$

$$\frac{4}{N(X_L X_c^{-1})} - N^2(R\,X_L^{-1}) \leq \left(\frac{2\,\Omega}{\omega}\right)^2 \leq 4\,N(X_c X_L^{-1}) - \frac{1}{N^2(X_L R^{-1})} \qquad \text{(b2-1)}$$

EJEMPLO 1

Las inductancias vienen determinadas por su reactancia a 50 Hz.

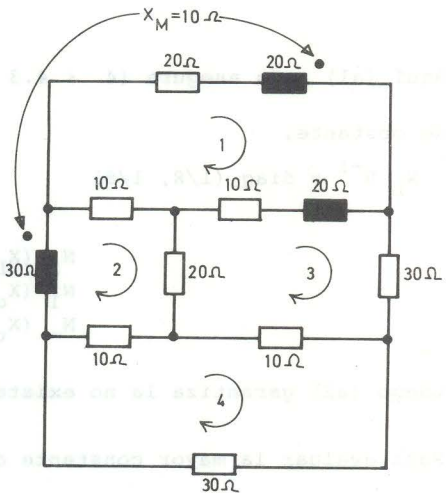

FIG. 1

Con las mallas indicadas se obtiene de forma sencilla,

$$R = \begin{bmatrix} 40 & -10 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -20 & -10 \\ -10 & -20 & 70 & -10 \\ 0 & -10 & -10 & 50 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 40 & 10 & -20 & 0 \\ 10 & 30 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{01} = \begin{bmatrix} 40 & -10 & -10 \\ -10 & 38 & -22 \\ -10 & -22 & 68 \end{bmatrix} \qquad X_{11} = \begin{bmatrix} 40 & 10 & -20 \\ 10 & 30 & 0 \\ -20 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,

$$X_{11}\, R_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}174 & 0{,}617 & 0{,}078 \\ 0{,}696 & 1{,}270 & 0{,}513 \\ -0{,}435 & 0{,}023 & 0{,}238 \end{bmatrix} \qquad R_{01}\, X_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1{,}50 \\ -2{,}68 & 2{,}16 & -3{,}78 \\ 3{,}92 & -2{,}04 & 7{,}32 \end{bmatrix}$$

En las tablas 1 y 2 se resumen los resultados obtenidos para el ejemplo propuesto.

TABLA 1

Matriz \ Norma	1	∞	cota-2
$X_{11}\, R_{01}^{-1}$	2,48	2,30	2,09
$R_{01}\, X_{11}^{-1}$	13,28	12,60	10,32

TABLA 2

Cte tiempo \ Norma	1	∞	cota-2
τ_M (ms)	7,89	7,33	6,65
τ_m (ms)	0,24	0,25	0,31

Los valores exactos dan (calculados con los valores propios de $X_{11}\, R_{01}^{-1}$) T_M = 5,74 ms; T_m = 0,33 ms

EJEMPLO 2

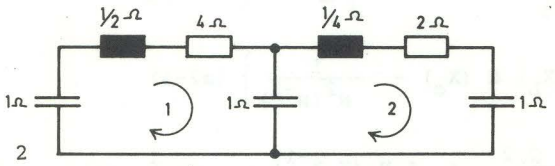

FIG. 2

(Reactancias a 50 Hz)

$R = \text{diag}\ (4,2)$; $R^{-1} = \text{diag}\ (1/4,\ 1/2)$

$X_L = \text{diag}\ (1/2, 1/4)$

$$X_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_1\ (R^{-1}) = N_\infty\ (R^{-L}) = 1/2$$
$$N_1\ (X_L) = N_\infty\ (X_L) = 1/2$$
$$N_1\ (X_c) = N_\infty\ (X_c) = 3$$

Aquí (a1) nada asegura (4 < 4.3 . 1/2)

No obstante,

$X_L\, R^{-1} = \text{diag}\ (1/8,\ 1/8)$ $\qquad X_c\, X_L^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$$N_1\ (X_L\, R^{-1}) = N_\infty\ (X_L\, R^{-1}) = 1/8$$
$$N_1\ (X_c\, X_L^{-1}) = 10$$
$$N_\infty\ (X_c\, X_L^{-1}) = 12$$

Luego (a2) garantiza la no existencia de oscilaciones tanto para N_1 como N_∞ .

Para evaluar la mayor constante de tiempo, $\quad RX_c^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Luego,

$$N_1\ (RX_c^{-1}) = 4$$
$$N_\infty\ (RX_c^{-1}) = 10/3$$

Con la N_1,

$$\tau_M \leq \frac{1}{200\ \pi} \left\{ 4 + \sqrt{16 - 4/10} \right\} = 12{,}7\ .\ 10^{-3}\ \text{seg}$$

El valor exacto obtenido es $9{,}63 \cdot 10^{-3}$ seg

Ejemplo 3

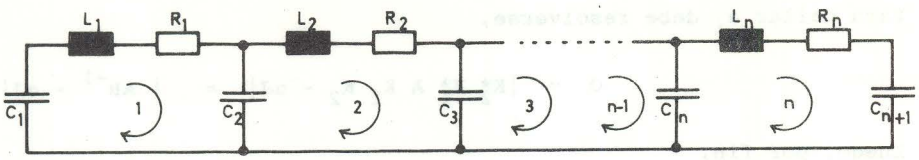

FIG. 3

Aquí es,

$$R = \text{diag}\ \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$$
$$L = \text{diag}\ \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & & & \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\frac{1}{C_n} \\ & & & -\frac{1}{C_n} & \frac{1}{C_n} + \frac{1}{C_{n+1}} \end{bmatrix}$$

Usando N_1 ó N_∞ es,

$$N\ (R^{-1}) = \frac{1}{\min\ \{R_i\}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$
$$N\ (L) = \max\ \{L_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$
$$N\ (\Gamma) = \max\ \{\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C_2}, \frac{1}{C_{n+1}} + \frac{2}{C_n}, \frac{2}{C_k} + \frac{2}{C_{k+1}}\} \qquad k=2,3,\ldots, n-1$$

Luego una condición para que la red no oscile es, (a1)

$$\min\ \{R_i^2\} \geq 4.\ \max\ \{L_i\}\ .\ \max\{\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C_2}, \frac{1}{C_{n+1}} + \frac{2}{C_n}, \frac{2}{C_k} + \frac{2}{C_{k+1}}\}$$

$$(i - 1,\ldots,n\ ;\ k = 2, \ldots, n-1)$$

APENDICE

(1) Supóngase que se desean determinar los valores máximo y mínimo del cociente $\frac{v^*Av}{v^*Bv}$ en donde A y B son simétricas definidas positivas.

Para ello se efectúa el cambio, $v = KW = (K_1\ K_2\ K_3)\ W$ siendo, K_1 = matriz ortogonal que diagonaliza a B; $K_1^*\ B\ K_1 = \text{diag}\ \{\beta_1\}$ con $\beta_i > 0$.

$K_2 = \text{diag}\ \{\beta_i^{-1/2}\}$, con ello, $K_2^*\ (K_1^*\ B\ K_1)\ K_2 = J$ (matríz unidad) K_3 = matríz ortogonal que diagonliza a la simétrica $K_2^*\ K_1^*\ AK_1\ K_2$; $K_3^*\ (K_2^*\ K_1^*\ AK_1\ K_2)\ K_3 = \text{diag}\{\alpha_i\}$ con $\alpha_i > 0$

Así resulta,

$$\frac{v^*\ A\ v}{v^*\ B\ v} = \frac{W^*.\text{diag}\{\alpha_i\}\ W}{W^*\ W}$$

En consecuencia, si $\alpha_M = \max\ (\alpha_i)$; $\alpha_m = \text{mín}\ (\alpha_i)$ es,

$$\alpha_m \leq \frac{v^* A v}{v^* B v} \leq \alpha_m$$

Para hallar α_i debe resolverse,

$$0 = |K_2^* K_1^* A K_1 K_2 - \alpha J| = |AB^{-1} - \alpha J|$$

Luego, por fin,

$$\alpha_M = \max \left(\frac{v^* A v}{v^* B v}\right) = \text{maximo valor propio } (AB^{-1})$$

$$\alpha_m = \text{mín} \left(\frac{v^* A v}{v^* B v}\right) = \text{mínimo valor propio } (AB^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\text{máximo valor propio } (B A^{-1})}$$

(2) Se llama norma de una matriz, N(T), asociada a una norma de vector a,

$$N(T) = \max \frac{N(Tv)}{N(v)} \quad (v \neq 0)$$

Siendo N (v) una norma de vector. Las mas corrientemente usadas (vectores) son,

$$N_1 (v) = \sum_i |v_i|$$

$$N_\infty (v) = \max_i |v_i|$$

$$N_2 (v) = \{\sum_i |v_i|^2\}^{1/2}$$

Todas ellas casos particulares de,

$$N_p (v) = \{\sum_i |v_i|^p\}^{1/p} \quad (p \geq 1)$$

La definición dada para la norma de una matriz asociada a la de un vector conduce inmediatemente a,

$$N_1 (T) = \max_i \sum_k |t_{ki}|$$

$$N_\infty (T) = \max_i \sum_k |t_{ik}|$$

$$N_2 (T) = \{\text{máx valor propio } (T^*T)\}^{1/2}$$

La última es de cálculo engorroso, por lo que se la substituye por una cota superior,

$$N_2 (T) \leq \{\text{traza } (T^*T)\}^{1/2} = \{\sum_{i,k} |t_{ik}|^2\}^{1/2}$$

Interesante resulta asimismo la determinación de una cota superior para N_p (T),

$$N_p^p (Tv) = \sum_i |\sum_j t_{ij} v_j|^p \leq \sum_i \{\sum_j |t_{ij} v_j|\}^p$$

poniendo $t_{i.}$ el vector cuyas componentes son la fila i de la matriz T y aplicando las desigualdades de Holder es, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$N_p^p (Tv) \leq \sum_i \{N_p (v) N_q (t_{i.})\}^p = N_p^p (v) \sum_i N_q^p (t_{i.})$$

luego,

$$N_p (T) \leq \{\sum_i N_q^p (t_{i.})\}^{1/p}$$

Para p=2 se obtiene la cota de N_2 (T) obtenida; si q = 1 resulta N_∞ (T) y si p = 1 se obtiene una cota para N_1(T).

De cara a las aplicaciones parece razonable intentar determinar N_p (T) escogiendo p de forma que la norma sea la más pequeña posible.

Es interesante observar que si λ es el máximo de las módulos de los valores propios de T, cualquier norma verifica a $N(T) \geq \lambda$; ello conduce (ver notación de apéndice (1)) a,

$$\frac{1}{N(BA^{-1})} \leq \frac{v^* A v}{v^* B v} \leq N(AB^{-1})$$

CONCLUSIONES

Se ha efectuado un estudio para determinar la duración de fenómenos transitorios en redes eléctricas. Asimismo en aquellas redes que dan lugar a posibles oscilaciones se dan cotas para la pulsación (ó frecuencia) de tales oscilaciones, que como es sabido juegan un papel importante en fenómenos de ruptura. Se juzga interesante la acotación de la potencia reactiva en los circuitos R-L y R-C, mas áun cuando tal resultado es totalmente independiente de la posible localización de fuentes en la red.

BIBLIOGRAFIA

- Balabanian , N.; Bickart, T.A.; Seshu, S. (1972): Teoría de redes eléctricas. Reverté .
- Faddeeva, V.N. (1967): Métodos de cálculo de álgebra lienal. Paraninfo.
- Gautmacher (1966): Theorie des matrices (1 y 2) Collectión Universitaire de Mathematiques.
- Korganof, A. (1967): Elements de theorie des matrices carreés et rectangles in analyse numerique (2). Dunod.