

Geodesic Domes

by Christopher J. Kitrick

Résumé

Topologie structurale #11, 1985

Les dômes géodésiques

Cet article présente un bref examen de la classification géodésique, d'autres critères géodésiques utiles aux concepteurs et une solution au problème de la subdivision de la sphère, en plus d'une longue bibliographie sur les géodésiques.

Abstract

Structural Topology #11, 1985

This paper presents a short review of geodesic classification, other useful geodesic criteria for designers and a solution to a spherical subdivision problem, plus an extended bibliography on geodesics.

La classification géodésique. La classification géodésique actuelle se fonde sur trois œuvres maîtresses: (Goldberg 1937), (Casper & Klug 1963) et (Clinton 1971). Un bon exposé sur la classification qui en résulte se trouve dans (Coxeter 1972) et un autre encore plus complet dans (Wenninger 1979). Les **Figures 1, 2 et 3** illustrent la classification sur l'icosaèdre $\{3, 5\}_{b,c}$. Les indices b et c sont utilisés pour indiquer la fréquence. Les combinaisons de b et c se subdivisent facilement en trois classes: la classe I (**Figure 1**) où $b > 0$ et $c = 0$, la classe II (**Figure 2**) où $b = c \neq 0$, et la classe III (**Figure 3**) où $b \neq c$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$. La classe III peut être soit droitère $\{3, 5\}_{b,c}$, soit gauchère $\{3, 5\}_{c,b}$. Les formules permettant d'obtenir le nombre de sommets, de faces et d'arêtes sont: $T = b^2 + bc + c^2$, $V = 10T + 2$, $F = 20T$ et $E = 30T$. Cette classification vaut aussi pour le tétraèdre et l'octaèdre.

D'autres critères géodésiques. Les chercheurs ont développé de nombreuses méthodes pour subdiviser la surface d'une sphère en plusieurs triangles presque équilatéraux, habituellement à partir de l'icosaèdre. Malheureusement, il n'existe aucune classification générale de ces méthodes de subdivision. Toutefois, un certain nombre de critères ont été utilisés pour comparer différentes méthodes de subdivision.

Geodesic Classification. Current geodesic classification is based on three main works: (Goldberg 1937), (Casper & Klug 1963) and (Clinton 1971). A good explanation of the resultant classification can be found in (Coxeter 1972) and more fully in (Wenninger 1979). **Figures 1, 2 and 3** illustrate the classification on the icosahedron $\{3, 5\}_{b,c}$. Subscripts b and c are used to denote frequency. The combinations of b and c break easily into three classes: class I (**Figure 1**) where $b > 0$ and $c = 0$, class II (**Figure 2**) where $b = c \neq 0$, and class III (**Figure 3**) where $b \neq c$, $b \neq 0$ and $c \neq 0$. Class III can either be right-handed $\{3, 5\}_{b,c}$ or left-handed $\{3, 5\}_{c,b}$. The formulas for the number of vertices, faces and edges are: $T = b^2 + bc + c^2$, $V = 10T + 2$, $F = 20T$ and $E = 30T$. This classification extends to the tetrahedron and the octahedron.

Other Geodesic Criteria. Researchers have developed numerous methods for subdividing the spherical surface into many nearly equilateral triangles, typically working with the icosahedron. Unfortunately there is no general classification of these subdivision methods. None the less a number of criteria have been used to compare different subdivision methods.

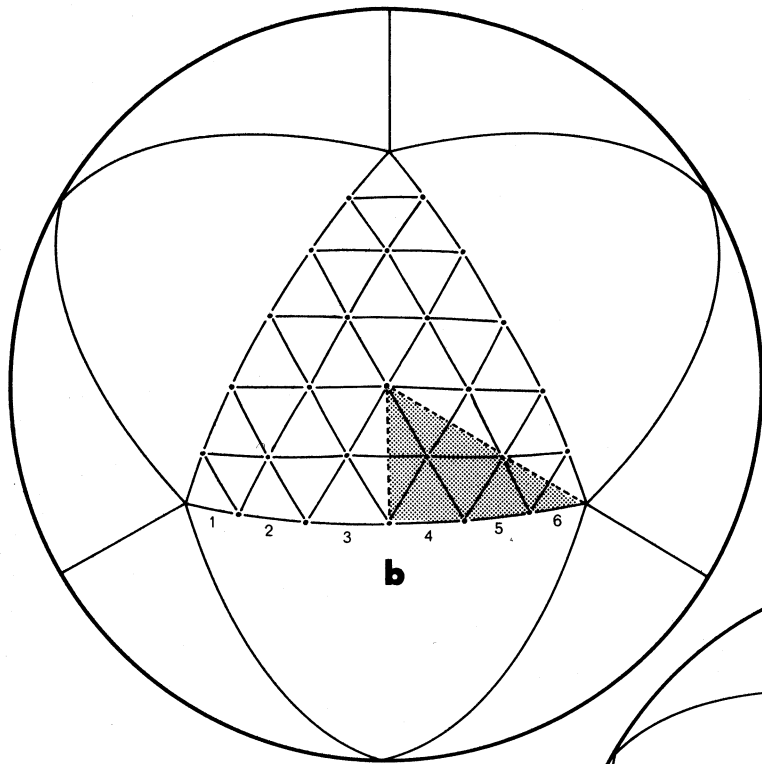


Figure 1

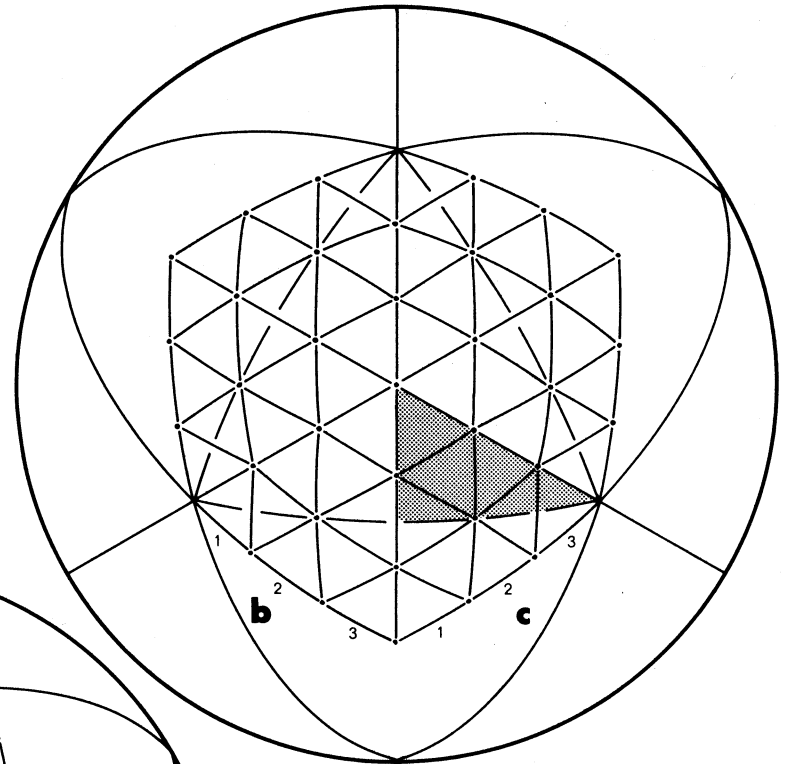


Figure 2

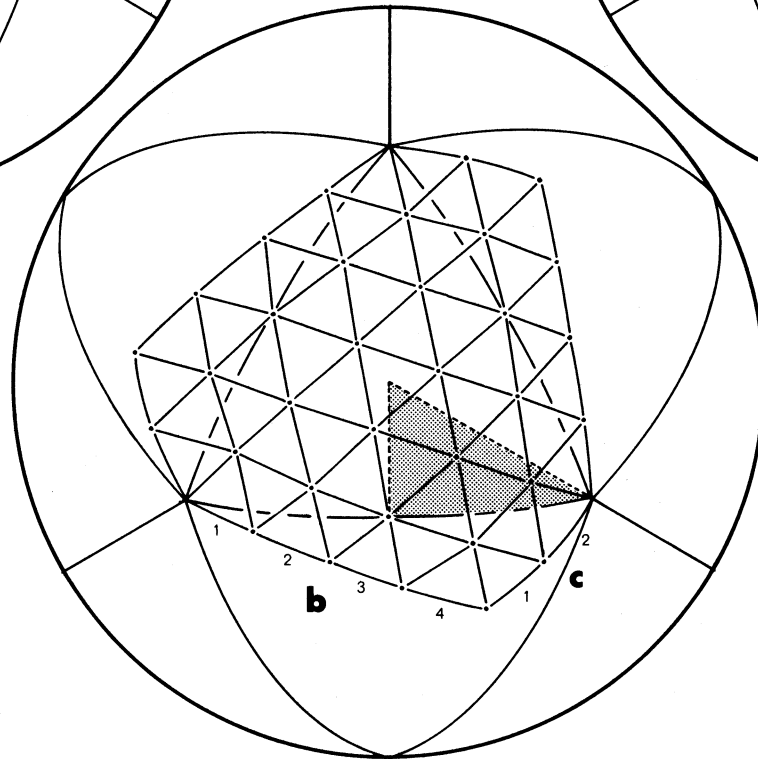


Figure 3

Voici une liste de cinq de ces critères, le quatrième étant à notre avis peu utilisé bien qu'instructif:

1. le nombre de sommets non superflus
2. le nombre de faces non superflues
3. le nombre d'arêtes non superflues
4. la déviation angulaire (AD) — la déviation angulaire moyenne de tous les triangles par rapport au triangle équiangle. La formule générale est:

$$AD = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 |60^\circ - a_{ij}| \right)$$

où n est le nombre de triangles (**Figure 4**)

5. le rapport L/S — le rapport de la corde la plus longue (L) à la corde la plus courte (S). Pour une sphère de rayon unitaire, la relation entre la corde et l'angle d'un arc est: corde = 2 sin (arc/2). La valeur limite du rapport L/S est de 2 sin (36°) ou 1,175 571.

Les concepteurs de dômes géodésiques de grande envergure auront habituellement fort avantage à sélectionner une méthode de subdivision qui optimise le premier, le second ou le troisième critère dépendamment des procédures employées pour la conception, la production et l'érection. Les méthodes qui impliquent de fortes déviations angulaires engendrent habituellement des triangles aux angles assez aigus et obtus, ce qui peut soulever des objections esthétiques, alors que les méthodes qui n'impliquent que de faibles déviations angulaires donnent des résultats d'apparence plus uniforme. Le rapport L/S ne joue habituellement pas un rôle important dans la conception des dômes malgré l'intérêt dont il fait l'objet en mathématiques.

La géométrie par rapport à la performance structurale. Bien que les critères que nous avons mentionnés soient tous directement liés à la géométrie des dômes, et qu'ils puissent se révéler utiles du point de vue pratique ou esthétique, il n'a encore jamais été démontré que les différentes méthodes de subdivision aient une influence directe sur le comportement structural. Ce domaine est mûr pour la recherche.

La valeur limite du rapport L/S — 2 sin (36°). Depuis plusieurs années, des chercheurs ont tenté de dériver une méthode de subdivision pour l'icosaèdre qui maintiendrait le rapport L/S à sa valeur limite de 2 sin (36°) (soit 1,175 571) ou plus bas indépendamment de la fréquence du dôme. Cette limite se fonde sur la triangulation autour d'un sommet de l'icosaèdre (**Figures 5 et 6**) qui forme un pentagone non planaire. Lorsque la fréquence augmente, l'angle dièdre entre les cinq triangles de ce pentagone tend vers 180 degrés. Pour une fréquence infinie, les cinq triangles forment un pentagone plan (**Figures 5 et 6**) pour lequel le rapport a/b est de 2 sin (36°).

De l'icosaèdre $\{3, 5\}_{1,0}$ au $\{3, 5\}_{\infty,\infty}$ le registre du rapport a/b va de 1 à 2 sin (36°). De par le passé, toutes les méthodes de subdivision étaient incapables de maintenir le rapport L/S total à une valeur égale ou inférieure à la valeur limite du rapport a/b pour toutes les fréquences. J'ai développé une famille de neuf méthodes de subdivision qui comporte une solution qui maintient le rapport L/S à une valeur inférieure ou égale à la valeur limite du rapport a/b. La solution est valide pour toutes les fréquences de géodésiques de classe II. Voici donc une explication détaillée de la méthode.

Following is a list of five such criteria, the fourth I find little used but informative:

1. Number of nonredundant vertices
2. Number of nonredundant faces
3. Number of nonredundant edges
4. Angular deviation (AD) — Average deviation of all triangles from being equiangular. The general formula is:

$$AD = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 |60^\circ - a_{ij}| \right)$$

where n equals the number of triangles (**Figure 4**)

5. L/S ratio — The ratio of the longest (L) chord to the shortest (S) chord. The relation of the chord to an arc angle when the sphere's radius is unity is: chord = 2 sin (arc/2). The L/S ratio limit is 2 sin (36°) or 1.175571.

Designers of large scale geodesic domes will usually find it very advantageous to select a subdivision method that optimizes any of the first three criteria depending on the actual design, production, or erection procedure to be employed. Methods with large angular deviations usually contain rather acute/obtuse triangles which may become an aesthetic consideration, while methods with small deviations appear more uniform in appearance. The L/S ratio usually does not play an important role in dome design though it has been a mathematical goal.

Geometry versus Structural Performance. Though the previously mentioned criteria are all directly related to dome geometry, and can be of practical or aesthetic value, different subdivision methods have never been shown to directly influence structural behavior. This is an area ripe for research.

The L/S Ratio Limit — 2 sin (36°). For many years researchers have attempted to derive a subdivision method for the icosahedron that would keep the L/S ratio at or below the limit of 2 sin (36°) (i.e. 1.175571) regardless of dome frequency. The limit is based on the triangulation around the icosahedron's vertex (**Figures 5 and 6**) which forms a nonplanar pentagon. As the frequency increases the dihedral angles between the five pentagonal triangles approach 180 degrees. When the frequency is infinite the five triangles form a plane pentagon where (**Figures 5 and 6**) the a/b ratio is 2 sin (36°).

From the icosahedron $\{3, 5\}_{1,0}$ to $\{3, 5\}_{\infty,\infty}$ the range of the a/b ratio is 1 to 2 sin (36°). In the past all subdivision methods could not keep the total L/S ratio less than or equal to the limiting a/b ratio at any frequency. I have developed a family of nine subdivision methods that contains one solution which keeps the L/S ratio less than or equal to the a/b ratio limit. The solution is valid for any frequency geodesics of class II. Following is a detailed explanation of the method.

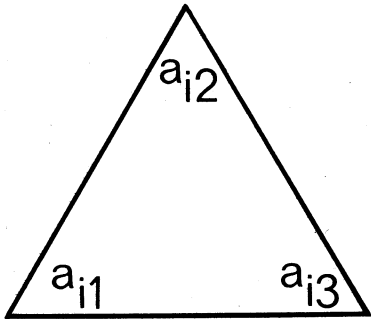


Figure 4

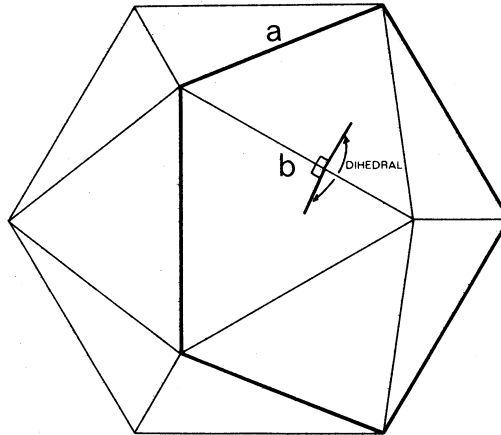


Figure 5

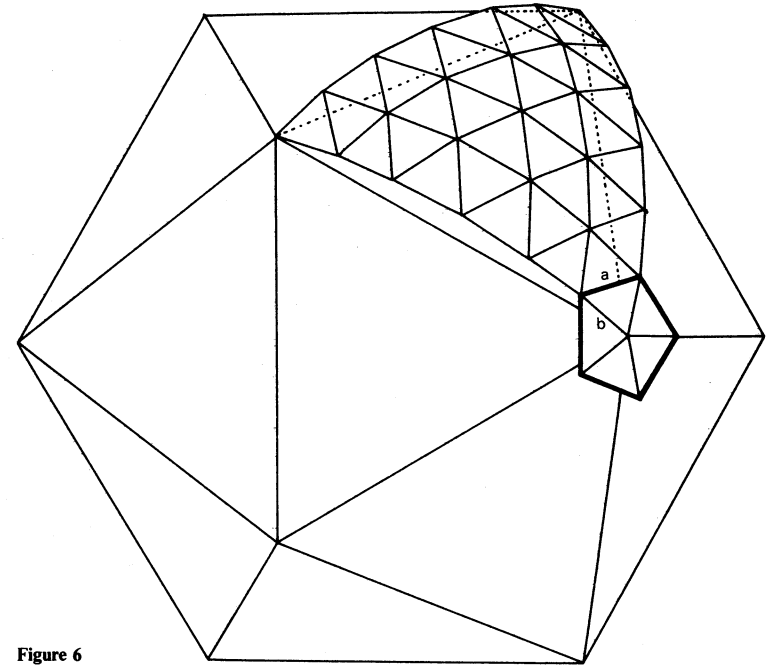


Figure 6

Pour effectuer le calcul des angles véritables, seulement 1/6 du triangle de l'icosaèdre (Figure 3, aire ombrée) ou 1/120 de la sphère entière est utilisé. Cette méthode implique la création d'une grille rectangulaire sphérique à l'intérieur de ce triangle rectangle sphérique. La fréquence de la grille peut être n'importe quel nombre entier. La relation entre la fréquence de la grille (F) et la fréquence géodésique est donnée par $F = b$ (pour la classe II seulement). Le processus de dérivation des valeurs véritables des arcs est le suivant:

1. Le côté c est divisé F fois (Figure 7).
2. Des pattes perpendiculaires au côté b sont tracées entre le côté c et le côté b (Figure 8). Celles-ci ne divisent pas le côté b en segments égaux.
3. Les hauteurs des pattes sont maintenues constantes afin de définir le côté a et la grille interne (Figure 9).

Formules: Les formules donnent la longueur des arcs entre deux points quelconques de la grille (x_1, y_1) et (x_2, y_2) situés à l'intérieur du triangle rectangle sphérique.

Note: les valeurs des nombres entiers $-y$ sont valides seulement si $|-y_1| = |y_2|$.

$N = c/F$, c'est-à-dire N (en degrés) est égal au côté c divisé par F, la fréquence de la grille.

$$x_{1,2}^{\circ} = \text{atn}(\tan(N*(F - x_{1,2})) \cos(36^{\circ}))$$

$$y_{1,2}^{\circ} = \text{asn}(\sin(N*y_{1,2}) \sin(36^{\circ}))$$

$$d = |x_1^{\circ} - x_2^{\circ}|$$

$$\text{arc}(x_1, y_1)(x_2, y_2) = \text{acs}(\cos y_1^{\circ} \cos y_2^{\circ} \cos d + \sin y_1^{\circ} \sin y_2^{\circ})$$

For purposes of calculating actual angles only 1/6 of the icosahedron's triangle (Figure 3, shaded area) or 1/120 of the entire sphere is used. This method involves the creation of a spherical rectangular grid within this right spherical triangle. The grid can be any integer frequency. The relation of grid frequency (F) to the geodesic frequency is $F = b$ (Class II only). The process of deriving actual arc values is as follows:

1. Side c is divided F times (Figure 7).
2. Perpendicular legs are dropped from side c to side b (Figure 8). Side b is not divided into equal segments.
3. Leg heights are kept constant to define side a and the internal grid (Figure 9).

Formulas: The formulas give the arc distance between any two grid points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) inside the right spherical triangle.

Note: $-y$ integer values are valid only if $|-y_1| = |y_2|$.

$N = c/F$, i.e. N (degrees) equals side c divided by the grid frequency F.

$$x_{1,2}^{\circ} = \text{atn}(\tan(N*(F - x_{1,2})) \cos(36^{\circ}))$$

$$y_{1,2}^{\circ} = \text{asn}(\sin(N*y_{1,2}) \sin(36^{\circ}))$$

$$d = |x_1^{\circ} - x_2^{\circ}|$$

$$\text{arc}(x_1, y_1)(x_2, y_2) = \text{acs}(\cos y_1^{\circ} \cos y_2^{\circ} \cos d + \sin y_1^{\circ} \sin y_2^{\circ})$$

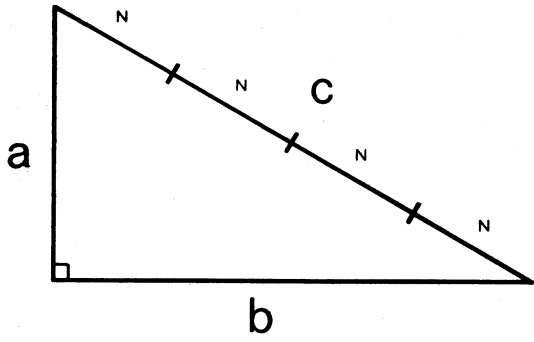


Figure 7

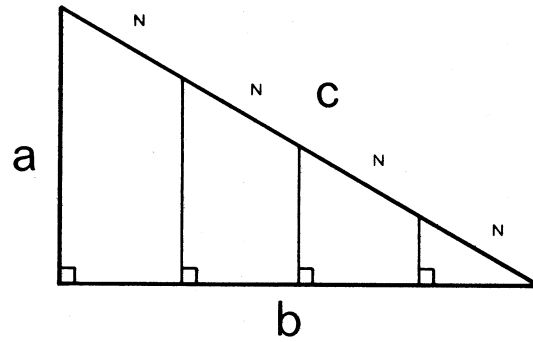


Figure 8

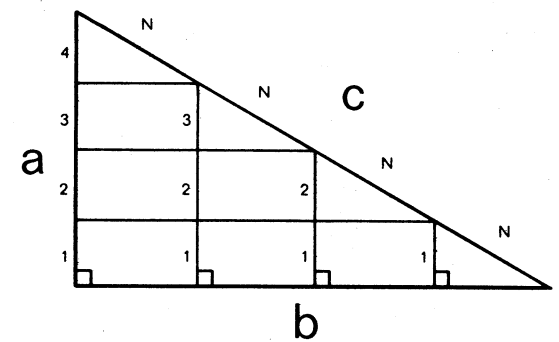


Figure 9

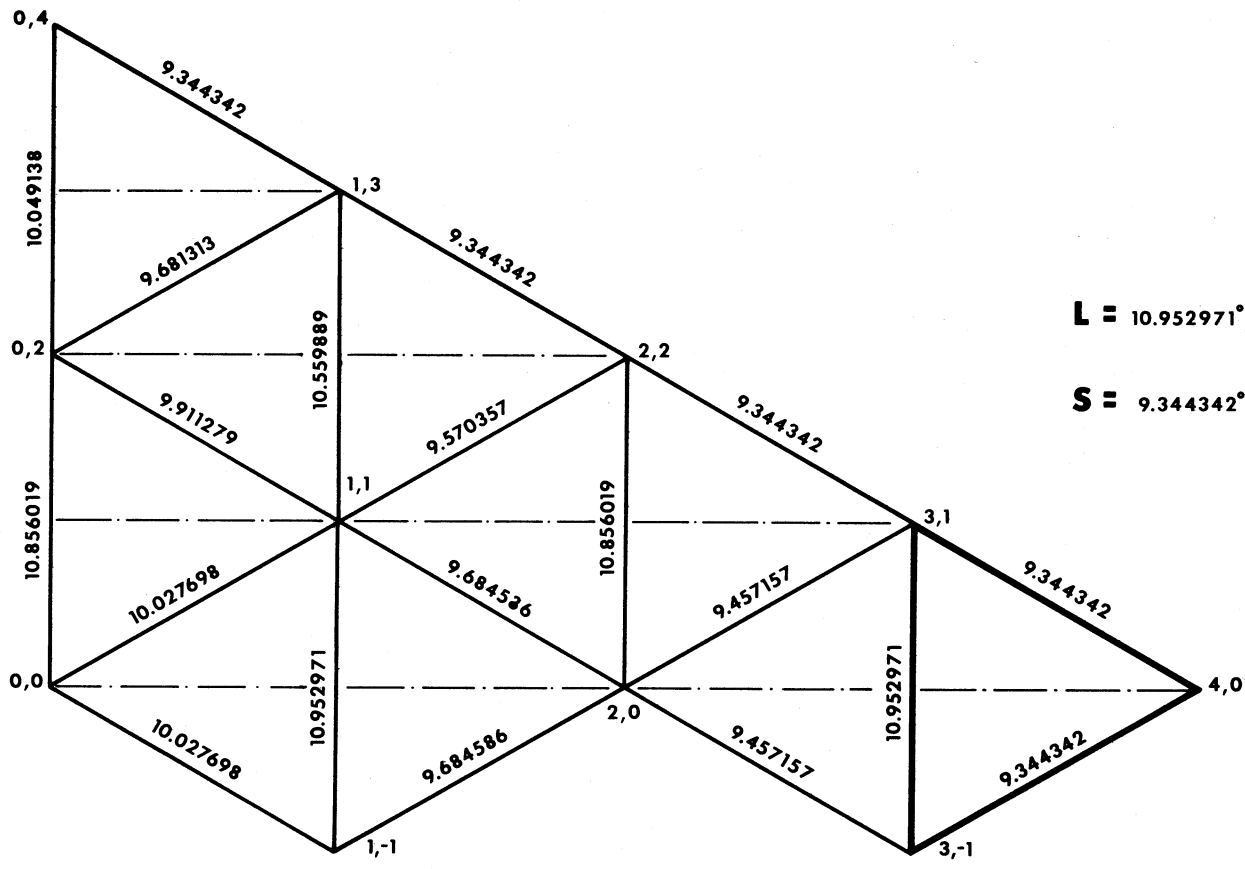


Figure 10

Exemple: La **Figure 10** illustre un icosaèdre $\{3, 5\}_{4,4}$ avec les valeurs d'arc correspondantes en degrés.

La valeur d'arc la plus longue (L) est de 10,952 971 degrés, pour une corde de 0,190 874, et la valeur d'arc la plus courte (S) est de 9,344 342 degrés, pour une corde de 0,162 909. Par conséquent, le rapport L/S est de 1,171 665. Pour n'importe quelle fréquence, la méthode affichera un rapport L/S inférieur ou égal à la valeur limite de $2 \sin(36^\circ)$ (soit 1,175 571).

Adresse de l'auteur:

Christopher J. Kitrick
P.O. Box 15523
Cincinnati, Ohio
45215 U.S.A.

Example: **Figure 10** illustrates an icosahedron $\{3, 5\}_{4,4}$ with corresponding arc values in degrees.

The longest (L) arc value is 10.952971 degrees or chord 0.190874 and the shortest (S) arc value is 9.344342 degrees or chord 0.162909. Consequently the L/S ratio is 1.171665. At any frequency the method will exhibit an L/S ratio less than or equal to the $2 \sin(36^\circ)$ (i.e. 1.175571) limit ratio.

Address of the author:

Christopher J. Kitrick
P.O. Box 15523
Cincinnati, Ohio
45215 U.S.A.

Bibliographie — Bibliography

Casper, D.L.D. and Klug, Aaron, "Viruses, Nucleic acid and Cancer", 17th M.D. Anderson Symposium, Williams & Williams, 1963.

Clinton, Joseph D., *Advanced Structural Geometry Studies, Part I — Polyhedral Subdivision Concepts for Structural Applications*, NASA CR-1734, 1971.

Coxeter, H.S.M., "Virus Macromolecules and Geodesic Domes", *A Spectrum of Mathematics*, 1972, p. 98-107.

Fuller, R. Buckminster, *The Dymaxion World of Buckminster Fuller*, with Robert Marks, Doubleday & Co., Inc., 1960.

Fuller, R. Buckminster, "Geodesic Dome", Patent #2,682,235, 1954.

Gheorghiu, Adrian and Dragomir, Virgil, *Geometry of Structural Forms*, Applied Science Publishers Ltd., 1978.

Goldberg, Michael, "A Class of Multi-symmetric Polyhedra", *Tohoku Math Journal*, 1937, p. 104-108.

Kenner, Hugh, *Geodesic Math and How to Use It*, University of California Press Ltd., 1976.

Makai, Endre and Tarnai, Tibor, "On Polyhedra with Approximately Equal Edges", Manuscript, Mathematics Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1973.

Makai, Endre and Tarnai, Tibor, "On Some Geometrical Problems of Single-Layered Spherical Grids with Triangular Network", University of Surrey, Sept. 1975, p. 675-682.

Makai, Endre and Tarnai, Tibor, "Morphology of Spherical Grids", *Acta Technica Academy Science Hungary* 83, 1976, p. 247-283.

Popko, Edward, *Geodesics*, University of Detroit Press, 1968.

Stuart, Duncan R., "On the Orderly Subdivision of Spheres", Student Publication of the North Carolina State College, Vol. 5, No. 1, 1954.

Stuart, Duncan R., "A Report on the Triacon Gridding System for Spherical Surfaces", Skybreak Carolina Corp., 1952.

Tarnai, Tibor, "Spherical Grids of Triangular Network", *Acta Technica Academy Science Hungary* 76, 1974, p. 307-336.

Wenninger, Magnus J., "Geodesic Domes by Euclidean Construction", *The Mathematics Teacher*, Oct. 1978, Vol. 71, No. 7.

Wenninger, Magnus J., *Spherical Models*, Cambridge University Press, 1979, p. 98-100, 120-121.