Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **23, 4,** 363-377 (2007)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Detección de cavidades en problemas de elastostática usando algoritmos genéticos y el método de elementos de contorno

David Ojeda

Departamento de Diseño Mecánico y Automatización
Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo
Naguanagua, Venezuela; e-mail: dojeda@uc.edu.ve

Eduardo Divo

Department of Engineering Technology, University of Central Florida
Orlando, FL, USA; e-mail: edivo@mail.ucf.edu

Alain Kassab

Dept. of Mechanical, Materials and Aerospace Engineering, University of Central Florida
Orlando, FL, USA; e-mail: kassab@mail.ucf.edu

Miguel Cerrolaza

Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela
Caracas, Venezuela; e-mail: mcerrola123@gmail.com

Resumen

En este artículo se presenta una solución eficiente de problemas inversos de optimización para la detección de cavidades usando una técnica de superposición de cargas puntuales en elastostática empleando el método de elementos de contorno. La superposición de un conjunto de cargas puntuales para simular la presencia de cavidades ofrece una ventaja en la reducción del tiempo computacional en problemas de elastostática; el uso del método de elementos de contorno optimiza el proceso ya que no se requiere re-discretizar el contorno. Se formula una función objetivo para minimizar la diferencia entre las deformaciones calculadas y medidas a lo largo del contorno. Se emplean algoritmos genéticos como el método de optimización para garantizar una solución óptima global dentro del espacio de diseño de una función objetivo altamente no lineal y multiparamétrica. Además, los algoritmos genéticos son paralelizados y dinámicamente balanceados para incrementar la eficiencia del proceso de optimización. Se valida la precisión de la solución en configuraciones geométricas regulares o irregulares con cavidades simples y múltiples a partir de resultados obtenidos a través de experimentos numéricos con errores aleatorios.

Palabras claves: *Método de elementos de contorno (MEC); detección de cavidades; algoritmo genético (AG); elastostática.*

CAVITY DETECTION USING GENETIC ALGORITHM AND BOUNDARY ELEMENT METHOD IN ELASTOSTATICS PROBLEMS

Summary

A method for the efficient solution of the inverse optimization problem of cavity detection using a point load superposition technique in elastostatics boundary element methods is presented in this paper. The superposition of point load clusters to simulate the presence of cavities offers a tremendous advantage in reducing the computational time in the elastostatics field solution with the boundary element method as no boundary re-discretization is necessary throughout the optimization process. An objective function is formulated to minimize the difference between BEM-computed and measured deformations along some of the field boundaries. A Genetic Algorithm is employed as the optimization method to guarantee a global optimal solution within the design space of a highly non-linear and multi-parameter objective function. In addition, the Genetic Algorithm is parallelized and dynamically balanced to mitigate its commonly known efficiently issues. Results of cavity detection problems simulated using numerical experiments and added random measurement errors validate the approach in regular and irregular geometrical configurations with single and multiple cavities.

Keywords: *Boundary element method (BEM); cavity detection; genetic algorithm; elastostatic.*

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Dic. 2006 Aceptado: Julio 2007

INTRODUCCIÓN

En los análisis convencionales de ingeniería, los problemas pueden clasificarse como directos o inversos. En un problema directo se especifica: (a) la ecuación que rige el campo variable, (b) las propiedades físicas, (c) las condiciones de contorno, (d) las condiciones iniciales y (e) la geometría del sistema; todo esto con el propósito de determinar el campo de variables que se obtienen de las entradas. Por el contrario en un problema inverso, se especifica: (1) parte de las condiciones anteriormente numeradas del (a) al (e) y (2) unas condiciones impuestas (conocida como la condición expuesta del contorno). La razón de resolver un problema inverso es encontrar alguna condición desconocida numerada de la (a) a la (e) en un problema directo. Normalmente las condiciones impuestas se obtienen de alguna medición de un campo de variable en el contorno a través de algún sensor[1−3]. Este problema geométrico inverso ha sido de gran importancia en aplicaciones térmicas y de mecánica de sólidos para la detección no destructiva de cavidades en regiones internas [2−6]. En aplicaciones térmicas, el método requiere condiciones impuestas en el contorno, por ejemplo, calor o temperatura[1]. En aplicaciones de elastostática, las condiciones impuestas son dadas en términos de desplazamientos y tracciones en la superficie. Generalmente, las tracciones en la superficie son conocidas por las condiciones de contorno, mientras que los desplazamientos son determinados experimentalmente a través de mediciones[2,3]. En esta publicación se usa una simulación numérica experimental y se le añade una medida de error aleatoria para validar la aproximación a cavidades regulares en geometrías simples. El cálculo es intenso debido a su naturaleza inherente, sin importar si se toma un acercamiento numérico o analítico para solucionar el problema directo asociado. El método de los elementos de contorno (MEC), por su propia naturaleza, ofrece la alternativa perfecta[1−3,7−12], para este tipo de problemas debido a que no se requiere discretización del dominio ni regeneración completa del mallado así como la de su geometría [13,14].

Se presenta en este artículo un método de superposición singular de cargas puntuales para la solución del problema geométrico inverso que simula de manera eficiente las cavidades internas. La superposición de cargas puntuales como fuente/sumidero dentro del dominio es lo primero a resolver como alternativa que satisfaga las condiciones de Cauchy expuestas en la superficie. Las cargas puntuales deben ubicarse ellas mismas dentro de la cavidad o fuera del dominio si no la hay, esto para satisfacer la ecuación de gobierno de Laplace. Posteriormente, comienza la búsqueda de la ubicación de las cargas puntuales relacionadas con la deformación correspondiente a la geometría de la cavidad interna[2−3] haciendo uso de Algoritmos Genéticos, descritos posteriormente.

PROBLEMA DIRECTO Y MEC EN ELASTICIDAD

La solución de problemas directos en elastostática provee el campo de los desplazamientos dentro del sistema de ecuaciones de gobierno, las condiciones de contorno y el sistema geométrico. El campo de los desplazamientos para un medio isótropo, homogéneo y linealmente elástico sujeto a una distribución de fuerzas internas o de campo b_i es regida por la ecuación de Navier:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{\mu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + b_i = 0 \tag{1}$$

donde u_i y u_j representan los campos de desplazamientos, ν es la relación de Poisson y μ es el módulo de rigidez.

En un problema directo, la solución de esta ecuación, normalmente, es posible cuando se prescriben correctamente dos posibles tipos de condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \bar{u_i} &= u_i \ en \ \Gamma_u \\ \bar{t_i} &= \sigma_{ij} n_j = t_i \ en \ \Gamma_t \end{aligned} \tag{2}$$

donde, la sobrebarra denota una cantidad especificada, t_i es el campo de tracciones y n_j es el vector normal unitario hacia afuera del dominio Ω rodeado por el contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. El campo de esfuerzos σ_{ij} está definido como:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \tag{3}$$

Con el campo de deformaciones relativas e_{ij} como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

Finalmente, en una formulación del método de elementos de contorno basada en la ecuación integral de Somigliana, queda planteada una relación integral entre la deformación u_i^pen un punto de colocación "p" y las deformaciones u_i y tracciones t_i en todo el contorno Γ. Adicionalmente, las fuerzas de campo b_i, permanecen relacionadas a través de una integral de dominio Ω, como sigue:

$$c_{ij}^p u_i^p + \oint_\Gamma H_{ij} u_i d\Gamma = \oint_\Gamma G_{ij} t_i d\Gamma + \int_\Omega G_{ij} b_i d\Omega \tag{5}$$

donde, G_{ij} y H_{ij} son las soluciones fundamentales de desplazamientos y tracciones, respectivamente, y c_{ij}^p es una constante geométrica, tal que: $c_{ij}^p = 1$ si $p \in \Omega$; $c_{ij}^p = 0$ si $p \notin \Omega$ y $c_{ij}^p = 1/2$ si $p \in \Gamma$ en el caso de un contorno suave[13]. Estableciendo que el campo de fuerzas internas b_i está constituido únicamente por cargas puntuales, tal que:

$$b_i = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l \delta(x_i, x_i^l) \tag{6}$$

donde NL es el número de cargas puntuales, Q_i^l es la intensidad de cada carga y l y $\delta(x_i, x_i^l)$ es la función de Dirac ubicada en el punto de impacto de cada carga x_i^l. Utilizando las propiedades de la función de Dirac, el último término de la ecuación integral (5) se reduce a:

$$\int_\Omega G_{ij} b_i d\Omega = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l \int_\Omega G_{ij} \delta(x_i, x_i^l) d\Omega = \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l G_{ij}^l \tag{7}$$

donde G_{ij}^l es la solución fundamental de desplazamiento evaluada en el punto de impacto de cada carga x_l. Esta substitución permite reducir, de manera simple, la ecuación integral (7) a integrales de contorno como:

$$c_{ij}^p u_i^p + \oint_\Gamma H_{ij} u_i d\Gamma = \oint_\Gamma G_{ij} t_i d\Gamma + \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l G_{ij}^l \tag{8}$$

De igual forma se puede definir una ecuación integral de contorno que relaciona el campo de esfuerzos σ_{ik}^p en un punto de colocación p como:

$$c_{ij}^p \sigma_{ik}^p + \oint_\Gamma S_{ijk} u_i d\Gamma = \oint_\Gamma D_{ijk} t_i d\Gamma + \sum_{l=1}^{NL} Q_i^l D_{ijk}^l \tag{9}$$

donde los términos S_{ijk} y D_{ijk} son las soluciones fundamentales de esfuerzos. Esta ecuación integral de contorno se puede emplear para calcular el esfuerzo σ^p_{ik} en cualquier punto p del dominio Ω e incluso se puede llevar al contorno pero se deben utilizar métodos especiales de integración ya que el término S_{ijk} se vuelve hipersingular cuando se integra sobre el punto de colocación p.

Discretizando la ecuación integral de contorno de desplazamientos (9) utilizando NE elementos de contorno con NN nodos independientes en cada elemento, se obtiene el siguiente arreglo matricial:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{q\} \tag{10}$$

donde las matrices $[H]$ y $[G]$, de dimensiones $N \times N$, contienen los coeficientes de influencia que relacionan los desplazamientos $\{u\}$ y tracciones $\{t\}$ en el contorno. $N = d \times NE \times NN$, d es el número de dimensiones espaciales (2 o 3). Lo más resaltante de este desarrollo es el hecho que todos los efectos generados por las cargas puntuales quedan remitidos al vector $\{q\}$, lo que esencialmente permite alegar que si de alguna forma se logra simular la presencia de una cavidad utilizando un conjunto de cargas puntuales, entonces no se necesitaría re-discretizar el contorno en cada paso de un eventual proceso de optimización para la detección de esta cavidad ya que su efecto simplemente estaría afectando al sistema algebraico con la suma de un vector $\{q\}$ conocido. A la relación de coeficientes (10) se introducen las condiciones de borde $\bar{u}_i$ y $\bar{t}_i$ para arreglar el sistema algebraico en la forma:

$$[A]\{x\} = \{b\} + \{q\} \tag{11}$$

donde el vector $\{x\}$ contiene los valores nodales desconocidos de $\{u\}$ y $\{t\}$ en donde no fueron prescritos con condiciones de borde. La solución de este sistema sigue métodos estándar. Cabe destacar que para este artículo se emplearon solo elementos de contorno cuadráticos discontinuos iso-paramétricos, donde tanto la geometría como las cantidades de campo $\{u\}$ y $\{t\}$ son aproximadas utilizando funciones de forma cuadráticas pero los nodos de las cantidades de campo se ubican dentro del elemento y no en los puntos extremos del elemento como es el caso de los nodos geométricos.

SIMULACIÓN DE CAVIDADES CON ARREGLOS DE CARGAS PUNTUALES

En problemas de potenciales, flujo ideal de fluidos, conducción de calor y electrostática, la superposición de una fuente y un sumidero de cargas iguales ubicados a una distancia L en dirección paralela a un flujo prescrito, da origen a líneas de isoflujo y en particular a una donde el flujo normal se desvanece. Esta línea de cero flujo normal puede ser interpretada como la presencia de una superficie sólida o como el contorno artificial de una cavidad elíptica[1]. Ver Figura 1.

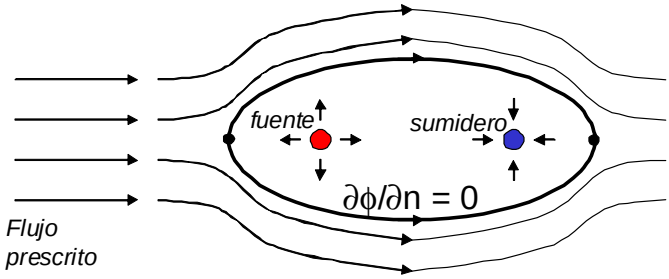


Figura 1. Simulación de una superficie elíptica al paso de un flujo paralelo por superposición de singularidades

Esta misma afirmación puede hacerse en campos elastostáticos donde la interpretación se traduce a la superposición de dos cargas puntuales, en dirección paralela al flujo de energía elástica de deformación, de intensidades iguales (fuentes) y opuestas (sumideros). En este caso pudiera inferirse que en algún contorno artificial alrededor de estas cargas, existe una línea donde las tracciones se desvanecen la cual se pudiera interpretar como la superficie hipotética de una cavidad elíptica. Mas aún, si se consideran flujos de energía elástica de deformaciones no paralelas y se añaden más cargas puntuales en un arreglo geométrico preestablecido, se pudiera realizar la simulación de cavidades de geometría irregular y orientación variable, tal como se observa en la Figura 2.

PROBLEMA INVERSO Y FUNCIÓN OBJETIVO

El proceso numérico inverso de detección de cavidades pudiera concebirse como una ubicación iterativa de diferentes cargas puntuales con intensidades arbitrarias en un arreglo geométrico variable específico, hasta que se logre la correspondencia entre las tracciones y deformaciones obtenidas en la implementación de las ecuaciones del MEC (9) y aquellas medidas en el contorno como información adicional o condiciones impuestas. En el caso de este problema inverso, en particular, se desconocen la ubicación, tamaño y forma de la cavidad. De tal forma que la intensidad de las cargas puntuales añadidas y su ubicación dentro del arreglo geométrico, pueden ajustarse iterativamente para contrarrestar las tensiones generadas por las condiciones de borde impuestas y consecuentemente producir la deformación artificial que corresponda a las condiciones impuestas. Este procedimiento se puede elaborar en dos etapas: primero, con la minimización de un funcional o función objetivo, S, que cuantifica la diferencia entre las deformaciones u_i obtenidas por el MEC (9) y las deformaciones $\hat{u}_i$ obtenidas a través de mediciones experimentales en las superficies expuestas[1−4]. Estas últimas son las condiciones impuestas que permiten la solución o aproximación del problema inverso. La función objetivo S se define como:

$$S(Q_i^l, x_i^l) = \sqrt{\frac{1}{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} |u_i^m - \hat{u}_i^m|^2} \tag{12}$$

donde N_m se refiere al número de puntos de medición de la deformación $\hat{u}_i^m$ con m=1...N_m. Cabe notar que la función objetivo (12) depende de las intensidades de las cargas puntuales Q_i^l y su ubicación x_i^l lo que generaría un nuevo campo de deformaciones u_i^m al emplear las ecuaciones del MEC (9).

Es importante destacar que en los procesos de optimización se minimizan funcionales como el mostrado en la ecuación (12). Se debe reducir el número de parámetros o grados de libertad parametrizando las variables(Q_i^l, x_i^l), a un mínimo. Bajo este contexto, los problemas bidimensionales, se caracterizan por un arreglo geométrico de ocho (8) cargas puntuales ubicadas a lo largo de una elipse rotada, ver Figura 2. Se generan treinta y dos parámetros, debido a las variables involucradas (8 pares de intensidad más 8 pares de ubicaciones). El proceso de optimización consiste simplemente en la modificación de las intensidades de las cargas (Q_i^l), el centro de la elipse (x_c, y_c), el radio de sus dos ejes (r_x, r_y) y el ángulo de rotación (θ), para conformar un total de veintiún (21) parámetros independientes a predecir. Esto de ninguna manera limita el proceso ya que con una simple modificación se pudiera incrementar la cantidad de cargas. Una vez que la ubicación e intensidad de las cargas puntuales (Q_i^l, x_i^l) hayan sido estimadas, se procede a la segunda etapa del proceso de optimización, la cual simplemente consiste en tratar de ubicar y definir la línea de cero tracciones al rededor de las cargas puntuales, ver Figura 2.

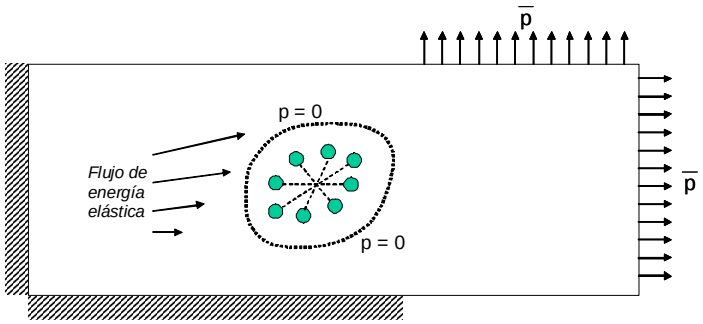


Figura 2. Arreglo geométrico de cargas puntuales al paso de un flujo de energía elástica no paralelo

Esta etapa del proceso es posterior e independiente de la etapa de estimación de las cargas. Por tanto, una segunda función objetivo se formula para este propósito como:

$$S(x_i^n) = \sqrt{\frac{1}{N_t}\sum_{n=1}^{N_t} |t_i^n|^2} \tag{13}$$

donde N_t es el número total de nodos que definen la línea o contorno a ubicar y t_i^n son las tracciones en cada uno de estos nodos. Nuevamente, la forma de esta línea o contorno se pudiera parametrizar utilizando, por ejemplo, otra forma elíptica para tratar de reducir el número de parámetros a determinar. Los ejemplos a usar en esta investigación será una elipse rotada al rededor de las cargas puntuales[1]. Por lo tanto, minimizando la función objetivo automáticamente se actualizará la geometría de la cavidad en orden de satisfacer las condiciones de contorno impuestas[2].

MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN: ALGORITMOS GENÉTICOS (AGs)

Tres características resaltantes que definen a los algoritmos genéticos (AGs) de otros algoritmos evolutivos: (1) representación binaria de la solución, (2) la proporcionalidad del método de selección, y (3) mutación y cruce como método primario para producir variaciones. En general, las propiedades de un organismo se describen como una serie de genes (variables de diseño) en un cromosoma. Por lo tanto, si se trata de simular la naturaleza usando un computador, se debe codificar el diseño de las variables de una manera conveniente. Se adoptará un modelo haploide usando un modelo de vector binario que simule un cromosoma sencillo[1]. Se determina la longitud del vector por el número y precisión requerida de cada variable de diseño. Cada variable de diseño es limitada entre un valor máximo y mínimo. Adicionalmente, se establece la precisión de la variable de diseño asignando un numero de bits por variable. La información contenida en la cadena de vectores que compone el cromosoma caracteriza a cada individuo en su población. Además, cada individuo, dependiendo de su diseño, posee una aptitud o capacidad de supervivencia. El proceso de optimización comienza con la suposición aleatoria de un grupo de posibles soluciones denominadas población que contienen un tamaño inicial o número de individuos. Cada individuo se define por la combinación de parámetros $(a_1, a_2, ..., a_G) : (Q_i^l, x_c, y_c, r_x, r_y, \theta)$ y se representa como una cadena binaria o cromosoma, ver Figura 3. Ya que los AGs están planteados para maximizar y no minimizar, se puede formular una función de aptitud, Z, como el inverso de la función objetivo S como:

$$Z(Q_i^l, x_c, y_c, r_x, r_y, \theta) = S^{-1} = \left[\frac{1}{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} |u_i^m - \hat{u}_i^m|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Esta función de aptitud Z se evalúa para cada individuo en la población actual definiendo que tan apto es este individuo para la supervivencia. En cada iteración de los AGs se realiza una operación de selección, cruce y mutación para actualizar el arreglo de la población. La selección se realiza para determinar pares de individuos que cruzarán su material genético para producir un descendiente para la nueva generación. Este operador selecciona aleatoriamente a la pareja de individuos, sin embargo, esta aleatoriedad es proporcionada con el nivel de aptitud de cada individuo para garantizar que los individuos más aptos tendrán más probabilidad de transmitir su carga genética a la nueva generación. Adicionalmente, un operador de mutación aleatorio afecta la información obtenida al cruzar el material genético de los individuos. Este paso es importante para un mejoramiento continuo de las generaciones. Una serie de parámetros son fijados inicialmente en los AGs y determinan y afectan la eficiencia del proceso de optimización.

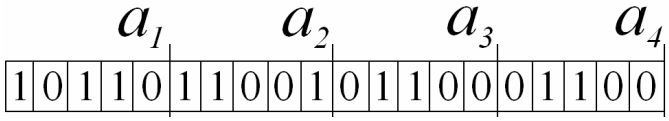


Figura 3. Cromosoma definido como $Z_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Los parámetros que controlan el proceso de optimización son el número de parámetros por individuos o variables de optimización, el número de bits por parámetro o longitud de los cromosomas que define cada individuo, el número de individuos o tamaño de la población por generación, el número de hijos por cada cruce, la probabilidad de cruce y la probabilidad de mutación. Los operadores de los AGs se aplican generación tras generación hasta satisfacer un criterio de convergencia o hasta alcanzar un número máximo de generaciones. Una vez que el tamaño de la población sea fijada, el algoritmo inicializa todos los cromosomas. Esta operación se lleva a cabo aleatoriamente. Después de inicializar la población, se realiza una evaluación de la aptitud de cada individuo computando la función de aptitud. Teniendo los valores de la función de aptitud para cada individuo, el proceso de selección puede comenzarse. La probabilidad de selección de cada individuo es calculada utilizando la relación siguiente:

$$P_{Seleccion}(\upsilon_i) = \frac{Z_i}{\sum_{j=1}^{TP} Z_j} \tag{15}$$

donde TP es el tamaño de la población, υ_i es el miembro i de la población y Z_i es la aptitud del miembro i de la población. Se genera una ruleta de peso en la cual a cada miembro se le asigna una porción de la rueda en proporción a su probabilidad de selección. La ruleta es girada tantas veces como hayan individuos en la población para producir el número adecuado de descendientes. Por supuesto, algunos cromosomas serán seleccionados más de una vez y los mejores cromosomas tendrán más oportunidades de transmitir su material genético a la nueva generación. El cruce y mutación ocurren una vez que se haya aplicado la selección para garantizar la diversidad genética en la población de la nueva generación. Una vez estimadas las cargas puntuales mediante el proceso de optimización de los AGs, un nuevo proceso de optimización se inicializa y lleva a cabo para ubicar la línea o contorno de cero tracciones al rededor de las cargas. Este segundo proceso de optimización se realiza

utilizando los AGs con las mismas propiedades de la etapa anterior pero con una nueva función de aptitud definida como:

$$Z(x_i^n) = S^{-1} = \left[\frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} |t_i^n|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

La optimización de esta función de aptitud utilizando los AGs da como resultado la ubicación y forma final aproximada de la superficie de la cavidad en cuestión.

VALIDACIÓN NUMÉRICA

Los resultados numéricos de problemas directos en 2D con cavidades usando MEC ofrecen una alternativa para generar las condiciones de contorno en el exterior de la superficie. Estos resultados servirán para validar el programa y serán usados como datos de entrada en los problemas inversos. Un error aleatorio se añade a los desplazamientos en la superficie para verificar la precisión de la solución en configuraciones geométricas regulares o irregulares con cavidades simples y múltiples. Se usan elementos de contorno discontinuos y cuadráticos en todos los casos.

Los Ejemplos 1 y 2, se muestran en las Figuras 4a y 4b. Una placa de sección cuadrada de *0,0635 x 0,0635* m^2 con un agujero centrado de diámetro circular de *0,0254 m* y una cavidad de diámetro *0,005 m* para el Ejemplo 1 y *0,00674 m* para el Ejemplo 2. La placa está empotrada en uno de los lados y tiene una carga de compresión de 10^6 *Pa* distribuida en el resto de los lados. Las Figuras 5a y 5b muestran la discretización la placa con 80 elementos (40 en los lados y 40 para el agujero central). En la Figura 6 se muestra un tercer ejemplo; de una barra empotrada de *0,25x0,05* m^2 sometida a una carga de tracción pura de *2x*10^6 *Pa* distribuida en el lado opuesto al empotramiento, con una cavidad de diámetro *0,02 m* y discretizada con 120 elementos. La misma posee una cavidad de diámetro *0,02 m* (ver Figura 7). Las Figuras 8a, 8b y 8c muestran los desplazamientos de los tres ejemplos usando problemas directos y MEC, que serán los datos de entrada para resolver el problema inverso.

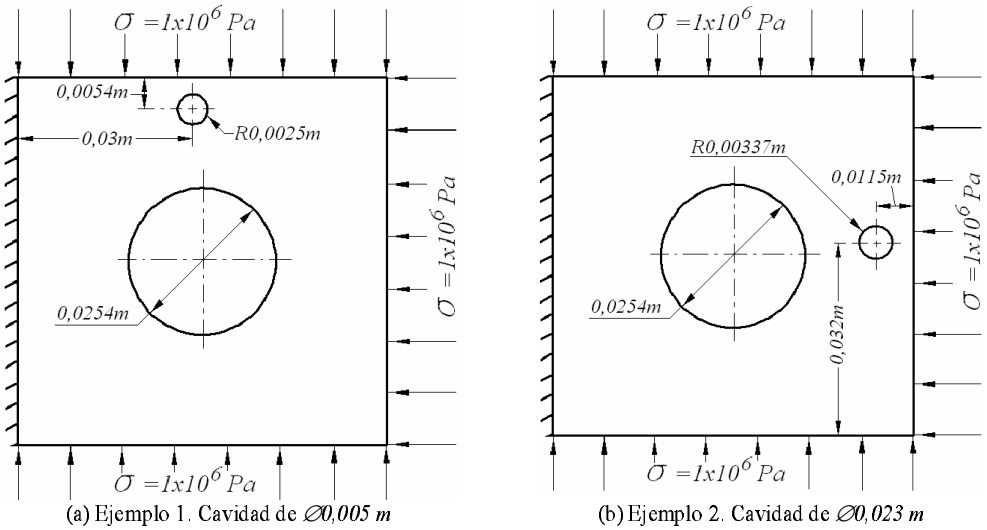
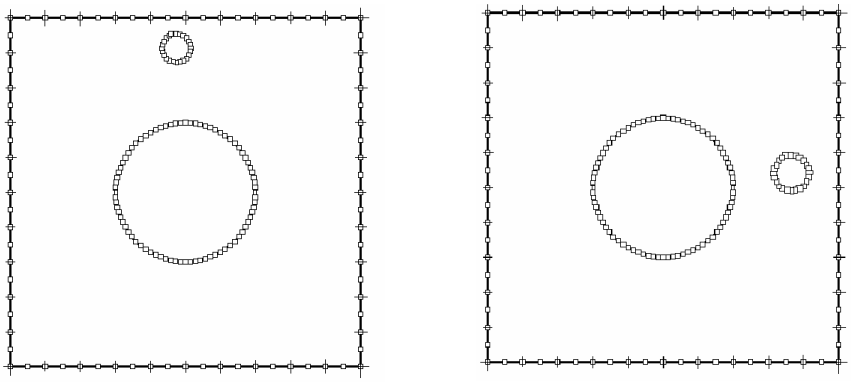


Figura 4. Condiciones de contorno para la placa cuadrada con agujero circular en el centro y una cavidad



(a) Ejemplo 1 (b) Ejemplo 2

Figura 5. Discretización de placa cuadrada con agujero circular en el centro y una cavidad

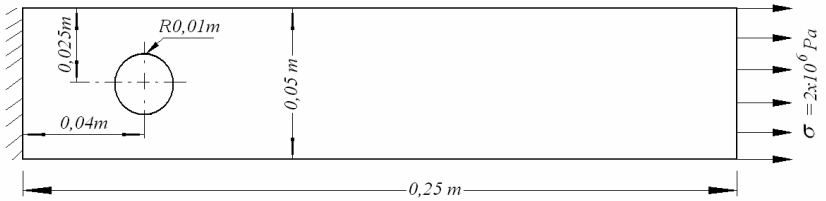


Figura 6. Condición de contorno para la barra sometida a tracción. Ejemplo 3

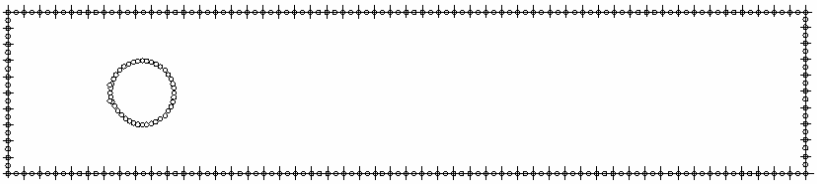
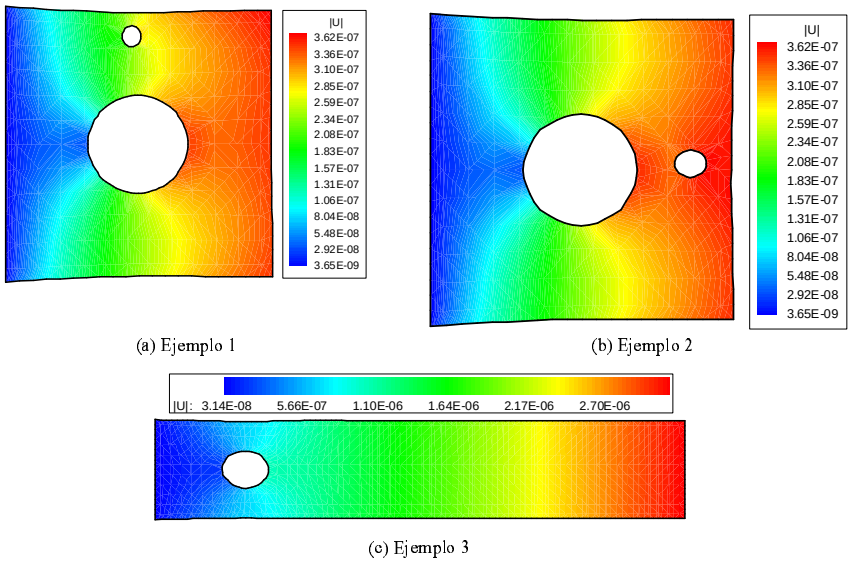


Figura 7. Discretización de la barra sometida a tracción. Ejemplo 3



(a) Ejemplo 1 (b) Ejemplo 2

(c) Ejemplo 3

Figura 8. Resultados numéricos de los desplazamientos en $[m]$ usando MEC

Después de resolver el problema inverso para el Ejemplo 1, se observa en las Figuras 9a hasta 9d, los resultados de la evolución de las cargas puntuales desde la primera generación hasta lograr una convergencia, detectando finalmente la ubicación de la cavidad. Esta convergencia es alcanzada por la primera función objetivo (ecuación 14) después de 2000 generaciones del AGs, que permite contrarrestar las tensiones generadas por las condiciones de borde impuestas, produciendo una deformación artificial en el contorno que corresponda a las condiciones impuestas. Posteriormente se obtiene la convergencia de la segunda función objetivo (ecuación 16) después de 100 generaciones, permitiendo obtener la forma de la cavidad; esto se logra definiendo la línea de cero tracciones alrededor de las cargas puntuales. La evolución de las dos funciones objetivos para el ejemplo 1 se muestran en las Figuras 10a y 10b.

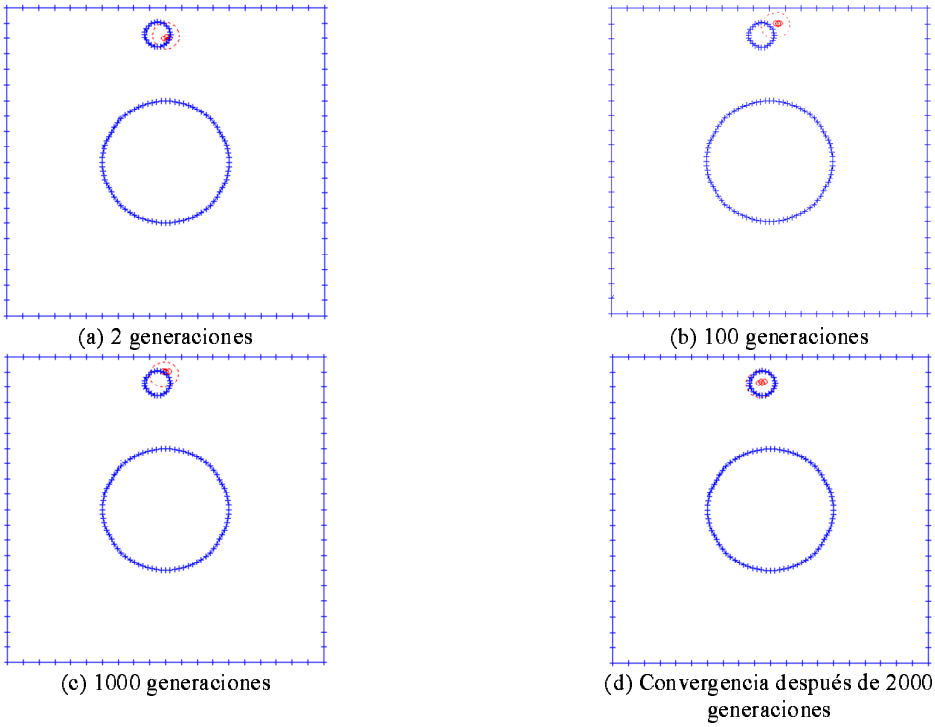
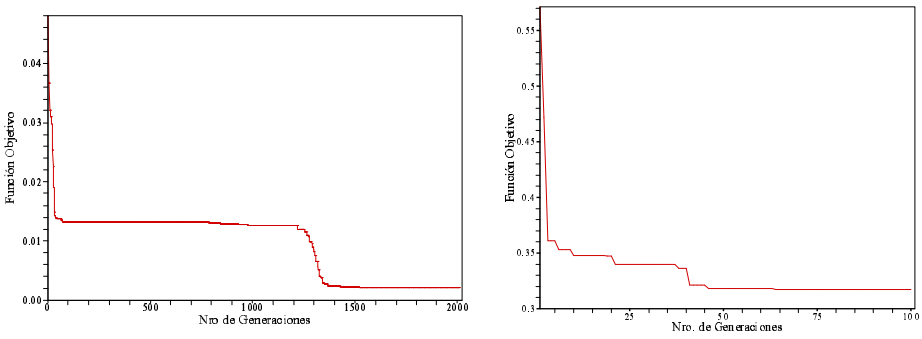


Figura 9. Evolución de la detección de la cavidad para el Ejemplo 1



(a) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=2{,}14x10^{-3})$

(b) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=3{,}17x10^{-1})$

Figura 10. Evolución de las funciones objetivo para el Ejemplo 1

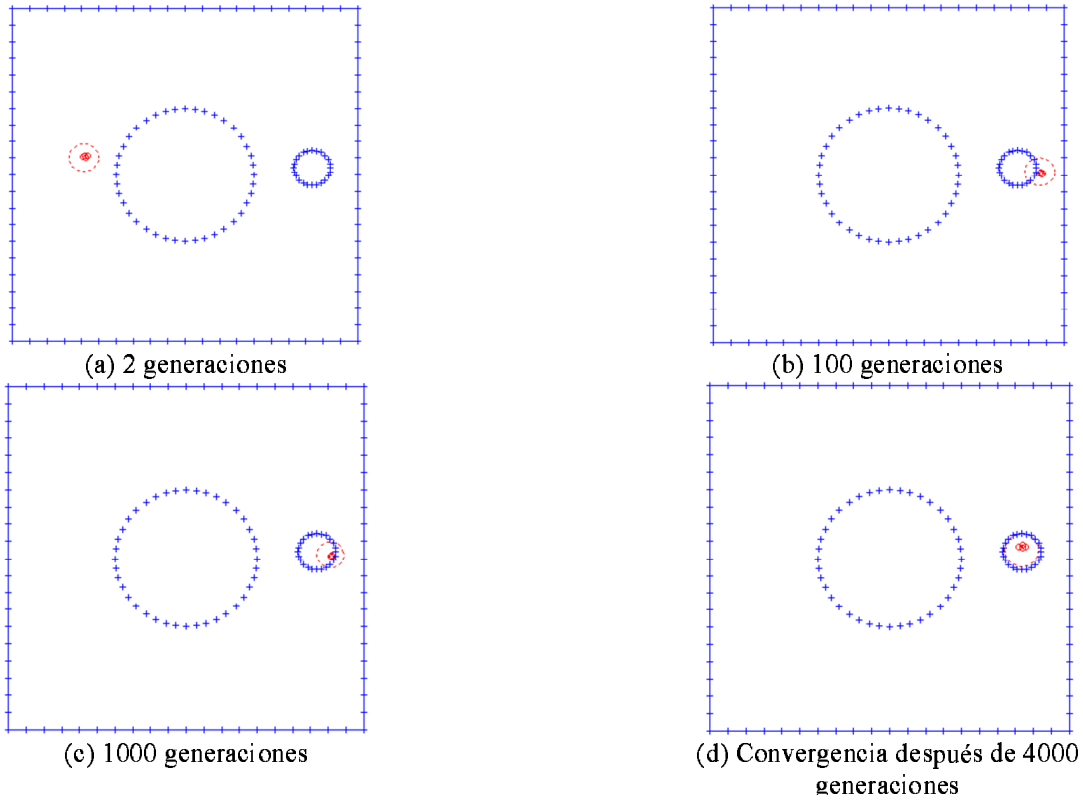
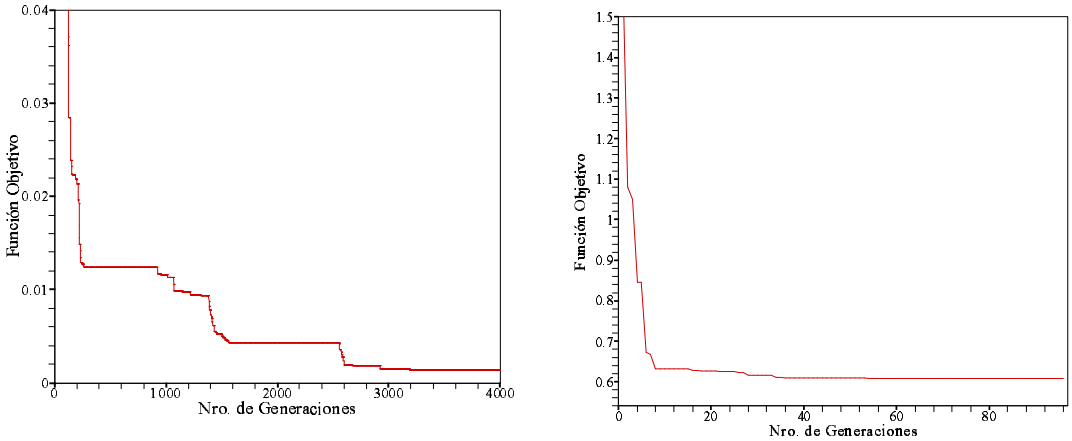


Figura 11. Evolución de la detección de la cavidad para el Ejemplo 2



(a) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=1{,}36x10^{-3})$

(b) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=6{,}09x10^{-1})$

Figura 12. Evolución de las funciones objetivo para el Ejemplo 2

Similar ocurre con el Ejemplo 2. En las Figuras 11a hasta 11d se observa el movimiento de las cargas puntuales, localizando la cavidad, hasta alcanzar la convergencia en 4000 generaciones del AGs. La evolución de las dos funciones objetivos se observa en las Figuras 12a y 12b. Las Figuras 13a-13d y 14a-14b, representan la evolución de la detección y forma de la cavidad para el Ejemplo 3.

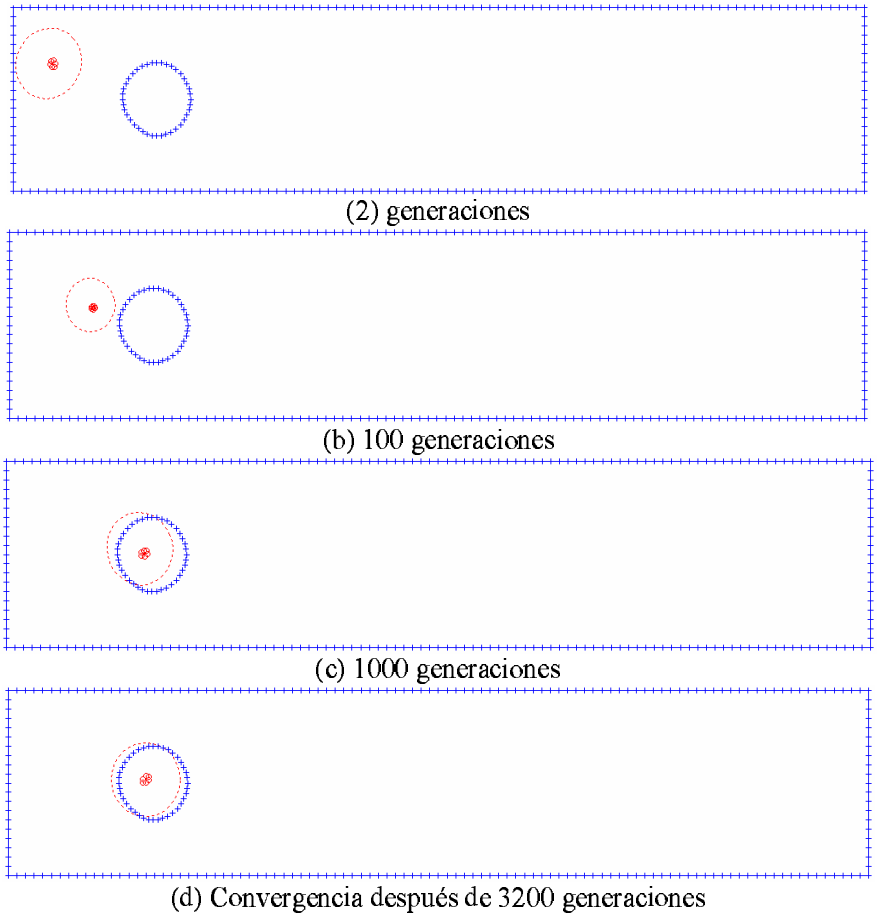
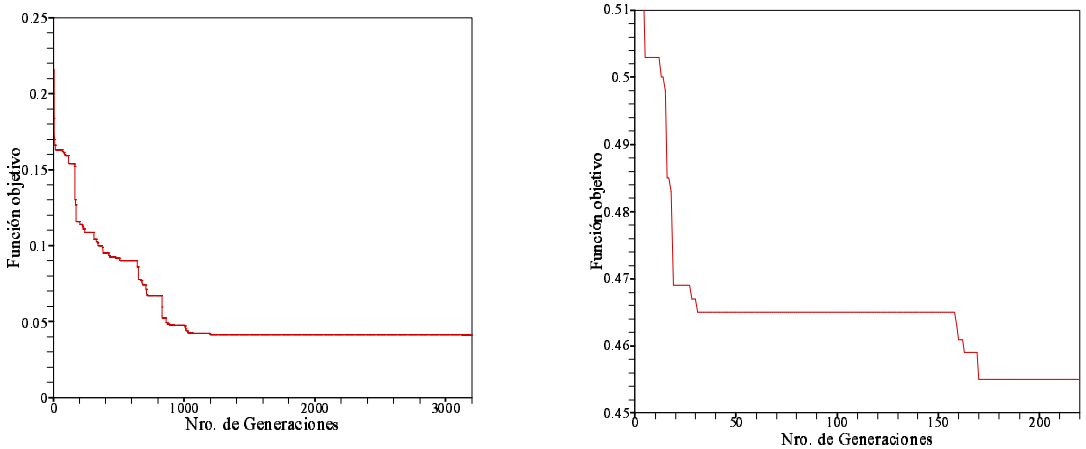


Figura 13. Evolución de la detección de la cavidad para el Ejemplo 3



(a) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=4{,}15x10^{-2})$

(b) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=4{,}55x10^{-1})$

Figura 14. Evolución de las funciones objetivo para el Ejemplo 3

Se toma como modelo al Ejemplo 2 y se le añade a los resultados de los desplazamientos medidos en el contorno (Figura 8b) un error aleatorio de $\pm 1x10^{-8}[m]$ que pudiera corresponder a la precisión del instrumento de medición. Se realiza el mismo procedimiento de detección de cavidades y se obtiene para la función objetivo 1, la evolución de las cargas puntuales hasta lograr ubicar la cavidad, alcanzando la convergencia después de 2600 generaciones. Ver las Figuras 15a-15d. En la Figura 16 se aprecia la evolución de la función objetivo 2 que permite detectar la forma de la cavidad, logrando la convergencia en 110 generaciones.

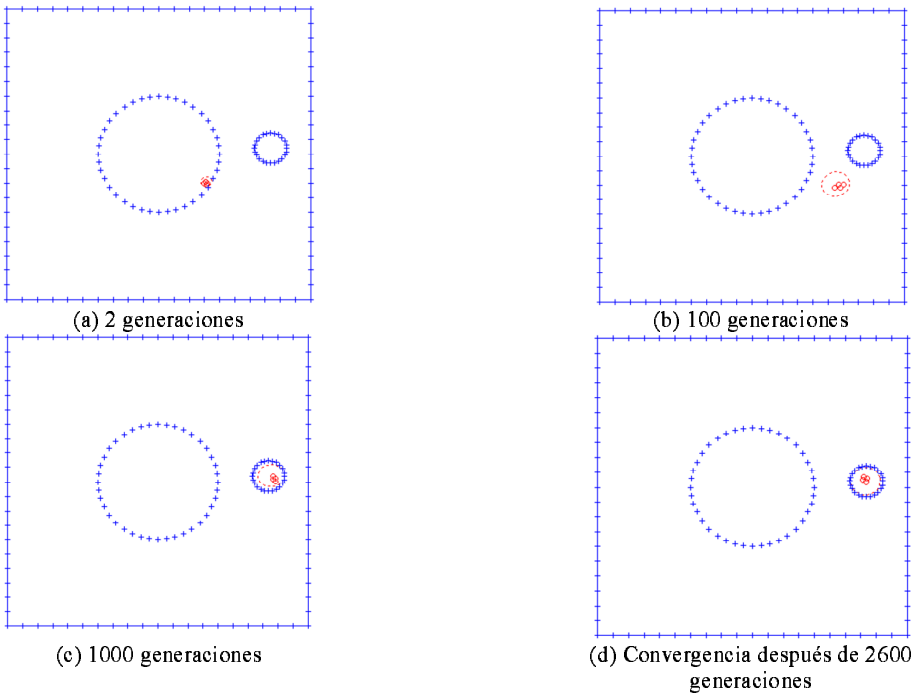
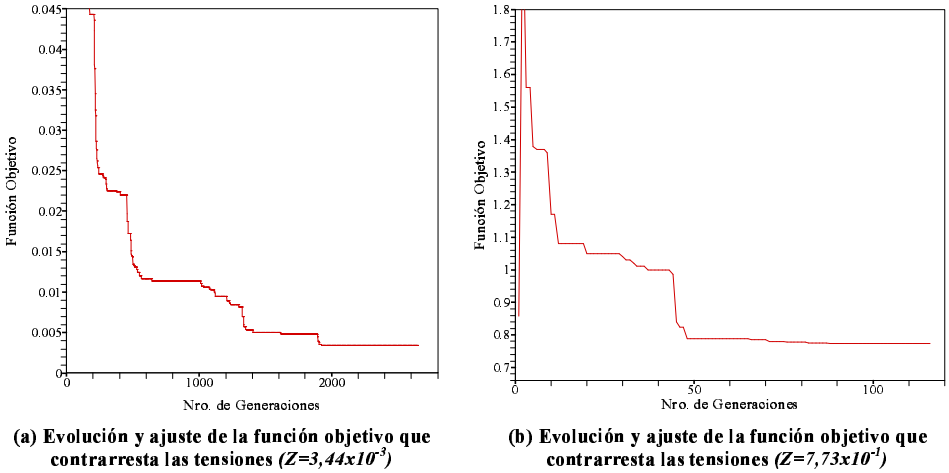


Figura 15. Evolución de la detección de la cavidad para el Ejemplo 2 con un error de desplazamiento en el contorno de $\pm 1x10^{-8}[m]$



(a) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=3,44x10^{-3})$

(b) Evolución y ajuste de la función objetivo que contrarresta las tensiones $(Z=7,73x10^{-1})$

Figura 16. Evolución de las funciones objetivo para el Ejemplo 2 con un error de desplazamiento en el contorno de $\pm 1x10^{-8}[m]$

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método de superposición singular de cargas puntuales para la solución de problemas geométricos inversos que simula de manera eficiente las cavidades en problemas de elastostática. Una serie de problemas en 2-D demostraron la habilidad y versatilidad del método y su satisfactoria ubicación de las cavidades. Se ha integrado el método de los AGs como herramienta de optimización con el MEC, validando la precisión de la solución en configuraciones geométricas regulares o irregulares, con cavidades simples o múltiples. Los resultados numéricos han provenido de los problemas directos haciendo uso del MEC, aprovechando la ventaja de que con el mismo no se requiere remallado en el interior del dominio; esto permite la reducción del tiempo computacional. Se ha validado la fortaleza de la combinación del MEC con los AGs, al haberse añadido un error aleatorio en uno de los ejemplos, obteniéndose la convergencia de las funciones objetivos de manera satisfactoria.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su más sincero agradecimiento a la Universidad de Carabobo (Venezuela), University of Central Florida (USA) y Fonacit (Venezuela) por el financiamiento y apoyo institucional para el desarrollo de esta investigación.

REFERENCIAS

1 E.A. Divo, A.J. Kassab, F. Rodríguez, "An efficient singular superposition technique for cavity detection and shape optimization", *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vo. **46**, pp. 1–30, Copyright Taylor & Francis Inc., (2004).

2 T.W. Ulrich, F.A. Moslehy, A.J. Kassab, "A BEM based pattern search solution for a class of inverse elastostatic problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **33**, Nº 15, pp. 2123–2131, Copyright, (1996).

3 A.J. Kassab, F.A. Moslehy, A.B. Daryapurkar, "Nondestructive detection of cavities by an inverse elastostatics boundary element method", *J. Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. **13**, pp. 45 - 55, (1994).

4 A.J. Kassab, F.A. Moslehy, T.W. Ulrich, "Inverse boundary element solution for locating subsurface cavities in thermal and elastostatic problems", In Proc. IABEM-95, Computational Mechanics '95, Hawaii, July 30–August 3 (Eds. Atluri, Yagawa and Cruse), pp. 3024-3029, Springer, Berlin, (1995).

5 G. Rus, R. Gallego, "Boundary integral equation for inclusion and cavity shape sensitivity in harmonic elastodynamics", *J. Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. **29**, pp. 77 - 91, (2005).

6 E.A. Divo, A.J. Kassab, F. Rodríguez, "Characterization of space dependent thermal conductivity with a BEM-Based genetic algorithm", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 37, Nº 8, pp. 845 - 877, (2000).

7 M. Cerrolaza, W. Annicchiarico, M. Martinez M, "Optimization of 2D boundary element models using β-splines and genetic algorithms", *Engineering Anal. with Bound. Elem*, Vol. **24**, Nº 5, pp. 427-440,(2000).

8 C. Müller-Karger, C. González, M.H. Aliabadi, M. Cerrolaza, "Three dimensional BEM and FEM stress analysis of the human tibia under pathological conditions", *J. of Comp. Mod. In Eng. and Sciences*, Vol. **2**, Nº 1, pp. 1-13, (2001).

9 W. Annicchiarico, M. Cerrolaza, "An Evolutionary approach for the shape optimization of general boundary elements models, *Electronic Journal of Boundary Elements*", Vol. **2**, (2002).

10 W. Annicchiarico, M. Cerrolaza, "A 3D boundary element optimization approach based on genetic algorithms and surface modelling", *Eng. Anal. With Bound. Elem*, Vol. **28**, Nº 11, pp. 1351-1361, (2004).

11 W. Annicchiarico, G. Martínez, M. Cerrolaza, "Boundary elements and β-spline modelling for medical applications", *J. of App. Math. Mod*, Vol. **31**, Nº 2, pp. 194-208, (2007).

12 G. Martínez, M. Cerrolaza, "A bone adaptation integrated approach using BEM", *J. Eng. Anal. With Bound. Elem.*, Vol. **30**, pp. 107-115, (2006).

13 C.A. Brebbia, J. Dominguez, "Boundary element, an introductory course", *Computational Mechanics Publ.*, pp. 134-250, Boston, co-published with McGraw-Hill, New York, (1989).

14 J.H. Kane,"*Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1994).