

TWELVE EXERCISES ON SPATIAL PERCEPTION

DOUZE EXERCICES DE PERCEPTION SPATIALE

Janos Baracs

Université de Montréal
École d'architecture
C.P. 6128, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3J7 CANADA

The term "spatial perception" is frequently used and abused today in many different fields. In the following we limit our attention to the concept of geometrical space and we will distinguish between structural and formal perception. By *structural perception* we mean a qualitative interiorization of a spatial model, leading to the study of its topological, projective, affine and metric properties. In *formal perception* a quantitative interiorization yields to the interest for ratios, proportions, measures and coordinates.

We recognize, that the structural perception of space is a basic aptitude which is necessary to any creative spatial intervention. Many years of teaching experience, practice and some preliminary testing revealed to us that many students, teachers and professionals have serious deficiencies or in some cases a complete blockage of their spatial abilities. Our efforts to remedy this situation led us to this research project on the subject of spatial perception.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond



Aujourd'hui, dans plusieurs disciplines différentes, on utilise fréquemment et on abuse du terme «perception spatiale». Dans ce qui suit, nous porterons notre intérêt de façon restrictive sur le concept d'espace géométrique et nous ferons la distinction entre les perceptions structurale et formelle. Par *perception structurale*, on entend une intérieurisation qualitative d'un modèle spatial menant à l'étude de ses propriétés topologiques, projectives, affines et métriques. En ce qui concerne la *perception formelle*, c'est l'intérieurisation quantitative qui prime; l'intérêt se porte vers les rapports, les proportions, les mesures et les coordonnées.

Nous reconnaissons que la perception structurale de l'espace est une attitude fondamentale nécessaire à toute intervention en création spatiale. Plusieurs années d'expérience d'enseignement et de pratique, et quelques expérimentations préliminaires nous ont révélé que plusieurs étudiants, enseignants et professionnels ont de sérieuses déficiences ou, dans certains cas, un blocage complet, dans leurs aptitudes spatiales. Nos efforts pour remédier à cette situation nous ont mené à l'élaboration d'un projet de recherche stimulant dont le sujet est la perception spatiale.

The “*Twelve Exercises on Spatial Perception*” presented here were used the first time as a regular activity in my descriptive geometry class at the School of Architecture, University of Montreal, in 1987.

The 12 exercises may appear as tests and they may be used as such. However, we prefer to emphasize their application as a series of teaching tools. In this case, three steps are necessary. In the **first step**, the students should be given an elementary introduction to spatial geometry. This would include the necessary vocabulary, the concept of union and intersection of points, lines and planes and finally a few important theorems on parallelism, perpendicularity and projections. Drawings, models and verbal descriptions should be used to demonstrate the peaceful coexistence of rigor and intuition. The **second step** is the actual test, answering the questions in a given exercise. It is essential, that this step to be carried out by the students *individually*, not in a team. The **third step** is a detailed class discussion of each question, where the intuitive geometric experience is transformed into formalized knowledge.

The first and the last exercises are textual, the ten exercises in between (N° 2 to N° 11) are supported by drawings. All exercises were conceived with one objective in mind: in order to find the answer, the user must create a *3-dimensional mental imagery* of the given elements in a strictly logical fashion. We firmly believe that this process is the essence of the structural perception of space. This mental imagery will improve with practice. Eventually it can be subjected to motions and transformations.

Après plusieurs années d’expérimentation et de tests approfondis, les «*Douze exercices de perception spatiale*» présentés ici ont été utilisés la première fois comme une activité régulière dans ma classe de géométrie descriptive à l’École d’architecture de l’Université de Montréal, en 1987.

Les 12 exercices peuvent apparaître comme des tests et peuvent être utilisés comme tels. Toutefois, nous insisterons plutôt sur leur application en tant qu’outils pédagogiques. Dans ce cas, trois étapes sont nécessaires. À la **première étape**, on devrait fournir aux étudiants une introduction élémentaire à la géométrie spatiale. Elle devrait inclure le vocabulaire nécessaire, le concept d’union et d’intersection de points, de droites et de plans et finalement quelques théorèmes importants concernant le parallélisme, la perpendicularité et les projections. Des dessins, des modèles ainsi que des descriptions verbales aideront à démontrer la coexistence pacifique de la rigueur et de l’intuition. La **deuxième étape** constitue le véritable test, la réponse aux questions d’un exercice donné. Il est essentiel que cette étape soit réalisée de façon individuelle par les étudiants, et non à l’intérieur d’un travail d’équipe. La **troisième étape** est une discussion détaillée de chaque question en classe; c’est là que l’expérience géométrique intuitive se transforme en une connaissance formelle.

Le premier et le dernier exercices ne sont composés que de textes; les dix exercices intercalés (n° 2 au n° 11) sont accompagnés de dessins. Tous les exercices ont été conçus avec un objectif en tête : afin de chercher la réponse, l’utilisateur sera obligé de se créer des *images mentales tridimensionnelles* des éléments donnés d’une façon strictement logique. Nous croyons fermement que ce processus constitue l’essence de la perception structurale de l’espace. Ces images mentales s’amélioreront avec la pratique; éventuellement, elles pourraient être l’objet de mouvements et de transformations.

Exercises N° 1 to 12
on pages 64 to 66.

Exercices n° 1 à 12
aux pages 64 à 66.

We suggest that the reader make considerable effort on his own before consulting the answers.

Nous recommandons au lecteur de se pencher longuement sur les exercices n° 1 à 12 avant de consulter les réponses !

""

The order of the exercises follow the geometrical hierarchy suggested by Piaget. Exercises N° 2 and N° 3 depict *topological* problems, N° 4, N° 5 and N° 6 question *projective* properties. *Affine* properties are examined in N° 7 and N° 8 and finally *metric* problems are to be solved in N° 9, N° 10 and N° 11. In the questionnaires (N° 1 and N° 12) the projective, affine and metric problems do not follow this order.

The illustrated exercises (from N° 2 to N° 11), with one exception (N° 5), use a cube (or a parallelepiped) as a visual support. We did this in order to reduce the difficulty in this first series. Due to our present educational process and the influence of the built environment, most of us show a better understanding (and liking) of a "cubic," Cartesian world. However, our perception should not be deformed by a coordinate system. A second series of exercises will soon follow, where right angles will no longer dominate the scene.

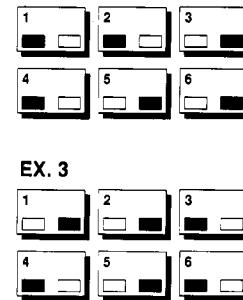
EX. 1

- 1 □□□■
- 2 □■■□□
- 3 □■□□□
- 4 ■□□□□
- 5 □□□■■
- 6 ■■□□□
- 7 ■□□□□
- 8 □□■□□
- 9 ■□□□□
- 10 □□□■□
- 11 □■□□□
- 12 □□□■□
- 13 ■□□□□
- 14 □□□■□
- 15 □□■□□
- 16 ■□□□□
- 17 □□■□□

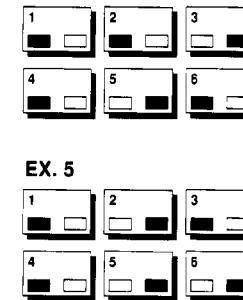
EX. 12

- 1 ■□□□□
- 2 □□■□□
- 3 ■■□□□
- 4 □□□□□
- 5 ■■□□□
- 6 □□□□□
- 7 □□■□□
- 8 □□□■□
- 9 □□□□■
- 10 ■□□□□
- 11 ■■□□□
- 12 □□□□□
- 13 □□□■□
- 14 □■□□□
- 15 ■□□□□
- 16 □□□■□
- 17 □■□□□

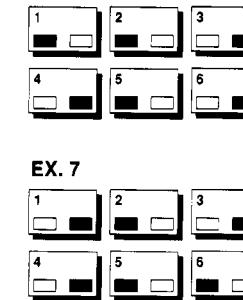
EX. 2



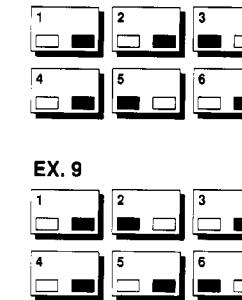
EX. 4



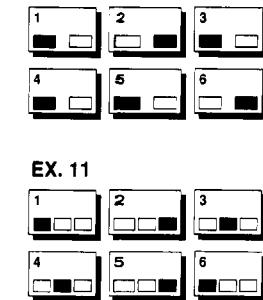
EX. 6



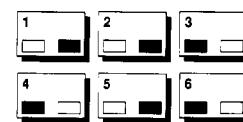
EX. 8



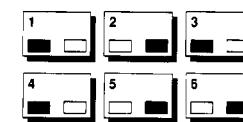
EX. 10



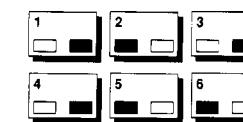
EX. 3



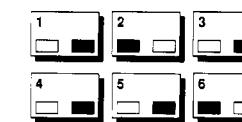
EX. 5



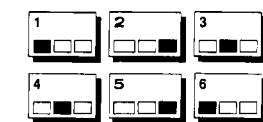
EX. 7



EX. 9



EX. 11



L'ordre des exercices se conforme à la hiérarchie géométrique suggérée par Piaget. Les exercices n° 2 et n° 3 représentent des problèmes d'ordre *topologique*; les n° 4, n° 5 et n° 6 questionnent les propriétés *projectives*. On examine les propriétés *affines* au n° 7 et au n° 8, et finalement on doit résoudre des problèmes d'ordre *métrique* au n° 9, au n° 10 et au n° 11. Dans les questionnaires (n° 1 et n° 12), on trouve simultanément des problèmes d'ordre projectif, affine et métrique.

Les exercices illustrés (du n° 2 au n° 11), à une exception près (n° 5), font appel à un cube (ou à un parallélépipède) à titre de support visuel. Nous avons fait cela dans le but de réduire le degré de difficulté de cette première série. Étant donné le cadre éducatif actuel et l'influence de l'environnement architectural, la plupart d'entre nous présentent une meilleure compréhension (et appréciation) d'un monde «cubique» et cartésien. Toutefois, notre perception ne devrait pas être déformée par un système de coordonnées. Une seconde série d'exercices suivra bientôt ; les angles droits n'y domineront pas.

EXERCICE N° 1 — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE**Avertissement :**

Le choix d'une réponse sur 4 pour 17 questions donne 17 179 869 184 (~ 1.7×10^{10}) combinaisons possibles !
Bonne chance !!

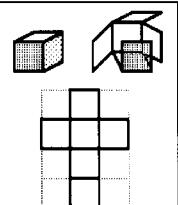
Toujours vrai
Vrai en général
Faux en général
Toujours faux
Always right
Right in general
Wrong in general
Always wrong

EXERCICE N° 1 — SPATIAL GEOMETRY**Warning:**

The choice of one of four answers for 17 questions results in 17,179,869,184 (~ 1.7×10^{10}) combinations !
Good luck !!

- | | | |
|---|---|--|
| 1. Tous les plans parallèles à une droite sont parallèles entre eux. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 1. All planes parallel to a given line are parallel to each other. |
| 2. Trois plans divisent l'espace en huit régions (trièdres). | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 2. Three planes divide space into eight regions. |
| 3. La projection orthogonale d'un segment est plus courte que le segment lui-même. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 3. The orthogonal projection of a segment is shorter than the true length of the segment. |
| 4. Le plan OPQ est parallèle au plan RST ; le plan sécant UVZ coupe les plans OPQ et RST en deux droites parallèles. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 4. The plane OPQ is parallel to the plane RST . The secant plane UVZ meets the planes OPQ and RST in two parallel lines. |
| 5. Il existe une droite perpendiculaire à deux plans sécants donnés. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 5. There is a line perpendicular to two secant planes. |
| 6. Il existe une droite parallèle à deux plans sécants donnés. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 6. There is a line parallel to two secant planes. |
| 7. Deux plans perpendiculaires à la même droite sont parallèles entre eux. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 7. Two planes perpendicular to the same line are parallel to each other. |
| 8. Deux plans perpendiculaires au même plan sont parallèles entre eux. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 8. Two planes perpendicular to the same plane are parallel to each other. |
| 9. Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles entre elles. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 9. Two lines perpendicular to the same plane are parallel to each other. |
| 10. Trois plans ont une droite commune. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 10. Three planes have a common line. |
| 11. Trois plans ont un seul point commun. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 11. Three planes have one common point. |
| 12. Deux plans ont un seul point commun. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 12. Two planes have only a point in common. |
| 13. Le plan OPQ est parallèle au plan RST . Toutes les droites du plan OPQ sont parallèles au plan RST . | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 13. The plane OPQ is parallel to the plane RST . All the lines in the plane OPQ are parallel to the plane RST . |
| 14. Le plan OPQ est perpendiculaire au plan RST . Toutes les droites du plan OPQ sont perpendiculaires au plan RST . | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 14. The plane OPQ is perpendicular to the plane RST . All the lines in the plane OPQ are perpendicular to the plane RST . |
| 15. Les projections de deux droites gauches sont deux droites parallèles. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 15. The projections of two skew lines are two parallel lines. |
| 16. Les droites AB et CD sont gauches. Il existe un plan qui passe par la droite AB et qui est parallèle à la droite CD . | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 16. The lines AB and CD are skew. There is a plane through the line AB , parallel to the line CD . |
| 17. Les droites AB et CD sont gauches. Il existe un plan qui passe par la droite AB et qui est perpendiculaire à la droite CD . | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 17. The lines AB and CD are skew. There is a plane through the line AB , perpendicular to the line CD . |

A well known development of the cube is shown on the right.

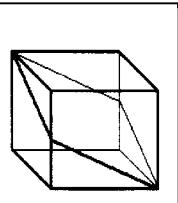


Decide whether the development of the cube in each of the following diagrams is correct (C) or incorrect (I).

1.		C. I.
2.		C. I.
3.		C. I.
4.		C. I.
5.		C. I.
6.		C. I.

DEVELOPMENT OF THE CUBE.**EXERCICE N° 2**

Four faces of a cube are cut by a plane in four segments.

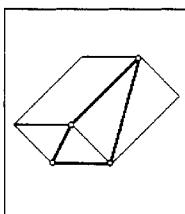


Decide whether the position of the four segments in each of the following diagrams is correct (C) or incorrect (I).

1.		C. I.
2.		C. I.
3.		C. I.
4.		C. I.
5.		C. I.
6.		C. I.

PLANE SECTION OF THE CUBE.**EXERCICE N° 3**

A skew quadrilateral is determined by four vertices of a parallelepiped.



Decide whether the projection of the skew quadrilateral in each of the following diagrams is possible (P) or impossible (I).

1.	2.	3.
P.	I.	P.
4.	5.	6.
P.	I.	P.

PROJECTIONS OF A SKEW QUADRILATERAL.

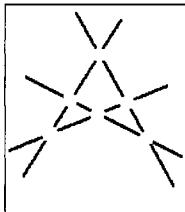
EXERCISE N° 4

The edges of a skew quadrilateral are extended. The projection is drawn with the following code:

AB and CD are concurrent



AB and CD are skew, AB "hides" a point on CD.



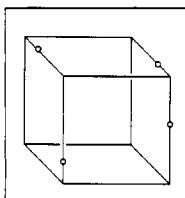
Decide whether the visibility in each of the following diagrams is correct (C) or incorrect (I).

1.	2.	3.
C.	I.	C.
4.	5.	6.
C.	C.	I.

CONFIGURATION OF FOUR LINES.

EXERCISE N° 5

The vertices of the polygons are situated on the edges of a parallelepiped.



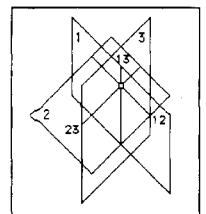
Decide whether the surface of the shaded polygon in each of the following diagrams is plane (P) or skew (S).

1.	2.	3.
P.	S.	P.
4.	5.	6.
P.	S.	P.

PLANE AND SKEW SURFACES.

EXERCISE N° 6

Three opaque plane figures meet in a point.



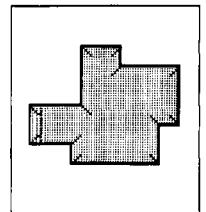
Decide whether the visibility in each of the following diagrams is correct (C) or incorrect (I).

1.	2.	3.
C.	I.	C.
4.	5.	6.
C.	I.	C.

INTERSECTION OF THREE PLANE FIGURES.

EXERCISE N° 8

The slopes of the faces of a roof, built on a horizontal contour, are all equal.



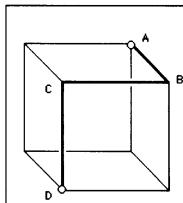
Decide whether the intersections of the faces in each of the following diagrams are correct (C) or incorrect (I).

1.	2.	3.
C.	I.	C.
4.	5.	6.
C.	I.	C.

INTERSECTIONS OF THE FACES OF A ROOF.

EXERCISE N° 9

A skew polygonal line is determined by the four labelled vertices of a cube.



Decide whether the following diagrams represent a rotation of the figure ABCD (R), or its mirror image (M).

R.	M.	R.
4.	5.	6.
R.	M.	R.

PERPENDICULAR LINES.

EXERCISE N° 10

A configuration of three planes is shown in Figure A.

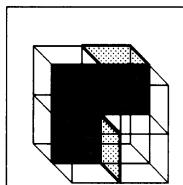


FIGURE A.

Decide whether the following diagrams represent a rotation of Figure A (R), a mirror image (M) or a different configuration (D).

R.	M.	D.
4.	5.	6.
R.	M.	D.

PERPENDICULAR PLANES.

EXERCISE N° 11

EXERCICE N° 12 — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Avertissement :

Le choix d'une réponse sur 4 pour 17 questions donne $17 \cdot 179,869,184$ ($\sim 1,7 \times 10^{10}$) combinaisons possibles !
Bonne chance !!

Toujours vrai
Always right
Vrai en général
Right in general position
Faux en général
Wrong in general position
Toujours faux
Always wrong

EXERCICE N° 12 — SPATIAL GEOMETRY

Warning:

The choice of one of four answers for 17 questions results in $17,179,869,184$ ($\sim 1.7 \times 10^{10}$) combinations !
Good luck !!

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Il existe un plan qui est parallèle à deux droites gauches données. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 1. There is a plane parallel to two skew lines. |
| 2. Il existe une droite qui est orthogonale à deux droites gauches données et parallèle à un plan donné. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 2. There is a line perpendicular to two given skew lines and parallel to a given plane. |
| 3. Il existe un point équidistant de quatre points donnés non dans un même plan. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 3. There is a point equidistant from four given non-coplanar points. |
| 4. Il existe un plan perpendiculaire à deux droites gauches données. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 4. There is a plane perpendicular to two skew lines. |
| 5. Il existe une droite concourante à trois droites gauches données. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 5. There is a line concurrent to three skew lines. |
| 6. La projection orthogonale d'un segment est plus grande que la vraie longueur du segment. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 6. The orthogonal projection of a segment is longer than its true length. |
| 7. La projection orthogonale d'un angle droit est un angle droit. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 7. The orthogonal projection of a right angle is a right angle. |
| 8. La projection orthogonale de la bissectrice d'un angle est la bissectrice de l'angle projeté. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 8. The orthogonal projection of the bisector of an angle is the bisector of the projected angle. |
| 9. La projection parallèle du milieu d'un segment n'est pas le milieu du segment projeté. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 9. The parallel projection of the midpoint of a segment is not the midpoint of the projected segment. |
| 10. Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites concourantes est deux plans perpendiculaires l'un à l'autre. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 10. The locus of points equidistant from two given concurrent lines is two perpendicular planes. |
| 11. Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un plan est un plan parallèle à ce plan. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 11. The locus of points situated at a given distance from a plane is a plane parallel to this plane. |
| 12. Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une droite est deux droites parallèles. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 12. The locus of points situated at a given distance from a line is two parallel lines. |
| 13. Une droite est déterminée par la donnée d'un de ses points et de l'angle qu'elle fait avec un plan donné. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 13. A line is determined by one of its points and its angle to a given plane. |
| 14. Un plan est déterminé par la donnée d'une de ses droites et d'un plan qui lui est perpendiculaire. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 14. A plane perpendicular to a given plane is determined by one of its lines. |
| 15. La position relative de deux droites gauches est déterminée par leur angle et par leur distance. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 15. The relative position of two skew lines is determined by their angle and their distance. |
| 16. Un quadrilatère gauche est déterminé par cinq distances entre ses quatre sommets. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 16. A skew quadrilateral is determined by five distances between its four vertices. |
| 17. Quatre points déterminent une sphère. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 17. Four points determine a sphere. |