

Prismic Tensigrids

by Lowell A. Hinrichs

Topologie structurale #9, 1984

Tenségrités prismiques

Structural Topology #9, 1984

Introduction

D'une manière non formelle, on peut se représenter une tensegrité comme étant une configuration symétrique de bâtons attachés ensemble de telle manière qu'aucun bâton ne soit accouplé rigidement à aucun autre alors que la structure entière est elle-même rigide. De telles configurations ont fasciné un grand nombre d'individus de formations différentes depuis qu'elles furent introduites par Kenneth Snelson et popularisées par B. Fuller dans les années cinquante. Ce sont des artistes et des architectes qui manifestèrent le plus d'intérêt pour ces configurations, ce qui pourrait expliquer pourquoi, jusqu'à tout récemment, il y a eu peu d'apport du côté de la recherche systématique en mathématiques.

Les quelques références datant des années cinquante et des années soixante consistent en quelques illustrations et commentaires descriptifs inclus dans des livres traitant d'autres sujets. Dans les années soixante-dix, plusieurs publications, telles que [6], traitèrent de certains aspects mathématiques de ces structures, mais ces articles étaient destinés à ceux qui s'intéressaient à la construction de modèles plutôt qu'à une recherche systématique. Plus récemment, le texte de B. Grünbaum, intitulé **Lectures on Lost Mathematics**, a suscité une activité considérable et on a depuis publié un certain nombre d'articles sur le sujet. En ce qui nous concerne, l'article le plus pertinent est sans doute celui de B. Roth et W. Whiteley, intitulé **Tensegrity Frameworks** [8]. Nous adopterons le langage et les conventions de cet article que le lecteur pourra consulter pour une vision plus détaillée des concepts et pour une liste détaillée des références.

Introduction

Informally, a tensegrity may be thought of as a symmetric configuration of sticks strung together in such a way that no stick is rigidly coupled to any other while the entire structure is itself rigid. Such configurations have been a fascination to people with a variety of backgrounds ever since they were introduced by Kenneth Snelson and popularized by B. Fuller in the fifties. Much of this interest has come from artists and architects which may explain why, until recently, they have received relatively little in the way of systematic mathematical investigation.

The few references in the fifties and sixties consist of a few pictures and descriptive comments in books devoted to other topics. In the seventies, several publications, such as [6] dealt with some mathematical aspects of these structures but were intended for those interested in building models rather than as a systematic investigation. More recently, B. Grünbaum notes, **Lectures on Lost Mathematics**, have stimulated considerable activity and a number of papers have now appeared in print. Perhaps the most relevant for our purposes is **Tensegrity Frameworks** by B. Roth and W. Whiteley [8]. We shall adopt much of the language and convention of this paper which the reader may consult for a more detailed discussion of the concepts and a detailed list of references.

Selon [8], une **tensegrité abstraite** $G = (V; B, S, C)$ est un ensemble V de sommets et trois sous-ensembles disjoints B, S, C de paires d'éléments de V appelés **barres, étais et câbles**, ou collectivement, **éléments**. Dans cet article, il sera principalement question de configurations composées uniquement d'étais et de câbles et nous simplifierons la notation à $G = (V; S, C)$. Une (**charpente**) de **tensegrité** $G(p)$ est une tensegrité abstraite G avec un point $p = (p_1, \dots, p_v) \in \mathbb{R}^{nV}$, et l'identification $v_i = p_i$.

Un **mouvement** de $G(p)$ est une application à un paramètre $X(t)$ dans \mathbb{R}^{nV} , $X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{nV}$, tel que

- (i) $X(0) = G(p)$
- (ii) $|x_i - x_j| \geq |p_i - p_j|$ pour $\{p_i, p_j\} \in S$
 $|x_i - x_j| \leq |p_i - p_j|$ pour $\{p_i, p_j\} \in C$

Une tensegrité est **rigide** si tout mouvement est une congruence.

L'ensemble de toutes les symétries forme le groupe de symétrie, G , de la tensegrité $G(p)$. Une **tensegrité transitive de sommets** est une tensegrité dans laquelle tous les sommets sont équivalents sous G . Dans cet article, nous nous occuperons uniquement des structures où les étais sont disjoints plutôt que formant des circuits polygonaux ou des X . Puisqu'il y a un seul étoi à chaque sommet et que les étais ne doivent pas s'entrecouper, la transitivité des sommets implique que les étais soient également équivalents et le groupe de symétrie ne peut pas contenir de réflexions à moins qu'elles ne soient parallèles ou perpendiculaires à un étoi. Nous appellerons alors une telle configuration une **tensegrité de symétrie**.

On peut maintenant formuler le problème général de la façon suivante. Supposons que G indique un groupe discret agissant sur un point $p \in \mathbb{R}^3$. L'ensemble de sommets V consiste en toutes les images, p^G , de p sous G . Le système d'étais S consiste en toutes les images $[p, p^\sigma]$ d'une diagonale $[p, p^\sigma]$, et le système de câbles consiste en une ou plus qu'une orbite $[p, p^{\tau_1}], \dots, [p, p^{\tau_n}]$. Un tel système sera indiqué par $(p; \sigma; \tau_1, \dots, \tau_n)$.

Le problème général est: pour quel G, τ_1, \dots, τ_n , obtenons-nous une tensegrité symétrique rigide?

Si la configuration est finie, les groupes directs doivent faire partie de P_n^+, T^+, O^+ et I^+ , ces groupes étant les groupes directs prismiques, tétraédriques, octaédriques, et icosaédriques, respectivement. La condition voulant que les étais ne s'entrecoupent pas élimine tous les groupes indirects, à l'exception du groupe T^* du stella octangula. L'analyse démontre qu'il n'existe aucune tensegrité symétrique finie dans laquelle tous les câbles sont équivalents. Nous utiliserons le nombre d'orbites de câbles comme un adjectif indiquant la structure. Dans cet article, nous énumérerons tous les réseaux de tensegrité symétriques rigides et à deux orbites possibles, $P_n^+(p, \sigma; \tau_1, \tau_2)$, ayant un groupe prismique comme groupe de symétrie.

2. Des tensegrités prismiques à deux orbites

La détermination de tous les réseaux de tensegrités à deux orbites possibles ayant un groupe prismique direct, P_n^+ , comme groupe de symétrie, est particulièrement facile. Le groupe P_n^+ possède un axe de rotation replié n fois et n axes repliés deux fois, perpendiculaires et également espacés.

Following [8], an **abstract tensegrity** $G = (V; B, S, C)$ is a set V of **vertices** together with pairwise disjoint sets B, S, C of two element subsets of V called **bars, struts and cables**, or collectively **elements**. In this paper we are concerned mainly with configurations consisting only of struts and cables and we shall contract the notation to $G = (V; S, C)$. A **tensegrity (framework)** $G(p)$ is an abstract tensegrity G together with a point $p = (p_1, \dots, p_v) \in \mathbb{R}^{nV}$, and the identification $v_i = p_i$.

A **motion** of $G(p)$ is a one parameter map $X(t)$ of \mathbb{R}^{nV} , $X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{nV}$ such that

- (i) $X(0) = G(p)$
- (ii) $|x_i - x_j| \geq |p_i - p_j|$ for $\{p_i, p_j\} \in S$
 $|x_i - x_j| \leq |p_i - p_j|$ for $\{p_i, p_j\} \in C$

A tensegrity is **rigid** if any motion is a congruence.

The set of all symmetries form the symmetry group, G , of the tensegrity $G(p)$. A **vertex transitive tensegrity** is one in which all vertices are equivalent under G . In this paper we shall be concerned only with structures where the struts are disjoint rather than forming polygonal circuits or X 's. Since there is a single strut at each vertex and the struts may not intersect, vertex transitivity implies that the struts are also equivalent and the symmetry group cannot contain reflections unless they are parallel or perpendicular to a strut. We shall call such a configuration a **symmetry tensegrity**.

The general problem can now be formulated as follows. Let G denote a discrete group acting on a point $p \in \mathbb{R}^3$. The vertex set V consists of all images p^G of p under G . The strut system S consists of all images $[p, p^\sigma]$ of a diagonal $[p, p^\sigma]$, and the cable system consists of one or more orbits $[p, p^{\tau_1}], \dots, [p, p^{\tau_n}]$. Such a system will be denoted by $(p; \sigma; \tau_1, \dots, \tau_n)$.

The general problem is: for that G, τ_1, \dots, τ_n , do we get a rigid symmetric tensegrity?

If the configuration is finite, the direct groups must be one of P_n^+, T^+, O^+ and I^+ , where these are the direct prismic, tetrahedral, octahedral, and icosahedral groups, respectively. The condition that the struts not intersect rules out all indirect groups except the group T^* of the stella octangula. Analysis shows that there do not exist any finite symmetric tensegrities in which all cables are equivalent. We shall use the number of cable orbits as an adjective denoting the structure. In this paper we shall enumerate all possible rigid two orbit symmetric tensegrids, $P_n^+(p, \sigma; \tau_1, \tau_2)$, having a prismic group as its symmetry group.

2. Two orbit prismic tensegrities

Determination of all possible two orbit tensegrids having a direct prismic group, P_n^+ , as their symmetry group is particularly easy. The group P_n^+ has one n -fold axis of rotation and n equally spaced perpendicular two-fold axes.

À l'exception des cas dégénérés d'un segment de droite et d'un polygone planaire, l'enveloppe convexe de l'orbite d'un point est soit un prisme ou un prisme adouci (un antiprisme). Alors, l'enveloppe convexe consiste en deux faces n-gonales régulières et parallèles reliées par une ceinture de rectangles ou de triangles. Nous appelons un de ces n-gones la «base» et l'autre le «sommet».

Les orbites des diagonales sont de deux types. Si c est une diagonale de face (ou d'arête) d'un n-gone du haut, son orbite consiste en un polygone régulier (ou un polygone étoilé) sur les faces du haut et du bas. Si c 'est une diagonale joignant les faces du haut et du bas, alors son orbite sera composée des n diagonales obtenues par les n rotations autour de l'axe n fois replié.

Il est évident que la diagonale s dont l'orbite forme le système d'étais doit être une diagonale joignant les faces du haut et du bas. Indiquons cet étai par $s = [p, p_s]$, où p est le sommet du haut. Considérons maintenant les câbles c_1, \dots, c_t attachés à l'étai au point V . Pour que l'étai tienne en place, le simple équilibre des vecteurs requiert que l'étai soit dans l'enveloppe convexe fermée des rayons partant du sommet et passant le long des câbles. À partir de là, il est évident que le réseau de câbles doit contenir au moins deux orbites, et qu'une de celles-ci doit contenir une diagonale ou une arête, c , de la face du haut et que l'autre doit contenir une diagonale, e , reliant les faces du haut et du bas.

Maintenant, ou bien la diagonale de face du haut c est le segment, d , traversant p , et le centroïde de la face du haut, ou bien cette partie de son orbite attachée à p contient deux diagonales équivalentes dont l'angle est bisecté par ce segment. Le fait essentiel de notre caractérisation est que ces deux diagonales équivalentes doivent avoir la même contrainte et alors, la somme de leurs vecteurs se situe le long de d . Nous en ferons la démonstration dans le prochain théorème.

Except for the degenerate cases of a line segment and planar polygon, the convex hull of the orbit of a point is either a prism or a snub prism (= antiprism). Thus the convex hull consists of two parallel regular n-gonal faces joined by a belt of rectangles or triangles. We will think of one of these n-gons as the «base» and the other as the «top».

The orbits of diagonals are of two types. If c is a facial diagonal (or edge) of the top n-gon, its orbit consists of a regular polygon (or star polygon) on the top and bottom faces. If it is a diagonal joining the top and bottom faces then its orbit consists of the n diagonals obtained by the n rotations about the n -fold axis.

It is evident that the diagonal s whose orbit forms the strut system must be a diagonal joining the top and bottom faces. Let us denote this strut by $s = [p, p_s]$, where p is the top vertex. Consider now the cables c_1, \dots, c_t incident with the strut at V . For the strut to be held in place, simple vector equilibrium requires the strut to be in the closed convex hull of the rays running from the vertex along the cables. From this it is evident that the cable network must contain at least two orbits, and that one of them must contain a diagonal or edge, c , of the top face and the other must contain a diagonal, e , joining the top and bottom faces.

Now the top facial diagonal c is either the line segment, d , passing through p , and the centroid of the top face, or that part of its orbit incident with p contains two equivalent diagonals whose angle is bisected by this line segment. The essential fact of our characterization is that these two equivalent diagonals must have the same stress and hence their vector sum lies along d . This is established in the next theorem.

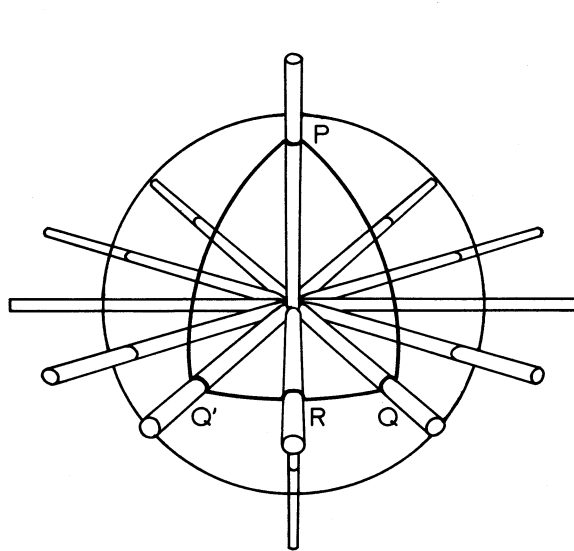


Figure 1

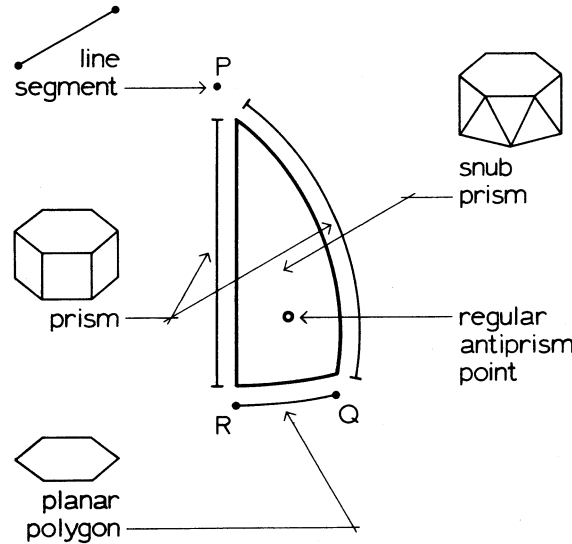


Figure 2

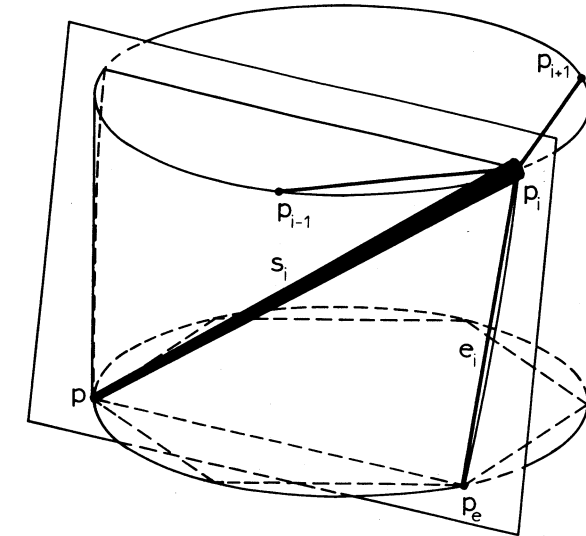


Figure 3

Une **contrainte** dans une tensegrité $G(V; S, C)$ est une collection de scalaires $\{w_{ij}\}$, un pour chaque paire $\{i, j\}$ sans ordre telle que $\{p_i, p_j\} \subset S \cup C$, avec $w_{ij} \geq 0$ pour un étai $p_i - p_j$ et $w_{ij} \leq 0$ pour un câble $p_i - p_j$, et $\sum_j w_{ij}(p_i - p_j) = 0$. Le vecteur $w_{ij}(p_i - p_j)$ représente le vecteur de force opérant sur le sommet p_i de l'élément $\{p_i, p_j\}$, et la condition $\sum_j w_{ij}(p_i - p_j)$ indique simplement que le sommet est en équilibre. La contrainte est **propre** si les inégalités sont strictes.

2.1 Théorème. *Dans une tensegrité prismique à deux orbites, tous les éléments équivalents ont des contraintes égales.*

Preuve: Si le câble du haut c est un diamètre, d , alors la configuration du sommet est constituée simplement des trois éléments coplanaires d, s et e . Disons plus clairement que la condition de l'équilibre du sommet implique qu'une contrainte assignée à un des éléments détermine complètement celle des deux autres. Comme tous les sommets sont congruents et que tout ensemble de deux éléments équivalents est relié par une chaîne d'éléments, alors ils doivent tous avoir une contrainte égale. Examinez maintenant le cas moins trivial de c qui est une des deux diagonales de face équivalentes incidentes au sommet.

Admettons que p_i est un sommet donné de la face du haut. Les éléments incidents à p_i consistent en un étai $s_i = (p_i - p_s)$ en deux câbles du haut équivalents $c_i(p_i - p_{i-1})$ et $c_{i+1}(p_i - p_{i+1})$, et en un câble diagonal allant de haut en bas $e_i = (p_i - p_e)$. Les deux câbles du haut sont les arêtes d'un polygone (étoilé) $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_t)$. Admettons que chacun des trois vecteurs de câble, x , soit décomposé en un vecteur, $x(s)$, le long de s , et $x(s^\perp)$ perpendiculaire à s .

Supposons maintenant que nous ayons les contraintes w_{s_i} en s_i , w_{e_i} en e_i et w_i en c_i . Puisque le sommet p_i est en équilibre, nous avons

$$w_i[C_i(s)] + w_{i+1}[C_i(s)] + w_{e_i}[e_i] = -w_{s_i}[s_i]$$

$$w_i[C_i(s^\perp)] + w_{i+1}[C_{i+1}(s^\perp)] = -w_{e_i}[e_i(s^\perp)]$$

Puisque les sommets sont tous géométriquement congruents, nous pouvons avancer les équations suivantes pour les vecteurs fixés, c'est-à-dire

$$(2.1) \quad w_i \alpha + w_{i+1} \beta + w_{e_i} \epsilon = -w_{s_i} \sigma$$

$$(2.2) \quad w_i a + w_{i+1} b = -w_{e_i} \epsilon$$

En se basant sur la seconde équation, nous savons que les contraintes w_i, w_{i+1} sont proportionnelles, indépendamment de i d'où $w_{i+1} = k w_i$ pour un k adéquat. En appliquant ceci successivement aux sommets du polygone (p_1, \dots, p_t) , nous avons $w_i = w_{i+t} = k^t w_p$, alors $k = 1$ et $w_{i+1} = w_i$. Remarquez que la contrainte $w_i = w$ avec les équations (2.1) et (2.2) détermine complètement w_{e_i} et w_{s_i} qui, conséquemment, sont aussi égales pour $i = 1, \dots, t$. Finalement, puisque n'importe quel deux sommets sont reliés par une chaîne d'arêtes, tous les éléments équivalents sont égaux.

À la suite de ce que nous venons de voir, les équations de contrainte (2.1), (2.2), se simplifient davantage comme suit:

A **stress** in a tensegrity $G(V; S, C)$ is a collection $\{w_{ij}\}$ of scalars, one for each unordered pair $\{i, j\}$ such that $\{p_i, p_j\} \subset S \cup C$, with $w_{ij} \geq 0$ for strut $p_i - p_j$ and $w_{ij} \leq 0$ for cable $p_i - p_j$, and $\sum_j w_{ij}(p_i - p_j) = 0$. The vector $w_{ij}(p_i - p_j)$ represents the vector force operating on the vertex p_i from the element $\{p_i, p_j\}$, and the condition $\sum_j w_{ij}(p_i - p_j)$ simply indicates the vertex is in equilibrium. The stress is **proper** if the inequalities are strict.

2.1 Theorem. *In a two-orbit prismic tensegrity all equivalent elements have equal stresses.*

Proof: If the top cable c is a diameter, d , then the vertex configuration consists simply of the three coplanar elements d, s and e . Clearly the condition of vertex equilibrium implies that a stress assigned to any one element uniquely determines that in the other two. Since all the vertices are congruent and any two equivalent elements are connected by a chain of elements they must all have equal stress. Now consider the less trivial case of c being one of two equivalent facial diagonals incident at the vertex.

Let p_i be a given vertex on the top face. The elements incident with p_i consist of a strut $s_i = (p_i - p_s)$, the two equivalent top cables $c_i(p_i - p_{i-1})$ and $c_{i+1}(p_i - p_{i+1})$, and top-bottom diagonal cable $e_i = (p_i - p_e)$. The two top cables are edges of a (star) polygon $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_t)$. Let each of the three vector cables, x , be resolved into a vector, $x(s)$, along s , and $x(s^\perp)$ perpendicular to s .

Suppose now we have stresses w_{s_i} in s_i , w_{e_i} in e_i and w_i in c_i . Since the vertex p_i is in equilibrium we have

$$w_i[C_i(s)] + w_{i+1}[C_i(s)] + w_{e_i}[e_i] = -w_{s_i}[s_i]$$

$$w_i[C_i(s^\perp)] + w_{i+1}[C_{i+1}(s^\perp)] = -w_{e_i}[e_i(s^\perp)]$$

Since the vertices are all geometrically congruent we may refer these equations to fixed vectors, i.e.,

$$(2.1) \quad w_i \alpha + w_{i+1} \beta + w_{e_i} \epsilon = -w_{s_i} \sigma$$

$$(2.2) \quad w_i a + w_{i+1} b = -w_{e_i} \epsilon$$

From the second equation we have that the stresses w_i, w_{i+1} are proportionnal, independently of i and hence $w_{i+1} = k w_i$ for suitable k . Applying this successively to the vertices of the polygon (p_1, \dots, p_t) , we have $w_i = w_{i+t} = k^t w_p$ so $k = 1$ and $w_{i+1} = w_i$. Notice that the stress $w_i = w$ together with equations (2.1) and (2.2) uniquely determine w_{e_i} and w_{s_i} which consequently are also equal for $i = 1, \dots, t$. Finally since any two vertices are connected by a chain of edges all equivalent elements are equal.

In view of the above the stress equations (2.1), (2.2), further simplify to

$$(2.3) \quad w(\alpha + \beta) - w_d \varepsilon = w_s \sigma$$

$$(2.4) \quad w(a + b) = -w_e \varepsilon$$

Il est clair maintenant que l'attribution d'une valeur négative à w ou w_e , ou une valeur positive à w_s , détermine complètement une contrainte propre (compatible) de tensegrité. À partir du théorème 5.2 [8] de Roth-Whiteley, nous avons maintenant:

2.2 Théorème. Une tensegrité prismique à deux orbites P contient une contrainte propre, et dès lors est rigide si et seulement si la charpente, \bar{P} , obtenue en remplaçant tous les câbles et les étais par des barres, est rigide.

Nous reviendrons à la question de la rigidité après avoir obtenu quelques exemples en appliquant ces conditions nécessaires à la caractérisation de toutes les configurations prismiques possibles.

Comme la somme vectorielle des câbles de la face du haut repose le long du diamètre d , il est évident que les trois éléments d , s et e , qui y sont incidents doivent être coplanaires. Pour déterminer toutes les configurations possibles satisfaisant à cette condition nécessaire, considérez l'illustration composée du n -gone du bas (p_1, \dots, p_{n-1}) avec l'étau $s = [p_i, q]$ et le câble diagonal $e = [p_j, q]$.

Puisque les faces du haut et du bas sont parallèles au sommet, q doit être tel que le diamètre passant à travers q soit parallèle à la droite reliant p_i et p_j . Nous pouvons nous représenter q comme étant projeté sur le cercle circonscrit du bas, comme le démontre la Figure 4. Il est évident que $\angle 2 = \angle 1 = \angle 3 = \angle 4$ tel que $\text{arc}(p_j q)$ est égal en longueur à $\text{arc}(qf)$. Maintenant,

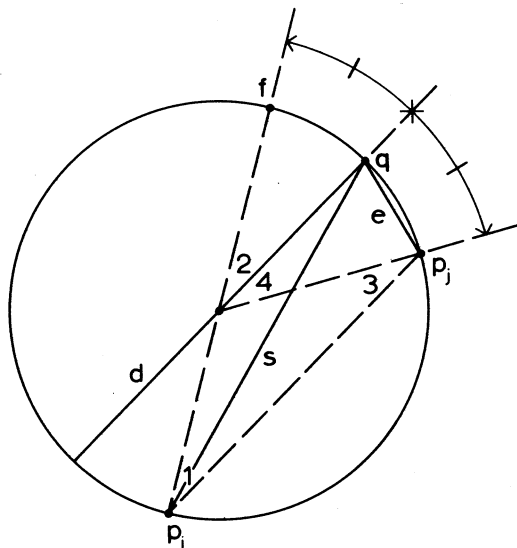


Figure 4

$$(2.3) \quad w(\alpha + \beta) - w_d \varepsilon = w_s \sigma$$

$$(2.4) \quad w(a + b) = -w_e \varepsilon$$

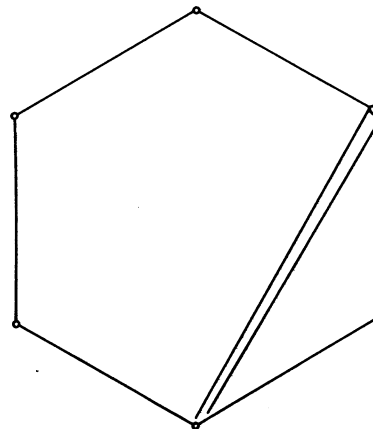
It is clear from this that the assignment of a negative value to w or w_e , or a positive value to w_s uniquely determines a (consistent) proper stress of the tensegrity. From Roth-Whiteley Theorem 5.2 [8] we now have:

2.2 Theorem. A two orbit prismic tensegrity P admits a proper stress, and hence is rigid iff the framework, \bar{P} , obtained by replacing all cables and struts by bars is rigid.

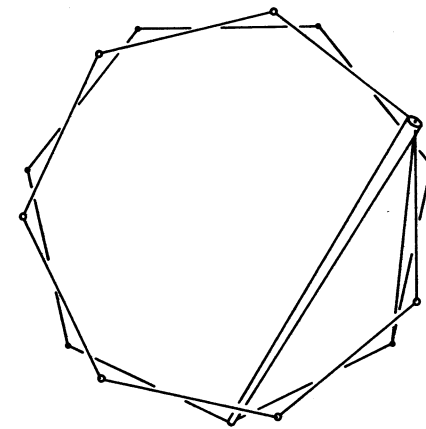
We shall return to the question of rigidity after obtaining some examples by applying these necessary conditions to a characterization of all possible prismic configurations.

Since the vector sum of the cables on the top face lie along the diameter d it is evident that the three incident elements d , s , and e must be coplanar. To determine all possible configurations satisfying this necessary condition, consider the figure consisting of the bottom n -gon (p_1, \dots, p_{n-1}) with strut $s = [p_i, q]$, and diagonal cable $e = [p_j, q]$.

Since the top and bottom faces are parallel to the vertex, q must be such that the diameter through q is parallel to the line joining p_i and p_j . We may picture q as projected onto the bottom circumcircle as shown in Figure 4. It is evident that $\angle 2 = \angle 1 = \angle 3 = \angle 4$ so $\text{arc}(p_j q)$ is equal in length to $\text{arc}(qf)$. Now



$P_6(1)$



$P_7(1)$

Figure 5

$$\langle p_i 0 p_j \rangle = j(2\pi/n)$$

$$\langle p_i 0 q \rangle = j(2\pi/n) + (1/2)(\pi - j2\pi/n)(n + 2j)(\pi/2n)$$

Alors, q est le $(n + 2j)^{\text{ième}}$ sommet d'un 4n-gone régulier avec un sommet à p_j .

Si n est pair, disons que $n = 2k$, alors $(n + 2j)\pi/2n = (k + j)\pi/n$ et p est le $(k + j)^{\text{ième}}$ sommet d'un 2n-gone. Alors l'enveloppe convexe sera toujours soit un prisme ou un prisme adouci, dépendant si $(k + j)$ est lui-même pair ou impair.

Si n est impair, disons que $n = 2k + 1$, alors $(n + 2j)\pi/2n = (2(k + j) + 1)\pi/2n$ est toujours un sommet à numéro impair du 4n-gone et conséquemment, l'enveloppe convexe n'est jamais un prisme ou un prisme adouci, mais est toujours un prisme tordu, dont la face du haut est tordue d'un quart de l'angle central, par rapport à la face du bas.

Nous indiquerons de telles configurations par $P_n(j)$, où n indique le nombre de côtés des polygones du haut et du bas, et où le haut de l'étai est relié à la face du bas au $j^{\text{ième}}$ sommet à partir de la base de l'étai.

3. Les réseaux en tension

Les démonstrations précédentes ont déterminé les positions des sommets pour toutes les tensegrités prismiques à deux orbites. Le seul choix qui reste est celui du type de n-gone utilisé pour les faces du haut et du bas; car la position des sommets demeure la même si le n-gone est remplacé par un autre n-gone d'un type différent. Par exemple, la position du sommet pour $P_5(2)$ se prête aussi bien à une disposition des câbles en forme de pentagone régulier qu'à une disposition en forme de pentagramme.

Afin d'analyser ceci, considérons les polygones générés par une diagonale d_t où t représente le nombre de sommets du n-gone régulier traversés par la diagonale. Alors, d_t génère le n-gone régulier P_n . Si t et n sont des éléments sans diviseur commun, alors d_t générera le n-gone étoilé régulier, P_n^t , où t représente le nombre de fois qu'il tourne autour du centre, ou comme on l'appelle quelquefois, la densité (voir Figure 6).

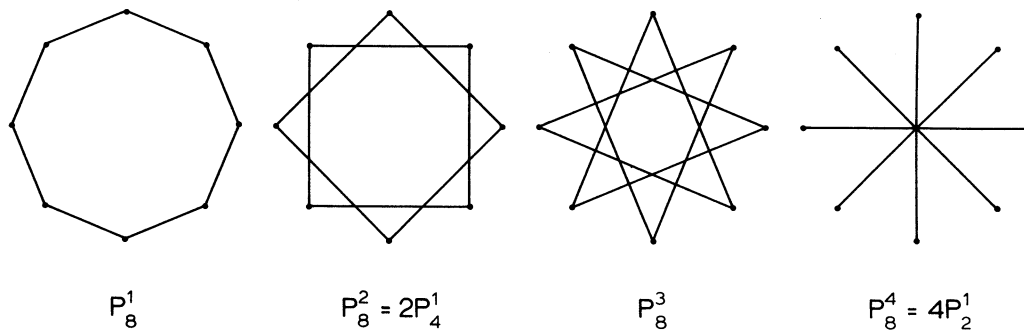


Figure 6

$$\langle p_i 0 p_j \rangle = j(2\pi/n)$$

$$\langle p_i 0 q \rangle = j(2\pi/n) + (1/2)(\pi - j2\pi/n)(n + 2j)(\pi/2n)$$

Thus q is the $(n + 2j)^{\text{th}}$ vertex of a regular 4n-gon with vertex at p_j .

If n is even, say $n = 2k$, then $(n + 2j)\pi/2n = (k + j)\pi/n$ and p is the $(k + j)^{\text{th}}$ vertex of a 2n-gon. Thus the convex hull will always be either a prism or a snub prism, according to whether $(k + j)$ is itself even or odd.

If n is odd, say $n = 2k + 1$, then $(n + 2j)\pi/2n = (2(k + j) + 1)\pi/2n$ is always an odd numbered vertex of the 4n-gon and consequently the convex hull is never a prism or snub prism but is always a twisted prism with the top face twisted one quarter of the central angle, with respect to the bottom face.

We will denote such configurations by $P_n(j)$, where n denotes the number of sides of the top and bottom polygons, and the top of the strut is connected to the bottom face at the j^{th} vertex from the base of the strut.

3. The tension networks

The previous arguments have determined the vertex positions for all two orbit prismic tensegrities. The only remaining freedom is the type of n-gon used for the top and bottom faces; for the position of the vertices remains the same if the n-gon is replaced by one of a different type. For example, the vertex position for $P_5(2)$ can be wired with either a regular pentagon or pentagram.

To analyse this let us consider the polygons generated by a diagonal d_t where t represents the number of vertices of the regular n-gon spanned by the diagonal. Thus d_t generates the regular n-gon, P_n . If t is relatively prime to n, then d_t will generate the regular star n-gon, P_n^t , where t represents the number of times it winds around the center, or as it is sometimes called, the density. (See Figure 6)

En général, si s est le plus grand commun diviseur de t et n , alors d_t génère $s(n/s)$ -gones distincts de type $P_{(n/s)}^{(t/s)}$. Nous allons étendre notre notation pour indiquer les réseaux de tensegrité prismiques afin d'inclure cette information en utilisant $P_n(j; t)$, où n indique l'ordre du groupe cyclique, j , comme précédemment, indique le nombre de sommets successifs comptés à partir du bas de l'étau, auxquels le haut de l'étau est relié par le câble c , et t indique le nombre de sommets successifs sur la face du haut comptés à partir de q et jusqu'à l'emplacement où le câble du haut est attaché. Pour compléter une analyse, nous devons considérer le résultat combinatoire en combinant l'orbite de c_j avec les polygones $P_{(n/s)}^{(t/s)}$.

In general if s is the greatest common divisor of t and n then d_t generates s distinct (n/s) -gons of the type $P_{(n/s)}^{(t/s)}$. We will expand our notation denoting prismic tensigrids to include this information by using $P_n(j; t)$, where n denotes the order of the cyclic group, j , as before, the number of successive vertices counting from the bottom of the strut, to which the top of the strut is connected by the cable c , and t denotes the number of successive vertices on the top face from q to where the top cable is attached. To complete an analysis we must consider the combinatorial result of combining the orbit of c_j with the polygons $P_{(n/s)}^{(t/s)}$.

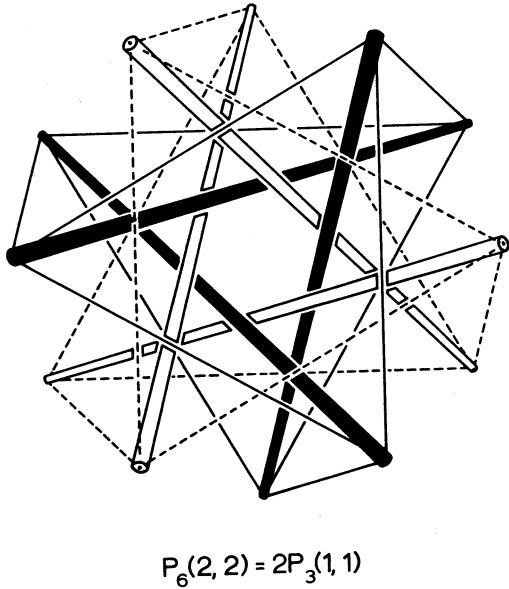
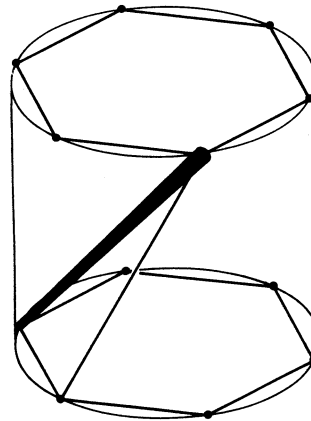
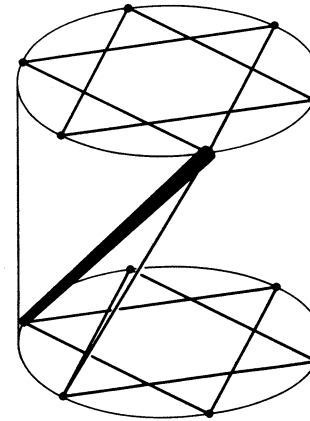


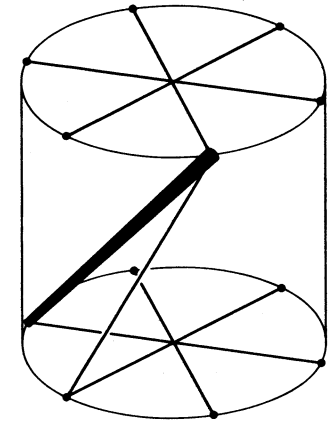
Figure 7



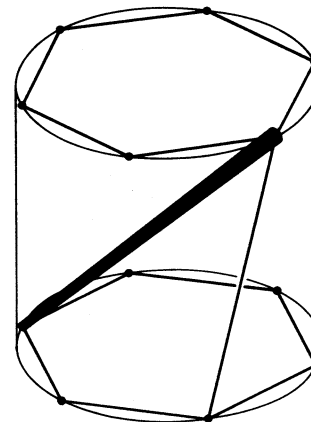
$P_6(1, 1)$



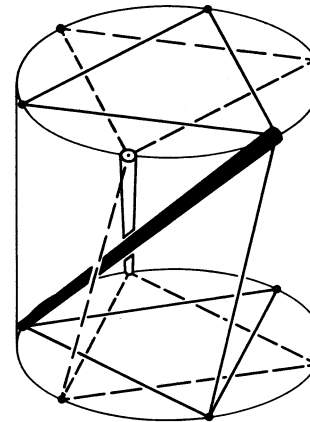
$P_6(1, 2)$



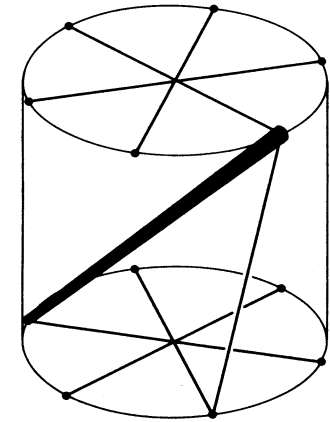
$P_6(1, 3)$



$P_6(2, 1)$



$P_6(2, 2)$



$P_6(2, 3)$

Figure 8

Afin de déterminer la connexité, il n'est pas nécessaire de distinguer les étais des câbles ou les faces du haut de celles du bas. Ensemble, l'étau $[p_i, q]$ et le câble $[p_j, q]$ relie le sommet p_i à p_j . L'orbite de $[p_i, p_j]$ relie les sommets du polygone (étoilé) $P_{(n/u)}^{(j/u)}$, où $u = (n, j)$. L'orbite de d_i relie les sommets de $P_{(n/s)}^{(t/s)}$. Ensemble, ceux-ci relient les sommets du polygone (étoilé) P_n^h où h est le plus grand commun diviseur de n, j et t . Alors si n, j et t sont des éléments sans diviseur commun, le résultat est un seul réseau connexe. Toutefois, si $h \neq 1, n = ah, j = bh$ et $t = kh$, alors la configuration est un composé, $hP_a(b, k)$, constitué de h réseaux de tensegrité congruents.

En termes de groupes additifs, P_n correspond au groupe cyclique d'ordre n généré par $\langle 1 \rangle, P_n^j$ à celui généré par $\langle j \rangle$ et P_n^t à celui généré par $\langle t \rangle$. Les sommets connexes sont ceux du plus petit sous-groupe contenant j et t , qui est le groupe $\langle h \rangle$, généré par h le plus grand commun diviseur de n, j et t .

En résumé, les tensegrités prismiques sont les configurations $P_n(j, t)$, où $P_n(j, t)$ indique la configuration dont les faces du haut et du bas constituent chacune un polygone régulier P_n^t , dont l'étau du haut est attaché au $j^{\text{ème}}$ sommet à partir du bas de l'étau. Si h est le plus grand commun diviseur de n, j et t , lorsque $n = ah, j = bh$ et $t = kh$, ce sera un composé $hP_a(b, k)$, de h tensegrités irréductibles congruentes, $P_a(b, k)$. Lorsque n est pair, l'enveloppe convexe est un prisme ou un prisme adouci et lorsque n est impair, elle est toujours un prisme tordu.

Avant de terminer cette partie, nous allons admettre un certain relâchement de quelques-unes de nos restrictions pour introduire des figures qui, même si elles ne satisfont pas à toutes les conditions de transitivité des sommets, sont associées de près aux figures dont nous venons de parler ci-haut qui, elles, satisfont à ces conditions.

Premièrement, il y a très peu de changement si nous attribuons aux polygones du haut et du bas des rayons différents. Naturellement, les sommets du haut ne sont plus géométriquement équivalents à ceux du bas, mais ils demeurent graphiquement équivalents et les étais seront encore géométriquement transitifs. Il est évident que les démonstrations des théorèmes (2.1) et (2.2) ne sont pas affectées par ceci, et que leurs résultats s'appliquent ici aussi.

Deuxièmement, comme les équations (2.3) et (2.4) remplacent les vecteurs le long du haut par un vecteur le long de la diagonale, le polygone du haut et/ou le polygone du bas peuvent également être remplacés par d'autres figures telles que celles de la Figure 9. Ici encore, les démonstrations des théorèmes (2.1) et (2.2) s'appliquent tout aussi bien.

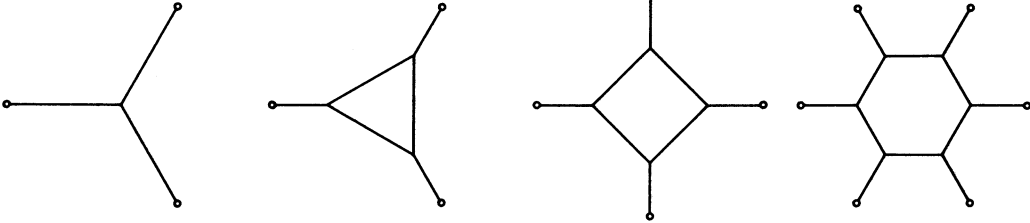


Figure 9

To determine the connectivity we need not distinguish between struts and cables or the bottom and top face. The strut $[p_i, q]$ together with the cable $[p_j, q]$ connects the vertex p_i to p_j . The orbit of $[p_i, p_j]$ connects the vertices of the (star) polygon $P_{(n/u)}^{(j/u)}$, where $u = (n, j)$. The orbit of d_i connects the vertices of $P_{(n/s)}^{(t/s)}$. Together these connect the vertices of the (star) polygon P_n^h where h is the greatest common divisor of n, j and t . Thus if n, j and t are relatively prime the result is a single connected network. However, if $h \neq 1, n = ah, j = bh$ and $t = kh$ then the configuration is a compound, $hP_a(b, k)$, consisting of h congruent tensegrids.

In terms of groups (written additively) P_n corresponds to the cyclic group of order n generated by $\langle 1 \rangle, P_n^j$ that generated by $\langle j \rangle$ and P_n^t that generated by $\langle t \rangle$. The connected vertices are those of the smallest subgroup containing j and t , which is the group $\langle h \rangle$, generated by h the greatest common divisor of n, j and t .

In summary, the prismic tensegrities are the configurations $P_n(j, t)$, where $P_n(j, t)$ denotes the configuration whose top and bottom faces are the regular polygon P_n^t , with the top strut attached to the j^{th} vertex from the bottom of the strut. If h is the greatest common divisor of n, j and t , with $n = ah, j = bh$ and $t = kh$ it will be a compound, $hP_a(b, k)$, of h congruent irreducible tensegrities, $P_a(b, k)$. For n even the convex hull is a prism or snub prism and for n odd it is always a twisted prism.

Before leaving this section we relax briefly some of our restrictions to introduce figures which, although they do not satisfy all of vertex transitivity, are closely associated with the above which do.

First there is very little that changes if we allow the top and bottom polygons to have different radii. Of course the top vertices are no longer geometrically equivalent to those on the bottom but they remain graphically equivalent and the struts will still be geometrically transitive. It is evident that the arguments of theorems (2.1) and (2.2) are unaffected so these results hold as well.

Secondly since the equations in (2.3) and (2.4) replace the vectors along the top by a vector along the diagonal the top and/or bottom polygon can equally be replaced by figures such as those of Figure 9. Again the arguments of theorems (2.1) and (2.2) apply to these as well.

Finalement, à cause de l'intérêt que cela représente pour la construction de modèles, nous terminons cette section en donnant des formules pour la longueur des étais et des câbles pour les figures ci-haut.

Pour $P_n(j, t)$ avec l'étau t , le câble polygonal c et le câble diagonal e
 le rayon du haut r
 le rayon du bas $R < r$
 le rayon polygonal $\rho = (r \text{ ou } R)$
 la hauteur h .

$$c = 2\rho \sin(t\pi/n)$$

$$e = [r^2 + R^2 - rR \cos(\pi[1/2 - j/n]) + h^2]^{1/2}$$

$$s = [r^2 + R^2 - rR \cos(\pi[1/2 + j/n]) + h^2]^{1/2}$$

Pour $r = R$

$$c = 2\rho \sin(t\pi/n)$$

$$e = [4\rho^2 \sin^2(\pi[1/4 - j/2n]) + h^2]^{1/2}$$

$$s = [4\rho^2 \sin^2(\pi[1/4 + j/2n]) + h^2]^{1/2}$$

Finally, because of interest in constructing models, we end this section by giving formulas for the length of struts and cables for the above figures.

For $P_n(j, t)$ with strut t , polygonal cable c and diagonal cable e
 top radius r
 bottom Radius $R < r$
 polygonal radius $\rho = (r \text{ or } R)$
 height h .

$$c = 2\rho \sin(t\pi/n)$$

$$e = [r^2 + R^2 - rR \cos(\pi[1/2 - j/n]) + h^2]^{1/2}$$

$$s = [r^2 + R^2 - rR \cos(\pi[1/2 + j/n]) + h^2]^{1/2}$$

For $r = R$

$$c = 2\rho \sin(t\pi/n)$$

$$e = [4\rho^2 \sin^2(\pi[1/4 - j/2n]) + h^2]^{1/2}$$

$$s = [4\rho^2 \sin^2(\pi[1/4 + j/2n]) + h^2]^{1/2}$$

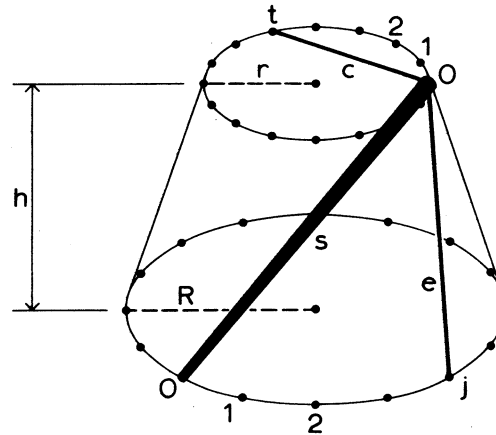


Figure 10

4. Rigidité

La condition nécessaire fondamentale que nous avons utilisée dans cet article a consisté en l'exigence que tous les sommets soient en équilibre sous une contrainte à l'intérieur de la configuration. Pour ces figures, cela équivaut à exiger qu'un sommet unique soit maintenu en place si les autres sommets sont fixés par des contraintes extérieures. Initialement, il semblait probable que cette condition soit aussi suffisante puisque, outre la plausibilité d'une telle conclusion vu le haut degré de symétrie des configurations, de nombreux modèles s'étaient avérés rigides. Que cette condition soit suffisante semble avoir été l'hypothèse implicite utilisée en [1] et en [6].

4. Rigidity

The basic necessary condition used in this paper has been the requirement that all vertices be in equilibria under a stress of the configuration. For these figures this is equivalent to requiring that a single vertex be held in place if the remaining vertices are fixed by external constraints. Initially, it was thought that this condition was likely sufficient as well, since, aside from its plausibility given the high degree of symmetry, numerous models proved to be stiff. That this condition is sufficient seems to be the implicit assumption used in [1] and [6].

Toutefois, cette condition n'est pas suffisante, comme nous pouvons le démontrer grâce au réseau de tensegrité hexagonal $P_6^+(1, 3)$. Celui-ci consiste en un prisme hexagonal adouci sur lequel les câbles des faces hexagonales sont disposés sur les diamètres de ces faces. Même s'il satisfait à la condition ci-dessus, il n'est pas rigide.

Il est intéressant de noter de quelle façon il perd sa rigidité. Le mouvement n'est pas symétrique dans le sens où les sommets demeurent transitifs. De fait, on peut démontrer que la configuration est rigide dans la classe des tensegrités transitives d'étais et de sommets.

La seconde observation que l'on peut faire est la suivante: bien que chaque sommet soit fixe si ceux qui restent sont fixés, et que cela soit aussi vrai pour les câbles, cela n'est pas vrai pour les étais. Toutefois, si on introduit un nouveau sommet «non-étau» à l'intersection des diamètres, les étais de la nouvelle configuration sont fixés individuellement et la figure elle-même est 'expérimentalement' rigide.

Cela, ainsi que quelques considérations additionnelles, nous amène à formuler l'hypothèse suivante. Une tensegrité sera appelé α -rigide pour un élément α spécifique (un sommet, un étau ou un câble), si α est fixé lorsque tous les sommets qui ne lui sont pas incidents sont fixés par des contraintes externes.

Conjecture: *Une tensegrité transitive d'étais et de sommets est rigide si et seulement si chacun de ses éléments α (ses étais, ses sommets et ses câbles) sont α -rigides.*

Tous les réseaux de tensegrité prismiques à deux orbites, sauf le réseau $P_{2n}(i, n)$, satisfont à cette condition. Toutefois, il y a d'autres tensegrités prismiques qui s'en approchent arbitrairement. Pour tout nombre entier positif n , la tensegrité $P_{6n}(n, 3n)$ possède la même configuration d'étais, et la figure étoilée $P_{6n}(n, 3n - 1)$ lui ressemble arbitrairement d'autant plus que $n \rightarrow \infty$. Ma propre hypothèse est que les figures étoilées $P_{6n}(n, 3n - 1)$ s'avèreront éventuellement théoriquement rigides, mais que la région de stabilité sera tellement petite qu'en pratique, elles ne pourront tenir debout. Notez toutefois que, selon le théorème qui suit, elles sont toutes rigides, en incluant la figure $P_{2n}(i, n)$, si la face du bas est un polygone rigide.

Comme nous l'avons vu à la section (3), toutes les figures, y compris les figures modifiées mentionnées à la fin de la dernière section, admettent des contraintes propres et dès lors, sont rigides si et seulement si la **charpente prismique** correspondante, obtenue en remplaçant tous les étais et les câbles par des barres, est rigide.

Théorème 4.1. *Si la face du bas d'une tensegrité prismique est remplacée par un polygone rigide, la configuration est rigide.*

Preuve: Comme ci-haut, nous examinons la charpente correspondante faite entièrement de barres. Examinons maintenant un étau $s = [p_i, q]$ et le câble diagonal incident $c = [p_{i+j}, q]$, attachés au haut de s . Ces deux barres contraignent le sommet q à se mouvoir le long d'un cercle perpendiculaire à $\overrightarrow{p_i p_{i+j}}$, et dont le centre repose sur $\overrightarrow{p_i p_{i+j}}$, comme illustré à la **Figure 11**. Puisque les sommets du bas sont fixes, les cercles contraignants, illustrés perpendiculairement en lignes plus foncées, reposent le long des arêtes d'un n -gone régulier. La position d'équilibre se situe aux points centraux de ces côtés et les barres du haut s'ajustent parfaitement. En se basant sur les propriétés extrêmes des polygones, nous savons que si les sommets du haut sont déplacés vers n'importe quelle autre position le

Whoever, the condition is not sufficient, as can be demonstrated with the hexagonal tensegrid, $P_6^+(1, 3)$. This consists of a hexagonal snub prism with the hexagonal faces strung with diameters. Although it satisfies the above condition, it is not rigid.

It is interesting to note the way in which it fails to be rigid. The motion is not symmetric in the sense that the vertices remain transitive. In fact, it can be shown that the configuration is rigid in the class of strut and vertex transitive tensegrities.

A second observation is that although each vertex is fixed if the remaining are held fixed and the same is true of cables, it is not true for the struts. However, if a new «non-strut» vertex is introduced at the intersection of the diameters the struts in the new configuration are individually fixed and the figure itself is 'experimentally' rigid.

This with a few other considerations leads us to formulate the following conjecture. A tensegrity will be called α -rigid for a specific element α , (vertex, strut, or cable), in case α is held fixed if all non incident vertices are held fixed by external constraints.

Conjecture: *A strut and vertex transitive tensegrity is rigid if and only if it is strut, vertex and cable stiff.*

All of the two orbit prismic tensegrids except the, $P_{2n}(i, n)$, satisfy this condition. However, there are other prismic tensegrities which approach them arbitrarily. For any positive integer n the tensegrity $P_{6n}(n, 3n)$ has the same strut configuration and the star figure $P_{6n}(n, 3n - 1)$ resembles it arbitrarily closely as $n \rightarrow \infty$. My own guess is that the star figures $P_{6n}(n, 3n - 1)$ will eventually prove to be theoretically rigid but the region of stability will be so small that in practice they will not stand up. Note however, that, according to the next theorem, all of them including the $P_{2n}(i, n)$'s are rigid if the bottom face is a rigid polygon.

As we saw in section (3) all of the figures including the modified ones mentioned at the end of the last section, admit proper stresses and hence are rigid iff the corresponding **prismic framework**, obtained by replacing all struts and cables by bars, is rigid.

Theorem 4.1. *If the bottom face of a prismic tensegrity is replaced by a rigid polygon the configuration is rigid.*

Proof: As above we consider the corresponding framework made entirely from rods. Consider now a strut $s = [p_i, q]$ and the incident diagonal cable $c = [p_{i+j}, q]$ attached at the top of s . These two rods constrain the vertex q to move along a circle perpendicular to, and with center along the $\overrightarrow{p_i p_{i+j}}$ as shown in **Figure 11**. Since the bottom vertices are fixed, the constraining circles, shown perpendicularly in heavy lines, lie along the edges of a regular n -gon. The equilibrium position is the midpoints of these sides and the top bars just fit. From extremal properties of polygons, we know that if the top vertices are moved to any other positions along these sides, at least one of the bars must be longer. Thus the vertices admit only the equilibrium position.

long de ces côtés, au moins une des barres doit être plus longue. Dès lors, les sommets permettent uniquement la position d'équilibre.

Notez cependant, que si les barres-étais sont légèrement raccourcies alors que la longueur des barres-câbles demeure inchangée, les sommets de la face du haut admettent deux solutions distinctes, comme illustré à la **Figure 11**.

Puisque nous n'avons établi mathématiquement que le fait que ces dispositions de sommets soient nécessaires, mais non pas le fait qu'elles soient suffisantes, nous ne pouvons pas énoncer le sommaire de la situation qui suit comme un théorème. Toutefois, il semble que ce soit le cas et il a été vérifié expérimentalement dans nombre de cas simples.

Dans les positions d'équilibre, les structures de tensegrité que nous avons décrites sont rigides comme le sont les figures duales obtenues en échangeant les étais et les câbles et, bien entendu, les structures de barres obtenues en remplaçant tous les étais et les câbles par des barres. (En se basant sur le théorème 2.2 et [8], elles sont toutes équivalentes.)

En position d'équilibre, une tension dans les barres-câbles induit une compression dans les barres-étais et vice versa, tandis qu'une tension dans les barres-étais induit une compression dans les barres-câbles et vice versa.

Dans les positions obtenues en raccourcissant les barres-étais, positions que nous avons décrites plus haut, la structure de barres est rigide, mais les structures de tensegrité et leurs duales ne le sont pas. Une poussée vers l'extérieur sur les barres-étais permet simplement à la figure de faire un mouvement de rotation vers la position d'équilibre, et la structure de tensegrité construite dans cette position peut seulement faire un mouvement de rotation vers la position d'équilibre lorsqu'on en raccourcit les câbles diagonaux; et la figure duale peut effectuer une rotation vers la position d'équilibre lorsqu'on raccourcit les étais.

Note, however, that if the 'strut' rods are shortened slightly while the length of the 'cable' rods remains unchanged, the vertices of the top face admit two distinct solutions, as shown in **Figure 11**.

Since we have mathematically established only the necessity of these vertex positions and not their sufficiency, we cannot state the following summary of the situation as a theorem. However, it certainly appears to be the case and is experimentally verified for numerous simple cases.

In the equilibrium positions the tensegrity structures described are rigid as are the dual figures obtained by interchanging struts and cables, and of course the rod structures obtained by replacing all struts and cables by rods. (In view of Theorem 2.2 and [8], they are all equivalent.)

In the equilibrium position a tension in the 'cable' rods induces a compression in the 'strut' rods and vice versa, while a tension in the 'strut' rods induces a compression in the 'cable' rods and vice versa.

In the positions obtained by shortening the 'strut' rods, described above, the rod structure is rigid but the tensegrity structures and their duals are not. An outward thrust on the 'strut' rods simply allows the figure to rotate toward the equilibria position, and the tensegrity structure built in this position can simply rotate toward the equilibrium position, with shortened diagonal cables; and the dual figure can rotate toward it with shorter 'strut' cables.

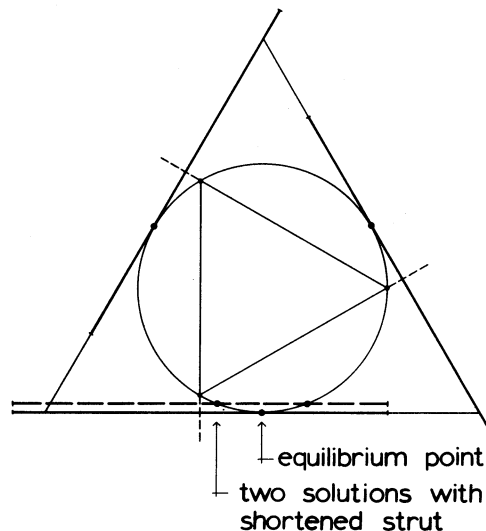


Figure 11

- [1] Ahrens, H., Geodesic Math. and how to use it. University of California Press, Berkeley, 1976.
- [2] Connelly, R., The rigidity of certain cabled frameworks and the second order rigidity of arbitrary triangulated convex surfaces. Adv. in Math. (to appear).
- [3] Fuller, R.B. and E.J. Applewhite, Synergetics. MacMillan, New York, 1974.
- [4] Fuller, R.B. and E.J. Applewhite, Synergetics 2. MacMillan, New York, 1979.
- [5] Pugh, A., Polyhedra: A Visual Approach. University of California Press, Berkeley, 1976.
- [6] Pugh, A., An Introduction to Tensegrity. University of California Press, Berkeley, 1976.
- [7] Roth, B., Rigid and Flexible Frameworks. American Mathematical Monthly; vol. 88, no. 1, pp. 6-20.
- [8] Roth, B. and W. Whiteley, Tensegrity Frameworks. Preprint.