

A Network Theory Approach to the Rigidity of Skeletal Structures.

Part III. An Electric Model of Planar Frameworks

András Recski*

Résumé

Topologie structurale #9, 1984

Une approche de la rigidité des structures squelettiques par la théorie des réseaux.

Troisième partie. Un modèle électrique des charpentes planaires

Dans le précédent article [6], nous avons introduit les formules topologiques pour des structures squelettiques bidimensionnelles et tridimensionnelles (voir également les articles [7] et [9] s'y rattachant). Étant donné que dans le cas des structures bidimensionnelles, ces formules sont complètement analogues dans leur forme à celles de la théorie des réseaux électriques [1, 4], on peut alors obtenir un modèle électrique pour des charpentes planaires, ce modèle reflétant non seulement les caractéristiques qualitatives, mais aussi certaines caractéristiques quantitatives des charpentes.

1. Préliminaires

Soit N un réseau composé de résistances* et de sources de courant à voltage contrôlé. Soit G son graphe de réseau (où les résistances, les senseurs de voltage (circuits ouverts) et les sources contrôlées correspondent tous aux arêtes); le graphe de voltage G_v et le graphe de courant G_i sont obtenus à partir de G en supprimant toutes les arêtes de sources de courant pour le premier, ou toutes les arêtes de senseurs de voltage pour le second. Par exemple, le réseau de la **Figure 1a** est constitué de trois résistances et de deux sources contrôlées; les graphes correspondants sont illustrés respectivement par les **Figures 1b, c**. Remarquez que la source contrôlée à paramètre, disons g_4 , correspond à deux arêtes de G , indiquées par 4C et 4S (C et S représentant l'arête de contrôle et l'arête de source, respectivement).

* Les termes suivis d'un astérisque sont expliqués dans le glossaire qui se trouve à la fin de l'article.

Abstract

Structural Topology #9, 1984

In the previous paper [6] we introduced the topological formulae for 2- and 3-dimensional skeletal structures (see also the related works of [7] and [9]). Since, in the 2-dimensional case, these formulae are in complete formal analogue to those of electric network theory [1, 4], an electric model for planar frameworks can be obtained, reflecting not only the qualitative but some quantitative features of the frameworks as well.

1. Preliminaries

Let N be a network composed of resistors* and voltage controlled current sources*. Let G denote its network graph (where resistors, voltage sensors (open circuits) and controlled sources all correspond to edges); the voltage graph G_v and the current graph G_i are obtained from G by deleting all the current source edges and by deleting all the voltage sensor edges, respectively. For example, the network of **Figure 1a** consists of three resistors and two controlled sources; the corresponding graphs are respectively shown on **Figures 1b, c**. Observe that the controlled source with parameter, say, g_4 corresponds to two edges in G , denoted by 4C and 4S (C and S for Controlling edge and for Source edge respectively).

* Terms marked with an asterisk are explained in the glossary at the end of the article.

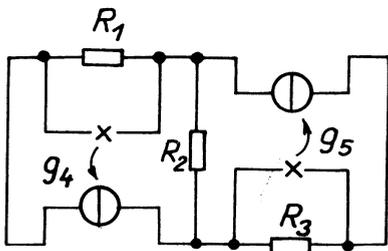


Figure 1a

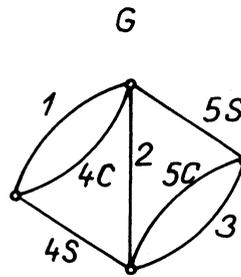


Figure 1b

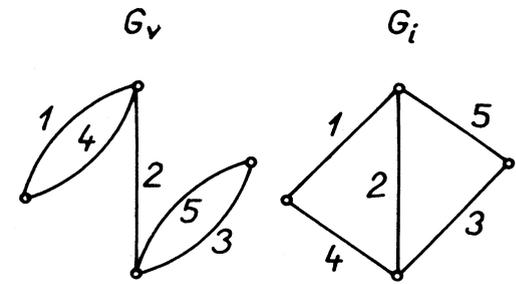


Figure 1c

Si nous considérons toutes les équations du réseau N, obtenues par les lois de Kirchhoff*, par les lois de Ohm et par les équations (par exemple $i_{4S} = g_4 \cdot u_{4C}$; $i_{4C} = 0$ à la Figure 1) des sources contrôlées, alors le déterminant de la matrice des coefficients de ce système d'équations peut être obtenu par les arbres communs du graphe de voltage G_v et du graphe de courant G_i de N, voir [1, 4]. Par exemple, le système d'équations pour le réseau de la Figure 1 est

If we consider all the equations of the network N, obtained from Kirchhoff's laws*, from Ohm's laws and from the equations (e.g. $i_{4S} = g_4 \cdot u_{4C}$; $i_{4C} = 0$ on Figure 1) of the controlled sources, then the determinant of the coefficient matrix of this system of equations can be obtained from the common trees of the voltage graph G_v and the current graph G_i of N, see [1, 4]. For example, the system of equations for the network of Figure 1 is

$$\begin{array}{rcccccccc}
 u_1 & -u_2 & & & +u_{4S} & & & & = 0 \\
 u_1 & & & & -u_{4C} & & & & = 0 \\
 & -u_2 & +u_3 & & & +u_{5S} & & & = 0 \\
 & & u_3 & & & & -u_{5C} & & = 0 \\
 & & & & & & & & & i_1 & & +i_{4C} - i_{4S} & & = 0 \\
 & & & & & & & & & i_2 & & +i_{4S} & +i_{5S} & = 0 \\
 & & & & & & & & & i_3 & & +i_{5C} - i_{5S} & = 0 \\
 g_1 u_1 & & & & & & & & & -i_1 & & & & = 0 \\
 & g_2 u_2 & & & & & & & & -i_2 & & & & = 0 \\
 & & g_3 u_3 & & & & & & & -i_3 & & & & = 0 \\
 & & & g_4 u_{4C} & & & & & & & -i_{4S} & & & = 0 \\
 & & & & & & & & & & i_{4C} & & & = 0 \\
 & & & & & & & & & & & -i_{5S} & & = 0 \\
 & & & & & & & & & & & & i_{5C} & = 0
 \end{array}$$

où les quatre premières équations sont les lois de voltage de Kirchhoff, et les trois suivantes, les lois de courant de Kirchhoff, suivies des lois de Ohm (le symbole g_k est utilisé pour R_k^{-1}) et finalement des équations pour les contrôles et pour les circuits ouverts. Les quantités g_1, g_2, g_3 (les valeurs réciproques des résistances) sont appelées des admittances; les quantités g_4, g_5 (des équations de contrôle) sont appelées des admittances de transfert. Dans ce qui suit, nous utiliserons le mot admittance pour les deux types de g_i . Maintenant, le déterminant de la matrice des coefficients (avec uniquement des entrées non nulles) est

where the first four equations are Kirchhoff's voltage laws, the next three ones are Kirchhoff's current laws, then follow Ohm's laws (the symbol g_k is used for R_k^{-1}) and finally the equations for the controls and for the open circuits. The quantities g_1, g_2, g_3 (the reciprocal values of the resistances) are called admittances; the quantities g_4, g_5 of the control equations are called transfer admittances. In what follows, we use the word admittance for both types of the g_i 's. Now, the determinant of the coefficient matrix (with the non-zero entries given only) is

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -1 & & 1 & & & & & \\
1 & & & -1 & & & & & \\
& -1 & 1 & & & 1 & & & \\
& & 1 & & & -1 & & & \\
\hline
& & & & 1 & & 1 & -1 & \\
& & & & & 1 & & 1 & 1 \\
\hline
& & & & & 1 & & 1 & -1 \\
g_1 & & & & -1 & & & & \\
& g_2 & & & & -1 & & & \\
& & g_3 & & & & -1 & & \\
& & & g_4 & & & & -1 & \\
& & & & & & & 1 & \\
& & & & g_5 & & & & -1 \\
& & & & & & & & 1
\end{array}$$

$$= g_2(g_1 - g_4)(g_3 - g_5) = g_1g_2g_3 - g_1g_2g_5 - g_2g_3g_4 + g_2g_4g_5$$

Remarquez que les membres de l'expansion sont en correspondance biunivoque avec les arbres communs $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ et $\{2, 4, 5\}$ des graphes G_v et G_i de la Figure 1.

D'autre part, considérez une charpente planaire F et fixez-la dans le plan avec une punaise au premier joint, et avec un joint sur coulisse [5] ou une tige d'ancrage [7] au second joint. (Si F est rigide, c'est juste suffisant pour fixer chaque point de F dans le plan.) Le système d'équations, qui correspond à la rigidité des tiges de F , devient carré si F contient $2n - 3$ tiges et n joints, puisque les deux colonnes correspondant au premier joint, et une des colonnes correspondant au second joint sont éliminées. Par exemple, la description planaire habituelle de la charpente planaire de la Figure 2a est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
x_1 - x_2 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & y_1 - y_2 & y_2 - y_1 & 0 & 0 \\
x_1 - x_3 & 0 & x_3 - x_1 & 0 & y_1 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 \\
x_1 - x_4 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_1 - y_4 & 0 & 0 & y_4 - y_1 \\
0 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & 0 \\
0 & 0 & x_3 - x_4 & x_4 - x_3 & 0 & 0 & y_3 - y_4 & y_4 - y_3
\end{pmatrix}$$

et si nous fixons cette charpente de la manière indiquée ci-dessus (voir Figure 2b), alors les première, cinquième et sixième colonnes devraient être rayées de \mathbf{A} . Si la matrice carrée qui en résulte est indiquée par \mathbf{W} , alors

$(x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = [(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)][(x_4 - x_1)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_4 - y_1)]$
ou, en introduisant une nouvelle notation

$$\varphi(X) = \prod_{(i,j) \in X} (x_i - x_j) \prod_{(i,j) \in X} (y_i - y_j) \quad \text{pour } X \subseteq E$$

(où E est l'ensemble des tiges de la charpente planaire), nous obtenons

$$(\mathfrak{X}) \quad (x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = \varphi(ab) - \varphi(ae) - \varphi(bd) + \varphi(de)$$

où les membres sont en correspondance biunivoque avec les arbres communs des deux graphes de la Figure 2c. Ici, un des graphes est obtenu en identifiant les joints 1 et 2 (et en supprimant la tige c), tandis que le second graphe est le dual du premier. Il a été démontré [6] que l'analogue de (\mathfrak{X}) est vrai pour toute charpente planaire fixée de cette manière.

Observe that the members of the expansion are in 1-1 correspondence with the common trees $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ and $\{2, 4, 5\}$ of the graphs G_v and G_i of Figure 1.

On the other and, consider a planar framework F and fix it to the plane by a pin at the first joint and by a track [5] or tie-down [7] at the second joint. (If F is rigid, this is just enough to fix every point of F to the plane.) The system of equations, corresponding to the rigidity of the rods of F , turns out to be square if F contains $2n - 3$ rods and n joints, since both columns, corresponding to the first joint are deleted and one of the columns, corresponding to the second joint is eliminated. For example, the usual planar description of the planar framework of Figure 2a is

and if we fix this framework in the above way (see Figure 2b) then the first, fifth and sixth columns should be deleted from \mathbf{A} . If the resulting square matrix is denoted by \mathbf{W} then

$(x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = [(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)][(x_4 - x_1)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_4 - y_1)]$
or, introducing the notation

$$\varphi(X) = \prod_{(i,j) \in X} (x_i - x_j) \prod_{(i,j) \in X} (y_i - y_j) \quad \text{for } X \subseteq E$$

(where E is the set of rods of the planar framework), we obtain

$$(\mathfrak{X}) \quad (x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = \varphi(ab) - \varphi(ae) - \varphi(bd) + \varphi(de)$$

where the members are in 1-1 correspondence with the common trees of the two graphs of Figure 2c. Here one of the graphs is obtained by identifying joints 1 and 2 (and deleting the rod c) while the second graph is the dual of the first. It was shown [6] that the analogue of (\mathfrak{X}) holds for every planar framework fixed in this way.

5^e étape. Concevez un réseau électrique où H est le graphe du réseau, E_3 est l'ensemble des résistances, E_1 est l'ensemble circuits ouverts senseurs de voltage, et E_2 est l'ensemble des sources de courant contrôlées.

Par exemple, si la charpente planaire est celle de la **Figure 3a**, alors les graphes G et G^* sont illustrés à la **Figure 3b**. Puisque $\{e_1, e_3\}$ et $\{f_1, f_3\}$ sont des arbres extraits de G et G^* respectivement, on peut choisir $J = \{1, 3\}$ et alors H comme étant le graphe de la **Figure 3c**. Le réseau final est illustré à la **Figure 3d**; les lettres A, B, C ne servent qu'à faciliter l'identification.

La **Figure 4** illustre deux exemples additionnels (voir également la remarque 1 ci-dessous). En général, tant qu'il n'est question que de structures simples* [8], le procédé est relativement simple: on peut toujours trouver un arbre commun de G et de G^* , et, en utilisant certaines transformations qui respectent le 2-isomorphisme*, cet arbre commun peut constituer un chemin tant en G qu'en G^* . De cette façon, on peut concevoir le modèle électrique de structures même assez complexes, voir **Figure 5**. Si la charpente n'est pas une structure simple, ce sous-graphe commun (pour la 3^e étape) peut ne pas être un arbre; par exemple, c'est un circuit de longueur 4 dans le cas de la structure de la **Figure 6**.

Step 5. Prepare an electric network so that H is the network graph, E_3 is the set of the resistors, E_1 is the set of the open circuit voltage sensors and E_2 is the set of the controlled current sources.

For example, if the planar framework is the one on **Figure 3a** then the graphs G and G^* are shown on **Figure 3b**. Since $\{e_1, e_3\}$ and $\{f_1, f_3\}$ are trees in G and G^* respectively, one can choose $J = \{1, 3\}$ and then H to be the graph on **Figure 3c**. The final network is shown on **Figure 3d**, the letters A, B, C are for the easier identification only.

Figure 4 shows two further examples (see Remark 1 below as well). In general, as long as simple trusses* [8] are considered only, the process is fairly straightforward: one can always find a common tree of G and G^* and, using some transformations which preserve 2-isomorphism*, this common tree can be made a path both in G and G^* . In this way quite complex trusses can easily be modelled, see **Figure 5**. If the framework is not a simple truss, this common subgraph (for Step 3) may not be a tree; for example it is a circuit of length 4 in the case of the truss of **Figure 6**.

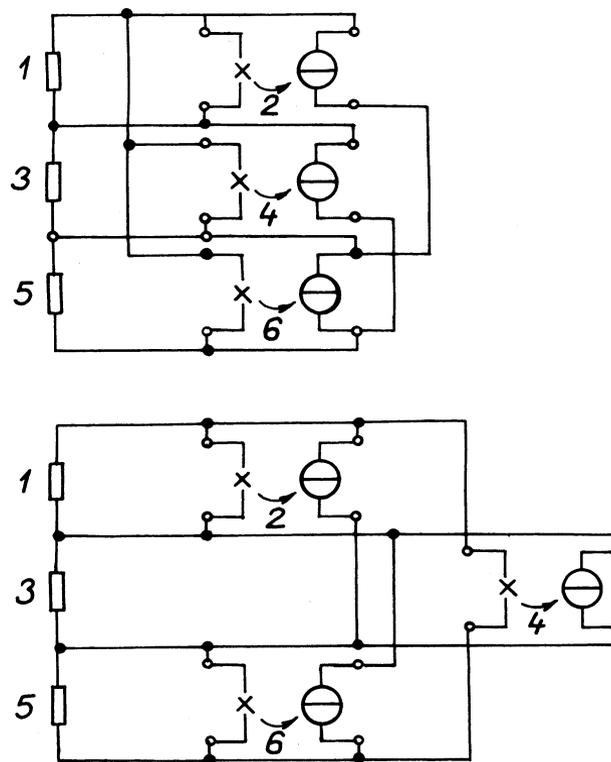
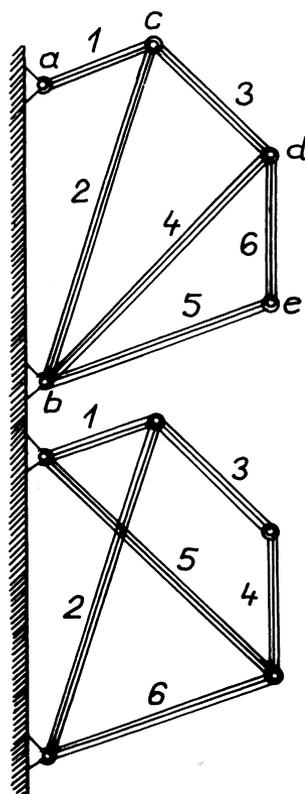


Figure 4

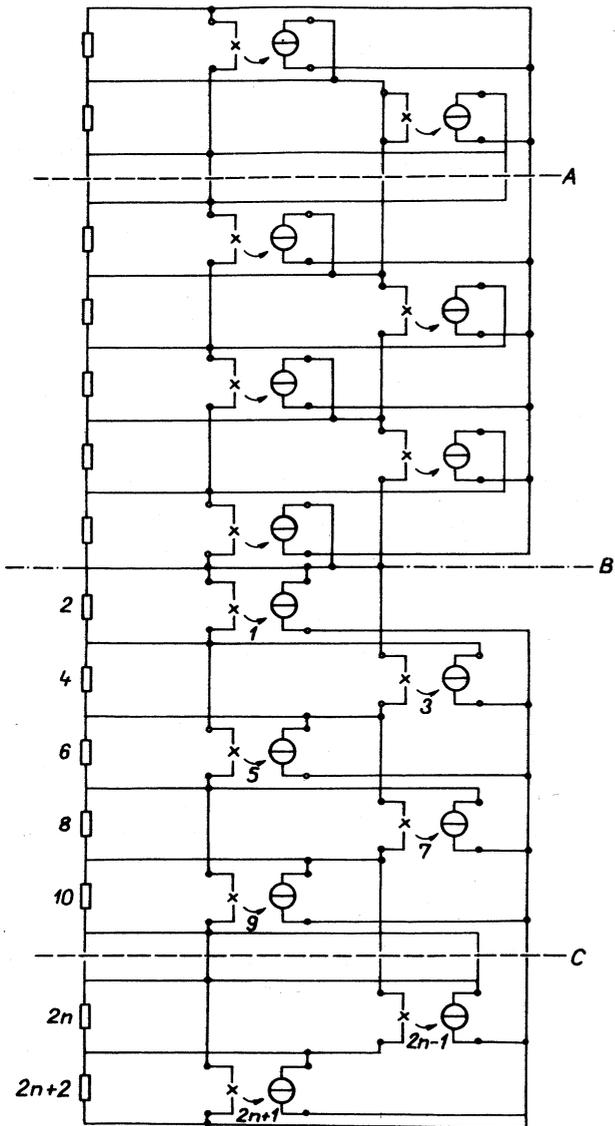
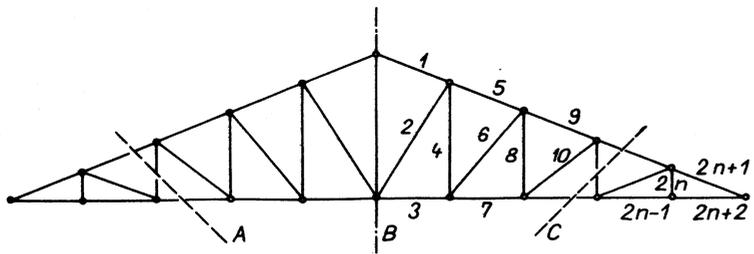


Figure 5

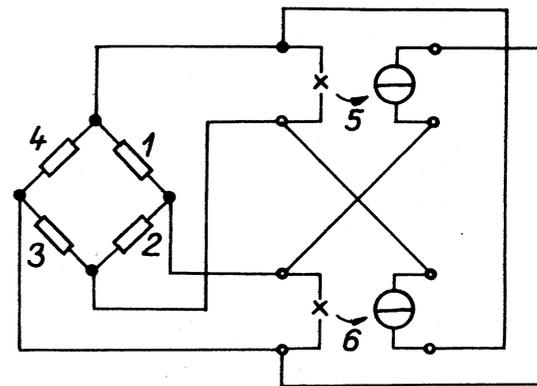
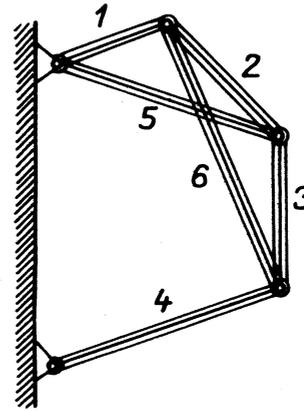


Figure 6

Remarques.

1. Puisque les arbres communs de G et G^* jouent le rôle central, on peut toujours remplacer n'importe lequel de ces graphes par un graphe 2-isomorphe [10]. Par exemple, la **Figure 7a** illustre les graphes G et G^* pour la seconde charpente de la **Figure 4**. Ils sont remplacés par des graphes 2-isomorphes à la **Figure 7b**, de telle sorte que $J = \{1, 3, 5\}$, et qu'on obtienne un graphe principal H (**Figure 7c**) à seulement quatre sommets.
2. Pour chaque charpente, avec deux sommets identifiés, il y a plusieurs graphes communs possibles à la 3^e étape, et ceux-ci produisent des circuits différents. Un grand graphe commun est avantageux, car il permet de réduire le nombre de sources contrôlées.

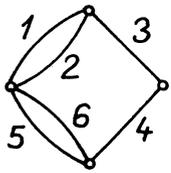


Figure 7a

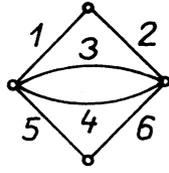


Figure 7b

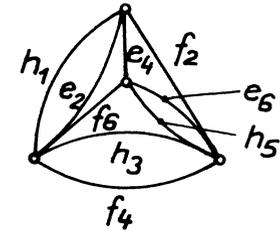
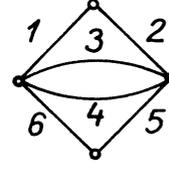
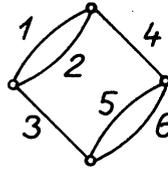


Figure 7c

3. Caractéristiques qualitatives du modèle

La caractéristique de base de notre modèle est qu'une charpente générique est rigide si et seulement si le réseau générique correspondant est complètement résoluble. Par exemple, la non-rigidité de la charpente de la **Figure 8** est reflétée par la singularité du réseau correspondant (on ne peut pas déterminer complètement le voltage entre les nœuds A et B). L'exemple un peu moins trivial de la **Figure 9** montre que la partie supérieure de la structure (comprenant les tiges 1, 2, 3, 4 et 5) est surdéterminée, et que le reste est sous-déterminé. Par conséquent, pour le sous-réseau situé au-dessus de la ligne pointillée, il y a un trop grand nombre d'équations, tandis que dans le sous-réseau du bas, les courants ne peuvent pas être complètement déterminés.

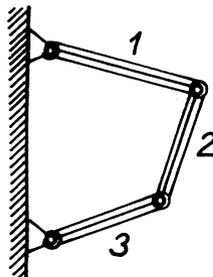


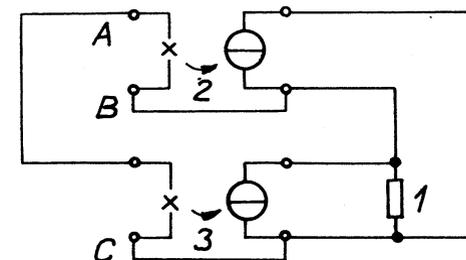
Figure 8

Remarks.

1. Since the common trees of G and G^* play the central role, one can always replace any of these graphs with a 2-isomorphic [10] one. For example, **Figure 7a** shows the graphs G , G^* for the second framework of **Figure 4**. They are replaced by 2-isomorphic ones on **Figure 7b** in order to have $J = \{1, 3, 5\}$ and to obtain a master graph H (**Figure 7c**) with four vertices only.
2. For each framework, with identification of two vertices, there are a number of possible common graphs in Step 3, giving different circuits. The point of a large common graph is to decrease the number of controlled sources.

3. Qualitative features of the model

The basic feature of our model is that a generic framework is rigid if and only if the corresponding generic network is uniquely solvable. For example, the non-rigidity of the framework of **Figure 8** is reflected by the singularity of the corresponding network (one cannot uniquely determine the voltage between the nodes A, B). The somewhat less trivial example of **Figure 9** shows that the upper part of the truss (containing the rods 1, 2, 3, 4, 5) is overdetermined and the rest is underdetermined. Accordingly, the subnetwork over the dotted line has too many equations while in the lower subnetwork the currents cannot be uniquely determined.



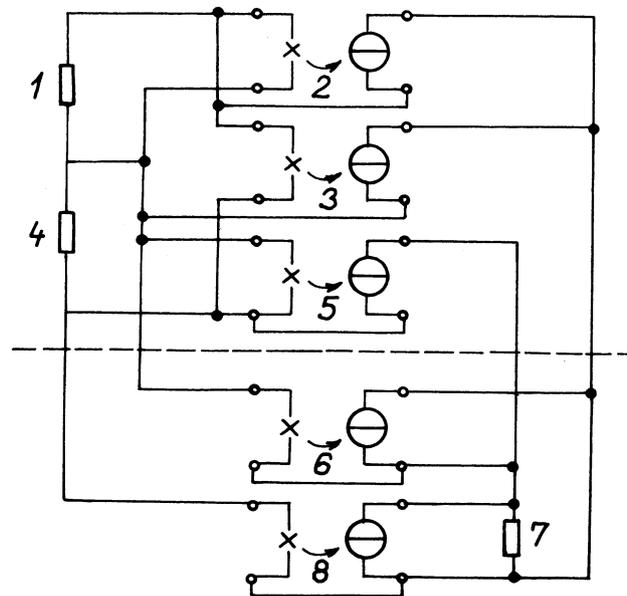
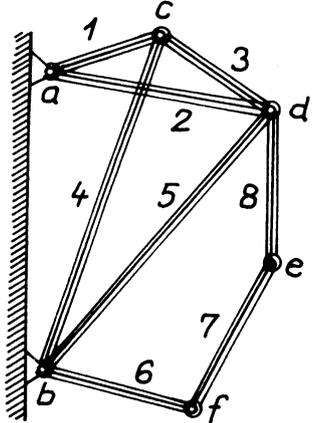


Figure 9

Lorsque les charpentes et les réseaux sont génériques, les paramètres géométriques des charpentes (par exemple les nombres $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ dans les entrées de **A** à la Section 1) et les paramètres physiques des réseaux (les entrées d'admittance g_1, g_2, \dots dans le grand déterminant de la Section 1) ne s'annulent pas les uns les autres (par exemple, ils sont des nombres transcendants algébriquement indépendants du corps des rationnels).

Si une charpente est non rigide, cela peut dépendre soit de sa structure topologique (elle est alors non rigide pour tout choix de valeurs numériques), soit de conditions numériques défavorables (par exemple les joints 1, 3 et 4 sont colinéaires sur la **Figure 2a**). Le premier cas en est un de non-rigidité générique, et le second, de non-rigidité non générique. Si une charpente est rigide, il s'agit alors nécessairement de rigidité générique, puisqu'elle demeurera rigide pour «presque n'importe quel autre» choix de valeurs numériques. De même, si un réseau est complètement résoluble, il s'agit alors nécessairement de résolubilité générique, alors que la singularité du réseau peut être générique ou non.

Ces classifications des charpentes et des réseaux correspondants ne sont pas en correspondance biunivoque. Comme nous le verrons à la fin de la section suivante, le modèle électrique d'une charpente génériquement non rigide peut tout aussi bien être non génériquement singulier. À cause de cela, l'énoncé placé au début de la section ne sera prouvé que plus tard.

4. Caractéristiques quantitatives du modèle

Nous avons vu à la Section 1 (voir \times , par exemple) que $(x_2 - x_1)^{-1} \det W$ peut être obtenu sous la forme $\sum \varphi(X)$ où l'addition se fait sur les arbres communs de G et G^* . Introduisons maintenant une fonction

Genericity means that the geometric parameters of the frameworks (e.g. the numbers $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ in the entries of **A** in Section 1) and the physical parameters of the networks (the admittance entries g_1, g_2, \dots in the large determinant of Section 1) do not cancel each other (e.g. they are algebraically independent transcendentals over the field of the rationals).

If a framework is non-rigid, this may be due to its topological structure (then it is non-rigid for any numerical choice) or to some unlucky numerical situations (e.g. if joints 1, 3, 4 are collinear on **Figure 2a**). These two cases will be referred to as generic or non-generic non-rigidity. If a framework is rigid, one can speak about generic rigidity only, since «almost any other» numerical choice preserves rigidity. Similarly, if a network is uniquely solvable, one can speak about generic solvability only, while the singularity of the network can be generic or not.

These classifications of the frameworks and of the corresponding networks are *not* in 1-1 correspondence. As we shall see at the end of the next section, the electric model of a generically non-rigid framework may be non-generically singular as well. Hence the statement at the beginning of the section will be proved only later.

4. Quantitative features of the model

We have seen in Section 1 (see \times), for example) that $(x_2 - x_1)^{-1} \det W$ can be obtained in form $\sum \varphi(X)$ where the summation is over the common trees of G and G^* . Let us introduce a function

$$\psi(X) = \prod_{(i,j) \in X} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}$$

Alors

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(X)} = \prod_{(i,j) \in E} (y_i - y_j)$$

est une constante C, indépendante de X, d'où il découle que

$$C^{-1}(x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = \sum \psi(X)$$

(l'addition se faisant encore sur les arbres communs), et, si nous choisissons les admittances dans le réseau-modèle de façon à satisfaire

$$g_{(i,j)} = \frac{(x_i - x_j)}{(y_i - y_j)}$$

alors, à l'exception de la constante $C(x_2 - x_1)$, le déterminant de la charpente et celui du réseau électrique seront identiques, c'est-à-dire les membres de l'expansion seront numériquement correspondants les uns aux autres.

Par exemple, le premier ou le second réseau de la **Figure 4** est singulier si et seulement si au moins une des relations $g_1 = -g_2$, $g_3 = -g_4$ ou $g_5 = -g_6$ est satisfaite. De manière analogue, les charpentes de la **Figure 4** sont (infinitésimalement) non rigides si et seulement si une des affirmations suivantes tient: les tiges 1 et 2 sont sur la même ligne (c'est-à-dire les joints a, b et c sont colinéaires), les tiges 3 et 4 sont sur la même ligne (c'est-à-dire les joints b, c et d sont colinéaires), ou les tiges 5 et 6 sont sur la même ligne (c'est-à-dire les joints b, d et e sont colinéaires). Observez maintenant que, par exemple, $g_1 = -g_2$ signifie exactement

$$\begin{vmatrix} x_a - x_c & x_c - x_b \\ y_a - y_c & y_c - y_b \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire que a, b et c sont colinéaires.

Retournons maintenant à la classification des charpentes et à celle de leurs modèles électriques. Puisque leurs déterminants ne diffèrent que par un facteur non nul, alors, peu importe le cas, les déterminants seront ou bien tous les deux nuls, ou bien aucun ne le sera. Ainsi, la rigidité (générique) et la résolubilité (générique) coïncident, comme cela a été affirmé au début de la section précédente.

De façon similaire, si une charpente est numériquement non rigide, alors son déterminant est nul, et de ce fait le réseau est singulier; et, puisqu'elle découle d'une annulation, la singularité du réseau est aussi numérique, sauf dans certains cas pathologiques où $y_i = y_j$ pour une arête (i, j), ce qui rend alors impossible la détermination d'une admittance.

Toutefois, si le réseau est génériquement non rigide, il n'est pas possible de déterminer si la singularité de son modèle électrique sera générique ou non, puisque cela dépend aussi du choix des joints 1 et 2 de la 1^{re} étape.

Considérez, par exemple, la charpente de la **Figure 9** à laquelle aurait été ajoutée la tige 9 entre les joints a et b. Si l'on fixe a et b, comme à la **Figure 9**, alors G et G^* , rencontrés respectivement aux 1^{re} et 2^e étapes, n'ont pas d'arbres communs, et, tel que démontré à la Section 3, le réseau est génériquement singulier.

Mais, si l'on fixe b et f, alors les deux graphes ont un arbre commun; il en résulte un autre réseau (**Figure 10**) qui n'est que numériquement singulier, mais pour tout choix de x_i et de y_i .

$$\psi(X) = \prod_{(i,j) \in X} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}$$

Then

$$\frac{\varphi(X)}{\psi(X)} = \prod_{(i,j) \in E} (y_i - y_j)$$

is a constant C, independent of X, hence

$$C^{-1}(x_2 - x_1)^{-1} \det \mathbf{W} = \sum \psi(X)$$

follows (summation still over the common trees) and if we choose the admittances in the modelling network to satisfy

$$g_{(i,j)} = \frac{(x_i - x_j)}{(y_i - y_j)}$$

then, apart from the constant $C(x_2 - x_1)$, the determinant of the framework and that of the electric network will be «identical», i.e. the members of the expansion will numerically correspond to each other.

For example, the first or the second network on **Figure 4** is singular if and only if at least one of the relations $g_1 = -g_2$, $g_3 = -g_4$, $g_5 = -g_6$ is met. Analogously, the frameworks on **Figure 4** are (infinitesimally) non-rigid if and only if at least one of the following statements hold: the rods 1, 2 are in the same line (i.e. joints a, b, c are collinear), the rods 3, 4 are in the same line (i.e. joints b, c, d are collinear), the rods 5, 6 are in the same line (i.e. joints b, d, e are collinear). Observe now that, say, $g_1 = -g_2$ exactly means

$$\begin{vmatrix} x_a - x_c & x_c - x_b \\ y_a - y_c & y_c - y_b \end{vmatrix} = 0$$

i.e. that a, b, c are collinear.

Let us return now to the classification of the frameworks and to that of their electric model. By any means, their determinants differ by a nonzero factor only, hence either both or none of them vanish. Thus (generic) rigidity and (generic) solvability coincide, as claimed at the beginning of the previous section.

Similarly, if a framework is numerically non-rigid then its determinant is zero, hence the network is singular, and since it is caused by a cancellation, the singularity of the network is also a numerical one, apart from such pathological cases when $y_i = y_j$ for some edge (i, j) makes the definition of an admittance impossible.

However, if the network is generically non-rigid, one cannot decide whether the singularity of its electric model will be generic or not, since this depends on the choice of joints 1, 2 in Step 1 as well.

Consider, for example, the framework of **Figure 9** with an extra rod 9 between the joints a, b. If one fixes a and b, as on **Figure 9**, then G and G^* of Steps 1 and 2, respectively, will have no common trees and the network is generically singular, as discussed in Section 3.

But if one fixes b and f then the two graphs do have a common tree, hence another network (**Figure 10**) arises which is only numerically singular, but for any choice of the x_i 's and y_i 's.

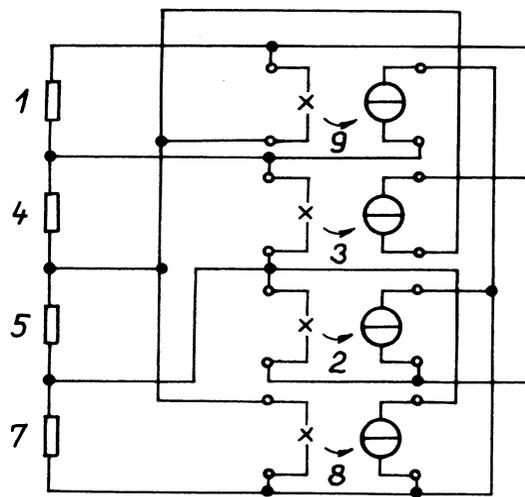


Figure 10

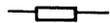
5. Remarque finale

Il ne semble y avoir aucune raison physique d'utiliser un composant actif non réciproque (la source contrôlée) pour simuler les charpentes (qui sont passives et réciproques). Mais cette application découle de la manière dont les formules topologiques de Kirchhoff et de Maxwell furent généralisées. Il pourrait être intéressant d'étudier l'application des formules topologiques à une classe de réseaux qui, bien qu'assez restreinte, serait quand même plus générale que celle des réseaux à résistances, et qui serait elle aussi passive et réciproque (par exemple, on pourrait admettre uniquement les résistances et les transformateurs idéaux*).

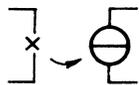
Remerciements. Je tiens à remercier spécialement messieurs Masao Iri et Walter Whiteley pour leurs précieux commentaires.

Glossaire

Résistance. Un dispositif électrique à deux bornes dans lequel le voltage u et l'intensité i du courant sont proportionnels. Cette relation est exprimée par la *loi de Ohm*, $u = Ri$ (ou $i = gu$). Les coefficients R et g sont appelés respectivement l'impédance et l'admittance de la résistance. Le symbole utilisé pour les résistances dans les diagrammes est



Source de courant à voltage contrôlé. Un dispositif électrique à quatre bornes (quelque chose comme un amplificateur). Les deux premières bornes sont rattachées au premier composant (avec un voltage u_1 et une intensité de courant i_1), et les deux autres bornes sont rattachées au second composant (avec un voltage u_2 et une intensité de courant i_2). Ces quatre quantités sont reliées par les équations $i_1 = 0$ et $i_2 = gu_1$. Le coefficient g est appelé l'admittance de transfert du dispositif. Le premier composant est le *senseur de voltage* (ou circuit ouvert), et le second composant est la *source contrôlée*. Le symbole utilisé pour ce dispositif dans les diagrammes est



5. A final remark

There seems to be no physical reason to apply an active non-reciprocal device (the controlled source) for modelling the frameworks (which are passive and reciprocal). Their appearance is due to the way how the topological formulae of Kirchhoff and Maxwell were generalized. It might be an interesting study to apply the topological formulae for such a restricted class of networks which is still more general than that of the resistive networks, yet is still passive and reciprocal (e.g. one may allow resistors and ideal transformers* only).

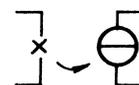
Acknowledgements. Special thanks are due to Masao Iri and to Walter Whiteley for some helpful comments.

Glossary

Resistor. A 2-terminal electric device whose voltage u and current i are proportional. This relations is expressed by *Ohm's Law* $u = Ri$ (or $i = gu$). The coefficients R and g are called the *impedance* and the *admittance*, respectively, of the resistor. The symbol of the resistors in diagrams is



Voltage controlled current source. A 4-terminal electric device (something like an amplifier). Its first two terminals form the first port (with voltage u_1 and current i_1), the other two terminals form the second port (with voltage u_2 and current i_2). These four quantities are related by $i_1 = 0$ and $i_2 = gu_1$. The coefficient g is called the *transfer admittance* of the device. The first port is the *voltage sensor* (or open circuit), the second port is the *controlled source*. The symbol of this device in diagrams is



Lois de Kirchhoff. La somme des voltages sur n'importe quel circuit du graphe d'un réseau est zéro (la loi de voltage de Kirchhoff); la somme des intensités de courant relevées sur n'importe quelle coupure du graphe d'un réseau est zéro (loi de courant de Kirchhoff). Si l'on considère seulement la loi de voltage de Kirchhoff appliquée à un ensemble de circuits fondamentaux, et la loi de courant de Kirchhoff appliquée à un ensemble de coupures fondamentales (par rapport à un arbre du graphe du réseau), on obtient un ensemble de base d'équations utilisables pour l'analyse du réseau. Voir [11] pour les détails.

Formules topologiques pour les réseaux. Sans générer l'ensemble de base d'équations (lois de voltage et de courant de Kirchhoff), ni développer le déterminant D de la matrice des coefficients, on peut obtenir le résultat directement de la «topologie» du réseau, c'est-à-dire de la structure de son graphe, de la manière suivante:

Si le réseau n'est constitué que de résistances, alors

$$D = \sum_T \prod_{x \in T} g_x$$

où l'addition se fait sur chacun des arbres T du graphe du réseau, et où g_x est l'admittance de l'arête x du graphe.

Si le réseau est constitué non seulement de résistances, mais aussi de sources contrôlées, alors

$$D = \sum_{T'} s(T') \prod_{x \in T'} g_x$$

où l'addition se fait sur chacun des arbres communs T' des graphes de voltage et de courant G_v et G_i du réseau (voir Section 1), et où $s(T')$ est un signe ± 1 .

Voir [11] pour plus de détails, y compris la règle pour le signe.

Graphe dual. Lorsque le graphe planaire G est dessiné dans le plan sans que ses arêtes s'entrecroisent, on peut obtenir un nouveau graphe G^* tel que les sommets de G^* correspondent aux faces du dessin de G (y compris la «face extérieure»), et que toutes paires de ces sommets ne soient liées par une arête de G^* que si et seulement si les deux faces correspondantes de G partagent une arête commune sur leur périphérie respective. Alors G^* est le *dual* de G; les circuits, les coupures et les arbres de G correspondent respectivement aux coupures, aux circuits et aux compléments des arbres de G^* . Cette propriété permet de définir un concept de *dual abstrait* en général (sans passer par le dessin). Seulement les graphes planaires ont des duals abstraits, et ceux-ci ne sont pas complètement déterminés en général (voir **Figures 7a, b**, par exemple), à moins que le graphe ne soit 3-connexe. Toutefois, les duals de graphes isomorphes ou 2-isomorphes sont au moins 2-isomorphes. Voir [11] pour les détails.

Structure simple. Une charpente planaire obtenue à partir d'un triangle en ajoutant, à chaque étape, deux nouvelles tiges (x, z) et (y, z) qui lient un nouveau joint z à deux anciens joints x et y. Une structure simple à n joints compte $2n - 3$ tiges. Les charpentes des **Figures 2 à 5** sont des structures simples; celles des **Figures 6, 8 et 9** n'en sont pas.

2-isomorphisme. Deux graphes sont 2-isomorphes s'il existe une correspondance biunivoque entre leurs ensembles d'arêtes de telle sorte que les circuits de l'un correspondent aux circuits de l'autre (voir, par exemple, les premiers graphes des **Figures 7a et 7b**). Si le graphe d'un réseau est transformé en un graphe 2-isomorphe, alors les lois de Kirchhoff, les formules topologiques, etc. ne sont pas affectées.

Kirchhoff's laws. The sum of voltages along any circuit of the network graph is zero (Kirchhoff's Voltage Law); the sum of currents along any cut set of the network graph is zero (Kirchhoff's Current Law). If KVL's for a set of fundamental circuits and KCL's for a set of fundamental cut sets (with respect to a tree of the network graph) are considered only, they give a basic set of equations for network analysis. For details see [11].

Topological formulae for networks. Without generating the basic set of equations (KVL, KCL) and expanding the determinant D of the coefficient matrix, the result can directly be obtained from the «topology» — i.e. the graph structure — of the network as follows:

If the network consists of resistors only, then

$$D = \sum_T \prod_{x \in T} g_x$$

where summation is over every tree T of the network graph and g_x is the admittance of edge x in the graph.

If the network consists of resistors and controlled sources as well than

$$D = \sum_{T'} s(T') \prod_{x \in T'} g_x$$

where summation is over every common tree T' of the voltage and current graphs G_v and G_i of the network (see Section 1) and $s(T')$ is a sign ± 1 . For further details, including the sign rule, see [11].

Dual graph. Drawing a planar graph G in the plane without crossing edges, a new graph G^* can be obtained so that vertices of G^* are the faces of the drawing (including the «outside face») and two such vertices are connected by an edge of G^* if and only if the two corresponding faces share a common boundary edge of G.

Then G^* is the *dual* of G; circuits, cut sets and trees of G correspond to cut sets, circuits and tree complements of G^* , respectively. This property might define a concept of *abstract dual* in general (without any drawing process). Only planar graphs have abstract dual and it is not uniquely determined in general (see **Figures 7a, b**, for example), unless the graph is 3-connected. However, the duals of isomorphic or 2-isomorphic graphs are at least 2-isomorphic. See [11] for details.

Simple truss. A planar framework obtained from a triangle by adding, in every step, two new rods (x, z) and (y, z) between two «old» joints x, y and a new joint z. For n joints it has $2n - 3$ rods. The frameworks on **Figures 2 to 5** are simple trusses; those on **Figures 6, 8 and 9** are not.

2-isomorphism. Two graphs are 2-isomorphic if there is a 1-1 correspondence between their edge sets so that circuits correspond to circuits (see the first graphs of **Figures 7a and 7b**, for example). If the graph of a network is changed within 2-isomorphism only, then Kirchhoff's Laws, topological formulae, etc. are left unchanged.

Transformateur idéal. Un dispositif électrique à quatre bornes, semblable à la source de courant à voltage contrôlé décrite plus haut, mais dont le fonctionnement obéit aux équations $u_1 = ku_2$ et $i_2 = -ki_1$. C'est le modèle (idéalisé) des transformateurs réels. Voir [11] pour les détails.

Ideal transformer. A 4-terminal electric device, like the voltage controlled current source above, but the equations are $u_1 = ku_2$; $i_2 = -ki_1$. It is the (idealized) model of real transformers. See [11] for details.

Bibliographie

Le code qui apparaît dans la première colonne de chaque entrée bibliographique est constitué de trois parties séparées par des tirets. La première partie indique s'il s'agit d'un livre (Book), d'un Article, d'une Pré-impression ou de notes de cours (Course notes). La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des Mathématiciens, des Architectes ou des ingénieurs (Engineers). La partie finale indique si le texte touche un ou plusieurs des thèmes principaux de la topologie structurale: Géométrie (en général), Polyèdres, Juxtaposition ou Rigidité.

Les mots-clés ou les annotations de la colonne finale signalent la pertinence de l'ouvrage à la recherche en topologie structurale, mais ne témoignent pas nécessairement de l'ensemble du contenu ou de l'intention de l'auteur.

Bibliography

The Code in the first block of each bibliographic item consist of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a Book, Article, Preprint or Course notes. The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of Mathematicians, Architects or Engineers. The final letter(s) indicates if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: Geometry (in general), Polyhedra, Juxtaposition or Rigidity.

The key-words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents or the intent of the author.

<p>Coates 1958 C.L. Coates [1] A—EM</p>	<p>General topological formulae for linear network functions IRE Trans. Circuit Theory CT-5, 30-42.</p>	<p>Topological formulae for electric networks composed of resistors and controlled sources • Formules topologiques pour réseaux électriques composés de résistances et de sources contrôlées.</p>
<p>Kirchhoff 1847 G. Kirchhoff [2] A—EM</p>	<p>Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird Poggendorf Ann. Phys. 72, 497-508.</p>	<p>Kirchhoff's laws, topological formulae for electric networks composed of resistors • Lois de Kirchhoff, formules topologiques pour réseaux électriques composés de résistances.</p>
<p>Maxwell 1892 J.C. Maxwell [3] B—E</p>	<p>Electricity and magnetism Clarendon Press, Oxford</p>	<p>Topological formulae for electric networks composed of resistors • Formules topologiques pour réseaux électriques composés de résistances.</p>
<p>Mayeda 1958 W. Mayeda [4] A—ME—R</p>	<p>Topological formulae for active networks Proc. Nat. Elec. Conf. 15, 1-13.</p>	<p>Topological formulae for electric networks composed of resistors and controlled sources • Formules topologiques pour réseaux électriques composés de résistances et de sources contrôlées.</p>
<p>Recki 1983a A. Recki [5] A—ME—R</p>	<p>A network theory approach to the rigidity of skeletal structures; I. Modelling and interconnection Discrete Applied Math.</p>	<p>Review of old — and some new — rigidity results from the point of view of electric network theory • Revue d'anciens résultats — et de quelques nouveaux — sur la rigidité du point de vue de la théorie des réseaux électriques.</p>
<p>Recki 1983b A. Recki [6] A—ME—R</p>	<p>A network theory approach to the rigidity of skeletal structures; II. Laman's theorem and topological formulae Discrete Applied Math.</p>	<p>Continuation of [Recki 1983a] • Suite de [Recki 1983a].</p>

<p>Rosenberg 1975 I. Rosenberg [7] P—EM—R</p>	<p>Structural rigidity in plane CRM-510, Université de Montréal.</p>	<p>Rigidity of planar frameworks • Rigidité des charpentes planaires.</p>
<p>Timoshenko—Young 1937 S. Timoshenko — D.H. Young [8] B—AE—R</p>	<p>Engineering mechanics Statics, Stanford.</p>	<p>Textbook of statics • Manuel de statique.</p>
<p>White—Whiteley 1982 N.L. White — W. Whiteley [9] P—ME—R</p>	<p>The algebraic geometry of stresses in frameworks SIAM J. of algebraic and discrete methods, (to appear).</p>	<p>Frameworks, stresses • Charpentes, contraintes.</p>
<p>Whitney 1933 H. Whitney [10] A—M</p>	<p>2-isomorphic graphs Amer. J. Mathematics, 55, 245-254.</p>	<p>Concept and characterization • Concept et caractérisation.</p>
<p>Seshu—Reed 1961 S. Seshu — M.B. Reed [11] B—EM</p>	<p>Linear graphs and electric networks Addison-Wesley, Reading, Mass.</p>	<p>Textbook on the applications of graph theory in electric network theory • Manuel sur les applications de la théorie des graphes dans la théorie des réseaux électriques.</p>

