



Roberto Guerra Fontana

## 8. ESFUERZOS NORMALES

**8.1. TENSIONES POR COMPRESIÓN O TRACCIÓN PURA**

Según se obtuvo al resolver el problema elástico de una barra de sección rectangular, solicitada por momento flector, cortante y esfuerzo normal, este último aportaba el siguiente término a la expresión de la TENSION NORMAL.

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N}{A}$$

N esfuerzo normal  
A superficie de la sección.

En el marco de la RESISTENCIA DE MATERIALES, sabemos que se establece una hipótesis sobre el TIPO DE MOVIMIENTO QUE EXPERIMENTA LA SECCIÓN EN EL PROCESO DE LA DEFORMACIÓN, y para el caso concreto de los esfuerzos normales, la hipótesis que propone la RESISTENCIA DE MATERIALES, es que la SECCIÓN sufre un movimiento de deslizamiento sobre LA FIBRA MEDIA, permaneciendo paralela a sí misma (en barras de directriz recta)

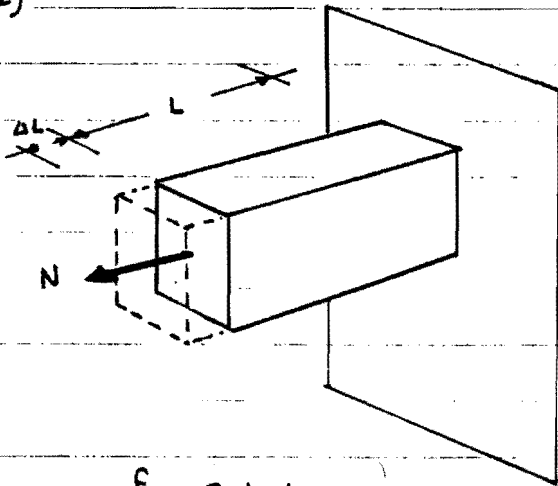


Fig 8.1.10

En tal caso, todas las fibras sufren un acortamiento o alargamiento común,  $\Delta L$ , y en consecuencia, la deformación unitaria longitudinal es también la misma.

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

y ello a su vez exige, que en todos los puntos de la sección se experimenta la misma tensión normal.  $\bar{\sigma}_x$ .

Sabemos por las ecuaciones generales de equilibrio, entre tensiones y solicitaciones, que debe verificarse:

$$N = \int \bar{\sigma}_x ds$$

Puesto que  $\bar{\sigma}_x$  es constante, puede alcanzarse la misma



conclusión que la obtenida tras la resolución del problema elástico antes indicado, ya que:

$$N = \sigma_x \int ds \quad \Rightarrow \quad N = \sigma_x A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}} \quad (8.1.1.)$$

### 8.2. CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

Pero si se producen cambios bruscos de sección, el elemento estructural correspondiente no verificará la definición de BARRA, y en consecuencia (8.1.1.) no será aplicable a tales elementos.

Durante un largo periodo de tiempo, se ha carecido de un método de análisis teórico, para obtener las tensiones que se producen en elementos con agujeros, variaciones fuertes de la sección, etc, y sólo se disponía del ANÁLISIS FOTOELÁSTICO para deducir el valor de las tensiones en los puntos en que previsiblemente estas aumentarían sobre el valor que indica la expresión  $\sigma_x = N/A$ , Así pues, la vía experimental fue la que primeramente nos facilitó las primeras conclusiones.

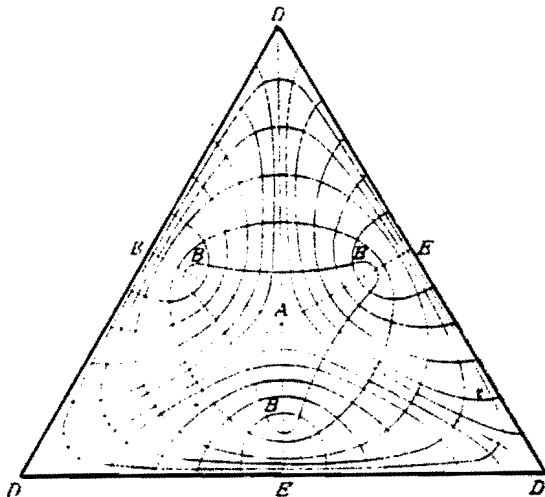
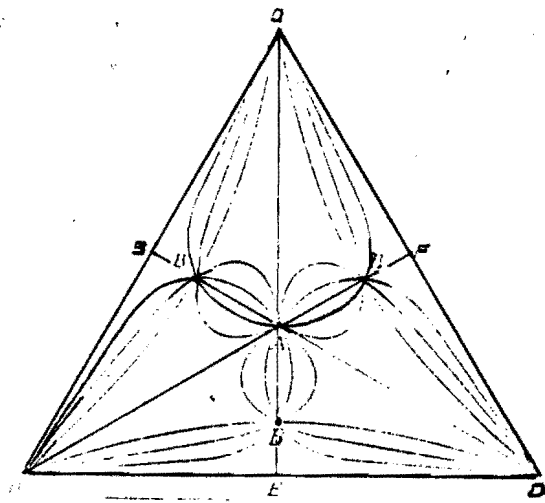
Cuando James Clerk Maxwell a los dieciséis años fue invitado a visitar el laboratorio del inventor del prisma polarizador Dr. Nicol, y este le regaló ante el interés mostrado por su joven visitante, una colección de prismas polarizadores, se produjo un hecho de gran repercusión posterior

A los diecinueve años, Maxwell siendo un alumno de la Universidad de Edimburgo, en fase de preparación para conseguir el ingreso en la Universidad de Cambridge, presentó a la Royal Society de Edimburgo un artículo titulado: "EL EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS ELÁSTICOS" (1850), en donde aborda una serie de cuestiones, y entre ellas, la número catorce corresponde al análisis de una placa triangular de vidrio no recocido, sometido a torsión, que ante la carencia de solución analítica, lo aborda mediante la técnica que hoy conocemos como FOTOELASTICIDAD



Maxwell aplicó luz polarizada plana, y trazó las curvas isocromáticas que representan los lugares geométricos de los puntos, en los que la diferencia de las tensiones principales poseen un mismo valor, existiendo una correlación entre el color, y el valor de dicha diferencia o valor de la tensión tangencial máxima.

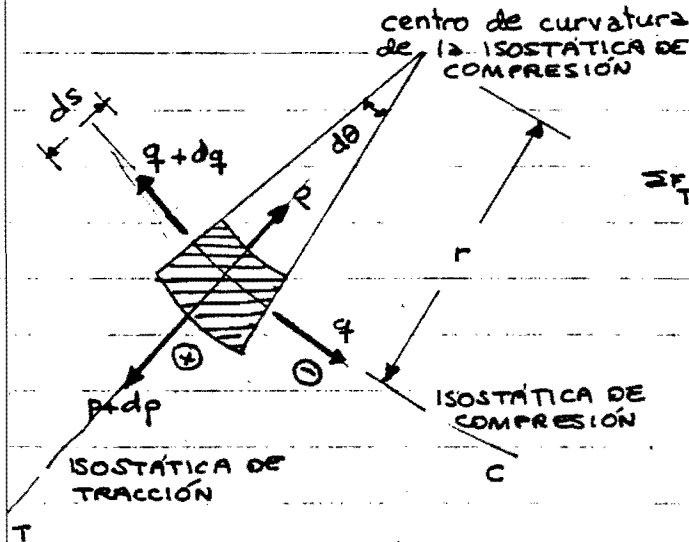
Maxwell fijando un cierto ángulo para el plano correspondiente a la luz polarizada, dedujo que conseguiría que la amplitud del rayo emergente se anulase en los puntos en que las direcciones principales fuesen coincidentes con los ejes del polarizador y del analizador, y por lo tanto los citados puntos aparecerían negros; de esta forma trazó las ISOCLINAS que representan los puntos que poseen la misma orientación para las DIRECCIONES PRINCIPALES



De esta forma conoció para todo punto de la placa, la orientación de las direcciones principales, y ello le permitió trazar las CURVAS ISOSTÁTICAS entendiendo por tales, aquellas en las cuales la tangente es coincidente con una de las direcciones principales, y la otra es normal a la curva, por lo que en estados planos, existen siempre DOS FAMILIAS DE CURVAS ISOSTÁTICAS que se cortan en cada punto ortogonalmente.



Maxwell analizó el equilibrio de un elemento diferencial situado sobre la ISOSTÁTICA DE COMPRESIÓN



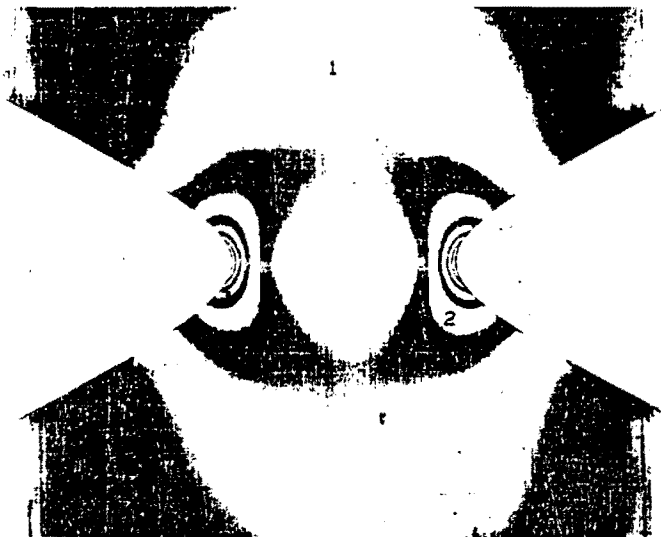
Proyectando sobre la isostática de tracción:

$$\sum F_T = 0 \left\{ \begin{aligned} & (p+dp) d\theta \left(r + \frac{ds}{2}\right) - \\ & - p d\theta \left(r - \frac{ds}{2}\right) - 2q ds \frac{d\theta}{2} - \\ & - dq ds \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \right.$$



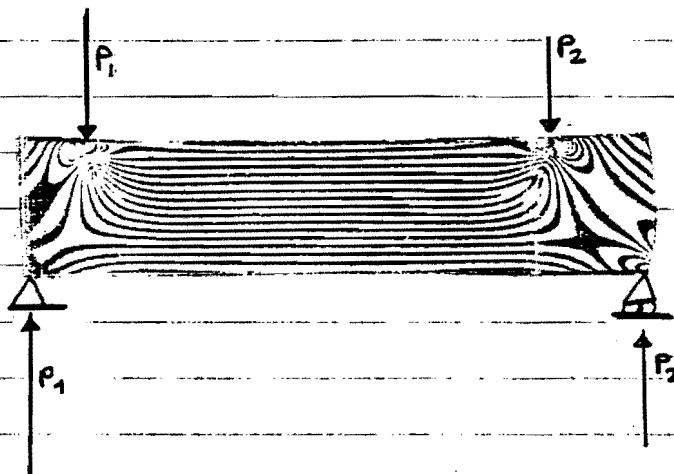
$$dp = ds \left( \frac{q-p}{r} \right)$$

Como  $q-p$  es el valor que se mide directamente por el ensayo fotoelástico, y tanto  $r$  como  $ds$  son cotas que pueden medirse, resulta que fácilmente pueden calcularse los incrementos de las tensiones principales al recorrer una cierta isostática de tracción o compresión, por lo que para poder determinar el valor de dichas tensiones principales, sólo es preciso partir de un punto en que sea conocida la misma, y ello siempre es factible iniciando el recorrido en el contorno, donde la tensión principal es dato.

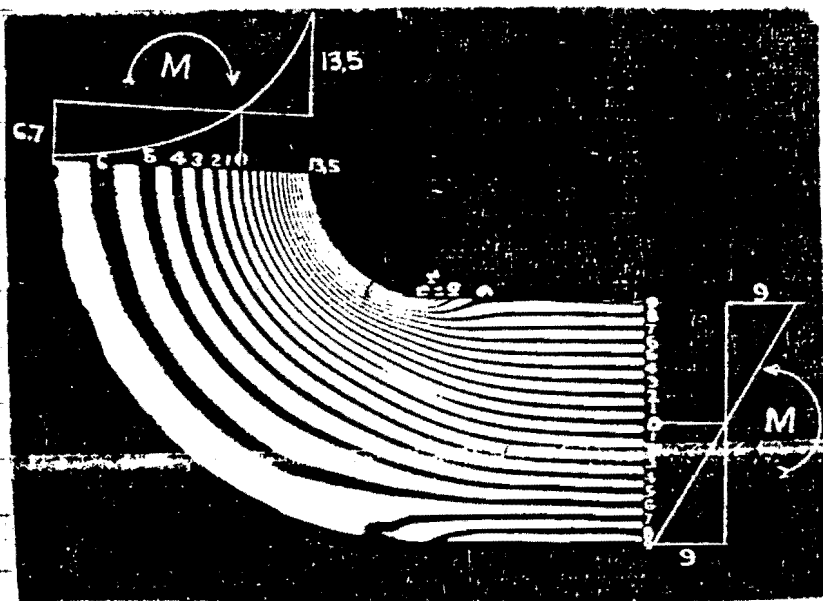


Ensayo fotoelástico con entalladura hiperbólica.

Cada franja corresponde a puntos en los que la tensión tangencial máxima es sensiblemente parecida.

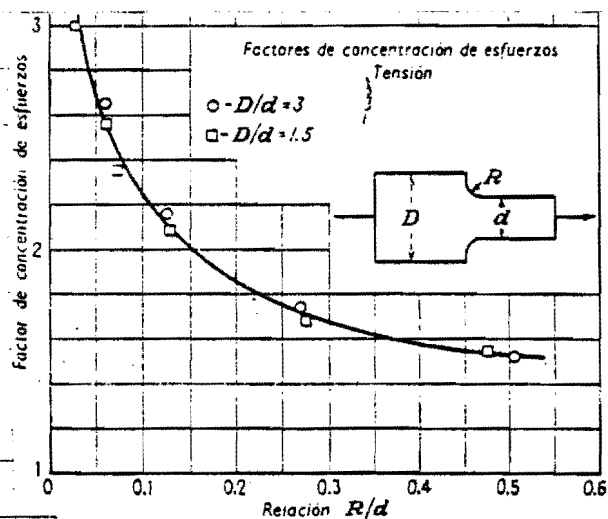


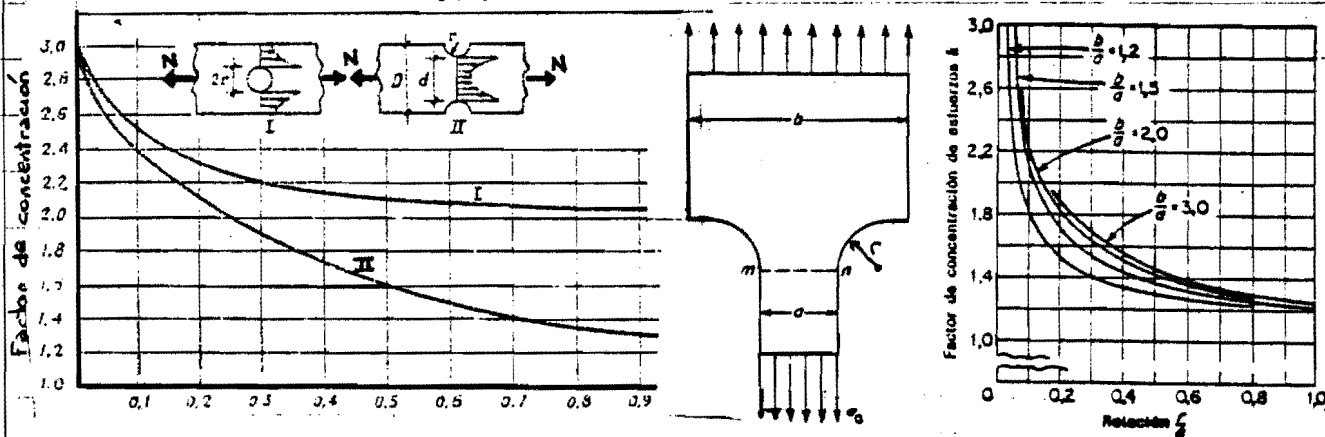
Viga sometida a flexión pura entre dos secciones.



Distribución de tensiones en una barra flexionada curva, mediante análisis fotoelástico.

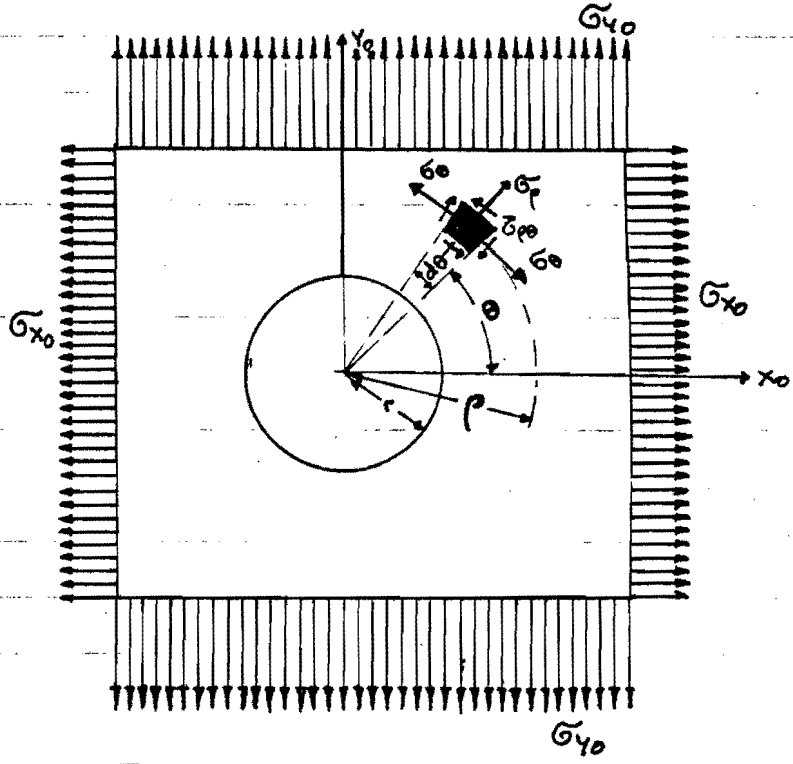
En el caso de esfuerzos normales, con entalladuras el ensayo fotoelástico ha sido durante mucho tiempo el único método para conocer la concentración de tensiones que se producen en la entalladura, como puede observarse en la imagen del ensayo fotoelástico.





El caso de un agujero es el único que fue resuelto de forma totalmente satisfactoria, por la teoría de la Elasticidad mediante el uso de coordenadas polares, sin la utilización de métodos aproximados, como DIFERENCIAS FINITAS o más modernamente LA TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

La solución exacta supone una placa de longitud infinita, en la que se conoce el estado tensional en todos sus puntos, suponiendo que el mismo es constante para todos ellos, y en el que se practica un taladro circular, que altera el estado tensional de la placa de la forma siguiente:







$$\alpha = r/\rho$$

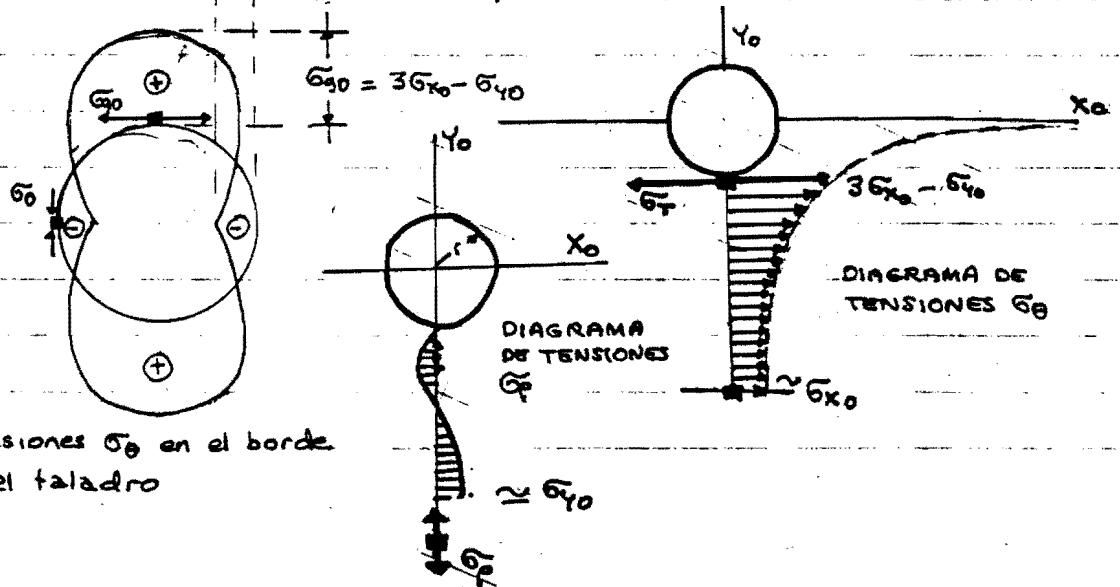
$$\sigma_{\rho} = \frac{\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}}{2} (1 - \alpha^2) + \left( \frac{\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}}{2} \right) (1 + 3\alpha^4 - 4\alpha^2) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{x_0} + \sigma_{y_0}}{2} (1 + \alpha^2) - \left( \frac{\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}}{2} \right) (1 + 3\alpha^4) \cos 2\theta$$

$$\tau_{\rho\theta} = - \left( \frac{\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}}{2} \right) (1 - 3\alpha^4 + 2\alpha^2) \sin 2\theta$$

En el borde del taladro ( $\alpha=1$ ), lógicamente por condición de contorno  $\sigma_{\rho} = \tau_{\rho\theta} = 0$ , en tanto que:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} - 2 \cos 2\theta (\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}) \Rightarrow \begin{aligned} \theta=0 &\Rightarrow \sigma_{\theta} = -\sigma_{x_0} + 3\sigma_{y_0} \\ \theta=90^{\circ} &\Rightarrow \sigma_{\theta} = 3\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0} \end{aligned}$$

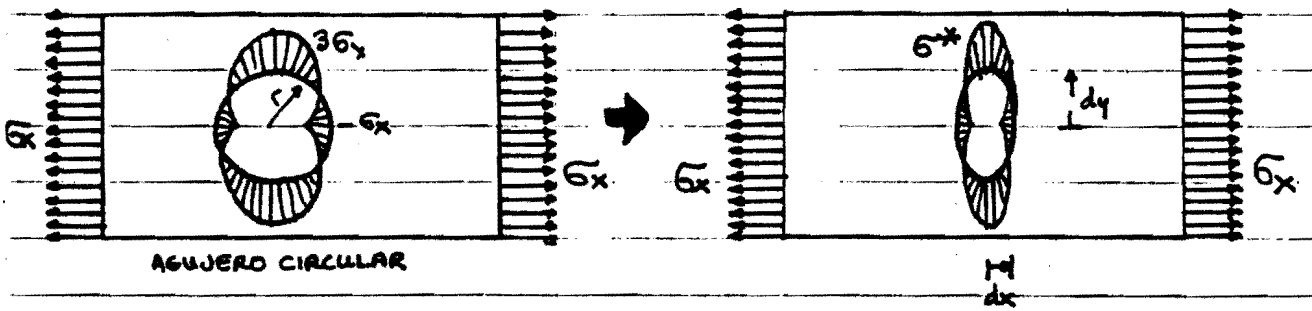


Tensiones  $\sigma_{\theta}$  en el borde del taladro

Si es una tracción pura según una sola dirección, la tensión máxima previsible en el borde del taladro es tres veces la que existe en la placa en puntos suficientemente alejados.

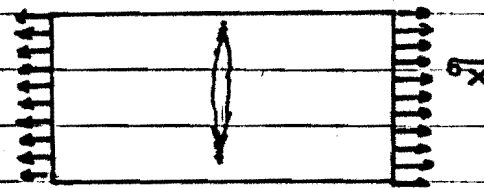
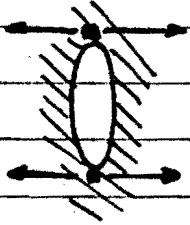
Si la placa no es infinita, la proporción de 3 veces es exagerada y puede adoptarse valores inferiores tal como se indicó en la gráfica deducida por vía experimental.

Si el agujero es elíptico, se verifica:

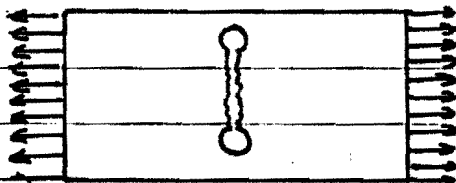


$$\sigma_x^* = \sigma_x \left(1 + 2 \frac{dy}{dx}\right)$$

Si  $dy = 2 \cdot dx$ , en tal caso  $\sigma_x^* = 5 \sigma_x$ , con lo cual puede observarse fácilmente que será previsible la plastificación en los extremos del taladro elíptico, con lo cual este tenderá a alargarse, y ello a su vez provocará nuevos incrementos de tensión que facilitarán la sucesiva progresión del agujero, siendo este el proceso de avance de una GRIETA



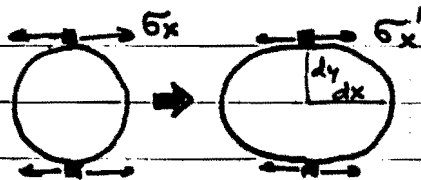
Este fenómeno, de avance incontrolado de una grieta, solo puede evitarse, alterando el cociente  $dy/dx$ , retornándolo al menos al valor unitario, practicando agujeros en los extremos de la grieta, con lo cual, la tensión máxima quedará limitada a  $3\sigma_x$



Es conveniente señalar la diferente respuesta que presentan ante este tipo de fenómenos, los materiales DUCTILES y los denominados QUEBRADIZOS, puesto que los primeros resisten bien estos fenómenos al ser capaces de alcanzar grandes deformaciones antes de su rotura, lo que facilita un reparto de las tensiones, al alterarse la forma de la entalladura, en



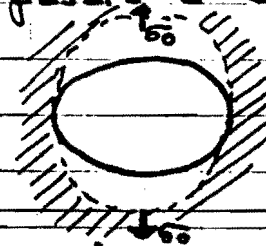
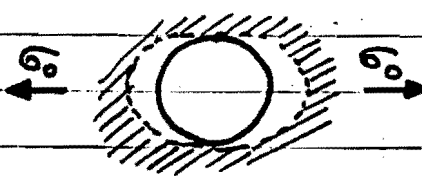
tanto que los segundos, aunque sean más resistentes, al no poseer la facilidad de alterar la forma y con ello alterar las leyes de tensiones, son más propensos a colapsarse.



al ser  $dy < dx$  en el orificio deformado  $\sigma_x' < \sigma_x$ , con lo que se estabiliza la deformación

previa alteración de la geometría.

Lo expuesto, nos enseña que si se producen cambios cíclicos en la dirección de la tensión que solicita la pieza, la deformación crecerá progresivamente, puesto que la geometría adoptada para una tensión de tracción horizontal, es desfavorable, si la tracción pasará a ejercerse verticalmente,

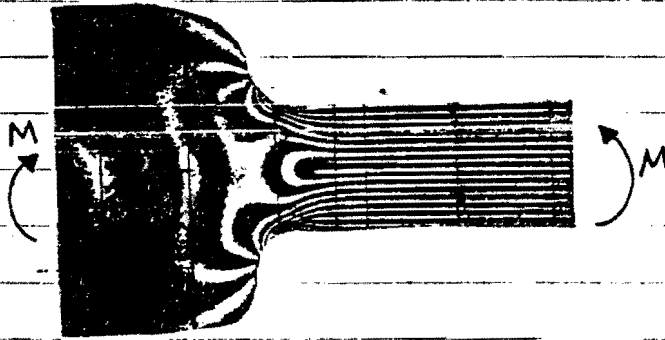


(se ha indicado en continuo, contorno inicial, y discontinuo el final)

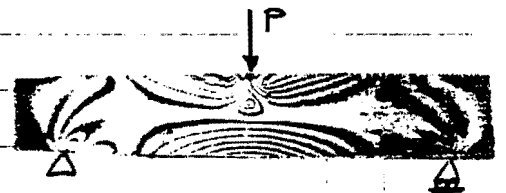
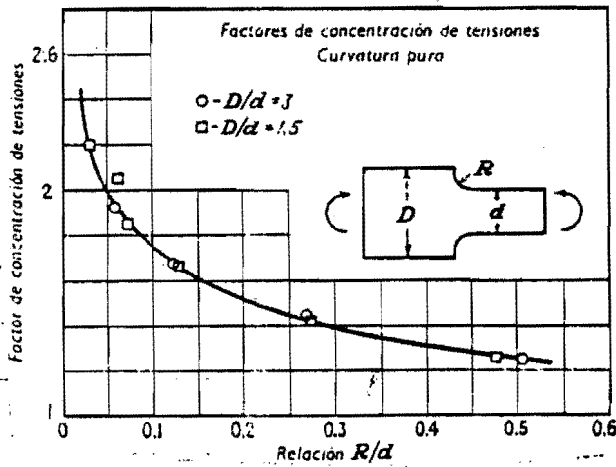
con lo cual, la geometría se deformará nuevamente intentando adoptarse al nuevo estado tensional, y es evidente que después de sucesivos ciclos, la deformación puede crecer lo suficiente para colapsar la pieza.

Esta es la causa, de la peligrosidad de los fenómenos cíclicos, que son estudiados en la RESISTENCIA DE MATERIALES en el capítulo que se suele denominar FATIGA.

Las leyes de tensión que se producen en el entorno de entalladuras, agujeros, contornos cóncavos, etc, son con frecuencia de difícil determinación por métodos teóricos, y se recurre generalmente a métodos experimentales, para evaluar el factor de concentración de tensiones y preveer, siendo el método más tradicional el FOTOELÁSTICO que descubrió Clark Maxwell de estudiante

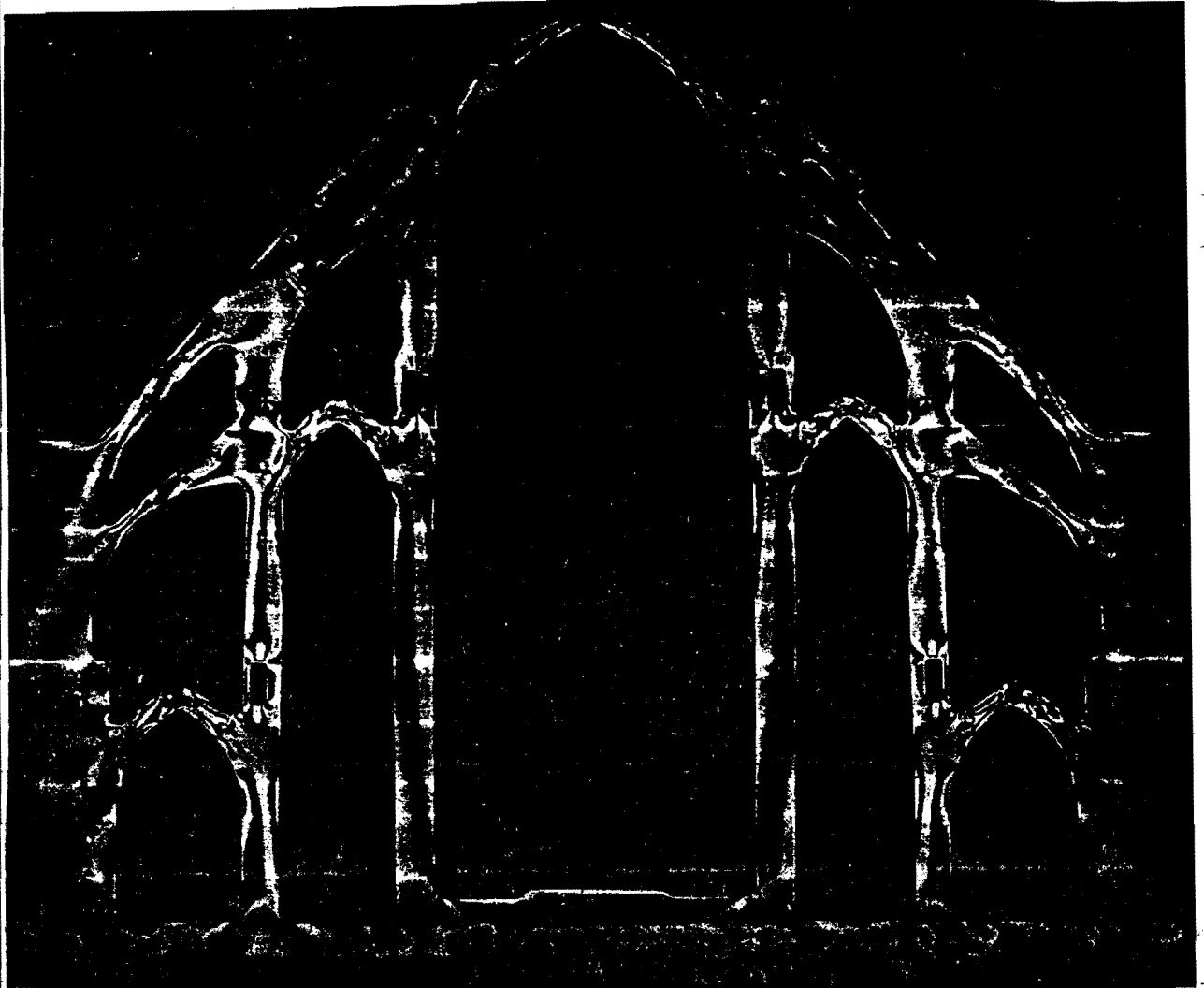


Concentración de tensiones por cambio brusco de sección en elemento sometido a flexión pura.



Concentración de tensiones generadas por la acción de un fuerza puntual.

Ensayo fotoelástico para visualizar la contribución de los arbotantes en la catedral de San Pablo de Londres



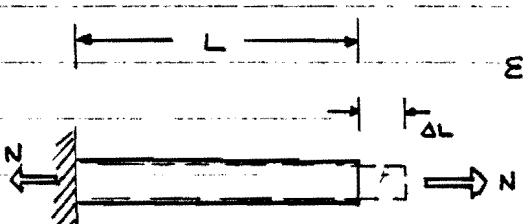


## 8.3. RIGIDEZ A ESFUERZOS NORMALES

Si el estado tensional es constante e igual a  $\sigma_x = N/A$ , en una barra solicitada a compresión o tracción pura, ello implica que la deformación unitaria longitudinal será:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{AE}$$

y recordando la definición de deformación unitaria, resultará que:



The diagram shows a horizontal bar of length  $L$  fixed to a wall on the left. A force  $N$  is applied to the right end, causing an elongation  $\Delta L$ . The bar is shown in its original state and its deformed state.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L}{L} \\ \epsilon_x &= N \frac{1}{EA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = N \frac{1}{EA}$$

↓

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L$$

Cuanto mayor sea el factor  $EA/L$ , para que se produzca un determinado alargamiento  $\Delta L$ , será preciso un mayor esfuerzo normal  $N$ , por lo que se dice que  $EA/L$  mide la RIGIDEZ de la barra a ESFUERZOS NORMALES DE COMPRESIÓN O TRACCIÓN.

Existe un convenio ampliamente difundido de simbolizar las RIGIDEZES de una barra mediante la letra  $k$ , por lo que estableceremos:

$k_N = \frac{EA}{L}$	RIGIDEZ A ESFUERZO NORMAL
$N = k_N \Delta L$	

Si la barra no fuese de sección constante, la expresión de  $k_N$ , sería:

$$k_N = \frac{E}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)}}$$



## 8.4. ALARGAMIENTO O ACORTAMIENTO DE UNA BARRA, EN FUNCIÓN DEL MOVIMIENTO DE SUS NUDOS EXTREMOS.

Si como consecuencia de las deformaciones, una barra AB, se transforma en otra A\*B\*, es evidente que la barra varía de longitud, y por lo tanto existirá una función tal que:

$$\Delta L = f(L, n_x, n_y, \delta_x^A, \delta_y^A, \delta_x^B, \delta_y^B)$$

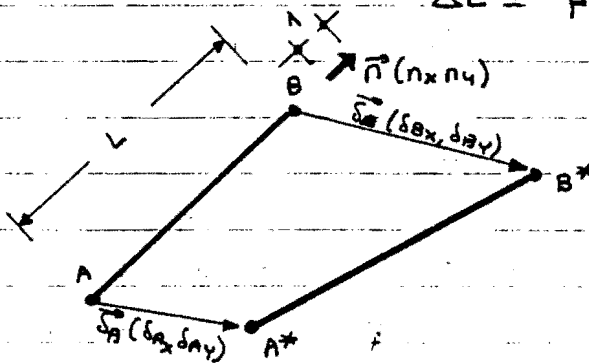


Fig. 8.4.1.

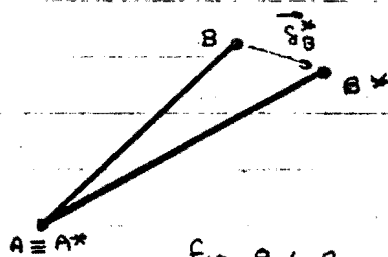


Fig. 8.4.2.

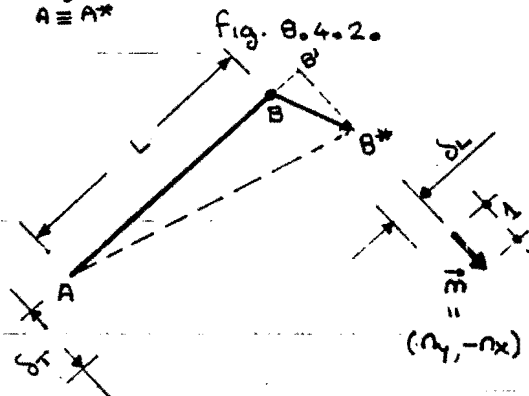


Fig. 8.4.3.

Si trasladamos la barra deformada A\*B\*, paralelamente así misma, hasta que A y A\* coincidan, el vector corrimiento del extremo B, habrá pasado a ser:

$$\vec{\delta}_B^* (\delta_x^B - \delta_x^A, \delta_y^B - \delta_y^A)$$

Proyectemos  $\vec{\delta}_B^*$  sobre la propia barra, y sobre su normal, lo que nos proporcionará dos componentes que simbolizaremos por  $(\delta_L, \delta_T)$

$$\delta_L = \vec{\delta}_B^* \cdot \vec{n} =$$

$$\delta_L = n_x (\delta_x^B - \delta_x^A) + n_y (\delta_y^B - \delta_y^A) \quad (8.4.1)$$

$$\delta_T = \vec{\delta}_B^* \cdot \vec{m} =$$

$$\delta_T = n_y (\delta_x^B - \delta_x^A) - n_x (\delta_y^B - \delta_y^A) \quad (8.4.2)$$

En función de  $\delta_L$  y  $\delta_T$  puede calcularse el alargamiento de la barra, por simple aplicación del teorema de Pitágoras.

$$\Delta L = \sqrt{\delta_T^2 + (L + \delta_L)^2} - L$$

Desarrollando en serie:



Roberto Guerra Fontana

ESFUERZOS NORMALES

8.13.

$$\Delta L = \delta_L + \frac{\delta_T^2}{2L} \quad (8.4.3.)$$

Si  $\delta_L \neq 0$ , puede prescindirse de  $\delta_T^2/2L$  por el principio de la pequeñez de las deformaciones.

Cuando  $\delta_L = 0$ , y el equilibrio del sistema exige que la barra esté solicitada a esfuerzos normales, es cuando la variación de longitud de la barra viene determinada por  $\frac{\delta_T^2}{2L}$ , y en tales circunstancias las deformaciones y los corrimientos serán considerables, y en consecuencia dejará de ser aplicable el principio de la pequeñez de las deformaciones, y por lo tanto la solución correcta de estos problemas exige su resolución en el marco de los efectos de segundo orden.

Por lo tanto, en general:

$$\Delta L = \delta_L = n_x (\delta_x^B - \delta_x^A) + n_y (\delta_y^B - \delta_y^A) \quad (8.4.4.)$$

Siendo  $\vec{n}$  un versor definido de A hacia B.

Y sólo en casos excepcionales:

$$\Delta L = \delta_L + \frac{\delta_T^2}{2L} =$$

$$\Delta L = (\delta_x^B - \delta_x^A) n_x + n_y (\delta_y^B - \delta_y^A) + \frac{(n_y (\delta_x^B - \delta_x^A) - n_x (\delta_y^B - \delta_y^A))^2}{2L}$$

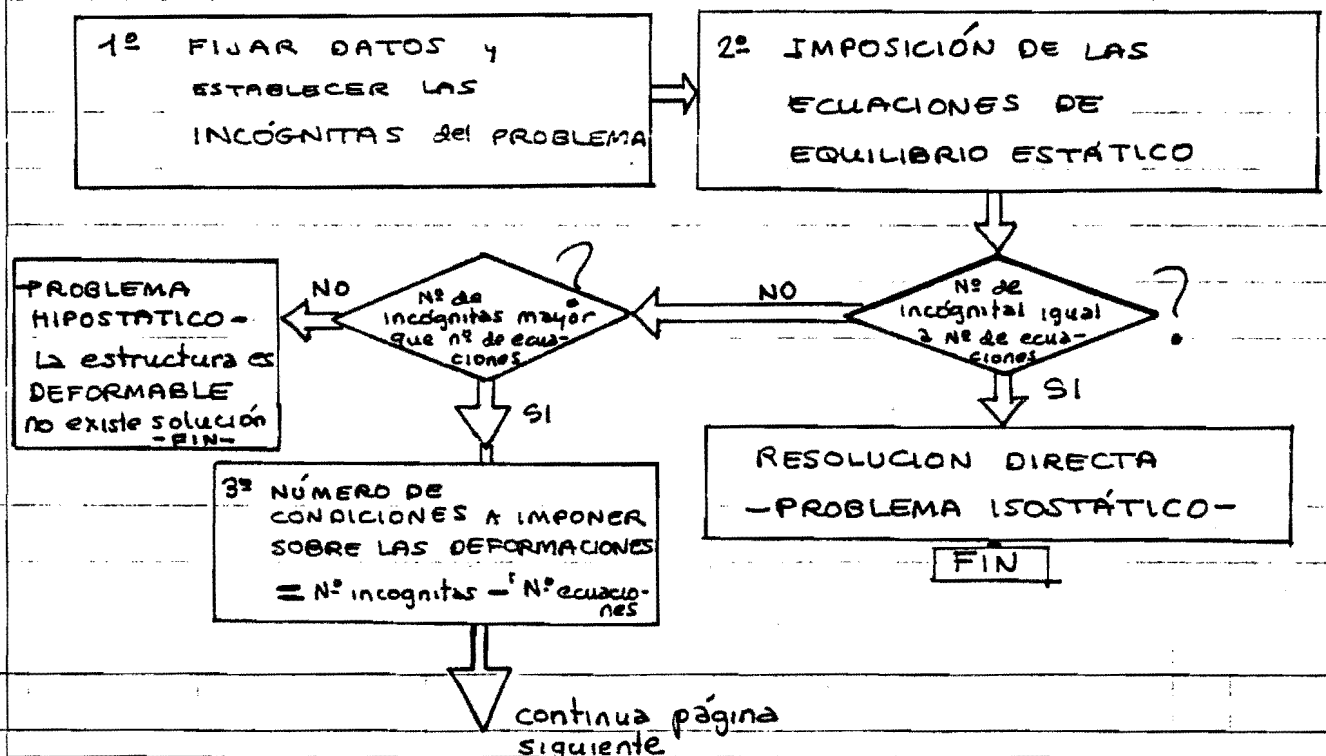


## 8.5. PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE COMPRESIÓN O TRACCIÓN PURA

Existe una infinitud de problemas, en los que los distintos componentes sufren exclusivamente esfuerzos de compresión o tracción pura, y la determinación del valor de estos esfuerzos resulta imposible mediante la aplicación única de las condiciones de equilibrio estático, denominándose a estos casos como **PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS**,

Si la mecánica no le es factible resolverlos, es por el hecho de considerar los sólidos como **INDEFORMABLES** ante cualquier acción que pueda actuar sobre los mismos, y consecuentemente, la clave de la resolución radica en tener presente las **DEFORMACIONES** que cada elemento sufrirá ante los **ESFUERZOS** existentes, e **IMPONER** que las **CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO** deben **PERMANECER** después de dichas deformaciones.

El esquema de análisis de todos los problemas hiperestáticos es siempre el mismo, y que puede esquematizarse de la forma siguiente:







procede de la  
página anterior

4º ANALISIS sobre el TIPO DE DEFORMACIONES que se producen

5º OBSERVACIÓN DE QUE CONDICIONES O CARACTERÍSTICAS PUEDEN ALTERARSE, SI LAS DEFORMACIONES ADOPTAN VALORES ALEATORIOS

6º ESTABLECER QUE VALORES O RELACIONES DEBEN CUMPLIR LOS MOVIMIENTOS O DEFORMACIONES, PARA QUE LA(S) CARACTERÍSTICA(S) NO SE ALTEREN.

7º ESTABLECIDA(S) LA(S) CONDICION(E)S SOBRE LAS DEFORMACIONES, TRANSFORMAR ESTAS EN CONDICION(E)S QUE DEBAN SATISFACER LAS INCOGNITAS DEL PROBLEMA.

8º RESOLUCIÓN DEL CONJUNTO DE ECUACIONES ISOSTÁTICAS Y DE LAS ECUACIONES SURGIDAS DE IMPONER CONDICIONES SOBRE LAS DEFORMACIONES, LO QUE PROPORCIONARÁ LAS INCOGNITAS DEL PROBLEMA

FIN



Si las INCÓGNITAS elegidas son directamente los ESFUERZOS que se desean obtener, se dirá que se utiliza el MÉTODO DIRECTO o DE LAS FUERZAS, y si por el contrario, se eligen como incógnitas del problema, el valor de movimientos estructurales o de ciertas DEFORMACIONES, después de la 8ª etapa anterior aún existirá otra etapa, en la que conociendo dichas deformaciones se pretenderá deducir los esfuerzos que verdaderamente exige el problema, y en tal caso se dice que se utiliza el MÉTODO INVERSO o de las DEFORMACIONES.

Generalmente es más operativo el método inverso, pero resulta con frecuencia más intuitivo el método directo.

A continuación vamos a aplicar el esquema expuesto a un conjunto de problemas en los que es aplicable el PRINCIPIO DE LA PEQUEÑEZ de las deformaciones, y en consecuencia sólo consideraremos EFFECTOS DE PRIMER ORDEN, y por lo tanto la variación de longitud de una barra, se obtiene por simple proyección de los vectores corrimientos de sus nudos extremos, sobre la dirección de la misma.


 **EJERCICIO 8.5.1.** 

Calcular los esfuerzos normales en las barras de la fig 8.5.1., sabiendo que  $P = 3000 \text{ kg}$ , y que el área de la sección transversal de todas las barras es de  $2 \text{ cm}^2$ , y que el módulo de Young  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

 **SOLUCIÓN** 

Aplicamos la estructura-propuesta para la resolución de problemas hiperestáticos de compresión o tracción.

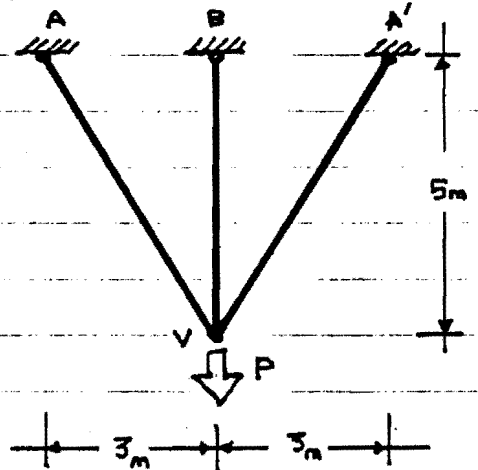


Fig 8.5.1.

 **FASE - 1ª  FIJAR DATOS Y ESTABLECER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA** 

Adoptemos como incógnitas los esfuerzos normales existentes en cada barra que son los datos que nos solicita directamente el enunciado del problema.

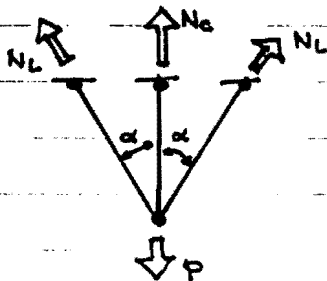


Fig 8.5.2.

Puede eliminarse los puntos de sujeción superiores de cada barra, si aplicamos las acciones que aquellos efectuaban, y que representamos en la fig 8.5.2, por  $N_c$ ,  $N_l$  y  $N_l$ .

Por condición de simetría, puede suponerse que la acción que reciben las dos barras laterales es la misma, por lo que la simbolizamos en ambos casos por  $N_l$ .

Así pues,  las incógnitas son:  $N_c$  y  $N_l$

 **FASE 2ª  IMPOSICIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO** 

La condición de suma de fuerzas verticales igual a cero, nos conduce a la siguiente ecuación:

$$N_c + 2 N_l \cos \alpha = P = 3000$$

Para calcular el coseno del ángulo  $\alpha$ , determinemos previamente



Roberto Guerra Fontana

ESFUERZOS NORMALES

8-18.

la longitud de las barras laterales:

$$L_{AV} = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5,83, \text{ y por lo tanto } \cos\alpha = \frac{5}{5,83} = 0,8575 = \cos\alpha$$

Por lo que la ecuación de equilibrio estático anterior, se puede transformar en:

$$N_C + 1,715 N_L = 3000$$

La nulidad de la suma de fuerzas horizontales siempre se verificará, así como la suma de momentos igual a cero, (ya que es un sistema de fuerzas concurrentes), por lo que únicamente dispondremos de UNA ECUACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE DOS INCOGNITAS, ello nos exigirá en consecuencia la resolución del problema mediante la consideración del carácter HIPERESTÁTICO de mismo.

#### FASE 3ª NÚMERO DE CONDICIONES A IMPONER SOBRE LAS DEFORMACIONES

$$N^{\circ} \text{ de condiciones hiperestáticas} = N^{\circ} \text{ de incógnitas} - N^{\circ} \text{ de ecuaciones estáticas}$$



$$1 = 2 - 1$$

Por lo que este problema exige una ÚNICA CONDICIÓN SOBRE LAS DEFORMACIONES.

#### FASE-4ª ANÁLISIS sobre el TIPO DE DEFORMACIONES que se PRODUCEN

Es obvio, que las tres barras sufrirán tracciones, y en consecuencia el tipo de deformación será el de ALARGAMIENTOS

#### FASE-5ª OBSERVACIÓN DE QUE CONDICIONES O CARACTERÍSTICAS PUEDEN ALTERARSE, SI LAS DEFORMACIONES ADOPTAN VALORES ARBITRARIOS.

Si los alargamientos de las barras fuesen arbitrarios, es evidente que las barras dejarían de concurrir en un único



punto, que hemos simbolizado por  $V$ . En efecto, supongamos que sólo se alargaren las barras laterales, mientras que la central permaneciese inalterable, en cuyo caso:

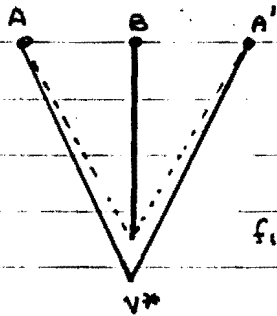


fig 8.5.3.

lo que equivaldría a suponer que toda la acción la equilibran exclusivamente las barras laterales, en tanto que la central estaría descargada.

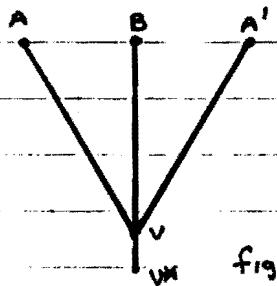


fig 8.5.4.

Si el supuesto fuese el inverso, es decir, que únicamente soportara  $P$  la barra central, y en consecuencia fuese la única que se alargase la figura que se producirá será la 8.5.4.

Es obvio, que la característica que se alterará será la CONCURRENCIA DE LAS 3 BARRAS en  $V$

FASE 6° ESTABLECER QUE VALORES O RELACIONES DEBEN CUMPLIR LOS MOVIMIENTOS O DEFORMACIONES, PARA QUE LA(S) CARACTERÍSTICA(S) NO SE ALTEREN

En nuestro problema, debemos establecer que relación deben guardar los alargamientos de las tres barras para que sigan concurrendo a un único punto, a cuyo fin, analicemos la fig. 8.5.5. en donde se ha representado el conjunto deformado, satisfaciendo la condición señalada.

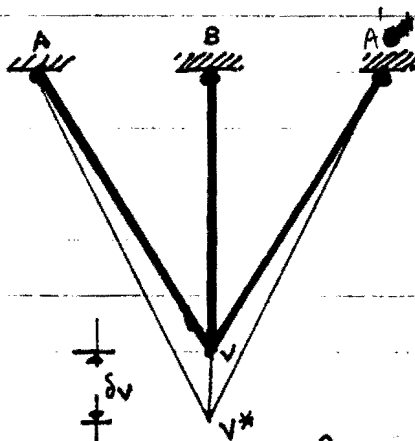


fig 8.5.5.

Según lo expuesto, el alargamiento de cada barra vendrá determinado por la proyección sobre la misma, del vector corrimiento  $\vec{V}^*$

Es evidente que el alargamiento de la barra central, será el módulo de dicho vector corrimiento, que representaremos por  $\delta_v$ .



$$\Delta L_{BV} = \delta_V$$

En el caso de la barra lateral, la proyección será el segmento  $\overline{VV'}$ , y cuyo valor vendrá determinado por:

$$\Delta L_{AV} = \overline{VV'} = \delta_V \cos \alpha$$

Esto nos permite establecer:

$$\delta_V = \Delta L_{BV} = \frac{\Delta L_{AV}}{\cos \alpha} = \frac{\Delta L_{AV'}}{\cos \alpha}$$

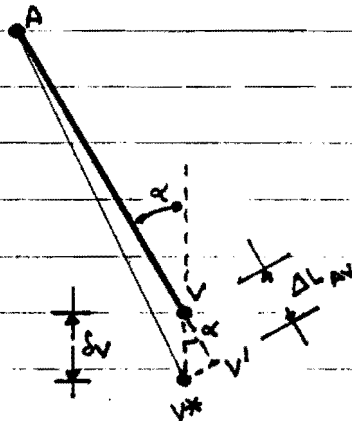


Fig. 8.3.6.



$$\boxed{0,8575 \Delta L_{BV} = \Delta L_{AV} = \Delta L_{AV'}}$$

FASE 7ª: ESTABLECIDAS LAS CONDICIONES SOBRE LAS DEFORMACIONES, TRANSFORMARLAS EN ECUACIONES QUE DEBAN SATISFACER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA.

Las incógnitas del problema son los esfuerzos normales, y la condición sobre las deformaciones hace referencia al alargamiento de la barra, la relación entre ambas magnitudes la establece según se indicó la RIGIDEZ A ESFUERZOS NORMALES, ya que  $N = K_N \Delta L$   $K_N = EA/L$

Calculemos pues, la rigidez de cada barra

$$K_N^{BV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{500} = 8400 \text{ Kg/cm}$$

$$K_N^{AV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{583} = 7204 \text{ Kg/cm}$$

En consecuencia:  $\Delta L = \frac{N}{K_N}$

$$\Delta L_{BV} = \frac{N_B}{8400} \quad \Delta L_{AV} = \frac{N_L}{7204}$$

Sustituyendo en la condición que regula los alargamientos de las barras, se obtendrá:



Roberto Guerra Fontana

ESFUERZOS NORMALES

8.21.

$$0,8575 \frac{N_c}{8400} = \frac{N_L}{7204} \Rightarrow N_c = 1,3598 \cdot N_L$$

FASE 8: RESOLUCIÓN DEL CONJUNTO DE ECUACIONES ISOSTÁTICAS Y DE LAS ECUACIONES SURGIDAS DE IMPONER CONDICIONES SOBRE LAS DEFORMACIONES

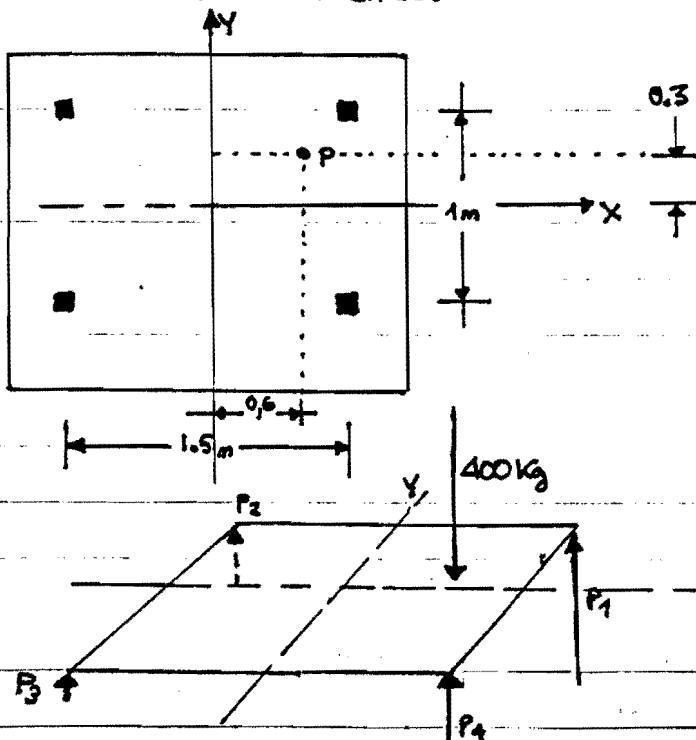
$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación isostática} \quad N_c + 1,715 N_L = 3000 \\ \text{Ecuación hiperestática} \quad N_c = 1,3598 N_L \end{array} \right\}$$



$$\begin{array}{l} N_L = 976 \text{ kg} \\ N_c = 1327 \text{ kg} \end{array}$$

**EJERCICIO 8.5.2.**

Las patas de una mesa distan entre sí 1,5m según X, y 1m según Y. Estableciendo origen de coordenadas en el centro del tablero que se apoya sobre las citadas patas, en el punto de coordenadas (-0,6 0,3) se sabe que se ejerce una fuerza puntual y perpendicular al citado tablero de módulo 400kg. Sabiendo que las cuatro patas son iguales, se desea calcular la fuerza que equilibrará cada una de ellas.



**SOLUCIÓN**

FASE-1: FIJAR DATOS Y ESTABLECER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA

Adoptemos como incógnitas las fuerzas que sufre cada una de las patas de la mesa. Así pues:  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  serán nuestras incógnitas, que a la vez serán las acciones que efectúan las patas sobre el tablero.

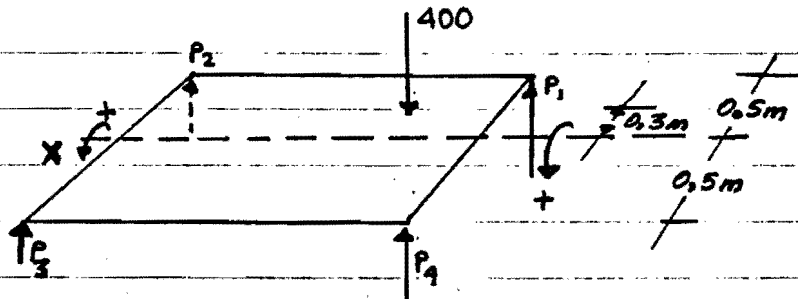


## FASE 2ª IMPOSICIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

La condición de suma de fuerzas verticales igual a cero, conduce a que debe verificarse:

$$-400 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

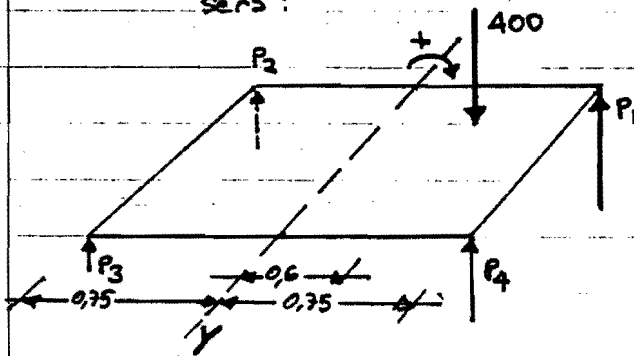
Impongamos la condición de suma de momentos X igual a cero.



$$\sum M_x = 0 \Rightarrow P_1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 0,5 - 400 \cdot 0,3 - P_3 \cdot 0,5 - P_4 \cdot 0,5 = 0$$

$$P_1 + P_2 - P_3 - P_4 = 240$$

La condición de suma de momentos según Y, igual a cero, será:



$$-P_1 \cdot 0,75 + P_2 \cdot 0,75 + P_3 \cdot 0,75 - P_4 \cdot 0,75 + 400 \cdot 0,6 = 0$$

$$P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = 320$$

## FASE 3ª NÚMERO DE CONDICIONES A IMPONER SOBRE LAS DEFORMACIONES

$$\left. \begin{array}{l} \text{N}^\circ \text{ DE INCÓGNITAS} = 4 \\ \text{N}^\circ \text{ DE ECUACIONES} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{GRADO HIPERESTÁTICO } 1$$

es precisa ↓

1 CONDICIÓN SOBRE LAS DEFORMACIONES.

## FASE 4ª ANÁLISIS sobre el TIPO DE DEFORMACIONES que se PRODUCEN

Las cuatro patas de la mesa estarán comprimidas por la acción de los 400 kg. (puede ser que 3 estén comprimidas y una traccionada, pero esta diferenciación no afecta al planteamiento que se está efectuando)





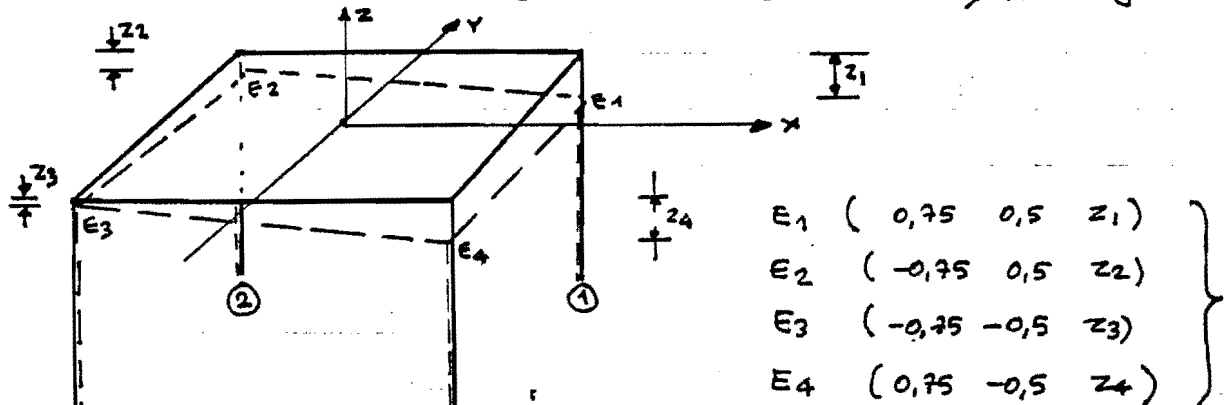
Consecuentemente, las patas de la mesa sufrirán ACORTAMIENTOS.

FASE 5ª OBSERVACIÓN DE QUE CONDICIONES O CARACTERÍSTICAS PUEDEN ALTERARSE, SI LAS DEFORMACIONES ADOPTAN VALORES ARBITRARIOS

De todos es conocida la experiencia de la mesa en la cual una pata es más corta que las restantes, lo que nos indica que la característica que se alteraría en la mesa, si las patas de la misma sufren acortamientos aleatorios, es la posibilidad de que el tablero pueda apoyarse sobre las cuatro patas simultáneamente, esto nos está indicando la característica o esencia de la condición hiperestática de este problema, consistente en que LOS ACORTAMIENTOS DE LAS PATAS DEBEN SER TALES QUE SUS CUATRO EXTREMOS DEBEN SEGUIR PERTENECIENDO A UNA MISMA SUPERFICIE PLANA, después de la deformación.

FASE 6ª ESTABLECER QUE VALORES O RELACIONES DEBEN CUMPLIR LOS MOVIMIENTOS O DEFORMACIONES, PARA QUE LA(S) CARACTERÍSTICA(S) NO SE ALTERE(N)

Las coordenadas de los extremos de cada pata, después de las deformaciones, serán si establecemos el origen de coordenadas en el centro del tablero, los siguientes:



$$z_i = \Delta L_i \quad (\text{acortamiento de la pata})$$



La condición de que los cuatro extremos de las patas acortadas sigan definiendo un plano, es:

$$\begin{vmatrix} 0,75 & 0,5 & \Delta L_1 & 1 \\ -0,75 & 0,5 & \Delta L_2 & 1 \\ -0,75 & -0,5 & \Delta L_3 & 1 \\ 0,75 & -0,5 & \Delta L_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la 3era columna, obtendremos

$$\begin{aligned} \Delta L_1 \begin{vmatrix} -0,75 & 0,5 & 1 \\ -0,75 & -0,5 & 1 \\ 0,75 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} - \Delta L_2 \begin{vmatrix} 0,75 & 0,5 & 1 \\ -0,75 & -0,5 & 1 \\ 0,75 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} + \Delta L_3 \begin{vmatrix} 0,75 & 0,5 & 1 \\ -0,75 & 0,5 & 1 \\ 0,75 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} - \\ - \Delta L_4 \begin{vmatrix} 0,75 & 0,5 & 1 \\ -0,75 & 0,5 & 1 \\ -0,75 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$1,5 \Delta L_1 - 1,5 \Delta L_2 + 1,5 \Delta L_3 - 1,5 \Delta L_4 = 0$$

$$\boxed{\Delta L_1 - \Delta L_2 + \Delta L_3 - \Delta L_4 = 0}$$

FASE 7ª ESTABLECIDA(S) LA(S) CONDICION(ES) SOBRE LAS DEFORMACIONES, TRANSFORMARLA(S) EN ECUACION(ES) QUE DEBAN SATISFACER LAS INCOGNITAS DEL PROBLEMA.

$$\text{Dado que: } \Delta L_i = \frac{L}{EA} P_i = \frac{P_i}{k_N}$$

resulta sustituyendo en la condición hiperestática, se obtiene:

$$\frac{L}{k_N} (P_1 - P_2 + P_3 - P_4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 - P_2 + P_3 - P_4 = 0}$$

FASE 8ª RESOLUCIÓN DEL CONJUNTO DE ECUACIONES ISOSTÁTICAS Y DE LAS ECUACIONES SURGIDAS DE IMPONER CONDICIONES SOBRE LAS DEFORMACIONES.

El conjunto de ecuaciones es:



$$\left. \begin{aligned} (1) \quad 400 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ (2) \quad 240 &= P_1 + P_2 - P_3 - P_4 \\ (3) \quad 320 &= P_1 - P_2 - P_3 + P_4 \\ (4) \quad 0 &= P_1 - P_2 + P_3 - P_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (1)+(2) \quad 640 &= 2P_1 + 2P_2 \\ (3)+(4) \quad 320 &= 2P_1 - 2P_2 \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned} P_1 &= 240 \\ P_2 &= 80 \end{aligned}$$

sumandolas.  
sustituyendo

$$\left. \begin{aligned} (1)-(2) \quad 160 &= 2P_3 + 2P_4 \\ (3)-(4) \quad 320 &= -2P_3 + 2P_4 \end{aligned} \right\}$$

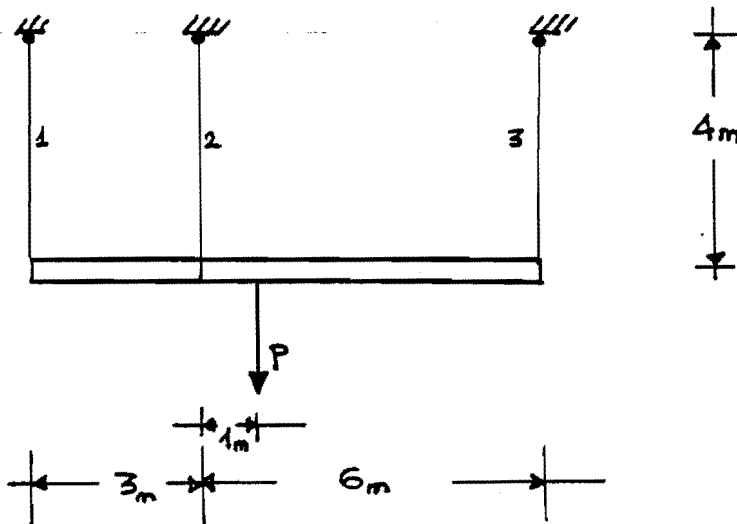


$$\begin{aligned} P_4 &= 120 \\ P_3 &= -40 \end{aligned}$$

sumandolas  
sustituyendo

### 8.5.3. EJERCICIO

Una barra rígida, está suspendida de un techo también indeformable por tres cables de las características que se indican. Sabiendo que la carga  $P$  es de 4000 kg, determinar la tracción que experimenta cada cable.



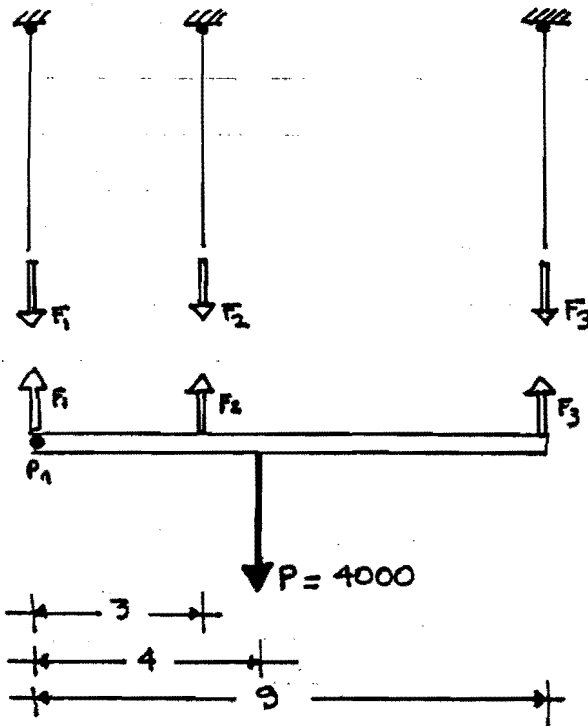
CABLE	Area	E
1	2 cm <sup>2</sup>	2,1 · 10 <sup>6</sup>
2	4 cm <sup>2</sup>	2,1 · 10 <sup>6</sup>
3	5 cm <sup>2</sup>	10 <sup>6</sup>

kg/cm<sup>2</sup>

### SOLUCIÓN.

1er<sup>a</sup> FASE — FIJAR DATOS Y ESTABLECER LAS INCOGNITAS DEL PROBLEMA

Adoptemos como incógnita, la fuerza que efectúa cada cable sobre la barra indeformable, fuerza que a la vez nos indicará la tracción que sufrirá el correspondiente cable, tal como indicamos en la figura siguiente:



2ª FASE - IMPOSICIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Suma de fuerzas verticales igual a cero

$$4000 = F_1 + F_2 + F_3$$

Suma de momentos igual a cero, respecto a  $P_1$

$$F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 9 = 4 \cdot 4000$$

$$F_2 + 3F_3 = 5333$$

FASE 3ª - NÚMERO DE CONDICIONES A IMPONER SOBRE LAS DEFORMACIONES

$\left. \begin{array}{l} \text{Nº DE INCOGNITAS} = 3 \\ \text{Nº DE ECUACIONES} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{GRADO HIPERESTÁTICO} = 1$

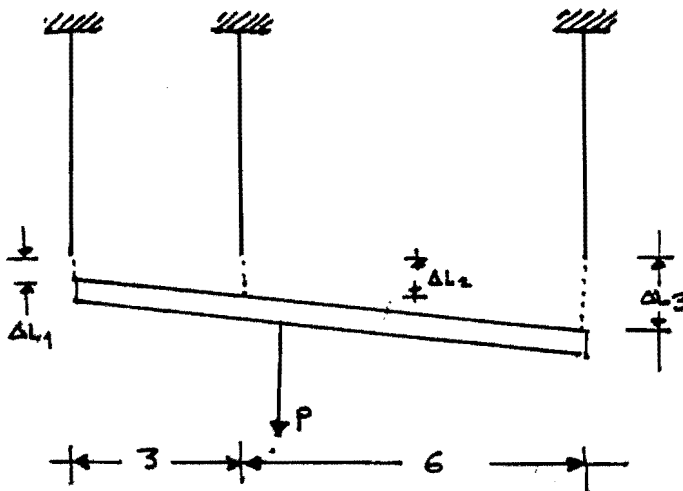
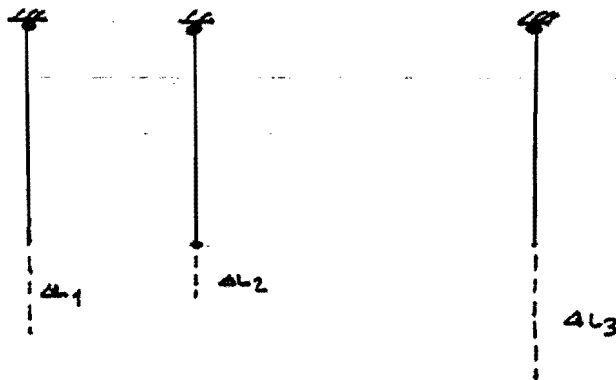
SE PRECISA IMPONER UNA CONDICIÓN SOBRE LAS DEFORMACIONES

FASE 4ª - ANÁLISIS SOBRE EL TIPO DE DEFORMACIONES QUE SE PRODUCEN

Los cables lógicamente estarán traccionados, y en consecuencia se ALARGARÁN, siendo esta la DEFORMACIÓN CARACTERÍSTICA DE ESTE PROBLEMA.

FASE 5ª - OBSERVACIÓN DE QUE CONDICIONES O CARACTERÍSTICAS PUEDEN ALTERARSE, SI LAS DEFORMACIONES ADOPTAN VALORES ARBITRARIOS.

Si los cables se alargasen valores aleatorios cada uno de ellos, sería imposible que tensados, y partiendo de un techo rígido plano, concudiesen a una barra recta, tal como se visualiza en la figura siguiente:



FASE-6° - ESTABLECER QUE VALORES O RELACIONES DEBEN CUMPLIR LOS MOVIMIENTOS O DEFORMACIONES, PARA QUE LA(S) CARACTERÍSTICA(S) NO SE ALTERE(N).

Para que los alargamientos de los cables, sean tales, que permitan estar unidos a una barra recta, deben

guardar la siguiente relación:

$$\frac{\Delta L_2 - \Delta L_1}{3} = \frac{\Delta L_3 - \Delta L_2}{6} \Rightarrow 2\Delta L_2 - 2\Delta L_1 = \Delta L_3 - \Delta L_2$$

$$\boxed{3\Delta L_2 - 2\Delta L_1 - \Delta L_3 = 0}$$

FASE-7° ESTABLECIDA(S) LA(S) CONDICION(ES) SOBRE LAS DEFORMACIONES, TRANSFORMARLA(S) EN ECUACION(ES) QUE DEBAN SATISFACER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA

La condición hiperestática relaciona alargamientos de los cables, y las incógnitas son las tracciones de los mismos, por lo que debemos relacionar ambas magnitudes en cada uno de los citados cables. Sabemos que:

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \Delta L_i$$

$$F_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{400} \Delta L_1 \quad F_2 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4}{400} \Delta L_2$$

$$F_3 = \frac{10^6 \cdot 5}{400} \Delta L_3$$



Por lo tanto:  $\Delta L_1 = \frac{F_1}{10500}$

$$\Delta L_2 = \frac{F_2}{21000}$$

$$\Delta L_3 = \frac{F_3}{12500}$$

Sustituyendo en la ecuación hiperestática que relaciona los alargamientos de los cables, obtenemos:

$$3 \frac{F_2}{21000} - 2 \frac{F_1}{10500} - \frac{F_3}{12500} = 0$$

$$\boxed{1,7857 F_2 - 2,3810 F_1 - F_3 = 0}$$

FASE 8º = RESOLUCIÓN DEL CONJUNTO DE ECUACIONES. ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 4000 = F_1 + F_2 + F_3 \\ (2) \quad 5333 = F_2 + 3F_3 \\ (3) \quad 0 = -2,381 F_1 + 1,7857 F_2 - F_3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1)' = (1) + (3) \quad 4000 = -1,381 F_1 + 2,7857 F_2 \\ (2)' = (2) + 3 \cdot (3) \quad 5333 = -7,143 F_1 + 6,3571 F_2 \end{array} \right\}$$

$$-5,1723 \cdot (1)' + (2)' \Rightarrow -15356 = 0 - 8,0514 \cdot F_2 \Rightarrow F_2 = 1907,25 \text{ kg}$$

$$\text{Sustituyendo en (2)' y operando} \Rightarrow F_1 = 950,80 \text{ kg}$$

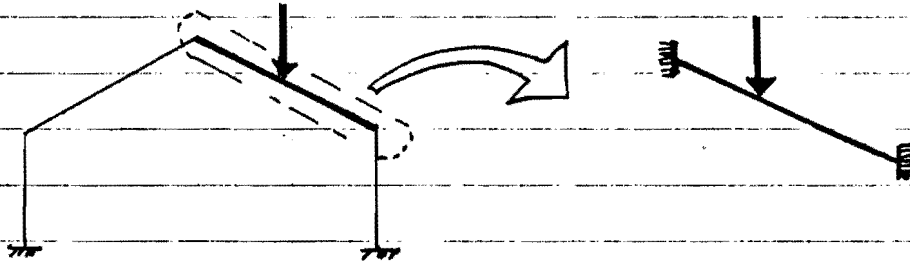
$$\text{Sustituyendo en (2)} \Rightarrow F_3 = 1141,92 \text{ kg}$$

$$\boxed{F_1 = 950,80 \quad F_2 = 1907,25 \quad F_3 = 1141,92}$$



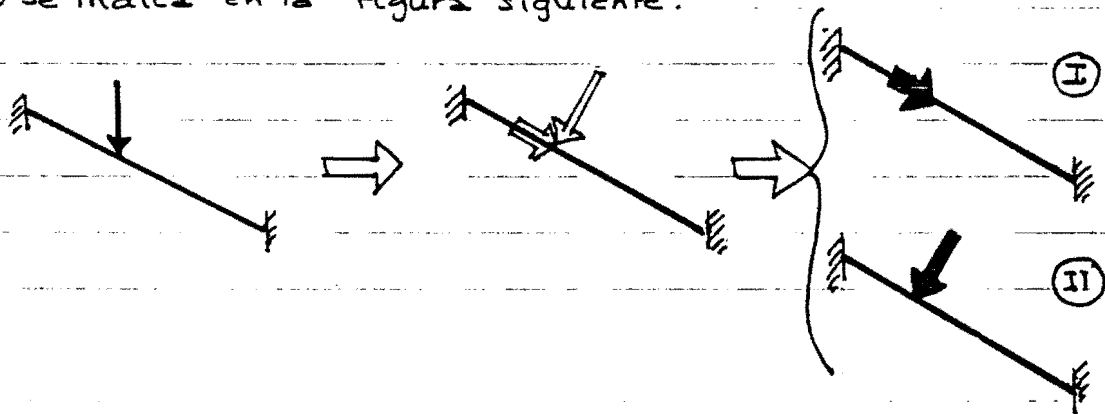
## 8.6. CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN BARRAS BIEMPOTRADAS, SOMETIDAS A LA ACCIÓN DE CARGAS ACTUANTES SEGÚN LOS EJES DE LAS MISMAS.

En el análisis estructural, toda barra será analizada en una primera fase como una barra biempotrada, de ello el interés práctico del apartado que iniciamos.



Las cargas actuantes sobre una barra suelen proceder de la acción gravitatoria, de allí que en general serán verticales, (las acciones eólicas y sísmicas pueden generar componentes horizontales), y por lo tanto, si la barra es una viga horizontal, inciden ortogonalmente, pero en ocasiones, es la propia barra la que no es horizontal, tal como acontece en el caso representado en la figura, y consecuentemente las acciones no son ortogonales.

En el caso de acciones oblicuas, podremos descomponerla en una ortogonal, y en otra actuante sobre el eje de la barra, tal como se indica en la figura siguiente.

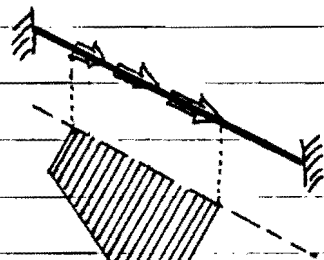


El estado (II) será objeto de estudio en el tema de FLEXIÓN HIPERESTÁTICA O BARRAS HIPERESTÁTICAS, por lo que de momento, nos restringiremos a la componente actuante según el eje de la barra. (I)

Supongamos inicialmente, que se trata de una carga puntual

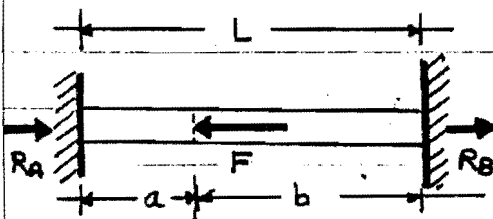


tal como se ha dibujado, y las conclusiones que obtendremos las utilizaremos para deducir yes aplicables a cargas distribuidas de intensidades variables, como acontece en el caso representado



ley de variación de la intensidad de una acción distribuida actuante según el eje de la barra.

En el caso de una fuerza puntual, las muros deberán realizar dos fuerzas de reacción, que deberán satisfacer las condiciones de equilibrio estático, las cuales se reducen a una única ecuación que es:



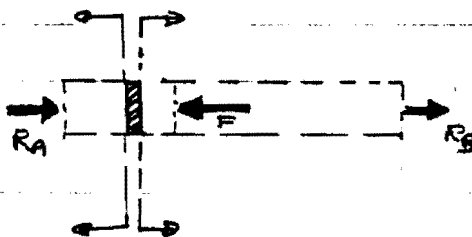
$$F = R_A + R_B$$

y puesto que son dos las incógnitas, ello indica, que el problema es HIPERESTÁTICO

ESTÁTICO, y como tal se resolverá imponiendo condiciones sobre las deformaciones.

Para comprender que deformaciones se producirán en cada zona de la barra, estudiemos que esfuerzos o solicitaciones existen en cada sección de la misma.

Si seccionamos entre el empotramiento izquierdo y el punto de aplicación de F, la correspondiente rebanada estará comprimida con un módulo  $R_A$ .



N por la izquierda  $\rightarrow R_A$

N por la derecha  $\rightarrow F - R_B$

||  
 $R_A$

ambas en COMPRESIÓN

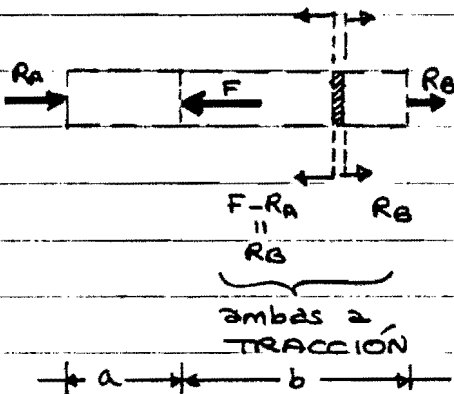
(por la condición de equilibrio estático)

Si la sección analizada la situásemos entre el punto de aplicación de F y el empotramiento derecho, la solicitación será





una tracción de módulo  $R_B$ .



Por lo tanto, una zona de longitud  $a$  estará comprimida con valor  $R_A$ , y la zona restante de longitud  $b$ , estará traccionada con valor  $R_B$ , lo que implica, que la parte izquierda se DEFORMARÁ ACORTÁNDOSE y la zona derecha se DEFORMARÁ ALARGÁNDOSE.

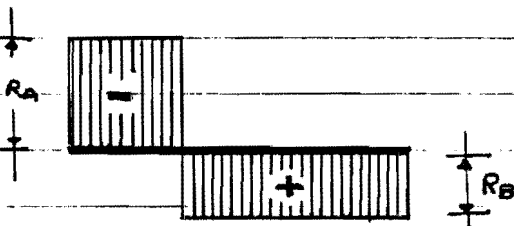


DIAGRAMA de ESFUERZOS NORMALES.

La condición hiperestática deberá pues referirse a los citados acortamientos y alargamientos de las indicadas zonas, y esto nos situa en condición de comprender con

relativa facilidad la condición hiperestática que precisamos para resolver el problema. Si los extremos están empotrados, son fijos, y esto exige que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EL ACORTAMIENTO de la} \\ \text{ZONA COMPRIMIDA según} \\ R_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{AL ALARGAMIENTO de} \\ \text{la zona TRACCIÓNADA} \\ \text{según } R_B \end{array} \right\}$$



$$\frac{R_A}{k_N^{129}} = \frac{R_B}{k_N^{dch}}$$

$$\frac{R_A}{\frac{E \cdot A_{129}}{a}} = \frac{R_B}{\frac{E \cdot A_{dch}}{b}}$$

Si la barra es de sección constante, como en general suele acontecer en edificación, la condición anterior se reduce a:

$$R_A \cdot a = R_B \cdot b$$

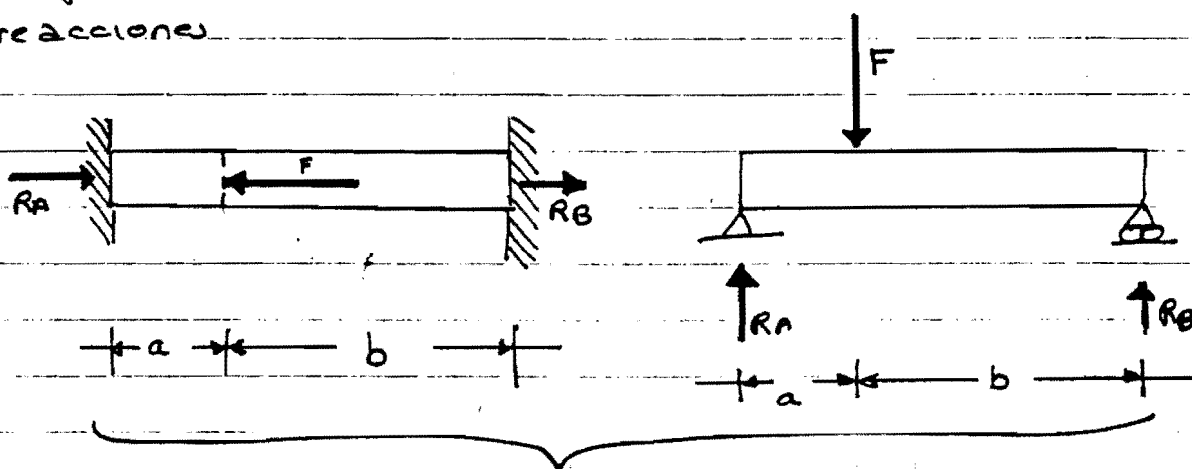
Con lo cual se disponen de dos ecuaciones que definen las incógnitas  $R_A$  y  $R_B$ , y por lo tanto, estas valen:



$$\left. \begin{array}{l} R_A + R_B = F \\ R_A a = R_B b \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{F \cdot b}{L} \quad R_B = \frac{F \cdot a}{L}}$$

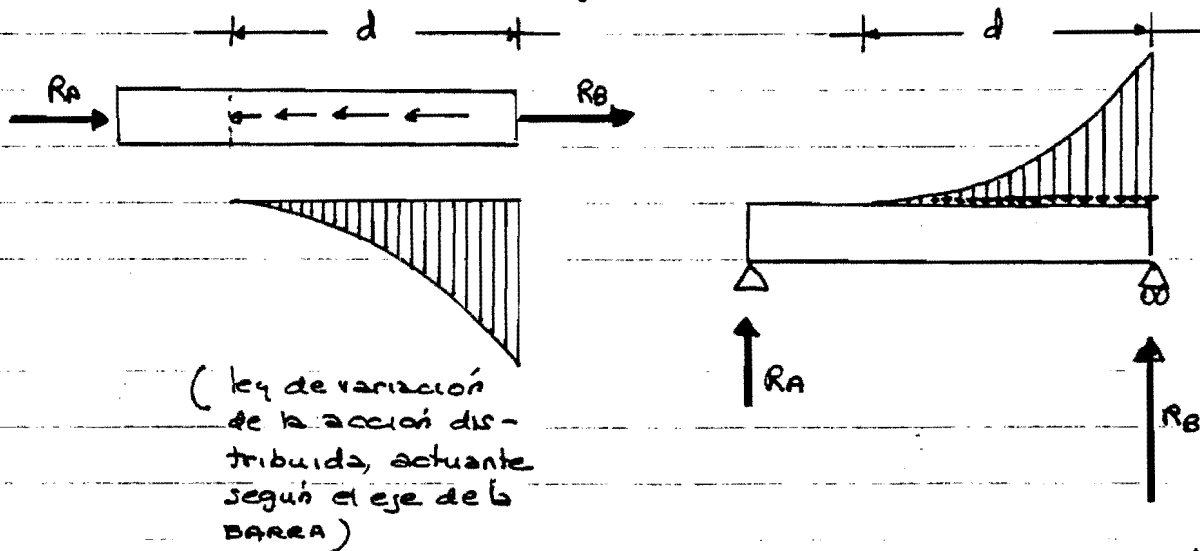
$(a + b = L)$

Observadas las expresiones que definen  $R_A$  y  $R_B$ , y comparandolas con las fórmulas correspondientes a las reacciones de una viga simplemente apoyada sometida a carga puntual ortogonal  $F$ , se deduce la coincidencia de resultados, lo que constituye una analogía que facilita un procedimiento sencillo para el cálculo de las citadas reacciones.



Los valores de  $R_A$  y  $R_B$  de ambas figuras son COINCIDENTES

Una carga distribuida, puede considerarse como la superposición de infinitas cargas puntuales de tipo diferencial, por lo que la conclusión anterior también puede aplicarse a las mismas.



$R_A$  y  $R_B$  también son coincidentes en ambas figuras

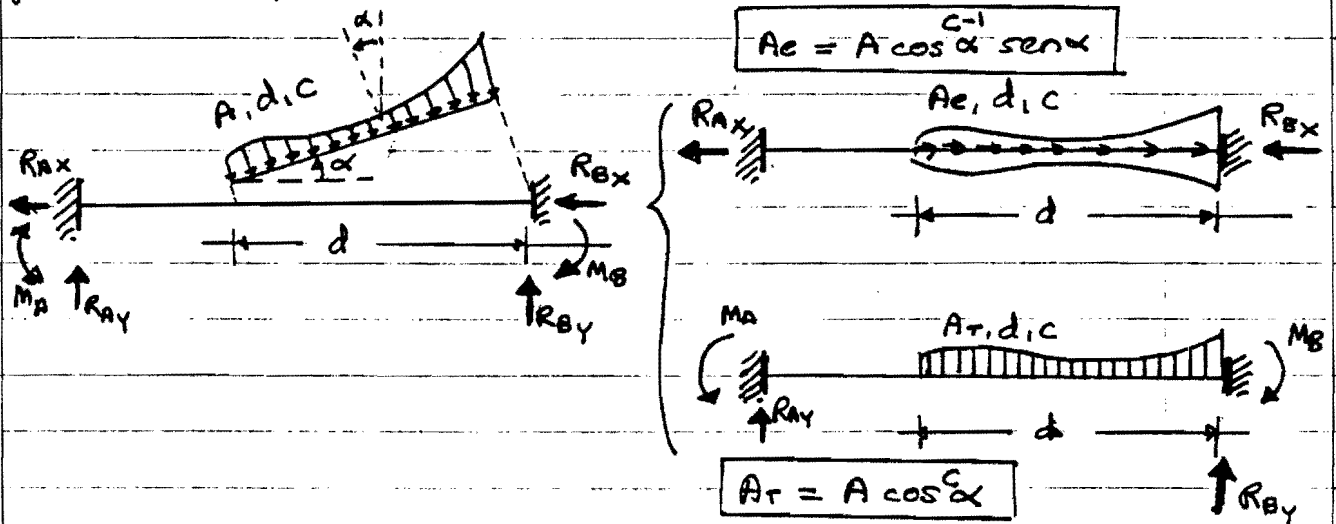


Dado que las REACCIONES  $R_A$  y  $R_B$  de una viga cargada transversalmente, ya han sido deducidas de forma genérica, alcanzándose la conclusión de que:

$$R_A = \frac{A \int d z^c}{c! L} \quad R_B = \frac{A \int d z^{c-1}}{(c-1)!} - R_A$$

estas mismas fórmulas, nos proporcionan las reacciones que se producen por acciones  $A$  actuantes según el eje de la barra.

Recuérdese, que una acción  $A$ , oblicua con respecto a la barra, puede descomponerse en dos acciones  $A_e$  y  $A_t$  cuyo valores serán:

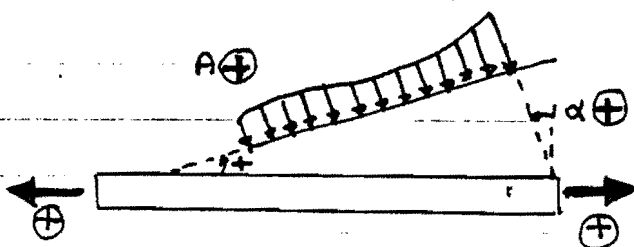


En consecuencia:

$$R_{Ax} = \frac{A \cos^{c-1} \text{sen } \alpha \int d z^c}{c! L} \quad (c \geq 1)$$

$$R_{Bx} = - \left( \cos^{c-1} \text{sen } \alpha \frac{A \int d z^{c-1}}{(c-1)!} - R_{Ax} \right)$$

En donde se han aplicado los siguientes criterios de signos:



(Es obvio, que las dos reacciones horizontales no podrán ser positivas, ni simultáneamente negativas)

**8.7. PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE COMPRESIÓN O TRACCIÓN CON VARIACIONES TÉRMICAS.**

Una barra que experimenta una variación de temperatura, sufre una alteración en su longitud, si la misma no está sometida a ligaduras que coaccionen el movimiento de sus secciones.

La variación total de longitud puede expresarse por la fórmula:

$$\Delta L = L \alpha \Delta t \quad \text{donde: } \left\{ \begin{array}{l} L \text{ es la longitud de la barra} \\ \Delta t \text{ es la variación de la temperatura} \\ \alpha \text{ es el COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA} \end{array} \right.$$

Si la barra está unida a otros elementos estructurales, estos ejercerán sobre la misma esfuerzos normales que disminuirán dicha variación, lo que a su vez implica una alteración de la compresión o tracción existente en toda la estructura, y consecuentemente las tensiones existentes en cualquier punto sufrirán una alteración ante una variación térmica, si la ESTRUCTURA ES HIPERESTÁTICA.

La forma más simple de determinar lo que acontece en una ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA, en la cual todos o parte de sus elementos, están sometidos a variaciones térmicas, es la de tener presente en la ECUACIÓN HIPERESTÁTICA en la que se relacionan ALARGAMIENTOS o ACORTAMIENTOS a fin de que no se altere las CARACTERÍSTICAS de la ESTRUCTURA, el que dichos alargamientos o acortamientos serán la suma de los producidos por esfuerzos normales y por variaciones térmicas, es decir, que todo alargamiento será expresable de la forma siguiente:

$$\Delta L = L \alpha \Delta t + \frac{N}{KN} \quad \left( KN = \frac{EA}{L} \right)$$

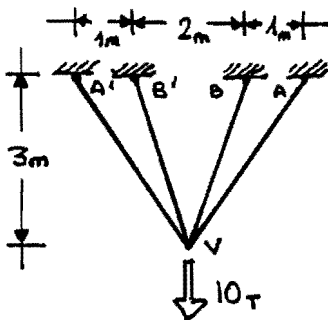


Los coeficientes de dilatación térmica de algunos materiales de uso habitual son:

MATERIAL	$\alpha$
Acero	$1,17 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$
Hormigón	$1,12 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$
Fundición	$1,12 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$
Ladrillo	$0,90 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$
Aluminio	$2,34 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$
Latón	$1,66 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$

**EJERCICIO 8.7.1.**

Sea la estructura de la figura, en la que todas las barras tienen como sección transversal una superficie de  $2\text{cm}^2$ , y cuyas características corresponden al acero ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{C}^\circ$ ), obtener el esfuerzo normal existente en cada una de ellas, sabiendo que  $P = 10000 \text{ kg}$  y que se produce una variación térmica con respecto al momento del montaje de  $+50\text{C}^\circ$

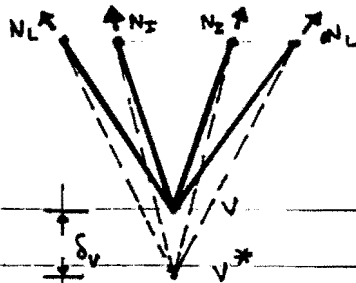

**SOLUCIÓN**

Resolvamos este ejercicio por el método INVERSO, ello significará que adoptaremos como incógnitas las DEFORMACIONES o MOVIMIENTOS que definan el estado final del mismo.

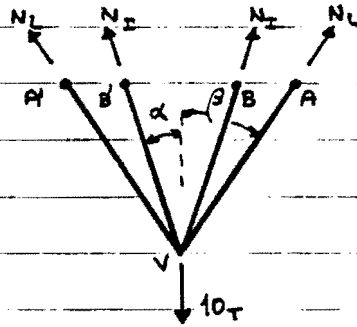
**1ª FASE. — FIJAR DATOS Y ESTABLECER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA**

MA

Según lo indicado, elegiremos como incógnita de nuestro problema el corrimiento del nudo V, el cual se producirá según una vertical, y lo simbolizaremos por  $\delta_V$



No obstante, los datos requeridos por el enunciado son  $N_L$  y  $N_S$ , lo que nos exigirá relacionarlos con la incógnita elegida  $\delta_V$ .

FASE 2ª IMPOSICIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Las condiciones de la estática se reduce en este caso, a una sola ecuación; suma de fuerzas verticales igual a cero, puesto que la suma de fuerzas horizontales, siempre será cero, así como la suma de momento respecto a cualquier punto, puesto que es un sistema de fuerzas concurrentes.

$$2 N_L \cos \beta + 2 N_T \cos \alpha = 10000$$

$$L_{VA} = 3,6056 \quad \cos \beta = 0,8320$$

$$L_{VB} = 3,1623 \quad \cos \alpha = 0,9487$$

$$N_L + 1,1403 N_T = 6009,62$$

3ª NÚMERO DE CONDICIONES A IMPONER SOBRE LAS DEFORMACIONES

Disponemos de UNA ECUACIÓN, y de UNA SOLA INCOGNITA  $\delta_V$ , por lo que si relacionamos  $N_L$  y  $N_T$  con  $\delta_V$ , el sistema estructural tendrá solución.

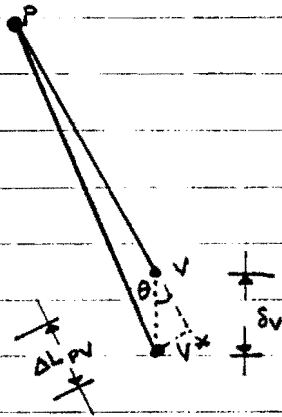
4ª ANÁLISIS sobre el TIPO DE DEFORMACIONES que se PRODUCEN

Las barras se alargarán, tanto por la acción de las 10 TONELADAS, como consecuencia de las variaciones térmicas.

5ª OBSERVACIÓN DE QUE CONDICIONES O CARACTERÍSTICAS PUEDEN ALTERARSE, SI LAS DEFORMACIONES ADOPTAN VALORES ARBITRARIOS

Si los alargamientos de las barras fuesen arbitrarios, las cuatro barras dejarán de concurrir a un único punto V, pero si imponemos que los alargamientos de las mismas deben ser tales, que el nudo extremo de todas ellas sea  $V^*$  situado en la vertical de V, a una distancia  $\delta_V$ , la condición se satisficera de forma automática.

6ª ESTABLECER QUE VALORES O RELACIONES DEBEN CUMPLIR LOS MOVIMIENTOS O DEFORMACIONES, PARA QUE LA(S) CARACTERÍSTICA(S)


NO SE ALTERE(N)


Una barra PV, cuyo extremo V sufre un corrimiento a  $V^*$ , experimenta un alargamiento  $\Delta L_{PV}$ , que viene determinado por la proyección de  $\delta_v$ , sobre la propia barra.

$$\Delta L_{PV} = \delta_v \cos \theta$$

En el caso de nuestro ejercicio, aplicando la conclusión a los dos tipos de barras obtenemos:

$$\Delta L_{AV} = \delta_v \cos \beta = 0,832 \delta_v$$

$$\Delta L_{BV} = \delta_v \cos \alpha = 0,9487 \delta_v$$

FASE-7 ESTABLECIDA(S) LA(S) CONDICION(ES) SOBRE LAS DEFORMACIONES, TRANSFORMARLA(S) EN ECUACION(ES) QUE DEBAN SATISFACER LAS INCÓGNITAS DEL PROBLEMA

Los alargamientos de cada barra, vendrán determinados por el esfuerzo normal actuante en la barra, y por la variación térmica, así pues:

$$\Delta L_{AV} = \frac{N_L}{K_N^{AV}} + \alpha L_{AV} \Delta T$$

$$\Delta L_{BV} = \frac{N_I}{K_N^{BV}} + \alpha L_{BV} \Delta T$$

$$K_N^{AV} = \frac{EA_{AV}}{L_{AV}} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{360,56} = 11649$$

$$K_N^{BV} = \frac{EA_{BV}}{L_{BV}} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{316,23} = 13281$$

$$\Delta L_{AV} = \frac{N_L}{11649} + 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 360,56 \cdot 50 = \frac{N_L}{11649} + 0,2109 = \Delta L_{AV}$$

$$\Delta L_{BV} = \frac{N_I}{13281} + 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 316,23 \cdot 50 = \frac{N_I}{13281} + 0,1850 = \Delta L_{BV}$$

$$N_L = 11649 \Delta L_{AV} - 2457 = 9692 \delta_v - 2457$$

$$N_I = 13281 \Delta L_{BV} - 2457 = 12600 \delta_v - 2457$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio estático:



Roberto Guerra Fontana

ESFUERZOS NORMALES

8.38.

$$N_L + 1,1403 N_I = 6009,62$$



$$9692 \delta_v - 2457 + 1,1403 (12600 \delta_v - 2457) = 6009,62$$

$$\boxed{24059,78 \delta_v = 11268,337}$$

## FASE-8 = RESOLUCIÓN DEL CONJUNTO DE ECUACIONES

Sólo existe una ecuación, cuya resolución nos proporciona:

$$\boxed{\delta_v = 0,4683 \text{ cms}}$$

## FASE-9 = OBTENCIÓN DE LAS INCÓGNITAS FINALES EN FUNCIÓN DE LAS ADOPTADAS PARA LA RESOLUCIÓN

Se ha establecido:  $N_L = 9692 \delta_v - 2457 \Rightarrow \boxed{2081 = N_L}$   
 $\delta_v = 0,4683$

$$N_I = 12600 \delta_v - 2457 \Rightarrow \boxed{3444 = N_I}$$



**8.8. TRATAMIENTO DE LOS EFECTOS TÉRMICOS, MEDIANTE ASIMILACIÓN A FUERZAS FICTICIAS**

Cuando una barra se calienta, sufre un incremento de longitud, si no es coaccionada por otros elementos, lo cual sugiere, que ante el resto de la estructura dicha barra se comportará igual, que otra que recibiese dos fuerzas que la traccionasen de forma que produjesen un alargamiento idéntico. Así pues:



Para que los alargamientos sean iguales, será preciso que se verifique:

$$\Delta L = L \alpha \Delta T$$

$$\Delta L = \frac{N}{k_N} = \frac{L}{EA} N$$

$$L \alpha \Delta T = \frac{L}{EA} N$$

$$N = (EA \alpha) \cdot \Delta T$$

Introducidas las acciones  $N$ , sobre las barras que sufren variación térmica, se prescinde de este fenómeno, y se resuelve el problema estructural de forma ordinaria. Una vez determinados los ESFUERZOS en TODAS LAS BARRAS, deberán eliminarse las tracciones (o compresiones si  $\Delta T < 0$ ), introducidas de forma ficticia al inicio del problema, con lo cual se alcanzan los valores reales que se producen en la estructura, ante la presencia simultánea de fuerzas exteriores y variaciones térmicas.

Resolvamos nuevamente el problema 8.6.1 utilizando esta técnica, y mediante el MÉTODO DIRECTO.



Roberto Guerra Fontana

ESFUERZOS NORMALES

B.40.

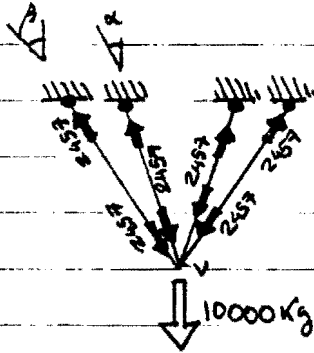
**EJERCICIO 8.8.1.**

El mismo enunciado que el ejercicio 8.6.1.

**SOLUCIÓN**

La variación térmica, puede asimilarse a fuerzas  $F$ , que traccionen las barras de valor:

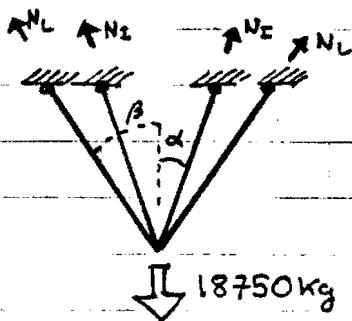
$$F = (EA\alpha)\Delta T = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 2457 \text{ kg}$$



Las fuerzas  $F$  se compondrán, y equivaldrán a una cierta fuerza  $F^*$ , aplicada en  $V$ , de valor:

$$F^* = 2457 (2 \cdot \cos\alpha + 2 \cos\beta) = 2457 \cdot 2 \cdot (0,832 + 0,9487) = 8750$$

Por lo tanto, prescindamos de la variación térmica, y supongamos que la fuerza exterior es:



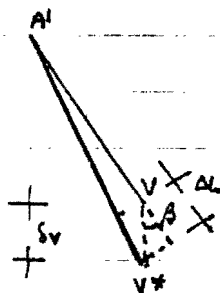
La condición de equilibrio estático se reduce a la ecuación:

$$18750 = 2 \cdot N_L \cos\beta + N_I \cos\alpha \cdot 2$$

$$9375 = 0,832 N_L + 0,9487 \cdot N_I$$

$$\boxed{11268,03 = N_L + 1,1403 N_I}$$

Para que las cuatro barras concurren a un mismo punto, debe verificarse:



$$\Delta L_{AV} = \delta v \cos\beta \Rightarrow \delta v = \frac{\Delta L_{AV}}{0,832}$$

$$\Delta L_{bv} = \delta v \cos\alpha \Rightarrow \delta v = \frac{\Delta L_{bv}}{0,9487}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta v = \frac{\Delta L_{AV}}{0,832} \\ \delta v = \frac{\Delta L_{bv}}{0,9487} \end{array} \right\} \left[ \frac{\Delta L_{AV}}{0,832} = \frac{\Delta L_{bv}}{0,9487} \right]$$

$$\boxed{\Delta L_{AV} 1,1403 = \Delta L_{bv}}$$

Como  $k_N^{AV} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{360,56} = 11649 \Rightarrow \Delta L_{AV} = \frac{N_L}{11649}$

$k_N^{bv} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2}{316,23} = 13281 \Rightarrow \Delta L_{bv} = \frac{N_I}{13281}$

Sustituyendo:  $\frac{N_L}{11649} 1,1403 = \frac{N_I}{13281} \Rightarrow \boxed{N_I = N_L \cdot 1,23}$



Sustituyendo en la ecuación de equilibrio estático:

$$11268,03 = N_L + 1,1403 \cdot (N_L \cdot 1,3)$$



$$N_L = 4536,43$$

$$N_I = 1,3 \cdot N_L = 5897,36$$

Restando los esfuerzos ficticios introducidos inicialmente, los esfuerzos finales serán:

$$N_L = 4536 - 2457 = 2079 = N_L$$

$$N_I = 5897 - 2457 = 3440 = N_I$$

Lo que coinciden con los resultados que obtuvimos anteriormente.

### 8.9. PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE COMPRESIÓN O TRACCIÓN, EN EL CAMPO DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN O DE DEFORMACIONES APRECIABLES

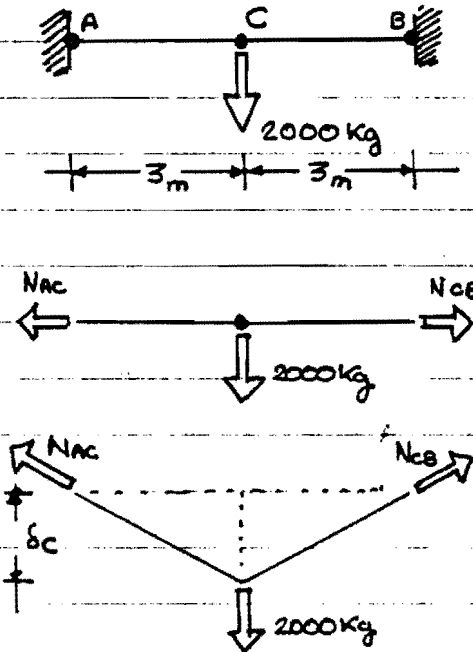
En determinadas configuraciones estructurales, no es factible el equilibrio de la misma, independientemente de los esfuerzos que puedan alcanzar las barras, si estas se consideran en sus posiciones primitivas, siendo forzoso establecer las ecuaciones de equilibrio estático, atribuyendo como líneas de acción de los esfuerzos que sufren las barras, las posiciones DEFORMADAS de estas, en tal caso, se dice que el CÁLCULO SE REALIZA EN EL CAMPO DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN, y ello conlleva el que las DEFORMACIONES y los MOVIMIENTOS no podrán ser considerados PEQUEÑOS, dejan de ser LINEALES las relaciones entre ACCIONES APLICADAS y las deformaciones, solicitaciones y tensiones, que se producen como consecuencia de aquellas.

Si no es cierto el PRINCIPIO DE LINEALIDAD, tampoco será de aplicación el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS

Veamos algunos ejemplos.



**EJERCICIO 8.9.1.** Obtengase el esfuerzo normal en las dos barras de la estructura croquizada, si  $P = 2000 \text{ kg}$  y el área de la sección transversal es de  $10 \text{ cm}^2$  para ambas barras, cuyas longitudes son de  $300 \text{ cms}$ , y el módulo de Young es  $2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ . Calcúlese también el movimiento del punto C


**SOLUCIÓN**

Para que se alcance el equilibrio estático es preciso que la fuerza de  $2000 \text{ kg}$  este contrarrestada por componentes verticales del esfuerzo normal que experimenten las barras AC y CB, pero ello no es factible en la posición inicial de las mismas, tal como se indica en la figura.

La imposibilidad de equilibrio con la configuración inicial, sin considerar los movimientos debidos a las deformaciones, nos obliga, a establecer las condiciones de equilibrio estático sobre el esquema deformado, lo que corresponde a la consideración de los EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN, que en la mayor parte de los problemas estructurales consideramos despreciables.

$$\begin{cases} \delta_L = 0 & \delta_T = \delta_C \\ \Delta L = \delta_L + \frac{\delta_T^2}{2L} \end{cases}$$

$$\Delta L = \frac{\delta_T^2}{2L} = \frac{\delta_C^2}{600} = \Delta L$$

Tal como indicamos, ante un desplazamiento  $\delta_C$  del nudo C, que por condición de SIMETRÍA debe producirse según la vertical, no existe componente del movimiento según la dirección de la barra, y únicamente se produce una componente transversal que es el propio valor del corrimiento  $\delta_C$ , al ser la barra ortogonal con el citado movimiento, por lo que:  $\delta_L = 0$  y  $\delta_T = \delta_C$ .

Aplicando la expresión del alargamiento de una barra, se deduce que:

$$\Delta L = \frac{\delta_C^2}{600}$$

Como la RIGIDEZ a ESFUERZOS NORMALES de ambas barras vale:

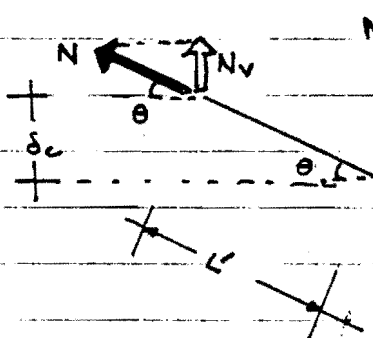


$$K_N = \frac{EA}{L} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 10}{300} = 70000 \text{ Kg/cm}$$

El esfuerzo normal de ambas barras vendrá determinado por:

$$N_{Ac} = N_{Cb} = K_N \Delta L = 70000 \frac{\delta_c^2}{600} = \boxed{116,6 \delta_c^2 = N}$$

La componente vertical del esfuerzo normal, se obtendrá multiplicándolo por el seno del ángulo que forma la barra deformada con la horizontal



$$N_v = N \cdot \text{sen } \theta = N \cdot \frac{\delta_c}{L'}$$

Si consideramos que  $L' \approx L = 300 \text{ cms}$  obtendremos con determinada facilidad un resultado suficientemente exacto de este problema. ( $\text{tag } \theta \approx \text{sen } \theta$ )

$$N_v = N \frac{\delta_c}{300} = 0,38 \cdot \delta_c^3 = N_v$$

La condición de equilibrio estático es:

$$2 N_v = 2000 \text{ kg} \Rightarrow 0,77 \cdot \delta_c^3 = 2000 \Rightarrow \boxed{\delta_c = 13,70}$$

Sustituyendo en la expresión del esfuerzo normal:

$$N = 116,6 \cdot 13,70^2 = \boxed{21897 \text{ Kg} = N}$$

NOTA.

( Verifiquemos que en efecto puede adoptarse  $\text{sen } \theta = \text{tag } \theta$ , ya que si con el valor  $\delta_c$  deducido, calculamos  $L'$ , y utilizamos este valor para el cálculo de la componente vertical de  $N$ , obtendremos la misma expresión prácticamente.



$$L' = 300,31$$

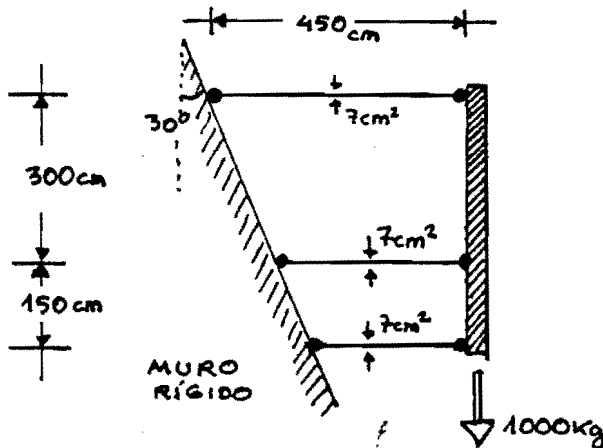
$$\text{sen } \theta = \frac{\delta_c}{300,31} \Rightarrow N_v = N \frac{\delta_c}{300,31} = 0,3885 \delta_c^3 = N_v$$

que en efecto es prácticamente coincidente con:

$$N_v = 0,38 \delta_c^3$$


**EJERCICIO 8.9.2.**

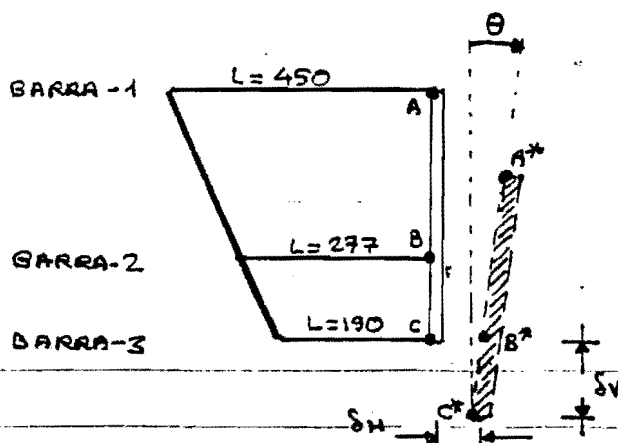
Un tablero rígido de peso 1000kg, está sujeto por tres barras de sección transversal de  $7\text{cm}^2$  de acero, y módulo de Young  $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Calcular los esfuerzos que sufrirán las mismas, así como el movimiento del tablero, sabiendo que las longitudes de las mismas son las que se indican en la figura.


**SOLUCIÓN**

Lo que acontecerá en cada barra, vendrá determinado por el movimiento del tablero, por lo que escogiendo como incógnitas el descenso vertical y el corrimiento horizontal que experimenta el extremo inferior del mismo, así como el ángulo de rotación, podrán calcularse los esfuerzos normales en cada una de dichas barras, por lo que estaremos eligiendo el MÉTODO INVERSO para la resolución del problema.

Al igual que en el problema anterior, es preciso establecer las ecuaciones de equilibrio estático considerando la deformación de la estructura, puesto que en la posición inicial es imposible el equilibrio.

Calculemos las longitudes de cada una de las tres barras, así como su rigidez a esfuerzos normales.



$$K_{N1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7}{450} = 32667 = K_{N1}$$

$$K_{N2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7}{277} = 53109 = K_{N2}$$

$$K_{N3} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7}{190} = 77291 = K_{N3}$$



El corrimiento de cada extremo de barra, podrá evidentemente calcularse en función de las incógnitas elegidas:  $\delta_V, \delta_H, \theta$

En efecto:

$$\begin{aligned} \text{BARRA-1 (AA}^*) \quad AA_H^* &= \delta_H + \theta \cdot 450 = \delta_L^{B1} \\ AA_V^* &= \delta_V = \delta_T^{B1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BARRA-2 (BB}^*) \quad BB_H^* &= \delta_H + \theta \cdot 150 = \delta_L^{B2} \\ BB_V^* &= \delta_V = \delta_T^{B2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BARRA-3 (CC}^*) \quad CC_H^* &= \delta_H = \delta_L^{B3} \\ CC_V^* &= \delta_V = \delta_T^{B3} \end{aligned}$$

El esfuerzo normal en cada barra, podrá ser calculado mediante la expresión:

$$N_i = KN_i \left( \delta_L^{Bi} + \frac{\delta_T^{Bi}}{2L_i} \right)$$

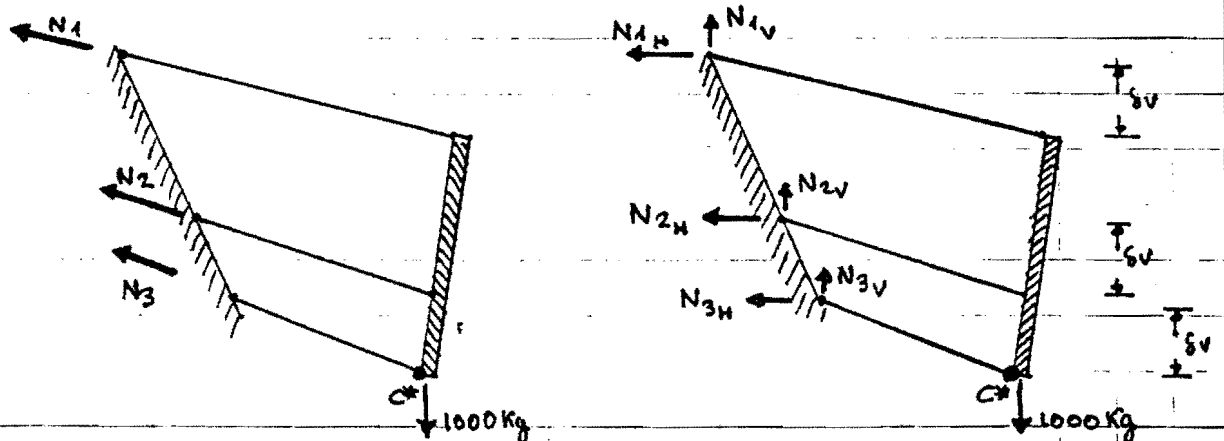
Sustituyendo en la misma, los datos de cada una de las barras, estableceremos:

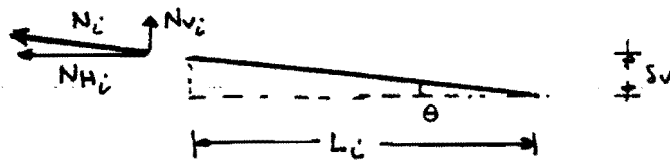
$$N_1 = 32667 \left( \delta_H + 450\theta + \frac{\delta_V^2}{900} \right) = 32667 \delta_H + 1,47 \cdot 10^7 \theta + 36,3 \delta_V^2 = N_1$$

$$N_2 = 53109 \left( \delta_H + 150\theta + \frac{\delta_V^2}{553,6} \right) = 53109 \delta_H + 0,797 \cdot 10^7 \theta + 95,94 \delta_V^2 = N_2$$

$$N_3 = 77291 \left( \delta_H + \frac{\delta_V^2}{380} \right) = 77291 \delta_H + 203,19 \delta_V^2 = N_3$$

Para establecer las ecuaciones de equilibrio estático, tendremos que calcular las componentes horizontales y verticales que generen los esfuerzos anteriores





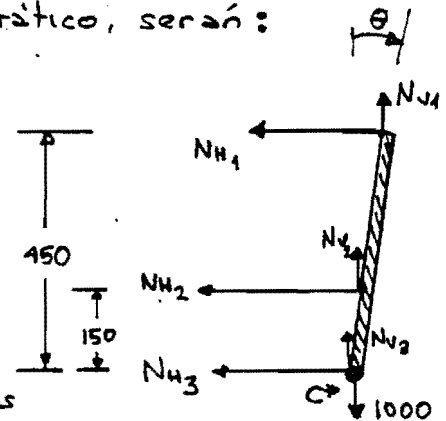
$$\left. \begin{aligned} N_{V_i} &= \text{sen } \theta N_i = \text{tag } \theta N_i = \frac{\delta v_i}{L_i} N_i \\ N_{H_i} &= \text{cos } \theta N_i = N_i \end{aligned} \right\}$$

consideremos que el seno y la tangente son equivalentes, pese a que las deformaciones no sean pequeñas, y que el coseno es aproximadamente 1.

$$\boxed{\begin{aligned} N_{V_i} &= \frac{\delta v_i}{L_i} N_i \\ N_{H_i} &= N_i \end{aligned}}$$

Las condiciones de equilibrio estático, serán:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & N_{1V} + N_{2V} + N_{3V} = 1000 \\ (2) \quad & N_{1H} + N_{2H} + N_{3H} = 0 \\ (3) \quad & N_{1H} \cdot 450 + N_{2H} \cdot 150 + N_{1V} \cdot 450 \cdot \theta + \\ & \quad + N_{2V} \cdot 150 \cdot \theta = 0 \end{aligned} \right\}$$



La (1) corresponde a suma de fuerzas verticales igual a cero

La (2) a suma de fuerzas horizontales igual a cero

La (3) a suma de momentos respecto a C\*, igual a cero.

Puesto que las componentes horizontales deberán ser muy superiores a las verticales, y que el producto  $d_i \theta$ , será muy inferior a  $d_i$ , los momentos de las fuerzas verticales respecto a C\*, representan sumandos despreciables respecto a los momentos de las componentes horizontales, razón por la cual se prescinde de dichos momentos.

Operando, la ecuación (1), se transformará en:

$$(1) \Rightarrow \boxed{670,89 \delta_H \delta_V + \theta \delta_V 61447 + 1,496 \delta_V^3 = 1000} \quad (1)^*$$

Y las ecuaciones (2) y (3) en:

$$\left. \begin{aligned} (2) \Rightarrow & 163067 \delta_H + 2,2667 \cdot 10^7 \theta + 339,43 \delta_V^2 = 0 \\ (3) \Rightarrow & 151110 \delta_H + 5,207 \cdot 10^7 \theta + 204,84 \delta_V^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

De las ecuaciones (2) y (3), puede despejarse  $\delta_H$  y  $\theta$  en función





de  $\delta_v$ , alcanzándose las siguientes conclusiones:

$$\begin{aligned}\Theta &= 3,41 \cdot 10^{-6} \delta_v^2 \\ \delta_H &= -2,581 \cdot 10^{-3} \delta_v^2\end{aligned}$$

Sustituyendo estas relaciones en (1)<sup>4</sup>, se alcanza la ecuación:

$$-1,698 \cdot \delta_v^3 + 0,2095 \delta_v^3 + 1,496 \cdot \delta_v^3 = 1000$$

$$0,0075 \delta_v^3 = 1000$$

$$\delta_v = 51,087 \text{ cms}$$



$$\begin{aligned}\delta_H &= -6,61 \text{ cms} \\ \Theta &= 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones que relacionaban los esfuerzos normales con los movimientos del tablero, se alcanzan los resultados finales:

$$\begin{aligned}N_1 &= 9779 \\ N_2 &= -29530 \\ N_3 &= 19748\end{aligned}$$

Se puede observar que los movimientos han sido importantes, lo cual es una característica de todos aquellos problemas en los que sólo se alcanza el equilibrio considerando los efectos de segundo orden.

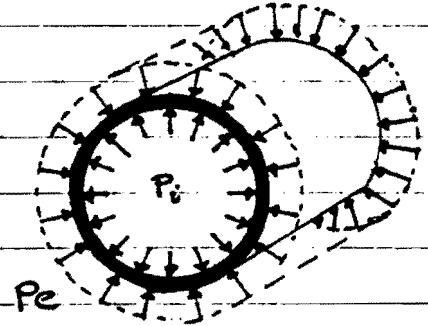
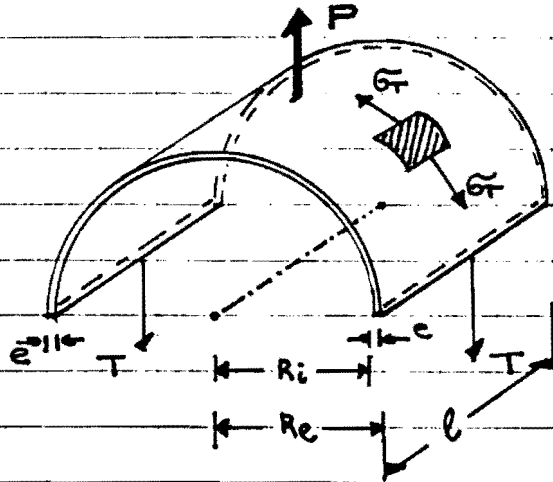
Es también importante en reparar en el hecho de que  $\delta_v$  se obtiene mediante una raíz cúbica de la acción exterior, por lo que en efecto, no existe linealidad entre fuerzas y movimientos. Dado que los esfuerzos normales, vienen en función del cuadrado del corrimiento vertical, tampoco existirá linealidad entre las FUERZAS EXTERIORES y las SOLICITACIONES que se producen en los elementos, lo cual también es una característica común a todos los problemas resueltos en el campo de los EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN.



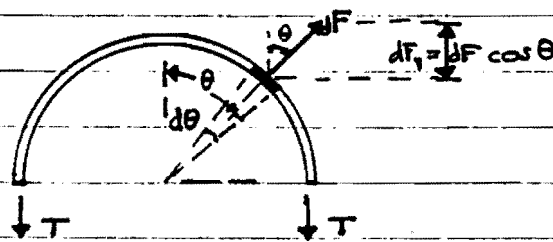
8.10. TUBERÍAS Y PIEZAS CILÍNDRICAS HUECAS

TUBERÍAS DE PARED DELGADA

Para una máxima generalidad, supongamos que existe presión interior y exterior  $p_i$  y  $p_e$



Si suponemos que el espesor  $e$  de la tubería es pequeño con respecto al radio de la misma, puede suponerse que las tensiones  $\sigma_T$ , que se producirán en la tubería serán constantes, y por lo tanto independientes de la distancia al eje, del punto en que se midan, en cuyo caso la deducción de dichas tensiones no presenta dificultad especial. En efecto, si cortamos la tubería por un plano que contenga a su eje, será preciso adicionar dos fuerzas  $T$  para simular la acción que efectuaba la mitad de la tubería eliminada, y en tal caso, la mitad consi-



derada se debe encontrar en EQUILIBRIO ESTÁTICO, lo que nos permite deducir el valor de dichas acciones  $T$ , puesto que debe equilibrar las com-

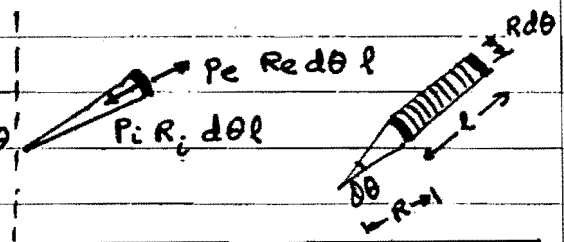
ponentes verticales de las fuerzas que la presión producen en cada elemento diferencial de superficie.

$$dF = (p_i R_i - p_e R_e) d\theta l$$

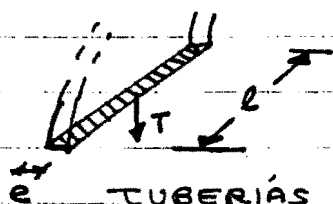
$$dF_v = dF \cdot \cos \theta = l(p_i R_i - p_e R_e) \cos \theta d\theta$$

$$2T = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} l(p_i R_i - p_e R_e) \cos \theta d\theta$$

$$2T = 2l(p_i R_i - p_e R_e) \Rightarrow T = l(p_i R_i - p_e R_e)$$



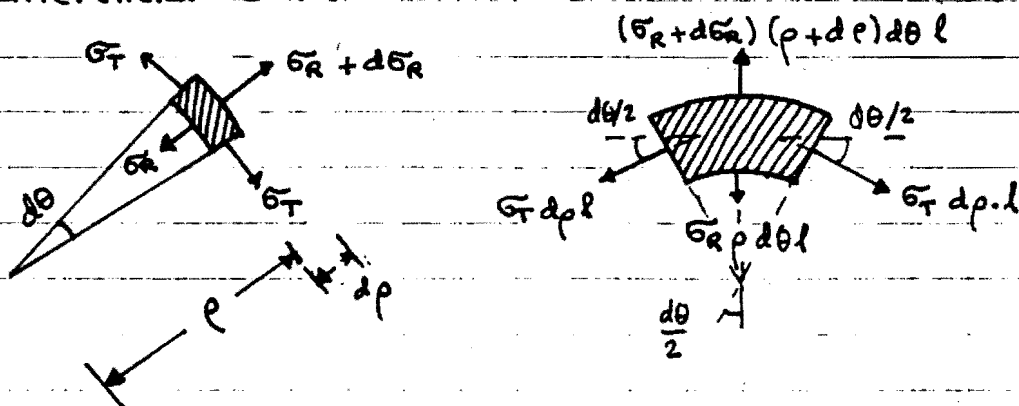
La tensión que se producirá en consecuencia, al suponerse de acuerdo con la hipótesis inicial, distribución uniforme, será:



$$\tilde{\sigma}_T = \frac{T}{e l} = \frac{1}{e} (p_i R_i - p_e R_e) = \tilde{\sigma}_T$$

### TUBERÍAS DE GRAN ESPESOR

Si el espesor de la tubería no es despreciable con respecto al radio, la expresión anterior nos producirá errores significativos, y es preciso considerar la existencia de tensiones radiales, cuya intensidad es conocida en los puntos que pertenecen a la superficie interior o exterior de la tubería, puesto que deberá coincidir con la presión exterior existente en dichas superficies, lo que nos proporciona las condiciones de contorno precisas para la resolución de este problema elástico. En efecto, las tensiones existentes en un elemento diferencial son:



La suma de fuerzas sobre un eje radial, nos proporcionará la siguiente ecuación de equilibrio estático:

$$(\sigma_R + d\sigma_R) (p + dp) d\theta l = \sigma_R p d\theta l + 2 \left( \sigma_T dp l \right) \frac{d\theta}{2}$$

$$\tilde{\sigma}_T = \sigma_R + p \frac{d\sigma_R}{dp} \quad (1)$$

La tensión  $\tilde{\sigma}_x$  según el eje de la tubería, así como la deformación unitaria  $\tilde{\epsilon}_x$ , deben ser constantes, para que sea factible que las secciones permanezcan planas durante el proceso de la deformación, en cuyo caso según la LEY DE HOOKE se deberá verificar:



$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_T + \sigma_R)) \\ \epsilon_x &= cte \\ \sigma_x &= cte \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma_T + \sigma_R = cte} \quad (2)$$

Las dos condiciones deducidas, que ligan  $\sigma_T$  y  $\sigma_R$ , constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución será:

$$\sigma_T = K - \sigma_R \quad (K \text{ constante})$$

$$K - \sigma_R = \sigma_R + \rho \frac{d\sigma_R}{d\rho} \quad (\text{sustituyendo en (1) la (2)})$$



$$(K - 2\sigma_R) \frac{d\rho}{\rho} = d\sigma_R$$



$$2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\sigma_R}{\frac{K}{2} - \sigma_R} \Rightarrow \ln \left( \frac{C}{\rho^2} \right) = \ln \left( \frac{K}{2} - \sigma_R \right)$$

(C constante a determinar)



$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{K}{2} - \frac{C}{\rho^2} \\ \sigma_T &= \frac{K}{2} + \frac{C}{\rho^2} \end{aligned}}$$



$$\frac{C}{\rho^2} = \frac{K}{2} - \sigma_R$$

Imponiendo las condiciones de contorno que señalamos en un principio, se deducen las constantes de integración K y C

$$C = \frac{P_i - P_e}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} \quad \frac{K}{2} = \frac{P_i/R_e^2 - P_e/R_i^2}{1/R_i^2 - 1/R_e^2}$$

Sustituyendo:

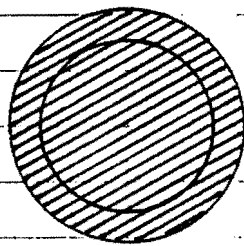
$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{-1}{\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2}} \left( P_i \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) + P_e \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right) \\ \sigma_T &= \frac{1}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} \left( P_i \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R_e^2} \right) - P_e \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R_i^2} \right) \right) \end{aligned}}$$



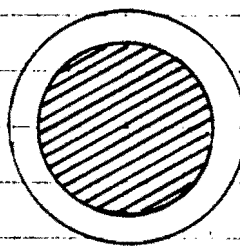
Las fórmulas anteriores pueden transformarse en las siguientes:

$$\bar{\sigma}_R = \frac{-1}{A_p A_o} (p_i A_i (A_e - A_p) + p_e A_e (A_p - A_i))$$

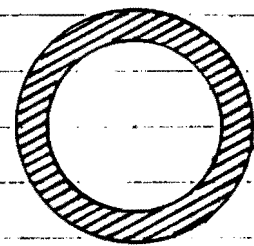
$$\bar{\sigma}_T = \frac{1}{A_p A_o} (p_i A_i (A_e + A_p) - p_e A_e (A_p + A_i))$$



$A_e$

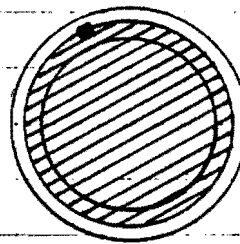


$A_i$



$A_o$

Donde  $A_e$ ,  $A_i$ ,  $A_o$  y  $A_p$  representan las superficies rayadas de las figuras adjuntas.

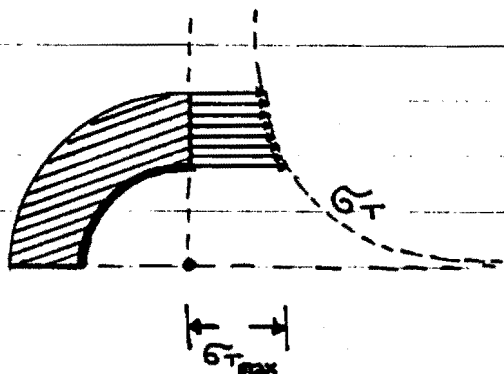


$A_p$

La tensión  $\bar{\sigma}_T$  alcanza un máximo valor cuando  $p = R_i$  es decir, cuando  $A_p = A_i$ , en cuyo caso

$$\bar{\sigma}_{Tmax} = \frac{A_e + A_i}{A_o} (p_i - p_e \frac{A_e}{A_i})$$

Para otros valores de  $p$ , la variación de  $\bar{\sigma}_T$ , es del tipo:



$\bar{\sigma}_T$  tiende a infinito cuando  $p$  tiende a cero.

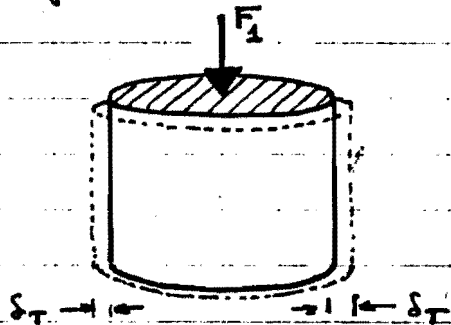
Si calculamos el valor medio de  $\bar{\sigma}_T$ , se verificaría que el mismo lo determina la expresión ya deducida de:  $\bar{\sigma}_{Tmedio} = \frac{1}{e} (p_i R_i - p_e R_e)$



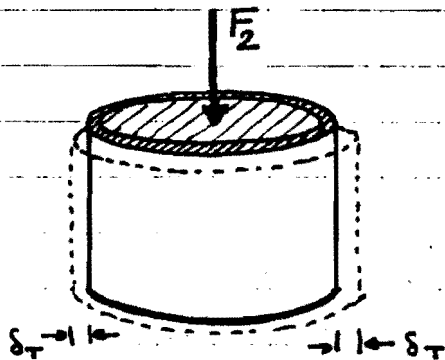
**8.1. INCREMENTO DE RESISTENCIA POR ZUNCHADO**

Entendemos por zunchado el situar una pieza cilíndrica de un cierto material en el interior de otra, acoplándose ambas perfectamente, siendo la exterior cuya forma será la misma que la de una tubería de un material más resistente.

Si la pieza considerada, no tuviese la "camisa" descrita ante una cierta fuerza  $F_1$ , uniformemente aplicada, se producirían deformaciones transversales  $\delta_T$ , que la ley de Hooke nos permite calcular.

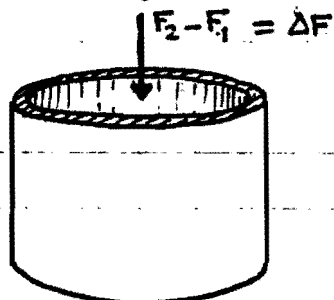


Es evidente que acoplada dicha pieza, al interior de una cilíndrica hueca, los corrimientos transversales solo se producirán tras deformarse la "camisa" exterior, y en consecuencia para que se produzca el mismo movimiento transversal será preciso aplicar una fuerza  $F_2$ , mayor que  $F_1$ .



Puede considerarse que la diferencia  $F_2 - F_1$  la absorbe la "camisa" exterior, por el denominado efecto de ZUNCHADO, consistente en un

incremento de la resistencia de la pieza central, puesto que con una misma deformación transversal, puede recibir mayor carga axial que si no dispusiese de la tubería exterior.



Las deformaciones unitarias transversales deberán ser en consecuencia iguales, ante la acción de  $F_1$  sin zuncho, que disponiéndose de este ante la acción de  $F_2$ .

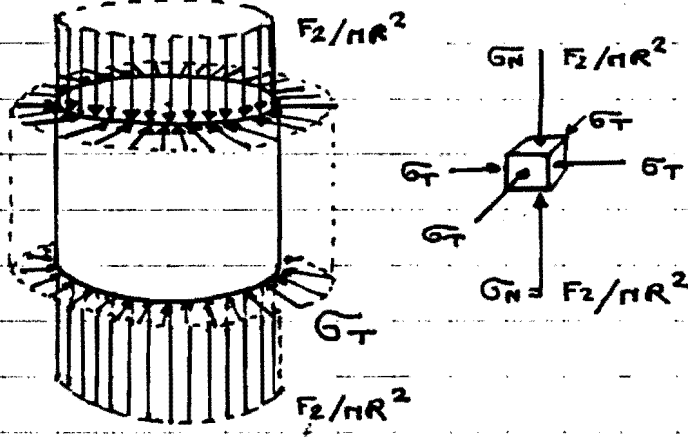


$$\epsilon_T = -\frac{\nu}{E} \left( \frac{F_1}{\pi R^2} \right) \quad (\text{sin zuncho})$$

$$\epsilon_T = \frac{1}{E} \left( -\sigma_T - \nu \left( -\frac{F_2}{\pi R^2} - \sigma_T \right) \right) \quad (\text{con zuncho})$$

ya que la camisa exterior, al oponerse a los movimientos transversales efectuará una tensiones laterales  $\sigma_T$ , tal como a

continuación se indica:



Iguando las deformaciones unitarias transversales, resulta:

$$-\frac{\nu}{E} \left( \frac{F_1}{\pi R^2} \right) = -\frac{\sigma_T}{E} (1-\nu) + \frac{\nu}{E} \frac{F_2}{\pi R^2}$$



$$\boxed{\frac{F_2 - F_1}{\pi R^2} = \sigma_T \frac{1-\nu}{\nu}}$$

En consecuencia el incremento de tensión normal está en relación con la tensión transversal que efectúa el zuncho, según la fórmula:

$$\Delta \sigma_N = \sigma_T \frac{1-\nu}{\nu}$$

Si se atribuye al hormigón un coeficiente de Poisson de  $1/5$ , la expresión anterior se particulariza para soportes de hormigón armado en la fórmula que se debe a BRANZAEG, según la cual:

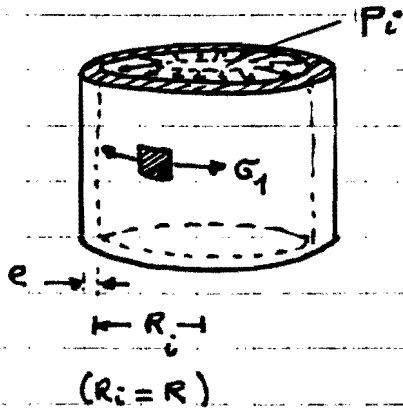
$$\Delta \sigma_N = 4 \sigma_T$$

La tensión  $\sigma_T$  que efectuará el zuncho dependerá lógicamente de su rigidez y capacidad de oponerse a los movimientos



transversales

Por el estudio efectuado sobre tuberías sabemos que:



$$\sigma_1 = \frac{1}{e} p_i R_i$$

pero  $p_i$  es por el principio de la acción y de la reacción la tensión  $\sigma_T$  que comprime lateralmente la pieza maciza cilíndrica interior, en consecuencia:

$$\sigma_1 = \frac{R}{e} \sigma_T$$

Si limitamos la tensión de la camisa de zunchado a un cierto valor  $\sigma_z^*$ , resultará:

$$\sigma_T = \frac{e}{R} \sigma_z^*$$

y substituyendo:

$$\frac{F_2 - F_1}{\pi R^2} = \frac{e}{R} \sigma_z^* \frac{1 - \nu}{\nu}$$



$$F_2 - F_1 = 2\pi R e \sigma_z^* \frac{1 - \nu}{2\nu}$$

Simbolizando por  $p_m$ , el perímetro de la pieza cilíndrica central, resultará que el incremento de resistencia que produce una camisa de espesor  $e$ , capaz de trabajar a una tensión  $\sigma_z^*$  será:

$$\Delta F = p_m e \sigma_z^* \frac{1 - \nu}{2\nu} (= F_2 - F_1)$$

Cuando el espesor es pequeño, el producto  $p_m e$  indica el área de la sección transversal de la pieza de zunchado, que puede simbolizarse mediante  $A_z$ , en cuya caso se podrá establecer que:

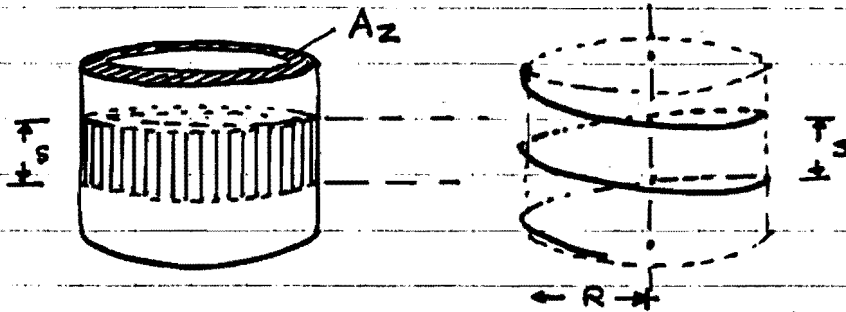
$$\Delta F = A_z \sigma_z^* \frac{1 - \nu}{2\nu}$$

( $\nu$  es el coeficiente de Poisson de la columna interior que es zunchada.)





Si para zunchar se utiliza un redondo en forma de hélice, puede aplicarse la fórmula anterior asimilándolo a una tubería ficticia cuyo volumen total fuese equivalente



El volumen que se produce en un tramo de longitud el paso  $S$  de hélice será en ambos casos el siguiente:

$$V = S \cdot A_z$$

$$V = 2\pi R a_z$$

(en donde  $a_z$  simboliza el área transversal del redondo utilizado para zunchar)

$$A_z = \frac{2\pi R}{S} a_z = \frac{\pi m}{S} a_z = A_z$$

Sustituyendo, resultará:

$$\Delta F = \frac{\pi m}{S} a_z \sigma_z^* \frac{1-\nu}{2\nu}$$

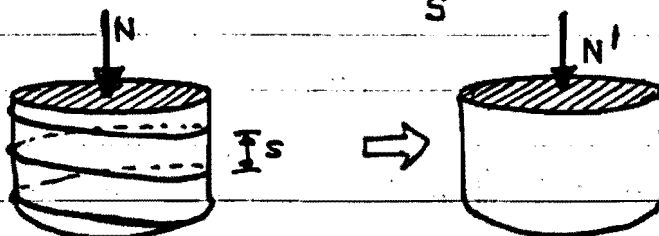
En consecuencia, si tenemos que determinar las armaduras de un soporte que está zunchado por un redondo de área transversal  $a_z$  y paso de hélice  $S$ , ante la acción de una fuerza axial  $N$ , podrá ser asimilado dicho cálculo al de otro soporte que careciese de dicho zuncho, pero que sufriese la acción de un axial  $N'$  de valor:

$$N' = N - \frac{\pi m}{S} a_z \sigma_z^* \cdot 2$$

$$(\pi m = 2\pi R)$$

(si  $\nu = \frac{1}{2}$ , resulta:

$$\frac{1-\nu}{2\nu} = 2)$$



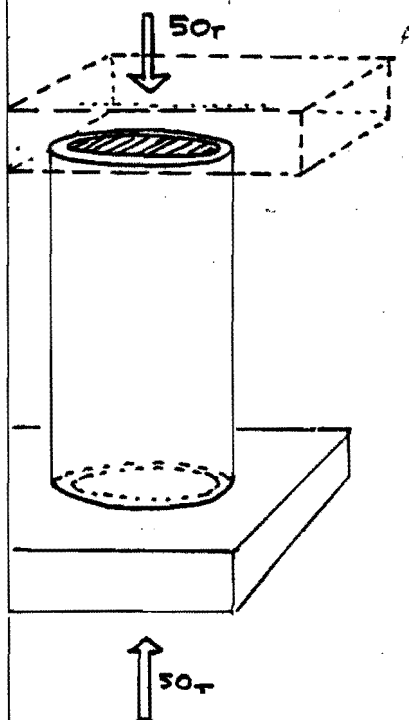


**EJERCICIO 8.11.1.**

Una tubería de acero de 25 cm de diámetro interior y 29 cm de diámetro exterior, está macizada por un cierto material cuyas constantes elásticas son:  $E = 200000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.20$  y el coeficiente de dilatación térmica  $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ . Sabiendo que se ejerce de forma uniforme una presión de 50000 kg a compresión, sobre el material interior, y que a la vez, se produce un incremento de temperatura de  $50^\circ\text{C}$  sobre el momento del montaje, determinar las tensiones que se producen en ambos materiales

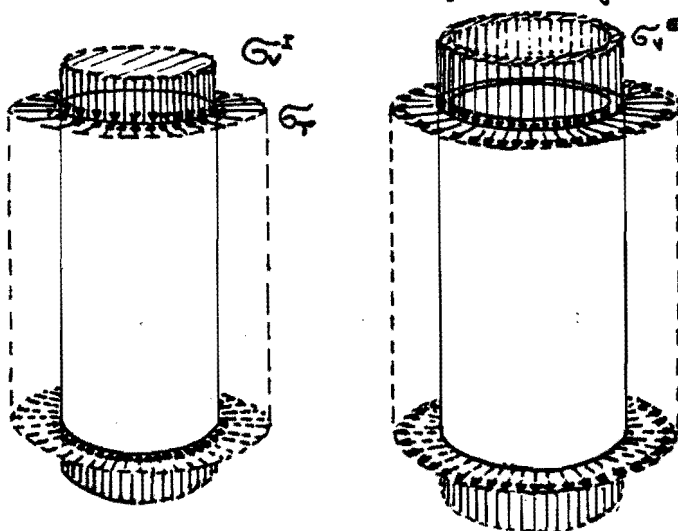
(Las constantes del acero son:  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 0,28$ )

La presión se ejerce por medio de placas rígidas que obligan a que las deformaciones longitudinales de ambos materiales sean iguales.



**SOLUCIÓN**

Las tensiones que experimentará el material interior serán del siguiente tipo:



y las de la tubería, se han representado a la derecha.

La tensión transversal  $G_t$ , debe ser común para la tubería y el material de relleno, por el principio de la acción y de la reacción.

Lógicamente, ante la compresión del material interior, este tiene tendencia a dilatarse transversalmente, a lo que se opone la tubería



por lo cual,  $\sigma_r$  es de compresión para el material de relleno, y de tracción para la camisa de acero.

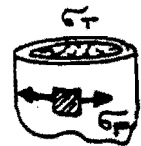
Las deformaciones longitudinales y transversales en el interior del conjunto analizado, serán:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_L^I &= \frac{1}{200000} (-\sigma_V^I - 0,2 (-\sigma_r - \sigma_r)) + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \\ \epsilon_r^I &= \frac{1}{200000} (-\sigma_r - 0,2 (-\sigma_r - \sigma_V^I)) + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_L^I &= -\frac{\sigma_V^I}{200000} + \frac{\sigma_r}{500000} + 0,0015 \\ \epsilon_r^I &= \frac{-\sigma_r}{250000} + \frac{\sigma_V^I}{1000000} + 0,0015 \end{aligned}}$$

En la tubería, se producirá una tensión de tracción perimetral, debida a la presión interior  $\sigma_r$ , que efectúa sobre ella el material de relleno, que puede calcularse mediante la expresión correspondiente a tuberías de pared delgada, y por lo tanto:

$$\sigma_p = \frac{1}{e} p_i R_i = \frac{1}{2} \sigma_r \cdot 12,5 = 6,25 \sigma_r = \sigma_p$$



Por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_L^E &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (-\sigma_V^E - 0,28 \sigma_p) + 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \\ \epsilon_r^E &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (\sigma_p - 0,28 (-\sigma_V^E)) + 1,17 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_L^E &= -\frac{\sigma_V^E}{2,1 \cdot 10^6} - \frac{\sigma_p}{7,5 \cdot 10^6} + 0,000585 \\ \epsilon_r^E &= \frac{\sigma_p}{2,1 \cdot 10^6} + \frac{\sigma_V^E}{7,5 \cdot 10^6} + 0,000585 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo  $\sigma_p$ , por su relación con  $\sigma_r$ , se obtiene:



$$\epsilon_L^E = -\frac{\sigma_V^E}{2,1 \cdot 10^6} - \frac{\sigma_T}{1,2 \cdot 10^6} + 0,000585$$

$$\epsilon_T^E = \frac{\sigma_T}{0,336 \cdot 10^6} + \frac{\sigma_V^E}{7,5 \cdot 10^6} + 0,000585$$

Igualando las deformaciones unitarias de ambos materiales, obtendremos dos ecuaciones hiperestáticas, que serán:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\sigma_V^I}{200\,000} + \frac{\sigma_T}{500\,000} + 0,0015 &= -\frac{\sigma_V^E}{2,1 \cdot 10^6} - \frac{\sigma_T}{1,2 \cdot 10^6} + 0,000585 \\ -\frac{\sigma_T}{250\,000} + \frac{\sigma_V^I}{1\,000\,000} + 0,0015 &= \frac{\sigma_T}{336\,000} + \frac{\sigma_V^E}{7,5 \cdot 10^6} + 0,000985 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\sigma_V^I}{200\,000} + \frac{\sigma_V^E}{2,1 \cdot 10^6} + 0,283 \cdot 10^{-5} \sigma_T + 0,000915 &= 0 \\ -\frac{\sigma_T}{1\,000\,000} + \frac{\sigma_V^E}{7,5 \cdot 10^6} + 0,6976 \cdot 10^{-2} \sigma_T - 0,000915 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$-\sigma_V^I + 0,09524 \cdot \sigma_V^E + 0,566 \sigma_T + 183 = 0$$

$$-\sigma_V^I + 0,1333 \sigma_V^E + 6,976 \sigma_T - 915 = 0$$

La ecuación isostática, consiste en que la suma de las fuerzas que generan las tensiones verticales, debe equivaler a 50000 kg.

$$\pi (14,5^2 - 12,5^2) \sigma_V^E + \pi \cdot 12,5^2 \sigma_V^I = 50000$$

$$\sigma_V^E + 2,894 \sigma_V^I = 294,731$$

Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, que nos configuran las 2 ecuaciones hiperestáticas y la isostática, se obtiene:

$$\sigma_T = 174,59 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_V^E = 246,81 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_V^I = -419,5 \text{ Kg/cm}^2$$