Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **24, 4,** 323-343 (2008)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el Método de los Elementos Discretos compuestos por barras

Luis Kosteski, Ricardo Barrios D'ambra

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ingeniería
Departamento de Mecánica Aplicada
Av. Las Heras 727, 3500, Resistencia, Argentina
Tel.: 54 3722 420076 / 425089; Tel-Fax: 54 3722 425064
e-mail: lkosteski@ing.unne.edu.ar; rbarrios@ing.unne.edu.ar

Ignacio Iturrioz

Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS)
Escola de Engenharia, Rua Sarmento Leite, 425
CEP 90050-170, Porto Alegre RS, Brasil
Tel.: 51 3308 3255; Fax: 51 3308 4001
e-mail: ignacio@mecanica.ufrgs.br

Resumen

El cálculo de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos computacionales es siempre un área activa de investigación. Tradicionalmente los métodos más empleados son el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Por su parte el Método de los Elementos Discretos compuesto por barras (MED) es otra alternativa de uso no tan extendido en el área de mecánica de los sólidos. El éxito del MED para simular mecanismos de falla y la nucleación de defectos motiva su aplicación a problemas de mecánica de fractura. Con el objetivo de explorar sus potencialidades en este tipo de problemas se presenta en este trabajo el cálculo de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos de una placa modelada con el MED. Para tal fin son empleadas las mismas metodologías numéricas que se utilizan con métodos numéricos tradicionales, como los son el MEF y el MEC. Los resultados obtenidos comparados con resultados analíticos y numéricos de otros autores, permiten realizar la validación del método para este tipo de problemas donde la mecánica de fractura tiene que ser considerada indefectiblemente en el proceso de ruptura.

Palabras clave: *tasa de energía liberada, integral J, factor de intensidad de tensiones, mecánica de fractura, modelo de reticulado.*

STATIC AND DYNAMIC FRACTOMECHANICS PARAMETERS DETERMINATION APPLYING THE DISCRETE ELEMENT METHOD COMPOSED BY BARS

Summary

The fractomechanics parameter calculus using computation methods are still an active research area. Traditionally, the more employed methods are the Finite Element Method (FEM) and the Boundary Element Method (BEM). The Discrete Element Method composed by bars (DEM) is another alternative although its use is not so extended in the solid mechanics area. DEM success in the simulation of fracture mechanisms and defect nucleation makes it useful to be applied in fracture mechanic problems. In order to explore its potentialities in this kind of problems, this work presents the static and dynamic fractomechanic parameters calculus of a modeled plate with DEM. For this purpose the numerical methodologies that are in use in the traditional numerical methods such as FEM and BEM are employed. The obtained results compared with the numerical and analytical results published by other authors, allow the validation of DEM for such applications where the fracture process must be taken into account.

Keywords: *energy release rate, J integral, stress intensity factor, fracture mechanics, the lattice model.*

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Marzo 2008 Aceptado: Junio 2008

INTRODUCCIÓN

El cálculo de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos presenta aún desafíos, ya que las aplicaciones tecnológicas de la mecánica de fractura llevan al análisis de problemas con diferentes tipos de anisotropía en el material y/o de geometrías y condiciones de borde complejas que en muchos casos resulta imposible de resolver utilizando soluciones disponibles en manuales[1]. Sin lugar a dudas las técnicas computacionales más extendidas en esta área son el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC)[2], pero a estos se suman nuevos métodos y técnicas desarrolladas para el análisis de problemas y aplicaciones específicas.

En este contexto resulta también de particular interés contar con herramientas capaces de modelar la propagación inestable de los defectos cuando el parámetro fractomecánico asociado supera su valor crítico. Tradicionalmente este fenómeno es modelado utilizando modelos de MEF y MEC basados en la técnicas de interfaces cohesivas[3,4,5,6], así como modelos formados por partículas discretas[7,8] conocidos estos últimos como Método de los Elementos Discretos dentro de la bibliografía técnica.

La modalidad del Método de los Elementos Discretos (MED) aquí utilizada, ha sido empleada en el modelado de estructuras de hormigón y hormigón armado sometidas a cargas impulsivas[9,10], en la simulación del comportamiento de fundaciones de suelo cemento apoyadas sobre un lecho de arena suelta[11]y en la simulación del proceso de generación y propagación de un sismo en un conjunto rocoso[12]. También resulta importante mencionar el trabajo de Rios y Riera[13] en el cual se aplicó el MED para el estudio del efecto de escala en hormigón.

El suceso del MED para modelar mecanismos de falla en materiales frágiles y cuasi frágiles y su habilidad de simular la nucleación y posterior propagación inestable de fisuras permiten su aplicación en problemas de mecánica de la fractura. En el MED no es necesaria la introducción de un entalle para inducir la fractura, la posibilidad de nucleación de un defecto es embutida en la ley constitutiva de cada elemento. Por estas razones, en este trabajo se presenta la aplicación del MED para el cálculo de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos en el campo de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE). Para su cálculo se utilizan las metodologías usuales empleadas en los métodos numéricos clásicos, como el MEF y el MEC, y se comparan los resultados obtenidos con resultados presentes en la bibliografía técnica. También se ilustran las posibilidades del MED de capturar la situación crítica cuando el parámetro fractomecánico sobrepasa la tenacidad del material. Es discutido finalmente el desempeño de las metodologías implementadas para medir los factores fractomecánicos dentro del contexto del MED.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS COMPUESTO POR BARRAS

Formulación básica del método

El MED, en la modalidad utilizada, consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo en módulos regulares de reticulado, con las rigideces de sus barras (elementos) definidas de forma tal que su comportamiento sea equivalente al del continuo que se pretende representar. La masa del modelo es discretizada y se la concentra en los nodos del modelo. La Figura 1 muestra un módulo con ocho nodos en sus vértices más un nodo central. Cada nodo tiene asociado tres grados de libertad, dados por las componentes espaciales del campo de desplazamientos u. Las masas son unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud L_c y $\sqrt{3}/2\ \mathrm{L}_c$ respectivamente. La equivalencia entre el arreglo cúbico y un sólido elástico ortótropo con los ejes principales del material orientados en la dirección de los elementos longitudinales fue verificada por Hayashi[14] dentro del campo de la elasticidad

lineal. Sólo debe ser impuesta la restricción $\nu = 0.25$ al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia sea perfecta. Para otros valores de ν aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte, estas diferencias pueden despreciarse sobre todo cuando se está interesado en la respuesta no lineal del modelo estudiado.

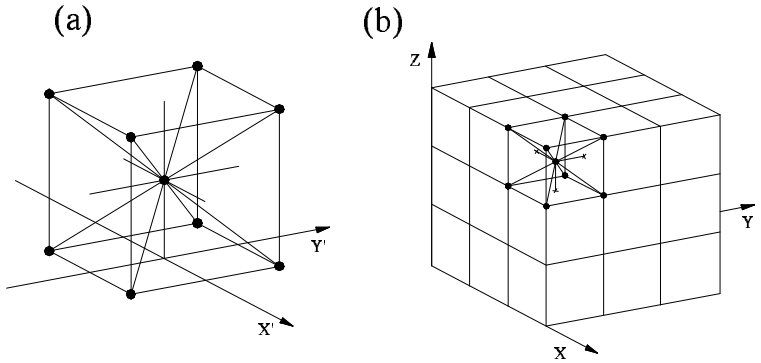

Figura 1. a) Detalle del módulo cúbico básico, b) prisma compuesto por varios módulos cúbicos

En el caso de materiales con una ley de comportamiento lineal elástica la ecuación de movimiento del sistema de N grados de libertad resultante de la discretización espacial puede ser expresada en la forma:

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}(\mathrm{t}) \tag{1}$$

Donde $\boldsymbol{M}$ denota la matriz de masa (diagonal), y $\boldsymbol{u}$ y $\ddot{\boldsymbol{u}}$ representan los vectores de desplazamiento y aceleraciones generalizadas (desplazamientos y aceleraciones nodales) respectivamente. Por su parte $\boldsymbol{q(t)}$ es el vector que contiene las fuerzas externas aplicadas. El sistema (1) puede ser integrado numéricamente en el dominio del tiempo utilizando un esquema clásico de integración explícita (método de las diferencias finitas centrales).

Ley constitutiva elemental para el modelado de falla frágil

Rocha[15] propuso una relación constitutiva bilineal para los elementos que permite modelar la falla frágil del material. La misma se presenta en la forma general:

$$\textit{Fuerza} = \textit{función (deformación de la barra)} \tag{2}$$

Esta relación constitutiva se gráfica en la Figura 2, donde P_{cr} representa la fuerza máxima de tracción transmitida por el elemento, ε_p es la deformación asociada a P_{cr}, E_A es una constante proporcional a la rigidez de la barra que relaciona los dos parámetros anteriores ($P_{cr} = E_A \cdot \varepsilon_p$) y finalmente k_r es el parámetro que determina la deformación límite para la cual el elemento agota su capacidad para transmitir esfuerzos, ε_r. De esta forma el MED contempla la nucleación del daño y la falla de una determinada región del modelo, lo que se traduce en la desactivación de los elementos que agotaron su resistencia. El valor de la deformación límite ε_r debe ser seleccionado de forma que cuando el elemento agota su resistencia, la energía gastada en la creación de las superficies de fractura A_f de cada elemento esté relacionada con la energía específica de fractura del material G_f por la siguiente expresión:

$$\frac{G_f \cdot A_f}{L} = \frac{k_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E_A}{2} \tag{3}$$

Por su parte, el factor de intensidad de tensiones, K_I, se define como:

$$K_I = \chi \cdot \sigma_t \cdot \sqrt{a} \tag{4}$$

Siendo χ un parámetro que depende de la geometría del problema; σ_t la tensión aplicada y a longitud de la fisura. Considerando el comportamiento lineal elástico del material hasta la falla ($\sigma_t = E\varepsilon_p$, donde E es el módulo de elasticidad axial del material o Módulo de Young) y considerando la hipótesis de estado plano de deformaciones, la deformación crítica está dada por:

$$\varepsilon_p = R_{fc} \cdot \sqrt{\frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)}} \tag{5}$$

Donde:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E}\left(1 - \nu^2\right) \tag{6}$$

R_{fc} es un "factor de falla" definido como:

$$R_{fc} = \frac{1}{\chi \cdot \sqrt{a}} \tag{7}$$

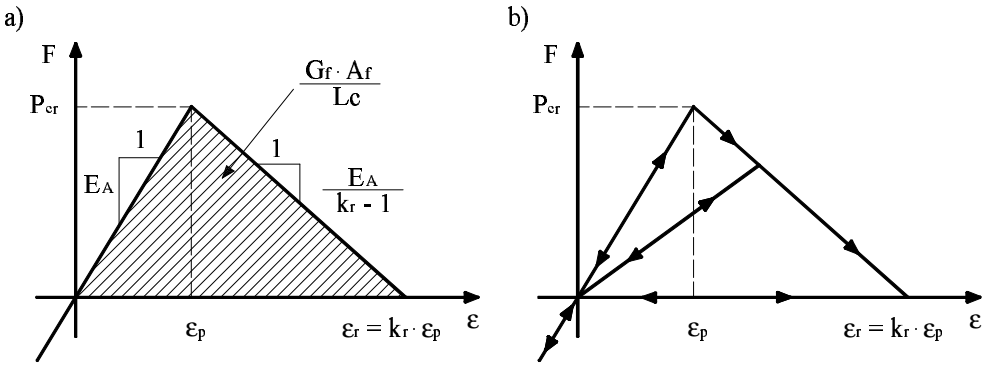

Figura 2. Relación constitutiva elemental de las barras del reticulado. a) Diagrama constitutivo adoptado con sus parámetros de control, b) esquema para la carga y descarga[15]

Resulta evidente en este punto que los parámetros de la relación constitutiva no dependen únicamente del material sino también de la discretización del modelo. Tenemos entonces que P_{cr}, ε_p, ε_r, G_f, y R_{fc} son propiedades exclusivas del material, A_f y L_c son propiedades exclusivas del modelo, mientras que los parámetros E_A y k_r dependen tanto del modelo como del material. Finalmente cabe señalar que el método ofrece la posibilidad de considerar la aleatoriedad de las propiedades del material variando estas de elemento a elemento de acuerdo a una ley estadística establecida.

Es interesante notar que la ley constitutiva para la barra uniaxial permite capturar grandes desplazamientos en el análisis en forma directa, ya que esta formulación es naturalmente objetiva porque el modelo está formado por barras articuladas en sus nodos. Además, como la matriz de masa es diagonal, y debido al esquema de integración explícita utilizado, no es necesaria la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas.

La convergencia del DEM para elasticidad lineal así como en los problemas de inestabilidad elástica fue verificada por Riera e Iturrioz[9].

CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Son conocidos una gran variedad de métodos para calcular el factor de intensidad de tensiones (FIT), tanto para casos estáticos como para dinámicos, una excelente recopilación de los mismos se puede encontrar en Aliabadi y Rooke[2]. Las metodologías implementadas dentro del contexto del MED y presentadas en este trabajo son:

- Cálculo del FIT a partir del balance energético de dos configuraciones próximas[16].
- Cálculo de FIT a partir de las expresiones de Irwin para obtener el Crack Opening Displacement (COD) [2].
- Cálculo del FIT a partir de la determinación de la integral J[17].

A continuación se describe cada una de las metodologías mencionadas y como las mismas fueron implementadas en el MED.

Balance energético

La energía específica de fractura G se define como la tasa de variación de la energía potencial total Π ante una extensión de la superficie de fractura[16].

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \tag{8}$$

Donde W es el potencial de las fuerzas externas, dA es el aumento diferencial de área de la fisura, U es la energía de deformación elástica y E_K es la energía cinética.

Luego, con el objetivo de resolver el problema en forma numérica podemos expresar la ecuación (8) en forma incremental. Considerando con este propósito una fisura de longitud a, alojada en una placa de espesor B resulta:

$$G(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{E_K(a+\Delta a) - E_K(a)}{\Delta a \cdot B} \tag{9}$$

Donde el símbolo σ indica que la ecuación (9) corresponde a un nivel dado de tensiones aplicado.

Si se verifica que las cargas son aplicadas lentamente, es posible despreciar la contribución de la energía cinética en las expresiones (8) y (9). Además, si se asume que se aplican sólo tracciones prescriptas como condición de contorno en los bordes de la placa, el Teorema de Clapeyron demuestra que $dW/dA = 2dU/dA$. Con estas consideraciones la ecuación (9) resulta:

$$G(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \tag{10}$$

Este cálculo puede ser realizado en forma numérica con el MED, evaluando la energía de deformación elástica $U(a)$ y $U(a+\Delta a)$ para dos geometrías del problema sometidas al mismo nivel de tensiones externas σ pero que difieran en la longitud de fisura Δa. Obtenido el valor de G es posible calcular el factor de intensidad de tensiones K y posteriormente su valor normalizado con respecto al factor de intensidad de tensiones en una placa de dimensiones infinitas K_0[16]. Considerando estado plano de deformaciones se obtiene:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\sqrt{\frac{G \cdot E}{1-\nu^2}}}{\sigma\sqrt{\pi \cdot a}} \tag{11}$$

Si resulta importante evaluar las fuerzas inerciales en el cálculo del FIT, ya no será posible calcular el parámetro K a partir del parámetro G. En este caso sólo será posible utilizar la expresión (8) si realizamos la evaluación de los diferentes términos de esta expresión considerando un volumen de control muy próximo a la punta de la fisura para que la distorsión en la distribución de los diferentes tipos de energía debido a las oscilaciones de ondas elásticas en este volumen de control sean despreciables.

Extrapolación de K calculado a partir del COD

Otra forma de calcular el factor de intensidad de tensiones es a partir de la relación entre la expresión del K en función del δ *(Crack Opening Displacement)*. Esta expresión basada en la deducción de Irwin y William [apud 2], se presenta en la ecuación (12) y el significado de r y δ se ilustra en la Figura 3.

$$K = \delta \frac{E}{4+4\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2}\right) = \delta \frac{E}{8}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{12}$$

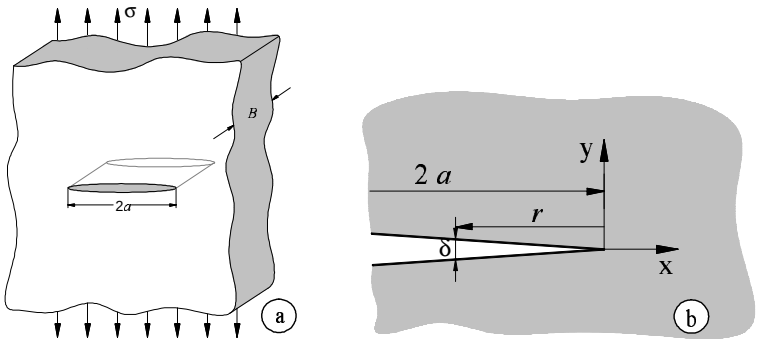

Figura 3. a) Placa tensionada con una fisura central, b) esquema de referencia para valores de r, δ

En función de cómo se toman los desplazamientos δ entre dos puntos originariamente en la misma posición pero en labios opuestos de la fisura, se puede obtener:

$$K_I = v_y \frac{E}{8}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{13a}$$

$$K_{II} = v_x \frac{E}{8}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{13b}$$

$$K_{III} = v_z \frac{E}{8}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{13c}$$

Donde v_x, v_y y v_z son los desplazamientos correspondientes con los tres modos de ruptura conocidos (Modos I, II, y III)[16]. Para un problema de modo I de ruptura como es el caso de la Figura 3, y dado el sistema de ejes indicado, podemos reemplazar en la ecuación (13a) v_y por δ obteniendo la expresión (12).

En el MED se miden los desplazamientos relativos (δ) entre los puntos a uno y otro lado de la fisura cercanos a la punta de la misma. Se calcula el factor de intensidad de tensiones en cada uno de los otros puntos utilizando la expresión (13a) y se realiza una extrapolación para cuando r tiende a cero. De esta forma se logra independizar de la discretización adoptada el valor del K/K_0 obtenido. Con la extrapolación mencionada se predice el valor

para $r = 0$ por medio de una regresión lineal con un ajuste de mínimos cuadrados de los datos conocidos.

Como el COD es un parámetro local, al igual que el K, si el problema analizado es dinámico las ondas de tensión elásticas se tienen en cuenta implícitamente. Por esto las fórmulas para un problema estático o dinámico son las mismas, lo cual representa una gran ventaja.

Se encuentran en la bibliografía una gran cantidad de trabajos que miden el K estático o dinámico utilizando el COD como parámetro, algunos utilizando una formulación dual del Método de Elementos de Contorno[18,19], o con elementos finitos integrando en forma explícita en el tiempo[20].

Integral J

La integral J como otra alternativa de parámetro fractomecánico fue propuesta por Rice *apud* [16], siendo la misma aplicable al caso de materiales elásticos no lineales o inelásticos si no se realiza descarga de las tensiones o la misma es despreciable. Dentro de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica se verifica que el valor de J coincide con el valor de G.

Para casos en los que la carga es estática la integral J viene dada por la ecuación (14). Analizando esta ecuación es posible probar que el valor de J es independiente del camino de integración adoptado, (contorno abierto que contenga la punta de la fisura). Esta propiedad del valor de J (independencia del camino de integración) caracteriza su aplicación en la determinación de FIT estáticos.

$$J = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[Wd \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma \tag{14}$$

Siendo Wd la densidad de energía elástica, σ_i representan las componentes de las tensiones y u_i los desplazamientos, n_m representan las componentes del vector unitario normal al contorno de la integral J. El contorno y el sistema de referencia que se utilizan en la expresión (14) son esquematizados en la Figura 4.

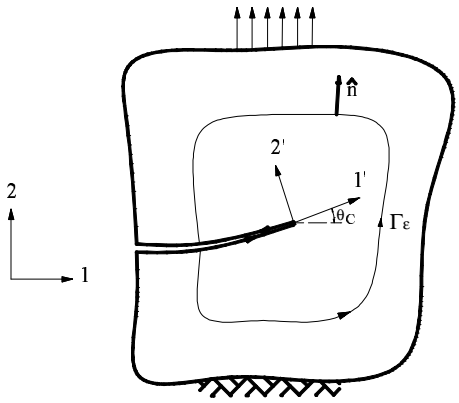

Figura 4. Sistema coordenado y caminos de integración[17]

Si el problema a analizar es dinámico a la expresión (14) se le debe agregar un término que tiene en cuenta la energía cinética y la integral pierde la propiedad de ser independiente del camino de integración. En este caso el valor de J debe ser calculado en el límite del contorno tendiendo a cero, sin importar la forma del mismo.

Para problemas en estado plano, Nishioka *apud* [21,22] definió dos componentes de la integral $J(J_m$, con $m = 1, 2)$ en la punta de la fisura.

$$J_m = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[(Wd + EK) \cdot n_m - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] d\Gamma \tag{15}$$

En la expresión (15), el contorno $\Gamma\varepsilon$, es un contorno que varía en función de un escalar ε. Cuando ε tiende a cero el contorno tiende también a cero.

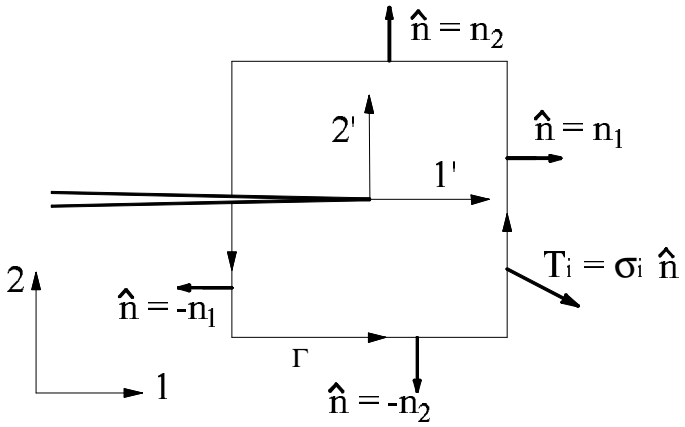

Figura 5. Detalle del contorno utilizado en el MED

Una vez calculadas las componentes de la integral J, la tasa total de energía liberada en materiales elásticos (lineales o no lineales) está dada por[17,21,22]:

$$G = J_1 \cdot \cos \theta c + J_2 \cdot \text{sen}\ \theta \text{c} \tag{16}$$

Donde θc indica la dirección de propagación de la punta de la fisura (dado por el eje local 1') medida desde el eje 1 global (Figura 4). J_1 y J_2 son componentes de la integral J respecto a un sistema de coordenadas global.

Muchos autores calcularon los FIT dinámicos a partir de la integral J con distintos métodos, como el de Galerkin[23], el de los elementos finitos[24], o el método del punto material[21,22] entre otros.

Discretizando las fórmulas anteriores[21,22], se obtiene la formulación de la integral J utilizada en el MED:

$$J_m = \sum_{i=1}^{n_J - 1} \left(F_m^{(i)} + F_m^{(i+1)} \right) \cdot \frac{\Delta i}{2} \quad (m = 1, 2) \tag{17}$$

Donde n_J son la cantidad de nudos y $n_J - 1$ la cantidad de segmentos de la malla. Δi es la longitud del segmento y $F_m^{(i)}$ está dado por:

$$F_m^{(i)} = (Wd_i + EK_i) \cdot n_m - \vec{\sigma_i} \cdot \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{u_i}}{\partial x_m} \tag{18}$$

Como se aclaró oportunamente, Wd y EK son densidades de energía elástica y energía cinética, respectivamente, σ_i representan las componentes de las tensiones y u_i los desplazamientos, n_m representan las componentes del vector unitario normal al contorno de la integral J.

En el MED se realizó la implementación para el cálculo de los FIT con la integral J para una fisura horizontal. Además se consideró un recinto de forma rectangular, como se puede apreciar en la Figura 5. Para el caso de cargas estáticas la integral J es independiente del camino de integración por lo que la forma del camino no tiene importancia. Para el caso de cargas dinámicas hay que hacer el límite del contorno tendiendo a cero, para esto se medirá J en varios contornos y se realizará una regresión lineal (similar a lo realizado con el COD).

Las coordenadas de la punta de la fisura en este caso coinciden con las coordenadas globales, entonces $\theta c = 0$. Las ecuaciones (16) y (18) quedan:

$$G = J_1 \tag{19}$$

$$F_1^{(i)} = (W d_i + K_i)\, n_1 - \sigma_i \,\hat{n}\, \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \tag{20}$$

Calculando F con la expresión (20) para cada nudo del contorno adoptado y luego sumándolos como se indica en la ecuación (17) se obtiene el valor de la integral de contorno J. Conocida la relación entre $J = G$ y K es simple obtener el valor de K/K_0 con el que se compararán los resultados.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Placa rectangular finita con fisura central

Descripción del modelo

Se propone calcular el FIT estático y dinámico normalizado K_I/K_0 a partir de las metodologías descriptas en la sección anterior, estos son: balance energético, el COD y la integral J, para el caso de una placa finita con una fisura central como la presentada en la Figura 6. Se considera el problema en estado plano de deformaciones.

Se modeló la placa con 266 módulos de largo por 134 de ancho y uno de espesor, siendo la fisura de 32 módulos de longitud (2a). Para representar las condiciones de estado plano de deformaciones fue considerado sólo un módulo en la dirección del espesor (eje z) restringiendo los desplazamientos en esta dirección. Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelo se presentan en la Tabla I. También se presenta la relación constitutiva elemental de cada barra utilizada en el modelo.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	200 GPa	Lc	1.50 E^{-4} m
ν	0.20	ν	0.25
ρ	5000 kg/m^3	Δt	1.0 E^{-8} seg
G_f	300 J/m^2	σ_f	250 MPa

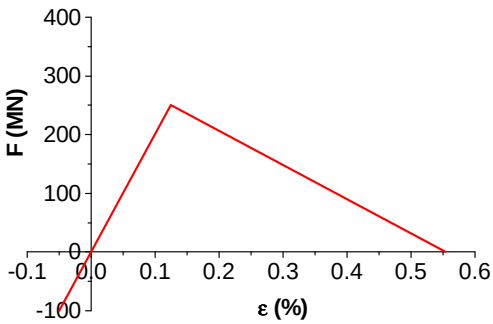

Tabla I. a) Propiedades del material para el ejemplo estudiado y parámetros utilizados en la simulación, b) relación constitutiva elemental asumida para las barras normales del modelo

En el detalle de la Figura 6b) es posible apreciar como fue construida la fisura en el modelo del MED en donde se duplicaron los nodos y barras que coinciden con la posición de la fisura preexistente.

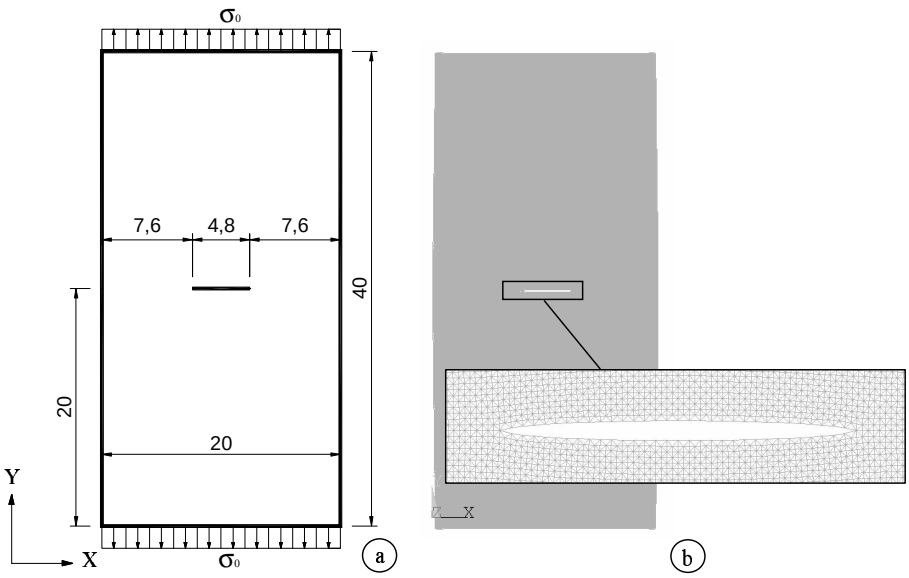

Figura 6. Esquema de la placa en estudio. a) Geometría de la placa, en mm, b) detalle modelo con MED ya deformado, para poder observar la forma de la fisura

Para la versión del MED con que se esta trabajando (arreglo cúbico como el presentado en la Figura 1), estamos limitados a trabajar con coeficientes de Poisson de 0.25 si se desea modelar un material elástico isótropo y homogéneo [25]. Otros tipos de arreglos permitirían modelar en forma correcta materiales elásticos isótropos homogéneos con otros valores de Poisson. Sobre esta limitación del método aquí propuesto se puede realizar las siguientes observaciones:

- Como este método ha sido utilizado para estudiar problemas en los cuales se pretende modelar comportamiento no lineal de los materiales involucrados se considera esta limitación secundaria.

- Este trabajo no tiene como objetivo presentar una alternativa para calcular los parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos, los cuales pueden ser determinados con precisión con modelos numéricos clásicos, sino verificar que el MED simula correctamente eventos según los principios de la mecánica de fractura y esto permite de cierta forma validar su futura utilización en problemas donde la geometría y el comportamiento en la ruptura son más complejos, para los cuales el empleo de métodos clásicos como el MEF y el MEC también tendrán dificultades de actuar.

DETERMINACIÓN DEL K ESTÁTICO

Sobre la placa presentada en la Figura 6 se aplican las tracciones prescritas en los bordes extremos a una velocidad 332 GPa/seg, como todo el proceso dura solamente 0.3 mseg, esto equivale a 3320 Pa/paso de integración, por lo que en este caso son despreciables las fuerzas de inercia.

El valor del factor de intensidad de tensiones normalizado respecto del de una placa con dimensiones infinitas ($K_0 = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$) reportado por Rooke y Cartwright [1] para esta placa es de K/K_0=1.03.

Aplicando el método basado en el balance energético

Mediante el procedimiento explicado anteriormente se realizaron dos simulaciones de la placa utilizando el MED con tamaños de fisura levemente diferentes. Se obtuvo el G por medio de la ecuación (9), y el K_I normalizado por medio de la ecuación (11).

En la Figura 7 se presentan los valores de las energías obtenidas para las dos simulaciones. Como las cargas fueron aplicadas lentamente la energía cinética calculada en las dos configuraciones es prácticamente nula, como se observa en la Figura 7. También es posible observar que la energía potencial siempre se mantiene el doble que la energía de deformación elástica para las condiciones de contorno aplicadas, como es previsto por el teorema de Clayperon y fue mencionado en la sección anterior.

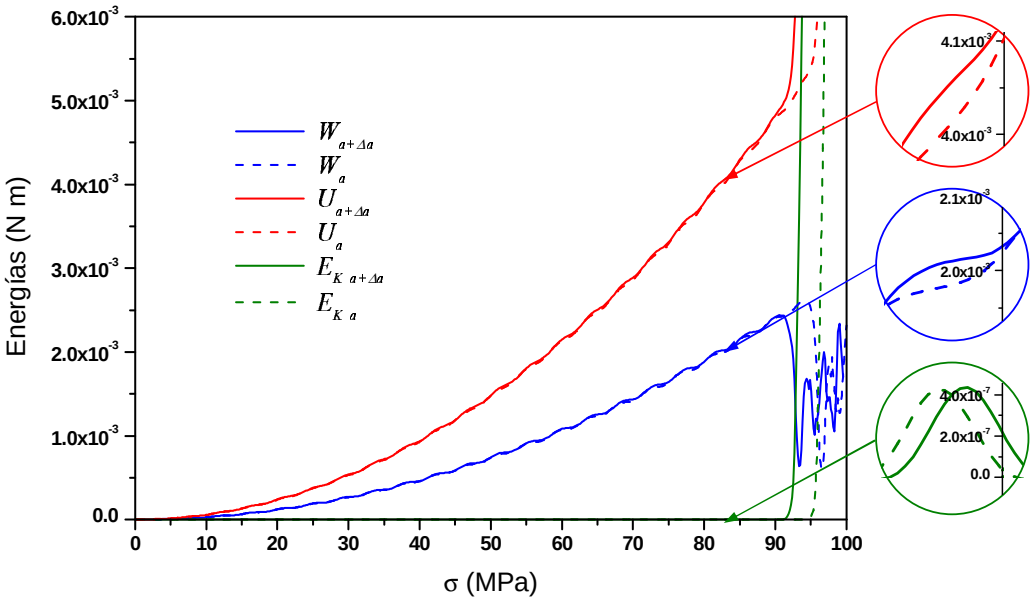

Figura 7. Energías de deformación elástica (U), potencial de las fuerzas externas (W) y energías cinéticas (E_K) para las dos configuraciones

Haciendo la diferencia entre las porciones de energía elástica de las dos configuraciones de la placa con longitudes de fisura a y $a+\Delta a$, y posteriormente dividiéndolas por el aumento diferencial de área de la fisura ($dA = B \cdot da$) como indica la expresión (9) obtenemos una curva para G vs el valor de la tensión aplicada. Empleando la expresión (11) es posible también expresar estos resultados en términos del parámetro K_I normalizándolo respecto de K_0.

En la Figura 8 se presenta la variación del parámetro fractomecánico en términos de G y de K_I/K_0 en función de la tensión aplicada. El valor $K_I/K_0 = 1{,}05$ obtenido con el método del balance energético ilustrado en la Figura 7), resulta similar al valor teórico de referencia (1.03) obtenido empleando las curvas de Rooke y Cartwrith[1], con un error del orden del 2 %.

Finalmente se ilustra la habilidad del MED para capturar la condición crítica. Al respecto se observa en los resultados de la Figura 8 que para valores próximos a $G = 300N/m$, energía específica de fractura crítica, se evidencia que la fisura comienza a propagar en forma inestable.

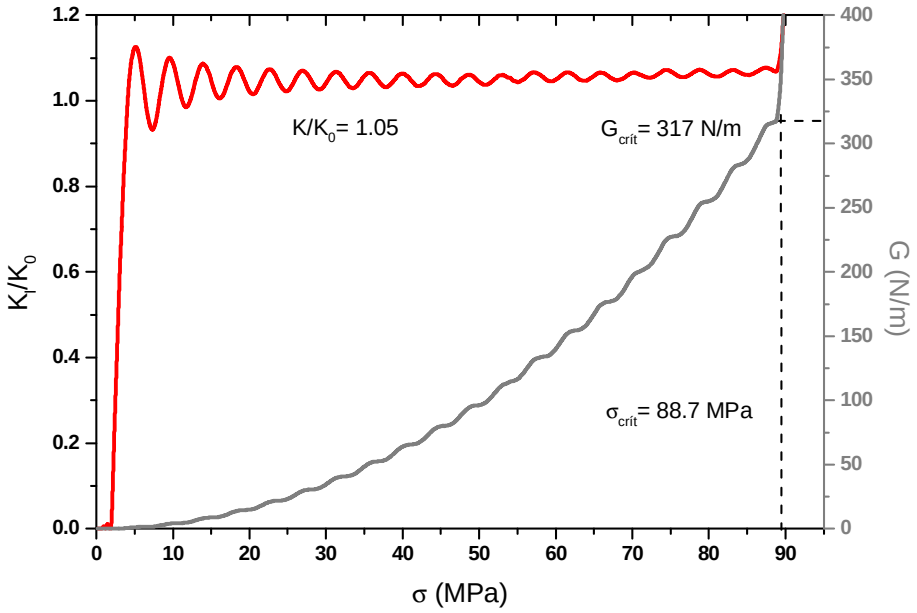

Figura 8. K_I estático normalizado y variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada

Aplicando el método del balance de energías para determinar el factor de intensidad de tensiones, la tensión crítica es $88{,}7MPa$, como se ilustra en la Figura 8, este valor es levemente inferior al valor teórico obtenido despejando la tensión de la expresión (11) ($\sigma_{\text{crít}} = 89{,}4MPa$).

Extrapolación de K calculado a partir del COD

Se determinaron con el MED los desplazamientos δ de pares de puntos enfrentados a ambos lados de la fisura, en las proximidades del extremo de la misma.

Utilizando la técnica descripta anteriormente se calcula el FIT y se lo normaliza con respecto a K_0. El FIT normalizado versus tensión remota se grafica en la Figura 9. En esta figura también se muestra la variación de energía específica de fractura G con la tensión remota aplicada.

El valor obtenido de K_I/K_0 utilizando este método oscila alrededor de 1.02, que es un valor muy cercano al valor teórico de referencia (1,03[1]).

Como se puede observar en la Figura 9 la tensión crítica es aproximadamente $91{,}5MPa$, valor prácticamente igual al teórico.

De la comparación con el ítem anterior queda clara la ventaja del COD sobre el método del balance energético, ya que con el mismo modelo, en el primero se tiene una mayor precisión, además de necesitar una sola simulación para obtener el resultado buscado.

Integral J

Utilizando las ecuaciones (17) a (20) para contornos rectangulares de distinto tamaño con centro en la punta de la fisura se obtienen los resultados presentados en la Figura 10. En la misma se puede apreciar que el valor de K normalizado (K_I/K_0) presenta una pequeña variación en función del contorno analizado. La diferencia encontrada entre los valores de K_I/K_0 calculados para diferentes contornos es del orden del 4 %, variación que se considera despreciable para el nivel de discretización utilizada.

Se observa que los valores son consistentes con los obtenidos con las técnicas anteriores y con los valores de referencia.

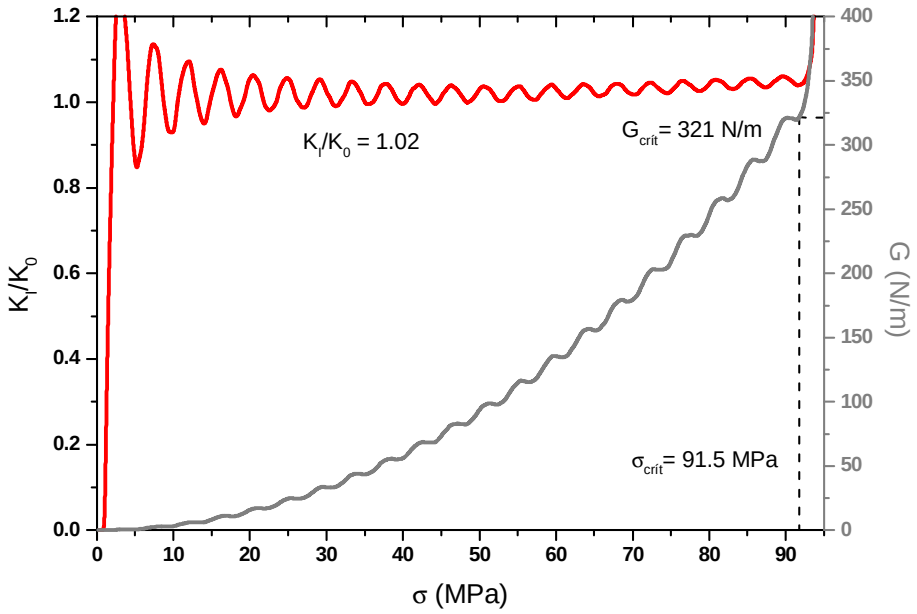

Figura 9. Factor de intensidad de tensiones normalizado y variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada

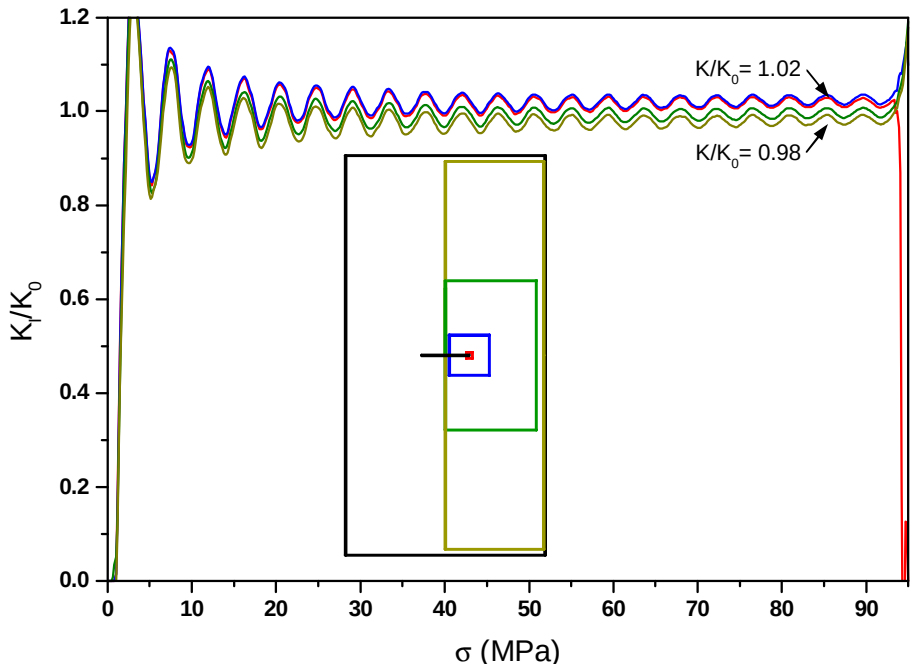

Figura 10. Factor de intensidad de tensiones normalizado utilizando la integral J analizada para distintos contornos

Comparación entre las deferentes técnicas utilizadas

A continuación se presenta en forma de resumen la Tabla II que muestra los resultados del factor de intensidad de tensiones medido con el MED utilizando diferentes técnicas.

	K/K_0
Valor teórico Rooke y Cartwright[1]	**1.03**
Balance energético $(a + da) - (a)$	1.05
COD	1.02
Integral J	1.02

Tabla II. Comparación entre las diferentes técnicas utilizadas para el Cálculo del FIT estático con el MED

DETERMINACIÓN DEL K DINÁMICO

Sobre el mismo ejemplo de una placa traccionada con fisura central, la cual fue presentada en la Figura 6, se aplica una tracción prescrita uniforme de magnitud $\sigma_0 = 0.4$ x 10^6 Pa aplicada con una función escalón. Se propone calcular el FIT dinámico normalizado K_{Id}/K_0 a partir de las técnicas antes descritas.

Cálculo del K dinámico utilizando el método del balance energético

De la misma forma que para el K estático, se realizaron dos simulaciones con tamaños de fisura levemente diferentes. Se obtuvo el G por medio de la ecuación (9), y el FIT dinámico normalizado por medio de la ecuación (11).

En la Figura 11 se muestra cada término que compone la ecuación (9). En esta figura se observa que hasta que las ondas elásticas de compresión no alcanzan la fisura (esto acontece en el tiempo t_1) no se tienen diferencias entre las dos configuraciones en análisis (con longitudes de fisura a y $a+da$). A partir de este momento comienza a existir diferencia entre la variación de energía elástica (dU/da) y la variación de la energía cinética (dE_K/da), ya que las diferencias entre las dos configuraciones son notadas por las ondas elásticas que se mueven por el cuerpo.

Cuando las ondas de tensiones reflejadas en las superficies de la fisura llegan al borde nuevamente (esto corresponde al tiempo 2 t_1), la variación del potencial de las fuerzas externas (dW/da) deja de ser nulo. Esto implica que las deformaciones en los bordes de las placas de las dos configuraciones analizadas son distintas debido a la diferencia de rigidez dada por fisuras de longitudes diferentes.

En la Figura 12 se presenta el valor de K_{Id}/K_0 obtenido a partir del balance energético mostrado en la Figura 11. También se muestran los FIT normalizados obtenidos colocando distintos valores de amortiguamiento viscoso para, de esta forma, disminuir o incluso anular las fuerzas de inercia. En esta figura se observa claramente que el valor de K_{Id}/K_0 varía de aproximadamente cero para el análisis dinámico (con $\xi = 0$), hasta el valor del FIT estático normalizado (con $\xi = 1.06$, siendo ξ el amortiguamiento crítico obtenido).

En la Figura 12 también se observa que el tiempo para el cual se comienzan a obtener valores de K_{Id}/K_0 diferentes de cero, coincide con el que las ondas de tensiones P llegan a la fisura (t_1 indicado en la Figura 11).

Como ya se mencionó, el FIT dinámico normalizado es prácticamente nulo si no se coloca amortiguamiento. Esto se explica por el hecho de que las ondas de tensión que se desplazan por el cuerpo generan perturbaciones de las tensiones en las proximidades de la punta de la fisura. Como el K es un parámetro local resulta imposible medirlo mediante un balance global de energías en toda la placa, debido al movimiento de las ondas de tensión elásticas en la misma.

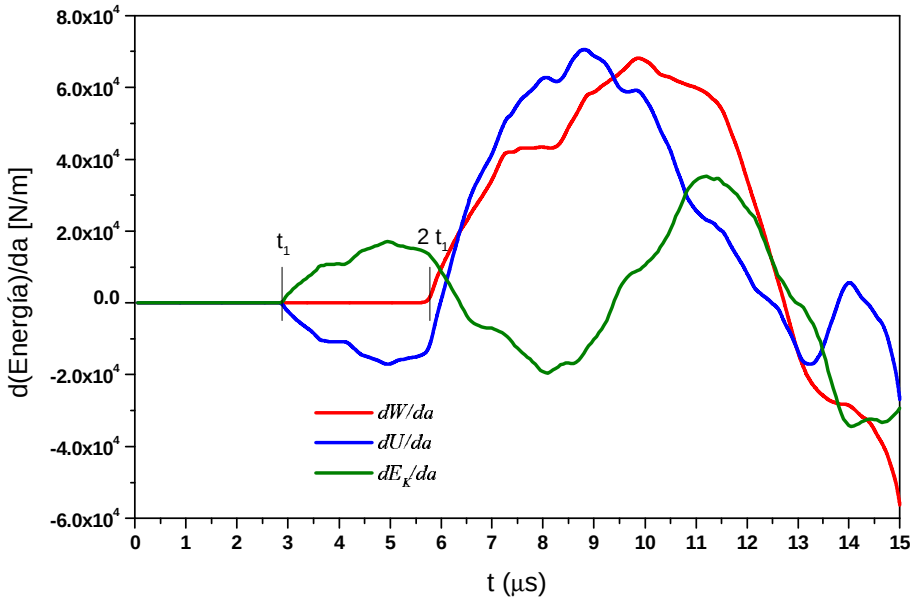

Figura 11. Términos que componen el balance energético

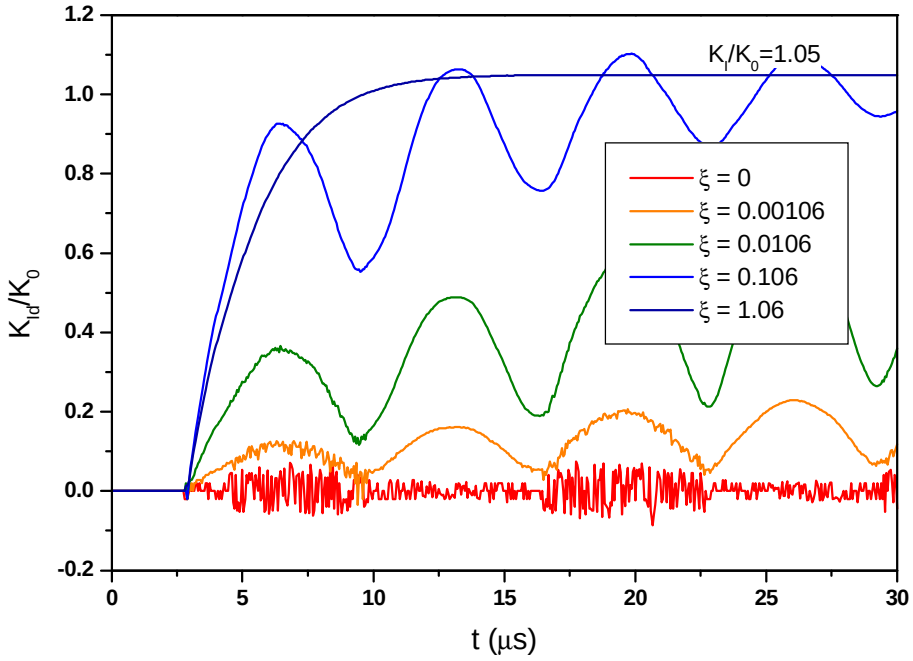

Figura 12. K_{Id} normalizado para distintos valores de amortiguamiento

También se observa que cuando el amortiguamiento considerado es elevado, el mismo consigue anular o disminuir el movimiento de las ondas elásticas dentro del cuerpo y de esta forma se obtiene el K_I/K_0 estático.

De esta forma queda demostrado que no es posible medir el G o K dinámico mediante la técnica de avance elemental de la fisura considerando el balance energético de toda la placa, ecuación (9). Esto ya había sido destacado por varios autores[16,17,26].

Cálculo del K dinámico utilizando el COD

A continuación se realiza el cálculo del factor de intensidad de tensiones dinámico normalizado para el Modo I de cargas obtenido a partir de la determinación del COD.

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para obtener el K_I estático, se calcula el valor de K_I en función del tiempo a partir de una regresión lineal de los valores de K_{Id}/K_0 calculados con la ecuación (12).

En la Figura 13 se presentan los resultados en términos de K_{Id}/K_0 en función del tiempo. En esta figura es posible observar que los resultados obtenidos con el MED aplicando el COD tienen una muy buena concordancia con los obtenidos utilizando otros métodos, como elementos de contorno, Fedelinski y otros[18], elementos de contorno en el dominio del tiempo, Domínguez y Gallego[27] y diferencias finitas, Chen[28].

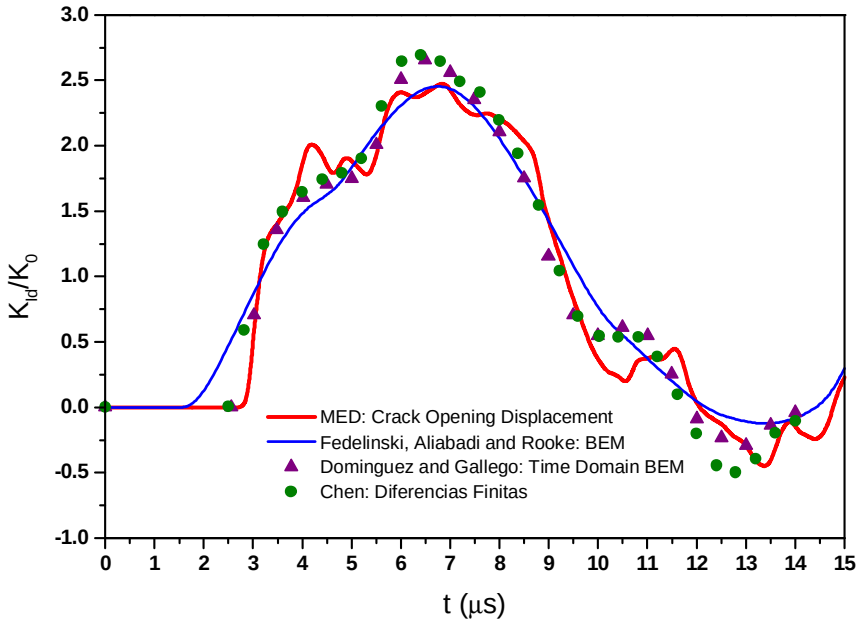

Figura 13. Comparación de resultados en términos del K dinámico vs tiempo obtenidos en este trabajo y los obtenidos por otros autores. G dinámico medido con el MED a partir del COD

Integral J

De la misma forma que se realizó el cálculo de K estático por medio de la integral J, se realiza ahora el cálculo del K dinámico.

En la Figura 14 se observa que a medida que vamos disminuyendo el tamaño de los contornos rectangulares los valores se aproximan a los resultados obtenidos con el COD y por otros autores. Para poder realizar una mejor comparación, se gráfica en la Figura 15 el valor de J realizando una regresión lineal para el contorno tendiendo a cero comparado con resultados obtenidos por otros autores.

En esta última figura se puede apreciar que a partir de los 12 μs la curva obtenida con la Integral J vuelve a subir y no baja como lo hacen las otras (se observa que si se cambia el signo en esta parte de la curva coincide con las de referencia y con la obtenida con el COD). A partir de este tiempo la fisura comienza a cerrarse, por lo que el K es negativo.

Como se tiene que $J = G$ y la relación entre K y G que se aprecia en la ecuación (11) muestra que se vinculan con una raíz cuadrada, el resultado puede tener dos signos pero se adoptó siempre el positivo.

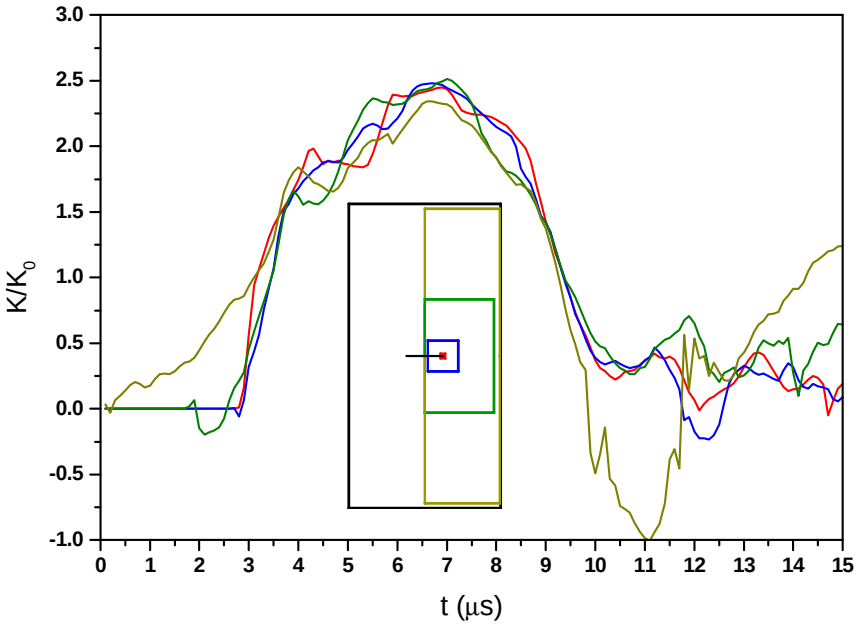

Figura 14. FIT dinámico normalizado calculado con la integral J versus tiempo para distintos contornos

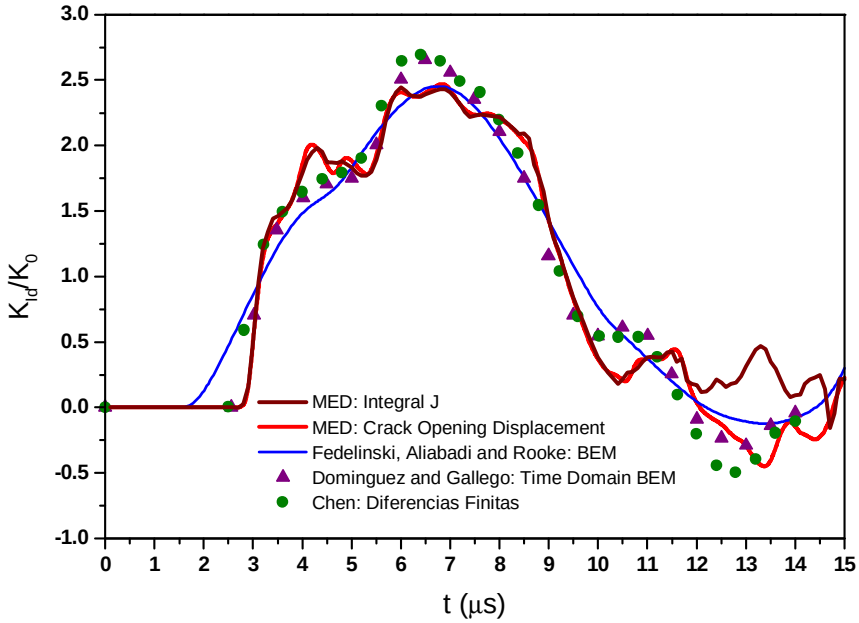

Figura 15. FIT dinámico normalizado calculado con la integral J versus tiempo comparado con resultados obtenidos por otros autores

Distribución de tensiones

En la Figura 16 se presentan gráficas de las distribuciones de tensiones verticales σ_{yy} para distintos tiempos relacionada con la curva FIT normalizada. Para obtener las tensiones en este método con fines de pos procesamiento, se calcula el tensor de tensiones en cada módulo cúbico. Para determinar las componentes de este tensor se considera la colaboración

de las fuerzas de las barras que componen cada módulo. Batista[29] presenta en detalle esta implementación, así como ejemplos que permiten validar la misma.

A continuación se realiza una discusión de como cambia durante todo el proceso simulado la distribución de tensiones elásticas:

- El FIT es un parámetro que describe las condiciones en la punta de la fisura (tensiones, deformaciones, etc.), la Figura 16 muestra que las tensiones en las cercanías de la punta de la fisura están relacionadas en forma coherente con la variación del FIT dinámico con respecto del tiempo. Se encuentran las mayores tensiones en la cercanía de la punta de la fisura para tiempos entre 6 y 8 μs y valores de tensiones muy bajos y hasta negativos para tiempos entre 12 y 14 μs.

- En los primeros instantes de tiempo se observa como las ondas de tensiones se mueven paralelas a los bordes donde se aplicó la carga. Estas ondas llegan a la fisura en un tiempo $t_1 = 2.85$ μs, que coincide con el tiempo que tardan en llegar a la fisura las ondas de compresión ($Vp = 6928$ m/seg). En el primer gráfico de la Figura 16 se observa la distribución de tensiones transcurridos para un tiempo $t = 2$ μs, es decir antes que las ondas lleguen a la fisura.

- Cuando estas ondas tocan la punta de la fisura algunas siguen su camino hacia el borde inferior y otras se desvían hacia los laterales, esto está pasando en el segundo gráfico de la Figura 16 (4μs). Como la distancia de la punta de la fisura al borde lateral de la placa es menor, estas ondas llegan primero, para un tiempo t_2 cercano a los 4 μs rebotan y vuelven hacia la fisura, llegando en t_3 que es donde se produce un valle en la curva del FIT. Luego las ondas que siguieron de largo llegan al borde opuesto en 2 t_1 que es donde se obtienen las tensiones máximas en la punta de la fisura, esto se observa en el tercer gráfico de la Figura 16, para $t = 6$ μs.

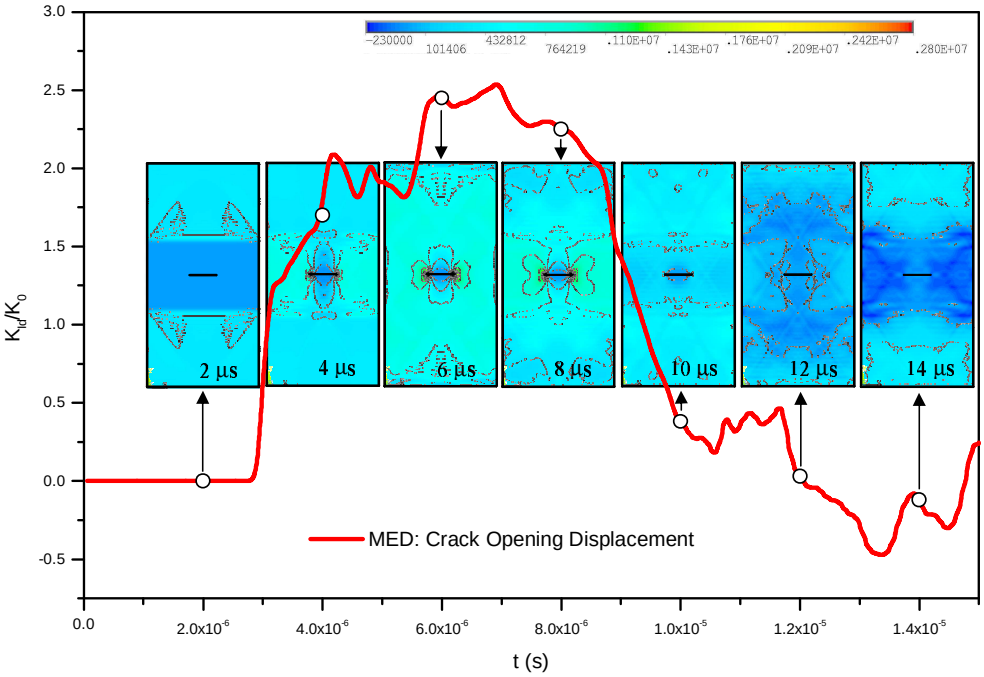

Figura 16. FIT dinámico normalizado con la distribución de tensiones en la placa durante todo el proceso simulado

- A partir de este momento las ondas de tensión vuelven al borde del cual partieron por lo que comienza a disminuir la tensión. En el resto de los gráficos presentados en la Figura 16 se observa que va disminuyendo el valor de las tensiones en la punta de la fisura en correspondencia con la disminución de la curva del FIT versus el tiempo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron tres metodologías para calcular el factor de intensidad de tensiones estático y dinámico dentro del contexto del MED.

Los resultados de FIT estático obtenidos con los tres métodos implementados en el MED presentaron resultados razonables cuando son comparados con los previstos por la bibliografía.

Los resultados dinámicos obtenidos con COD y la integral J muestran una gran similitud, entre ellos y con los resultados de otros autores.

Queda también en evidencia que no se puede calcular el G dinámico con la técnica de avance diferencial de la fisura analizando el balance energético de toda la placa ya que el flujo de las ondas de tensión hacen que las tensiones en la punta de la fisura no estén directamente relacionadas con las cargas remotas.

Los métodos más prácticos son el COD y la integral J ya que con ellos es necesaria una sola simulación. La ventaja del COD es que si la respuesta dinámica es muy compleja el signo de K es muy fácil de obtener, no se necesitan interpretaciones posteriores como es el caso de la Integral J.

Por lo tanto, el MED permite modelar correctamente el estado tensional en la región próxima a la fisura y también determinar la condición crítica de la fisura, es decir, sus condiciones de propagar en forma inestable. Si a esto sumamos la facilidad del MED para simular propagación inestable de ruptura, vemos que el puede ser una herramienta que permita evaluar en forma consistente problemas de propagación inestable de fisuras.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la secretaría de Ciencia y técnica de la Universidad Nacional del Nordeste y al apoyo de la CAPES y CNPq, órganos de fomento del gobierno brasilero.

REFERENCIAS

1 D.P. Rooke y D.J. Cartwright, "*The compendium of stress intensity factors*", Her majesty's Stationery Office, (1976).

2 M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "*Computational Mechanics Publications*", Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, ISBN 1-85312-057-X, (1991).

3 M.H. Aliabadi y A.L. Saleh, "Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **69**, N° 2, pp. 267-280, (2002).

4 A. Needleman, "A continuum model for void nucleation by inclusion debonding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **54**, pp. 525-531, (1987).

5 J. Alfaiate y E. Pires, "Evoluçao da fissuraçao num túnel de betao", *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálulo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **17**, N° 2, pp. 185-197, (2001).

6 J.C. Gálvez y D.A. Cendón, "Simulación de la fractura del hormigón en modo mixto", *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **18**, N° 1, pp. 31-58, (2002).

7 P.A. Cundall y R.D. Hart, "Numerical modelling of discontinua", *Proceedings of the 1st U.S. Conference on Discrete Element Methods*, Golden, Colorado, October 1989), pp. 1-17, (1989).

8 A. Munjiza, T. Bangash y N.W.M. John, "The combined finite-discrete element method for structural failure and collapse", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **71**, pp. 469-483, (2004).

9 J.D. Riera e I. Iturrioz, "Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading", *Communications in Num. Meth. in Eng.*, Vol. **11**, pp. 417-426, (1995).

10 J.D. Riera e I. Iturrioz, "Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading", Nuclear Engineering and Design, Vol. **179**, pp. 135-144, (1998).

11 F. Schnaid, L. Spinelli, I. Iturrioz y M. Rocha, "Fracture mechanics in ground improvement design", Ground Improvement, UK, Vol. **8**, N°, pp 7-15, (2004).

12 A. Dalguer, K. Irikura y J.D. Riera, "Generations of new cracks accompanied by dynamic shear rupture propagation of the 2000 Tottori (Japan), earthquak", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 93, pp. 2236-2252, (2003).

13 R.D. Rios y J.D. Riera, "Size effects in the analysis of reinforced concrete structures", *Engineering Structures*, Vol. **26**, pp. 1115-1125, (2004).

14 Y. Hayashi, "Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear", Porto Alegre, Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (1982).

15 M.M. Rocha, "Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil", Porto Alegre, Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (1989).

16 T.L. Anderson, "*Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*", Third Edition, CRC Press, ISBN: 978-0-8493-1656-2, (2005).

17 T. Nishioka, "*Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge*", Edited by G. P. Cherepanov ED., Krieger Publishing Company Malabar Florida, Chapter 30, p. 870, (1998).

18 P. Fedelinski, M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. **12**, pp. 203-210, (1993).

19 P.H. Wen, M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **167**, pp. 139-151, (1998).

20 A. Tabiei y J. Wu, "Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **57**, pp. 1979-2006, (DOI: 10.1002/nme.742), (2003).

21 Y.J. Guo y J.A. Nairn, "Calculation of J-integral and stress intensity factors using the material point method", *Computer Modeling in Eng. & Sci.*, Vol. **6**, pp. 295-308, (2004).

22 Y.J. Guo y J.A. Nairn, "Three-dimensional dynamic fracture analysis using the material point method", *CMES*, Vol. **1** N° 1, pp. 11-25, Tech Science Press, (2006).

23 P. Krysl y T. Belytschko, "The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3D cracks", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **44**, pp.767-800, (1999).

24 S.H. Song y G.H. Paulino, "Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **43**, N°, pp. 4830-4866, (2006).

25 A.H. Nayfeh y M.S. Hefzy, "Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures", *AIAA Journal*, Vol. **16**, N° 8, pp. 779-787, (1978).

26 L.B. Freund, "*Dynamic Fracture Mechanics*", Cambridge University Press, Cambridge UK, (1990).

27 J. Dominguez y R. Gallego, "Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. **33**, pp. 635-647, (1992).

28 Y.M. Chen, "Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code)", *Engng Fracture Mech.ç*, Vol **7**, pp. 653-60, (1975).

29 R.G. Batista, "Aplicação de Método dos Elementos discretos ao estudo de micromecânica do dano de materiais microporosos de matriz metálica", Porto Alegre, Dissertação (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (2007).