

# TEORIA ACUSTICA: APLICACION EN ALGUNOS PROBLEMAS DE LOS CONDUCTOS DE CAMBIO DE CARGA DE LOS MOTORES (1.ª PARTE)

Quaderns  
d'enginyeria

1(1979) 3 p.197-207

por: Javier Barragán Fernández.\*  
Joaquín Esteban Sardo.\*\*

## RESUMEN

Dado el gran interés que los problemas de flujos no-permanentes presentan, hemos planteado en este trabajo un resumen de la teoría ACUSTICA, también llamada de las ondas acústicas o elásticas.

Esta teoría es aplicable tanto a los fluidos incompresibles, (caso simplificado del golpe de ariete en tuberías), como a los fluidos compresibles para pequeñas variaciones de presión, (como sucede en ciertos problemas de la admisión de los motores de explosión).

La ecuación diferencial que rige ambos casos es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La única diferencia estriba en el valor de la celeridad  $c_0$ . Así para el agua dulce es del orden de 1.400 m/s y para el aire en condiciones normales 330 m/s.

Abordamos la resolución de la ecuación hiperbólica por el método de D'Alembert, mediante las ondas  $\alpha$  y  $\beta$ . Planteamos también las diversas condiciones de contorno en el caso de un conducto único por el que circula un gas en condiciones isentrópicas. Por último, a través del método de las IMPEDANCIAS, se generalizan los resultados de la ecuación diferencial al caso de conductos conectados en serie, paralelo o mixto. Acaba el trabajo presentando los resultados experimentales obtenidos sobre un motor Renault, (4 cilindros; 1.080 c.c.), a cerca del problema de resonancia de su sistema de admisión.

Se observa una total concordancia entre los resultados teóricos y los experimentales.

Como síntesis podemos afirmar que el "modelo" ACUSTICO es un modo sencillo y rápido para obtener los regímenes de adaptación del motor así como para el cálculo de fases y frecuencias del mismo.

## SUMMARY

Due to the increasing interest that unsteady flow problems present, a summary of the ACOUSTIC theory (also called sound or elastic waves (theory) has been stated.

This theory can be applied to incompressible fluids (such as the simplified case of water hammer in pipes) as well as to compressible fluids under small pressure changes (which happens in certain problems regarding petrol engine admission).

The differential equation applying to both situations is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

The only difference bears upon the celerity value  $c_0$ . Thus, it is about 1.400 m/s ( $\approx 4593$  ft/s) for fresh water and about 330 m/s ( $\approx 1083$  ft/s) for air at STP.

The solution of the hyperbolic equation is obtained by the D'Alembert method intervening the  $\alpha$  and  $\beta$  waves. The associated boundary conditions are established for a gas flowing through just one pipe under isentropic conditions. Finally, from the results of the differential equation and using the IMPEDANCES method, a generalization to compound and looping pipes is presented. The work finishes showing the experimental results obtained on a Renault engine - (four cylinders; 1080 c.c.) when the problem concerning to the resonance of its admission system is dealt with. As can be observed, there is a complete agreement between theoretic and experimental results.

As a synthesis, we can assert that the "ACOUSTIC model" provides an easy and swift way to achieve the adaptation rates of the engine and also to calculate its phases and frequencies.

\* Dr. Ingeniero Industrial. Profesor Agregado de la Universidad Politécnica de Barcelona.

\*\* Ingeniero Técnico Industrial. Técnico en Vibraciones de E.N.A.S.A.



## I - PLANTEO DEL PROBLEMA

### I-0 Introducción.

Se trata de analizar ciertos aspectos del problema de cambio de carga en los conductos de motores de explosión. Problema complejo por el gran número de variables que están en juego, así como por tratarse de regímenes no-permanentes. Estos se rigen por sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico, que obligan en muchos casos a su resolución por métodos de "paso a paso" (ver referencias bibliográficas -1- -2- -3-). Además, las condiciones de contorno de los mismos son variables con el tiempo, (piénsese en el proceso de apertura y cierre de una válvula), lo cual complica el proceso.

Con objeto de sistematizar el estudio y dada su complejidad, se realizan hipótesis simplificativas del problema, creando un modelo matemático sencillo, que recoja los aspectos más importantes del mismo. Una vez conocido con precisión y contrastado con los resultados experimentales se van añadiendo nuevos supuestos que generalizan dicho modelo.

### I-1 Hipótesis de partida.

Trabajando sobre un MONOCILINDRO se postulan las siguientes hipótesis:

- Medio continuo. (En él puede aplicarse el cálculo integral y diferencial).
- El fluido circulante es un gas perfecto y en evolución isentrópica. (Esto implica - que no haya intercambios de calor con el exterior, ni rozamientos).
- Régimen unidimensional: las propiedades físicas del gas son las mismas en todos los puntos de una sección normal al flujo y en el mismo instante.
- El conducto de cambio de carga se considera de sección cte.

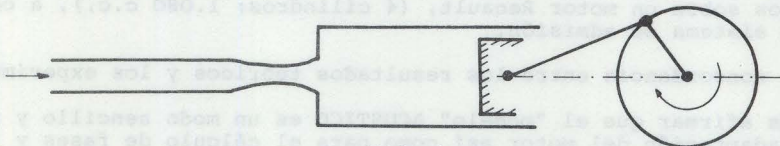


FIG. 1

### I-2 Incógnitas del problema.

Con las hipótesis anteriores, nos interesará conocer en cada punto (x) de la tubería y en cualquier instante (t), la presión (p), densidad ( $\rho$ ), temperatura (T) y velocidad (u) del fluido circulante.

Es decir, queremos conocer las funciones:

$$\left. \begin{aligned} p &= p(x, t) \\ \rho &= \rho(x, t) \\ T &= T(x, t) \end{aligned} \right\} \text{ que nos define el estado del fluido; y la}$$
$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, t) \end{aligned} \right\} \text{ que nos define su dinámica.}$$

### I-3 Ecuaciones de que se dispone

Para conocer las funciones que relacionan estas cuatro variables dependientes (p,  $\rho$ , T, u) con las independientes (x, t) disponemos de:

- a - Ecuación de estado.
- b - Ecuación de continuidad.



c - Ecuación de la cantidad de movimiento.

a) - La ecuación de estado para un gas perfecto:  $\frac{p}{\rho} = r T$  con  $r = \frac{R}{M}$  (siendo R la cte. de los gases perfectos y M la masa molecular del fluido), combinada con la del proceso isentrópico:  $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$  (siendo  $\gamma$  el cociente de los calores específicos), nos conduce a:

$$p = p_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} ; \quad \rho = \rho_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} ; \quad T = T_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^2 \quad (1)$$

siendo  $c = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$  la velocidad del sonido.

Es decir, conociendo la velocidad del sonido  $c$ , puede conocerse el estado del gas ( $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ) a partir de un estado de referencia ( $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $c_0$ ).

b) - La ecuación de continuidad nos suministra:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ó bien} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

recordando que la derivada total:

$$\frac{d*}{dt} = \frac{\partial *}{\partial t} + u \frac{\partial *}{\partial x}$$

c) - La ecuación de la cantidad de movimiento, que en un régimen sin intercambios de calor y sin rozamientos coincide con la de la energía, nos proporciona:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

En definitiva tenemos dos incógnitas ( $u$ ,  $c$ ) y dos ecuaciones para intentar conocerlas: las (2) y (3).

A base de tomar logaritmos en las expresiones (1) y haciendo intervenir la velocidad del sonido  $c$ , las ecuaciones (2) y (3) pueden transformarse en:

$$\frac{1}{c} \frac{dc}{dt} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4) \quad \frac{du}{dt} + \frac{2c}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo "hiperbólico", (ver referencia bibliográfica -4- y -5- ).

#### I-4 Ecuación diferencial para perturbaciones de débil amplitud.

Que las perturbaciones sean de débil amplitud quiere decir, que por un lado  $c$  varía poco respecto a su valor de referencia  $c_0$  y que  $u$  es muy pequeño al lado de  $c$ . Por tanto, en los cálculos que siguen se consideran despreciables los valores de  $u$  y de  $(c-c_0)$ .

Con estas hipótesis los valores de  $\frac{dc}{dt}$  y  $\frac{du}{dt}$  serán:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{\partial c}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial u}{\partial t}$$

Por tanto el sistema (4), (5) quedará reducido a:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2c}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Multiplicando por  $c$  la derivada respecto de  $x$  de la primera ecuación y restándoles la derivada respecto de  $t$  de la segunda multiplicada por  $\frac{\gamma-1}{2c}$ , se puede eliminar  $c$ . Una vez simplificado queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



y como aceptamos que  $c \approx c_0$ , tendremos en definitiva, que el fluido verifica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8) \quad \text{con } c_0 = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_0}$$

## II - RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

### II-1 METODO ACUSTICO

#### II-1,1 Ecuación. Solución general. Velocidad del sonido

La ecuación diferencial que rige este tipo de problemas es la (8). Su solución general de D'Alembert (ver Puig Adam) es:

$$u = f_\alpha \left( t - \frac{x}{c_0} \right) + f_\beta \left( t + \frac{x}{c_0} \right) \quad (9)$$

Se puede observar que:  $f_\alpha(x, t) = f_\alpha(x + \Delta x, t + \Delta t)$  siendo  $\Delta t = \Delta x / c_0$  pues

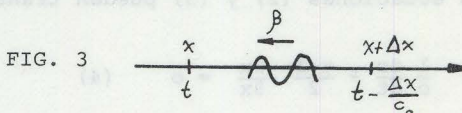
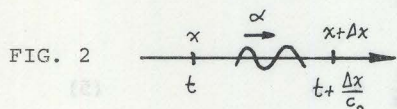
$$f_\alpha \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \Rightarrow f_\alpha \left( t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c_0} \right) = f_\alpha \left( t + \Delta t - \frac{x}{c_0} - \frac{\Delta x}{c_0} \right) = f_\alpha \left( t - \frac{x}{c_0} \right)$$

De aquí surge la "idea" de una onda  $\xrightarrow{\alpha}$  propagándose a la velocidad  $c_0$ .

Análogamente podemos ver que  $f_\beta(x, t) = f_\beta(x + \Delta x, t - \Delta t)$ , con  $\Delta t = \frac{-\Delta x}{c_0}$  pues

$$f_\beta \left( t + \frac{x}{c_0} \right) \Rightarrow f_\beta \left( t + \Delta t + \frac{x + \Delta x}{c_0} \right) = f_\beta \left( t + \Delta t + \frac{x}{c_0} + \frac{\Delta x}{c_0} \right) = f_\beta \left( t + \frac{x}{c_0} \right)$$

Surge la "idea" de una onda  $\xleftarrow{\beta}$  a la velocidad  $c_0$ .



No olvidar que  $c_0 = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_0}$  es la velocidad del sonido. Sobre el eje de las  $x$ , orientado de izquierda a derecha, recordar que la perturbación  $\alpha$  es la del signo - de (9) y la perturbación  $\beta$  la del +.

La velocidad  $u$  en un cierto instante y para una abscisa cualquiera viene dada como suma de dos perturbaciones: una  $\alpha$  y otra  $\beta$  (9).

#### II-1,2 Velocidad acústica.

Se llama velocidad acústica la que toma la partícula de gas al paso de la perturbación.

Tanto la velocidad acústica como la de del sonido son relativas al gas. Con respecto a las paredes, siendo  $u_0$  la velocidad de arrastre del gas, serán:

$$\begin{aligned} - u_0 + c & \text{ (velocidad de propagación local)} \\ - u_0 + u & \text{ (velocidad real del gas local)} \end{aligned}$$

La velocidad acústica será la  $u$  dada por (9).

Esta teoría acústica es válida para débiles perturbaciones. Se admite que el dominio de validez es para  $u/c \leq 0,1$ . Es decir una  $u \leq 30$  m/sg. para un  $c_0 = 330$  m/sg.



## II-1,3 Presión acústica.

Utilizando las relaciones (6), (7) y (9) se puede calcular la variación finita, aunque pequeña de  $\Delta c$  en los alrededores de su valor medio  $c_0$ .

En efecto, se puede deducir que  $\frac{dp}{p} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{dc}{c}$ .

Esto, para pequeños incrementos, puede ser  $\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta p}{p}$

De donde  $\Delta p = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{c} \cdot \Delta c = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\rho c}{c^2} \cdot \Delta c = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\rho r T c}{\gamma r T} \cdot \Delta c = \frac{2}{\gamma-1} \rho c \Delta c$

(recordando que  $c^2 = \gamma \cdot r \cdot T$  y  $p = \rho r T$ ).

Por otro lado de (6) y (7):  $\frac{\partial c}{\partial t} = -c_0 \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

De aquí pasamos:

$$\Delta c = -\frac{\gamma-1}{2} c_0 \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial x} dt = \pm \frac{\gamma-1}{2} u + g(x)$$

pues  $u = f(t \pm \frac{x}{c_0})$ . Luego  $\frac{\partial u}{\partial x} = f' \cdot \frac{1}{c_0} \cdot (\pm)$ .

(con lo que cambia el signo y elimina  $c_0$ ).

Para determinar  $g(x)$  tomamos como condiciones iniciales (en el tiempo  $t_0$ ) el estado de reposo  $c = c_0$ ,  $\Delta c = 0$ ,  $u = 0$ .

Por tanto, sea el que sea el valor de  $x$ , tendremos  $g(x) = 0$ .

En definitiva se obtiene:

$$\Delta c = \pm \frac{\gamma-1}{2} \cdot u \quad (10)$$

Entonces

$$\Delta p = \frac{2}{\gamma-1} \rho c \Delta c = \pm \rho c u \approx \pm \rho_0 c_0 u \quad (11)$$

El + corresponde a la onda  $\alpha$  y el - a la onda  $\beta$ . Esta expresión muestra la relación lineal entre la presión acústica y la velocidad acústica.

## II-2 REPRESENTACION FISICA

En las figuras que vienen a continuación, se representan, en una, una onda elemental de "presión"; en la otra, una onda elemental de "depresión".

En el primer caso la velocidad acústica que resulta es positiva (onda  $\alpha$ ) o negativa (onda  $\beta$ ) según el sentido de propagación. El signo lo da la expresión (11).

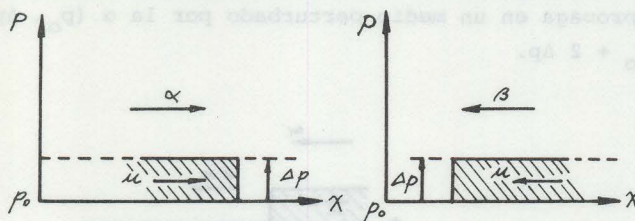


FIG. 4

La primera es una onda de presión derecha. La segunda es una onda de presión izquierda.

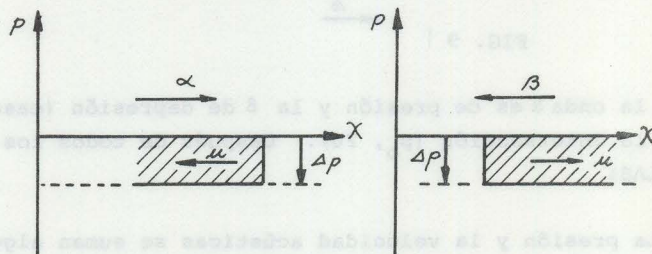


FIG. 5

La primera es una onda de depresión derecha.  
La segunda, una onda de depresión izquierda.



Para la onda  $\alpha$  tenemos que si  $\Delta p > 0$  (onda - presión),  $u > 0$

" " "  $\alpha$  " " "  $\Delta p < 0$  (onda-depresión),  $u < 0$

" " "  $\beta$  " " "  $\Delta p > 0$  (onda-presión),  $u < 0$

" " "  $\beta$  " " "  $\Delta p < 0$  (onda-depresión),  $u > 0$

## II-2,1 Ondas elementales del mismo sentido

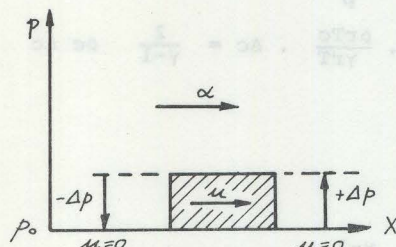


FIG. 6

La figura representa una onda de presión  $\alpha$  seguida de una onda de depresión del mismo sentido.

La velocidad acústica es nula antes de pasar la primera onda. Desde el paso de ésta y hasta que pase la segunda valdrá  $u$ . Al pasar la segunda vuelve al valor cero. En efecto, la velocidad  $u$  que induce la primera onda valdrá  $u = \Delta p / \rho_0 c_0$ . La que induce la segunda:  $u' = \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0}$ . Entre las dos, tendremos:  $u + u' = \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} + \frac{-\Delta p}{\rho_0 c_0} = 0$  (reposo).

$$+ \frac{-\Delta p}{\rho_0 c_0} = 0 \text{ (reposo).}$$

Respecto a la presión inicial  $p_0$ , la figura representa una onda de presión seguida de otra de depresión y no una onda de presión sola.

## II-2,2 Ondas elementales de sentido contrario.

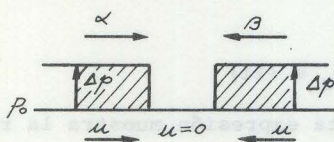


FIG. 7

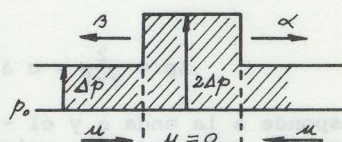


FIG. 8

Las figuras muestran dos ondas elementales de la misma amplitud  $\Delta p$  propagándose en sentidos contrarios, en un medio inicialmente en reposo ( $p = p_0$ ,  $u = 0$ ).

Después del encuentro, la onda  $\alpha$  se propaga en el medio perturbado por la onda  $\beta$  ( $p_0 + \Delta p$ ,  $-u$ ). Lo mismo pasará con la  $\beta$  que se propaga en un medio perturbado por la  $\alpha$  ( $p_0 + \Delta p$ ,  $u$ ). La presión final valdrá:  $p_0 + \Delta p + \Delta p = p_0 + 2\Delta p$ .

La velocidad acústica:  $u - u = 0$ .

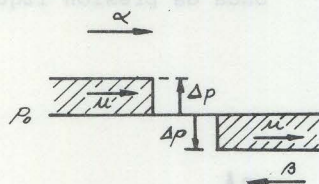


FIG. 9

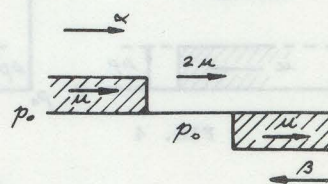


FIG. 10

Si la onda  $\alpha$  es de presión y la  $\beta$  de depresión (caso del último dibujo), se encuentra después de la intersección ( $p_0$ ,  $2u$ ). Después de todos los casos analizados podemos dar las siguientes REGLAS:

- La presión y la velocidad acústicas se suman algebraicamente.
- La velocidad acústica para una onda elemental está siempre dirigida según el frente de onda.



### II-3 CONDICIONES EN LOS LIMITES.

Todo lo dicho sobre teoría acústica es válido dentro de las hipótesis de medio continuo, sin variaciones de sección, sin rozamiento y sin intercambios de calor.

En general las perturbaciones serán debidas a una o varias fuentes (el movimiento del pistón por ejemplo), las cuales impondrán su propia velocidad de desplazamiento al gas que les rodea.

Las dos familias de perturbaciones (una u otra, o las dos, pueden ser de amplitud nula) se pueden definir mediante las funciones A y B de t y x:

$$u_1 = A \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \quad \text{velocidad acústica de la onda transmitida (onda } \alpha \text{)}.$$

$$u_r = -B \left( t + \frac{x}{c_0} \right) \quad \text{Velocidad acústica de la onda reflejada (onda } \beta \text{)}.$$

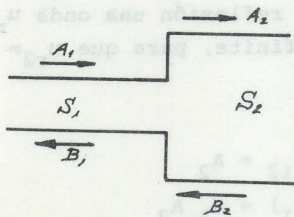
Utilizando las expresiones (9) y (11) se obtiene:

$$u = A - B \quad \text{velocidad acústica resultante}$$

$$\Delta p = \rho_0 c_0 (A + B) \quad \text{presión acústica resultante}$$

#### II-3,1 Noción de impedancia y de impedancia característica.

Vamos ahora a analizar lo que le sucede a una onda incidente  $A_1$  cuando llega a un cambio de sección:  $\sigma = S_2/S_1$



Hay dos condiciones que deben cumplirse:

- Conservación del caudal:

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \text{lo cual necesita una } \rho = \text{constante.}$$

Esto es aceptable, dentro de Acústica, pues la densidad varía muy poco alrededor de  $\rho_0$ .

- Conservación de la presión acústica:  $\Delta p_1 = \Delta p_2$

esto es válido, ya que si razonamos con Bernoulli, antes y después del cambio de sección, la diferencia de presiones será  $\Delta u^2/2g$  y como  $u \ll c$ , podemos despreciar su cuadrado.

Por lo tanto, en el cambio de sección se conserva  $\Delta p$  y también  $uS$ . Luego se conserva:

$$Z = \frac{\Delta p}{uS}$$

A esta relación se la denomina impedancia local del conducto. Esta magnitud se mide en ohms acústicos:

$$1 \text{ ohm acústico} = 100 \text{ N} \cdot \text{s/m}^5 = 10^{-3} \text{ din/cm}^5$$

Supongamos que no hay reflexión en el cambio de sección y que la condición de caudal se verifica, Tendremos:

$$q = u_1 S_1 = u_2 S_2; \Delta p_1 = \rho_0 c_0 u_1 = \frac{\rho_0 c_0}{S_1} q = Z_{01} \cdot q$$

por un lado. Por el otro:



$$\Delta p_2 = \rho_0 u_2 c_0 = \frac{\rho_0 c_0}{S_2} q = Z_{02} \cdot q$$

llamando  $Z_0 = \rho_0 c_0 / S$ . La hipótesis  $S_2 \neq S_1$  arrastra el que  $Z_{01} \neq Z_{02}$  y por consiguiente:  $\Delta p_1 \neq \Delta p_2$ . No se verifica la condición de conservación de presión. Habrá por lo tanto reflexión y modificación de la onda transmitida.

La relación: 
$$Z_0 = \frac{\rho_0 c_0}{S}$$

se llama impedancia característica del conducto de sección  $S$ . Si no hubiera reflexión en el cambio de sección, llegaría una  $A_1$  y saldría una  $A_2$  pero  $B_1 = B_2 = 0$ . Al no respetarse  $\Delta p_1 = \Delta p_2$  habrá reflexión. Los  $\Delta p$  serán el resultado de estas ondas + y - en cada sección.

Podemos resumir lo anterior diciendo: Toda variación local de impedancia característica acarrea la aparición de reflexión y la modificación de la transmisión.

Esta propiedad, aplicable cuando hay un cambio de medio, es utilizada corrientemente en insonorización.

## II-3,2 Calculo de la reflexión en un cambio de sección.

Tomaremos como origen de abscisas el punto de cambio de sección. Las velocidades acústicas son representadas por las funciones siguientes:

$$\text{onda incidente } u_{i1} = A_1(t)$$

$$\text{onda transmitida } u_{i2} = A_2(t)$$

$$\text{onda reflejada } u_{r1} = -B_1(t)$$

La onda transmitida  $u_{i2}$  podría engendrar por posterior reflexión una onda  $u_{r2} = -B_2(t)$ . Supondremos que el conducto de sección  $S_2$  es de longitud infinita, para que  $u_{r2} = 0$ .

Conservación del caudal:

$$u_1 = u_{i1} + u_{r1} = A_1 - B_1; u_2 = u_{i2} = A_2$$

La conservación de los caudales se expresará:  $S_1 (A_1 - B_1) = S_2 A_2$

De aquí tenemos:

$$A_1 - B_1 = \frac{S_2}{S_1} A_2 = \sigma A_2 \quad (12)$$

Conservación de presiones:

$$A_{p1} = \rho_0 c_0 (u_{i1} - u_{r1}) = \rho_0 c_0 (A_1 + B_1)$$

$$A_{p2} = \rho_0 c_0 u_{i2} = \rho_0 c_0 A_2$$

Por tanto:

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (13)$$

Expresando  $A_2$  y  $B_1$  en función de  $A_1$ , a partir de las relaciones anteriores, tenemos

$$\text{- Amplitud relativa de la onda transmitida} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{\sigma+1} \quad (14)$$

$$\text{- Amplitud relativa de la onda reflejada} \quad \frac{B_1}{A_1} = \frac{1-\sigma}{\sigma+1} \quad (15)$$

Sea cual sea la relación de secciones, la onda  $A_2$  es del mismo signo que  $A_1$ .

Si  $S_2 > S_1$ , será  $\sigma > 1$  y la onda  $B_1$  es de signo contrario a  $A_1$

Si  $S_2 < S_1$ , será  $\sigma < 1$  y la onda  $B_1$  es del mismo sentido que  $A_1$



En este último caso se ve que la onda transmitida tiene una amplitud superior a la onda incidente.

Veamos ahora dos casos límites:

a) Extremidad abierta:

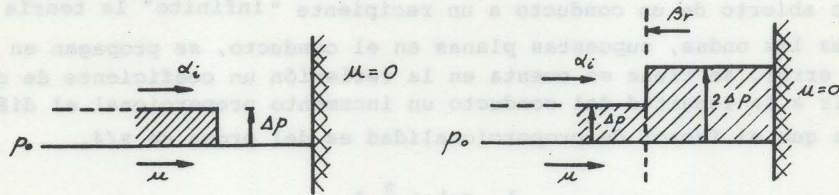


FIG. 11

En este caso  $\sigma$  es infinitamente grande. La onda transmitida es nula. La onda reflejada es de amplitud igual a la incidente pero de signo contrario (tomar límites en (15) cuando  $\sigma$  tiende a  $\infty$ ).

Por el contrario, la velocidad acústica tiene una amplitud doble. En efecto:

$$A_2 = 0; \quad B_1 = -A_1$$

Presión acústica:  $\Delta p_1 = \rho_0 c_0 (A_1 + B_1) = 0$

Velocidad acústica:  $u_1 = A_1 - B_1 = 2A_1$

Recordar que  $\beta_r$  será una onda hacia la izquierda y de "depresión". Por tanto, las partículas se moverán a su paso hacia la derecha.

b) Extremidad cerrada:

En este caso  $\sigma = 0$ . La onda transmitida tiende al doble de la onda incidente (en presión). La onda reflejada es de amplitud igual a la de la onda incidente y del mismo signo.

Para  $\sigma = 0$ ,  $A_2 = 2A_1$  ( $A_2$  "físicamente" no)

Presión acústica:  $\Delta p_1 = \rho_0 c_0 (A_1 + B_1) = 2\rho_0 c_0 A_1$

Velocidad acústica:  $u_1 = A_1 - B_1 = 0$

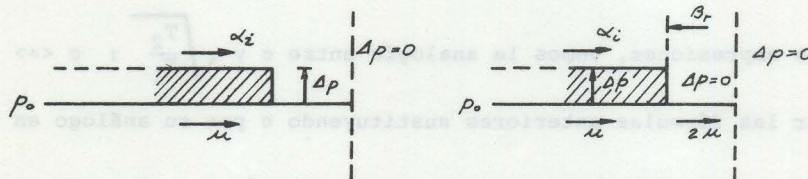


FIG. 12

En el dibujo se realizan las posiciones de las "ondas" antes y después de llegar  $A_1$  a la pared.

Observación:

a) Si  $\sigma = 1$ ,  $A_2 = A_1$  y  $B_1 = 0$ . Calculemos su impedancia:



$$Z = \frac{\Delta p}{q} = \frac{\rho_0 c_0 A_1}{SA_1} = \frac{\rho_0 c_0}{S} = Z_0$$

Por tanto, vemos que la impedancia de un conducto de sección constante  $S$  y longitud infinita es igual a su impedancia característica  $Z_0$ .

b) En el extremo abierto de un conducto a un recipiente "infinito" la teoría anterior no es muy rigurosa, pues las ondas, supuestas planas en el conducto, se propagan en forma esférica. Para paliar este error, se tiene en cuenta en la reflexión un coeficiente de corrección. Este consiste en añadir a la longitud del conducto un incremento proporcional al diámetro. La experiencia demuestra que el factor de proporcionalidad es del orden de  $\pi/4$ .

La longitud corregida quedará:  $l_c = l + \frac{\pi}{4} d$

La relación  $\frac{S}{l + \frac{\pi}{4} d}$  se llama "conductividad" del conducto.

### II-3,3 Cambio de medio. Pared térmica (Cloison thermique)

Acabamos de ver que un cambio de sección en un conducto modificaba la impedancia característica  $Z_0$  y esto provocaba la aparición de ondas reflejadas y modificaciones en las transmitidas.

Es decir que:  $Z_{01} \neq Z_{02}$ ;  $\frac{\rho_0 c_0}{S_1} \neq \frac{\rho_0 c_0}{S_2}$  al ser  $S_1 \neq S_2$ .

Pero también podemos tener  $Z_{01} \neq Z_{02}$  con  $S_1 = S_2 = S$  a base de que  $(\rho_0 c_0)_1 \neq (\rho_0 c_0)_2$ . Este es el caso de la pared térmica:

Se produce un gran incremento de temperatura, lo cual hace variar  $\rho$  y  $c$ . Se podría hacer un desarrollo análogo al de antes, pero es preferible (por comodidad) aprovechar las relaciones (14) y (15) buscando una analogía entre  $T$  y  $S$ :

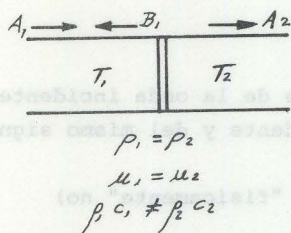


FIG. 13

- Para un cambio de sección:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{S_2}{S_1} = \sigma \quad \begin{cases} \text{con } \rho_0 = \text{cte} \\ \text{y } c_0 = \text{cte.} \end{cases}$$

- Para un cambio de temperatura:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \cdot \frac{S}{S} = \frac{T_2}{T_1} \quad \sqrt{\frac{\gamma_1 r T_1}{\gamma_2 r T_2}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Suponemos que  $P_1 = P_2$  y  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Además aplicamos la ley de los gases perfectos  $p \frac{1}{\rho} = r \cdot T$ .

Comparando ambas expresiones, vemos la analogía entre  $\sigma$  y  $\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ ;  $\sigma \Leftrightarrow \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

Podemos utilizar las fórmulas anteriores sustituyendo  $\sigma$  por su análogo en temperaturas.

Un caso típico de pared térmica se presenta en la tubería de escape de un motor donde los gases que escapan del cilindro a unos 800 °C se encuentran con los de la tubería a unos 500 °C (órdenes de magnitud).

La desigualdad  $\rho_1 c_1 \neq \rho_2 c_2$  puede producirse también por otros motivos como la separación de un líquido y un gas.

Resumiendo:



"Un cambio local de temperatura o entropía, equivale a un cambio de sección" (desde el - punto de vista de la Acústica).

Continuará en el próximo número.

# INDICE DE NOTACIONES

c	Velocidad del sonido.	x	Abscisa.
$c_o$	Velocidad de referencia del sonido.	$\alpha$	Onda derecha.
f	Frecuencia.	$\beta$	Onda izquierda.
$f_o$	Frecuencia propia.	$\gamma$	Cociente entre calores específicos.
i	Unidad imaginaria.	$\rho$	Densidad.
$f_\alpha f_\beta$	Funciones de la solución de D'Alembert	$\rho_o$	Densidad de referencia.
l	Longitud del conducto.	$\sigma$	Cociente entre secciones.
$l_o$	Longitud corregida.	A	Función de (x,t) que define a la perturbación $\alpha$ .
n	Número entero (1,2,3, ...)	B	Función de (x,t) que define a la perturbación $\beta$ .
$\Delta p$	Presión acústica.	E	Energía acústica.
$p_o$	Presión de referencia.	K	Vector de onda.
q	Caudal.	S	Sección.
u	Velocidad acústica.	T	Temperatura absoluta.
$u_o$	Velocidad de arrastre.	$T_o$	Temperatura absoluta de referencia.
r	Constante de los gases.	V	Volumen-resonador.
s	Fuente-excitación.	W	Potencia acústica.
t	Tiempo.	Z	Impedancia.
w	Pulsación.	$Z_o$	Impedancia característica ( $Z_o = \rho_o c_o / S$ ).