
UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

UPCGRAU

# Equacions diferencials. Problemes resolts

M. Carme Leseduarte Milán
M. Dolors Llongueras Arola
Antoni Magaña Nieto
Ramon Quintanilla de Latorre

14


UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

iniciativa digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

UPCGRAU

# Equacions diferencials. Problemes resolts

M. Carme Leseduarte Milán
M. Dolors Llongueras Arola
Antoni Magaña Nieto
Ramon Quintanilla de Latorre

Primera edició: juliol de 2012

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila
Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila
Maquetació: Mercè Aicart



© Iniciativa Digital Politècnica, 2012
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B. 18842-2012
ISBN: 978-84-7653-934-7

# índex

E pur si muove.

*Galileu*

# Introducció

La resolució de problemes és una metodologia activa d'aprenentatge que estimula l'adquisició de coneixements i, alhora, ajuda a desenvolupar competències. Per competència s'entén la capacitat d'utilitzar en àmbits diversos, i de forma transversal, els coneixements i les habilitats apreses prèviament. Ésser competent en una tasca determinada implica comprendre la tasca que cal realitzar, reflexionar-ne i decidir finalment la millor acció a fer per executar-la eficientment. Tothom que hagi resolt algun problema de matemàtiques veurà de seguida el paral·lelisme entre el que significa ésser competent i les fases de resolució d'un problema: primer s'ha de *comprendre* bé l'enunciat, després s'ha de *reflexionar* per ubicar el problema en un context més o menys conegut i, finalment, s'ha de *triar* una estratègia que condueixi a una solució. Per tant, resoldre problemes és una bona manera d'assolir competències.

Al món de l'enginyeria es fan servir models matemàtics on apareixen de forma natural les equacions diferencials. És per això que assignatures d'aquesta temàtica s'inclouen als plans d'estudis dels graus de qualsevol tipus d'enginyeria. A l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa (ETSEIAT) se n'imparteixen tres. Aquest text que presentem està pensat per als alumnes d'assignatures d'equacions diferencials i és fruït de l'experiència dels autors en la docència a l'ETSEIAT.

Atès el nou paradigma de l'ensenyament universitari, amb menys hores de classe presencial i més èmfasi en l'aprenentatge autònom, ens ha semblat oportú oferir una col·lecció de problemes resolts d'equacions diferencials per tal que els estudiants disposin de models de problemes que els serveixi de guia en el moment que n'hagin de resoldre altres de similars. A més dels exercicis resolts, s'ha inclòs un recull d'exercicis per resoldre (amb les seves solucions respectives) amb la finalitat de consolidar l'aprenentatge de cada tema.

El llibre està dividit en sis capítols. Al primer es veuen problemes sobre aspectes generals de les equacions diferencials ordinàries, com ara comprovar si una família determinada de funcions és solució o no d'una equació o dibuixar-ne el retrat de fases. El segon capítol està dedicat a l'estudi de les equacions de primer ordre. Al tercer es presenten aplicacions clàssiques de les equacions diferencials, com poden ser el buidatge de dipòsits o el creixement de poblacions. El capítol quatre es dedica a la resolució de les equacions lineals d'ordre superior. Al capítol cinc s'aplica la transformada de Laplace (eina usada abastament pels enginyers) a la resolució de les equacions lineals. S'ha procurat il·lustrar les resolucions dels problemes amb gràfiques que ajudin a entendre més bé tot el procés. Finalment, al capítol sis, s'inclouen les solucions de tots els problemes proposats al final de cada un dels temes.

Per acabar, volem agrair la col·laboració dels companys del Departament de Matemàtica Aplicada II, que han aportat idees i suggeriments, i també l'oportunitat que ens ha donat Iniciativa Digital Politècnica de posar aquest text a l'abast de tothom.

Els autors.

Maig 2012.


2
1
3

→1

# Generalitats sobre les equacions diferencials ordinàries

## 1.1. Problemes resolts

**Problema 1.** Comproveu que el feix de corbes $y = \dfrac{1}{c-x}$ és solució de l'equació $y' = y^2$. Resoleu aquesta equació diferencial i dibuixeu-ne el retrat de fases.

**Resolució**

La comprovació és fàcil: només cal derivar

$$y' = \frac{1}{(c-x)^2} = y^2.$$

Aquest feix de corbes és solució de l'equació, però potser no totes les solucions són corbes d'aquesta família.

Resolem l'equació per trobar-ne totes les solucions. És de variables separables:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dx.$$

Per fer el pas anterior és necessari que $y$ sigui diferent de zero. Com es pot veure immediatament, $y = 0$ també és solució de l'equació. Integrant, obtenim

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

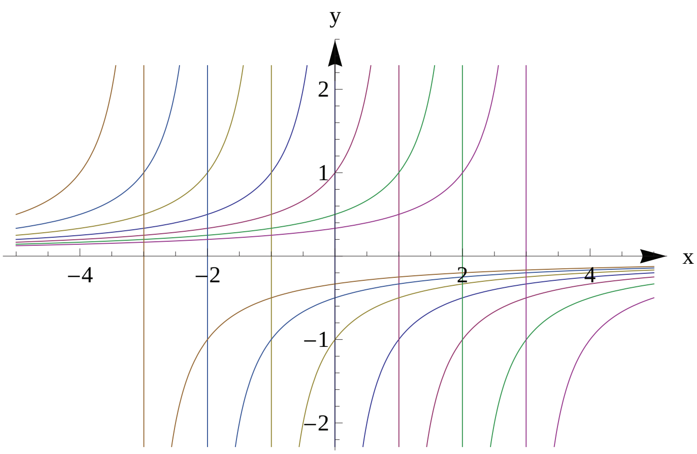
o, equivalentment,

$$y = \frac{1}{c-x},$$

que és el feix de corbes (hipèrboles) de l'enunciat.

El retrat de fases està format per hipèrboles i per la recta $y = 0$, l'eix d'abscisses. A la figura 1.1, en tenim unes quantes.

Fig. 1.1
Retrat de fases de $y' = y^2$




**Problema 2.** Resoleu l'equació $y' = ay$ de dues maneres diferents:

a) per separació de variables;

b) a partir de les funcions $y = ke^{ax}$.

Dibuixeu-ne també el retrat de fases, segons els valors de $a$.

**Resolució**

a) En primer lloc, escrivim l'equació diferencial de forma adequada:

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad \underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \frac{dy}{y} = a\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a\,dx + c.$$

Integrem ambdós costats de la igualtat anterior

$$\ln|y| = ax + c.$$

Per aïllar la $y$, apliquem l'exponencial —que és la inversa del logaritme— i n'obtenim

$$|y| = e^c e^{ax} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm e^c e^{ax}.$$

D'aquí tenim $y = ke^{ax}$, amb $k \neq 0$, ja que $e^c \neq 0$.

Notem que hi ha un pas $(*)$ on hem dividit ambdós termes de la igualtat per $y$. Això és possible si $y \neq 0$. Hem de vigilar si $y = 0$ és una solució i, en cas afirmatiu, si l'hem perduda pel camí. En efecte, $y = 0$ n'és una solució perquè $y' = 0$, i aleshores se satisfà l'equació diferencial: $0 = a \cdot 0$. Tanmateix, observem que la corba corresponent a $k = 0$ de la col·lecció de solucions $y(x) = ke^{ax}$ és precisament $y = 0$. Per tant, ja quedarà inclosa si hi afegim $k = 0$. La solució general és, doncs, $y = ke^{ax}$, amb $k \in \mathbb{R}$.

b) Considerem les funcions $y = ke^{ax}$ independentment de l'apartat anterior. És clar que les corbes d'aquest feix són solucions de la nostra equació diferencial $y' = ay$. Ara ens preguntem si totes les solucions són d'aquesta forma. Comprovarem que la resposta és sí.

Sigui $y = \varphi(x)$ una solució qualsevol de $y' = ay$, és a dir, $\varphi'(x) = a\varphi(x)$. Volem comprovar que $\varphi(x)$ és del tipus $y = ke^{ax}$. Considerem la nova funció $f(x) = \varphi(x)e^{-ax}$. Calculem-ne la derivada respecte de $x$:

$$f'(x) = \varphi'(x)e^{-ax} - a\varphi(x)e^{-ax} = e^{-ax}\left[\varphi'(x) - a\varphi(x)\right].$$

Atès que $y = \varphi(x)$ és una solució de $y' = ay$, satisfà $\varphi'(x) - a\varphi(x) = 0$. Així, doncs, $f'(x) = 0$. Per tant, deduïm que

$$f(x) = C \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x)e^{-ax} = C \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = Ce^{ax},$$

com volíem veure.

Finalment, dibuixem el retrat de fases de $y' = ay$. En distingim tres casos, segons els valors de $a$.

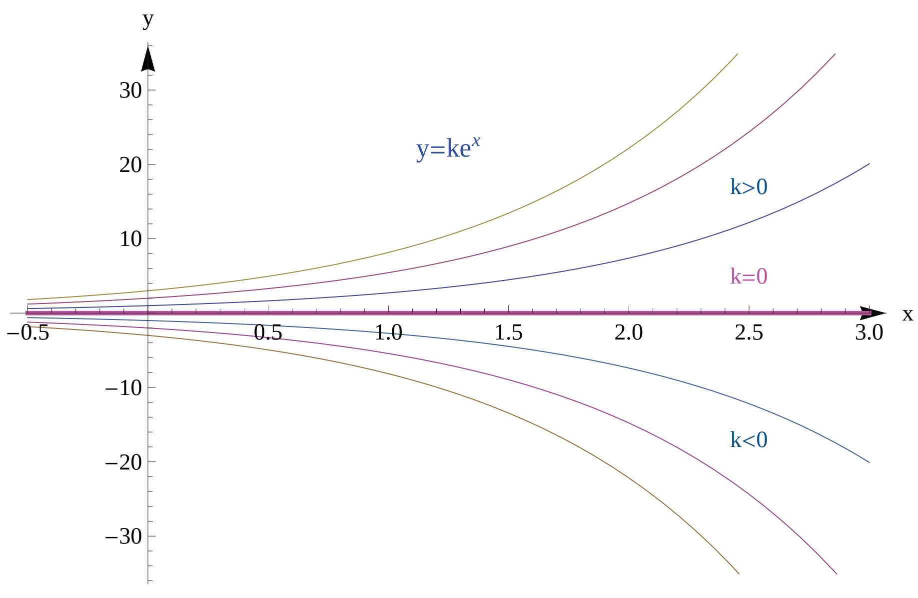



Fig. 1.2
Corbes integrals de $y' = ay$, amb $a = 1$

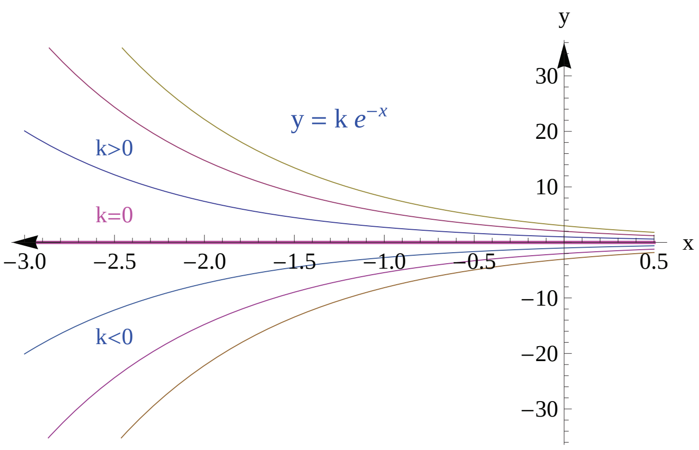
*Cas 1:* $a > 0$. La figura 1.2 en representa les corbes integrals:

- Per a $k = 0$ és l'eix $y = 0$.
- Per a $k > 0$ són exponencials creixents que omplen el semiplà superior.
- Per a $k < 0$ són exponencials decreixents que omplen el semiplà inferior.

*Cas 2:* $a < 0$. Les solucions corresponen a la figura 1.3:

- Per a $k = 0$ és l'eix $y = 0$.
- Per a $k > 0$ són exponencials decreixents que omplen el semiplà superior.
- Per a $k < 0$ són exponencials creixents que omplen el semiplà inferior.

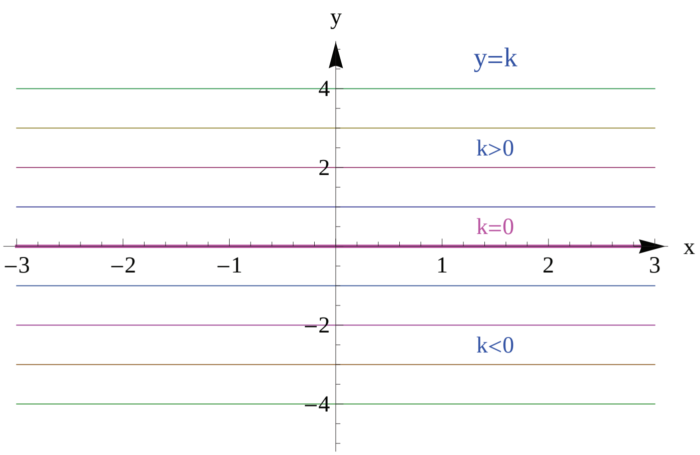
Fig. 1.3
Corbes integrals de $y' = ay$, amb $a = -1$




*Cas 3:* $a = 0$. En aquest cas, l'equació diferencial esdevé $y' = 0$. La solució general és $y = k$, la col·lecció de totes les rectes horitzontals. A la figura 1.4, les veiem amb detall:

- Per a $k = 0$ és l'eix $y = 0$.
- Per a $k > 0$ són rectes horitzontals que omplen el semiplà superior.
- Per a $k < 0$ són rectes horitzontals que omplen el semiplà inferior.

Fig. 1.4
Solucions de $y' = ay$ quan $a = 0$



**Problema 3.** Resoleu l'equació $y' = 7$ i esbosseu-ne el retrat de fases. Quina és la solució particular que passa pel punt $(1,2)$? Dibuixeu-la.

### Resolució

L'equació $y' = 7$ és d'ordre 1. Directament, sabem que totes les funcions amb derivada constant 7 són de la forma $y = 7x + c$, on $c \in \mathbb{R}$. La solució general és, doncs, $y = 7x + c$, $c \in \mathbb{R}$, una família uniparamètrica. N'hi ha infinites solucions. Notem que per cada punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passa una única corba solució, que és una recta de pendent 7. El retrat de fases és el dibuix de la figura 1.5.

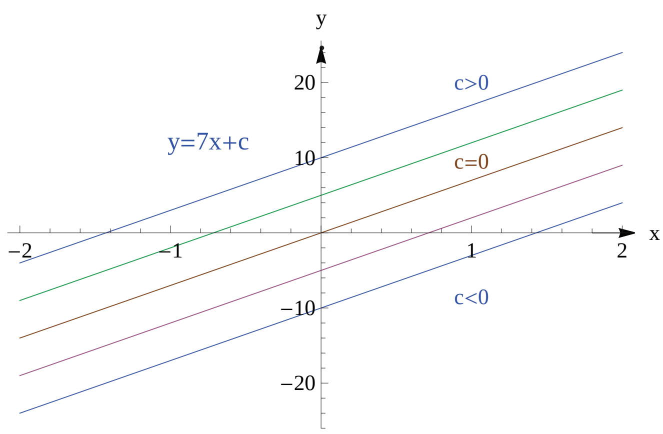



Fig. 1.5
Retrat de fases de $y' = 7$

Per a $c = 0$, tenim la recta $y = 7x$ que passa per l'origen. Els valors del paràmetre $c > 0$ corresponen a les rectes que hi ha per sobre de $y = 7x$; això significa que hem desplaçat la recta $y = 7x$ cap amunt $c$ unitats. Anàlogament, els valors del paràmetre $c < 0$ s'apliquen a les rectes que hi ha per sota de $y = 7x$, és a dir, que hem corregut la recta $y = 7x$ cap avall $c$ unitats. Les gràfiques de totes aquestes corbes omplen el pla (si les dibuixem totes, no hi veurem res, tot serà el negre de la tinta).

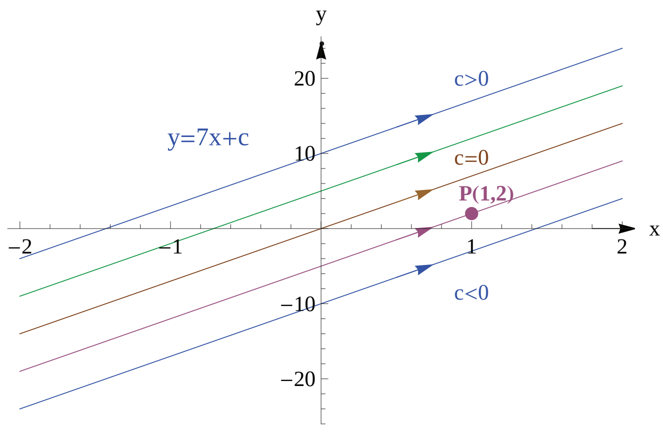



Fig. 1.6
Solució particular que passa per (1,2)

La solució particular que passa pel punt $(1,2)$ és la corba $y = 7x - 5$, que correspon a $c = -5$, com s'il·lustra a la figura 1.6.

Podem donar una *orientació* a cada corba solució en el sentit en què creix la $x$, és a dir, en el sentit en què són recorregudes les corbes, tal com les hem representat a la figura 1.6.

**Problema 4.** Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions derivables. Comproveu que l'equació diferencial associada a la família de corbes $y = Cf(x) + g(x)$ té la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ —lineal de primer ordre—, on $P(x)$ i $Q(x)$ són unes determinades funcions que només depenen de $x$.

**Resolució**

Derivem respecte de $x$ el feix de corbes uniparamètric

$$y = Cf(x) + g(x) \quad (1)$$

i n'obtenim

$$y' = Cf'(x) + g'(x) \quad (2).$$

De l'expressió $(1)$, aïllem el paràmetre $C$ i el substituïm en $(2)$:

$$C = \frac{y - g(x)}{f(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{f'(x)}{f(x)}\left[y - g(x)\right] + g'(x).$$

Ara convé escriure l'equació diferencial anterior en forma estàndard

$$y' - \frac{f'(x)}{f(x)}y = g'(x) - \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}.$$

Així, obtenim l'equació lineal de primer ordre

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

amb

$$P(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \ \text{ i } \ Q(x) = g'(x) - \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}.$$

**Problema 5.** Podem assegurar que el problema de Cauchy

$$\left(x^3 + 5\right)e^{x^2+3y} = y' - \cos(x + 2y), \ \text{ amb } \ y(-4) = 1,$$

té solució única?

**Resolució**

Escrivim l'equació en forma normal o estàndard $y' = f(x,y)$:

$$y' = \left(x^3+5\right) e^{x^2+3y} + \cos(x+2y).$$

En el nostre cas, $f(x,y) = (x^3+5)\, e^{x^2+3y} + \cos(x+2y)$. El domini de $f$ és $\mathbb{R}^2$. Observem que

- $f(x,y)$ és contínua en $\mathbb{R}^2$ perquè és suma, producte i composició de funcions contínues (polinòmica, exponencial i cosinus).
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3\,(x^3+5)\, e^{x^2+3y} - 2\sin(x+2y)$. Aquesta derivada parcial també és contínua en $\mathbb{R}^2$ perquè és suma, producte i composició de funcions contínues (polinòmica, exponencial i sinus). Aleshores, el teorema d'existència i unicitat ens assegura que existeix una única solució que passa per $(-4,1)$.

**Problema 6.** Sigui l'equació diferencial $y' = \dfrac{1}{y^8}$. Comproveu que per cada punt de la forma $(x_0,0)$ passa una única corba integral.

**Resolució**

L'equació diferencial $y' = \dfrac{1}{y^8}$ està escrita en la forma normal o estàndard $y' = f(x,y)$, essent $f(x,y) = \dfrac{1}{y^8}$. És clar que ni $f(x,y)$ ni $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ no són contínues en els punts de la forma $(x_0,0)$. Per tant, no podem aplicar-hi el teorema d'existència i unicitat i, doncs, a priori no podem assegurar res sobre la unicitat de les solucions.

Aleshores, hem de resoldre directament la nostra equació diferencial. A continuació, demostrem que, per a cada punt $(x_0,0)$, existeix una única solució de l'equació donada. En efecte, aquesta solució la podem trobar integrant directament:

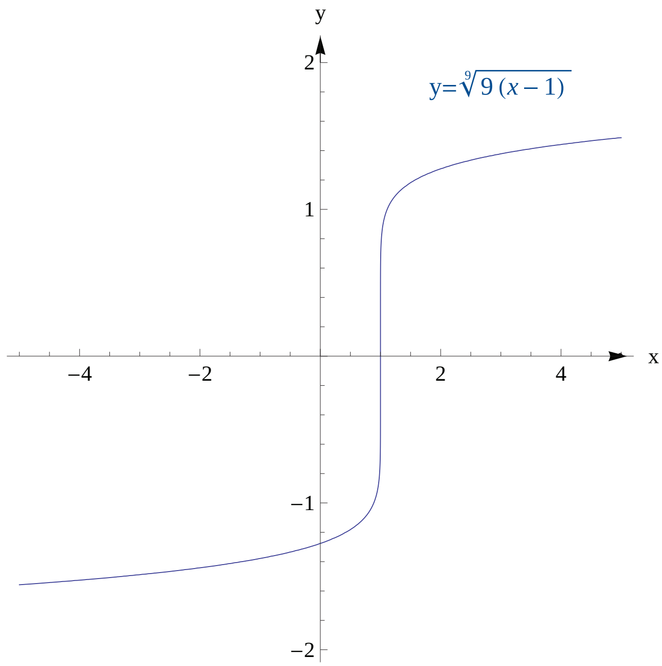
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^8} \implies \int y^8\, dy = \int dx + C \implies \frac{y^9}{9} = x + C.$$

Llavors, $y^9 = 9x + K$. Ara, imposant que la corba passi per $(x_0,0)$, tenim $K = -9x_0$. És a dir, $y^9 = 9x - 9x_0 = 9(x-x_0)$. Finalment, per aïllar la $y$, cal determinar-ne l'arrel d'ordre 9. Atès que 9 és senar, existeix una única arrel real d'ordre 9. Per tant, obtenim l'única solució que passa per $(x_0,0)$:

$$y = \sqrt[9]{9(x-x_0)}.$$

A la figura 1.7, podem veure la gràfica de la solució quan $x_0 = 1$.

Fig. 1.7
Solució particular que passa per (1,0)




**Problema 7.** Calculeu l'equació diferencial associada al feix de totes les circumferències del pla.

**Resolució**

Per determinar una circumferència qualsevol del pla, cal fixar-ne el centre $(a,b)$ i el radi $r$. És clar que no existeix cap lligam entre $a$, $b$ i $r$. L'equació d'aquest feix de corbes és triparamètrica:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

essent-ne $a$, $b$ i $c$ els tres paràmetres. Aleshores, l'equació diferencial corresponent té ordre 3. Per obtenir-la, cal derivar l'expressió del feix tres vegades i eliminar-ne els tres paràmetres. Partim de

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

Derivem l'equació (1) implícitament respecte de $x$ (és a dir, pensem $y=y(x)$) i simplifiquem

$$(x-a)+(y-b)y'=0. \tag{2}$$

Tornem a derivar implícitament dos cops més respecte de $x$:

$$1+(y')^2+(y-b)y''=0. \tag{3}$$

$$3y'y''+(y-b)y'''=0. \tag{4}$$

Observem els tres paràmetres dins del sistema de les quatre equacions obtingudes. L'equació (1) és l'única que conté $r$ perquè en derivar la primera vegada ja s'ha eliminat sol. Al seu torn, el paràmetre $a$ és present a les equacions (1) i (2); ha desaparegut en fer-ne la segona derivada. En canvi, el paràmetre $b$ apareix en totes les equacions. Així, doncs, la millor estratègia per eliminar-los és treballar amb les equacions (3) i (4), ja que aquí només hi ha el paràmetre $b$. A més, notem que $b$ apareix en ambdues equacions dins el terme $(y-b)$. Per tant, és més còmode treballar amb $(y-b)$ que amb $b$ sola. De (3), tenim

$$y-b=-\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

Substituint a (4), aconseguim l'equació diferencial

$$3y'y''-\frac{1+(y')^2}{y''}y'''=0$$

o, equivalentment,

$$3y'(y'')^2=\left[1+(y')^2\right]y'''.$$

**Problema 8.** Esbrineu dues equacions diferencials diferents que admetin $y=x^4$ com a solució.

**Resolució**

Trobarem dues equacions d'ordre 1. Considerem les famílies de corbes

$$y=Cx^4 \quad \text{i} \quad y=x^4+K.$$

És clar que la solució donada, $y=x^4$, pertany a les dues famílies anteriors. En efecte, per al feix $y=Cx^4$, n'hi ha prou a prendre $C=1$ i, per al feix $y=x^4+K$, només cal seleccionar la constant $K=0$.

- Quina és l'equació diferencial associada a $y=Cx^4$? Per respondre aquesta qüestió, cal derivar l'expressió anterior i eliminar-ne el paràmetre. Tenim $y'=4Cx^3$. Atès que $C=yx^{-4}$, obtenim $y'=4yx^{-4}x^3$, és a dir,

$$y'=\frac{4}{x}y.$$

- Quina és l'equació diferencial associada a $y=x^4+K$? En aquest cas, derivem l'equació de la família de corbes i el paràmetre s'elimina sol: $y'=4x^3$.

Aleshores, donem les equacions diferencials diferents que hem trobat:

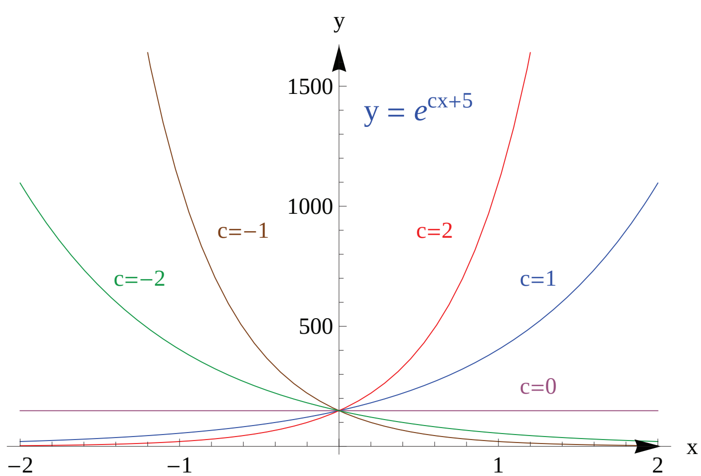
$$y'=\frac{4}{x}y \quad \text{i} \quad y'=4x^3.$$

**Problema 9.** Determineu la família de corbes ortogonals al feix $y = e^{cx+5}$.

**Resolució**

El primer pas és determinar l'equació diferencial associada al feix de corbes $y = e^{cx+5}$. A la figura 1.8, en tenim unes quantes, les corresponents als valors de $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

Fig. 1.8
Unes corbes de la família $y = e^{cx+5}$




Cal derivar l'equació del feix i eliminar-ne el paràmetre. D'una banda,

$$y = e^{cx+5} \quad \Longrightarrow \quad y' = ce^{cx+5}$$

i, de l'altra,

$$y = e^{cx+5} \quad \Longrightarrow \quad \ln y = cx + 5 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{\ln y - 5}{x}.$$

Ara substituïm la constant en l'equació derivada i l'eliminem:

$$y' = \frac{\ln y - 5}{x} \exp\left[\frac{\ln y - 5}{x} x + 5\right] \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{\ln y - 5}{x} y.$$

El segon pas és reemplaçar $y'$ per $\dfrac{-1}{y'}$ dins l'equació associada:

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}\left(\ln y - 5\right).$$

Així hem obtingut una nova equació diferencial, que correspon a la família de corbes ortogonal. Finalment, resolem aquesta nova equació diferencial. Observem que és de variables separables:

$$-x\,dx = y\left(\ln y - 5\right)dy \quad \Longrightarrow \quad -\int x\,dx = \int y\left(\ln y - 5\right)dy + C \quad \Longrightarrow$$

$$-\frac{x^2}{2} = \int y \ln y \, dy - 5 \int y \, dy + C.$$

Calculem per parts la primera integral del segon membre, $\int y \ln y \, dy$. Prenem $u = \ln y$ i $dv = y\,dy$. Aleshores, $du = \frac{1}{y}\,dy$ i $v = \frac{y^2}{2}$. Per tant,

$$\int y \ln y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \ln y - \int \frac{1}{2} y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{4} y^2.$$

Continuem amb els càlculs:

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} - \frac{5y^2}{2} + C.$$

Simplifiquem l'expressió anterior i n'obtenim el feix de corbes ortogonals:

$$x^2 + y^2 \left( \ln y - \frac{11}{2} \right) = -2C$$

és a dir,

$$x^2 + y^2 \left( \ln y - \frac{11}{2} \right) = K.$$

La figura 1.9 mostra la gràfica per a diferents valors de $C$.

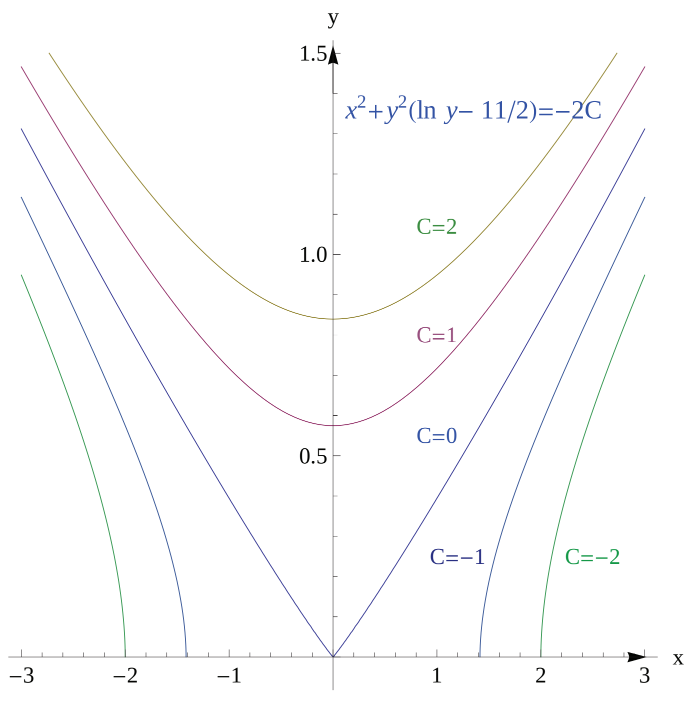



Fig. 1.9
Unes quantes corbes ortogonals a la família $y = e^{cx+5}$

**Problema 10.** Determineu la família de corbes ortogonals al feix definit per l'equació $x^4 + y^2 = c$, amb $c > 0$.

**Resolució**

Primer derivem i eliminem el paràmetre: $4x^3 + 2yy' = 0$.

Ara substituïm $y'$ per $\dfrac{-1}{y'}$ a l'expressió anterior:

$$4x^3 - 2\frac{y}{y'} = 0.$$

Reordenant aquesta darrera equació diferencial, n'obtenim

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x^3}.$$

Com que les variables ja estan separades, podem integrar directament:

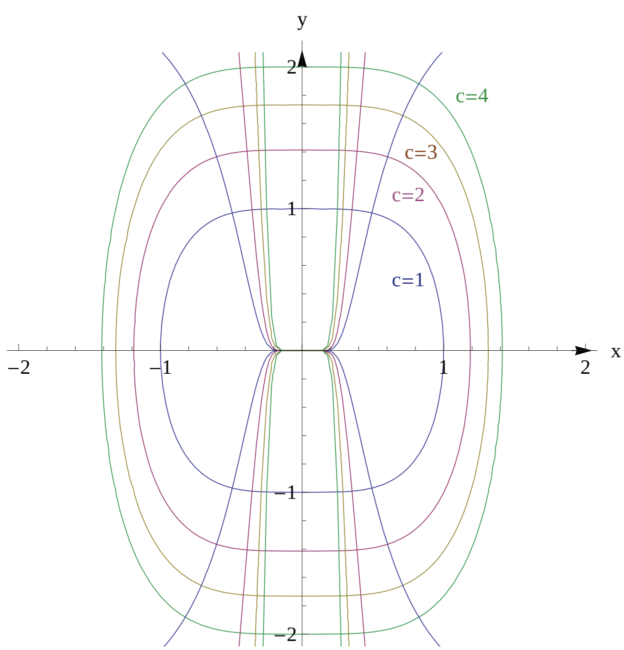
$$\ln|y| = \frac{x^{-2}}{-4} + C.$$

Aïllant la $y$, tenim:

$$y = ke^{-\frac{1}{4x^2}}.$$

A la figura 1.10, tenim dibuixades unes corbes representatives d'ambdues famílies de corbes ortogonals.

Fig. 1.10
Famílies de corbes ortogonals



**Problema 11.** Les corbes equipotencials i les línies de força d'un camp elèctric formen famílies de trajectòries ortogonals. Trobeu les línies de força del camp elèctric corresponents a les corbes equipotencials $\cos y = ae^{-x}$.

**Resolució**

Es tracta de trobar la família de corbes ortogonals a $\cos y = ae^{-x}$.

Derivant aquesta darrera equació i simplificant una mica, s'obté $y' \sin y = ae^{-x}$. O, equivalentment, $y' \sin y = \cos y$. Ara hem de canviar $y'$ per $\dfrac{-1}{y'}$. És a dir, l'equació que s'ha de resoldre per obtenir les línies de força del camp elèctric és

$$\frac{\sin y}{\cos y} = -y'.$$

Posant $y' = \dfrac{dy}{dx}$, és clar que, en aquesta equació, les variables es poden separar:

$$dx = -\frac{\cos y}{\sin y}dy.$$

Integrant a les dues bandes de la igualtat anterior, obtenim

$$-x + c = \ln|\sin y|,$$

d'on

$$\sin y = ke^{-x}.$$

Finalment, aïllant $y$, tenim

$$y = \arcsin\left(ke^{-x}\right).$$

Observem que la família de corbes definida per $\cos y = ae^{-x}$ només té sentit quan $-1 \leq ae^{-x} \leq 1$. De la mateixa manera, la família ortogonal que hem trobat té sentit quan es compleix una condició anàloga.

A la figura 1.11, tenim dibuixades ambdues famílies de corbes per a uns quants valors: $a = k = 1, 2, 3, 4$.

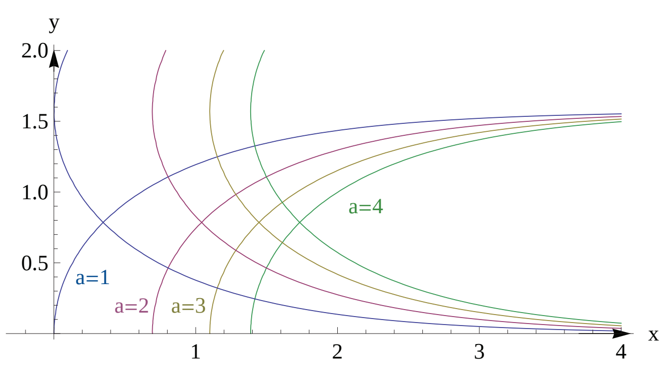



Fig. 1.11
Famílies de corbes ortogonals

## 1.2. Problemes proposats

**1.** Comproveu si les funcions donades són solucions de les equacions diferencials proposades.

a) $y = x^x$ és solució de $y' - y = y \ln x$?

b) $y = e^{-2x} \cos 3x$ és solució de $y'' + 4y' + 13y = 0$?

c) $y = \left(\dfrac{2+x}{x}\right)^x$ és solució de $y' - y \ln \dfrac{2+x}{x} = \dfrac{2y}{2+x}$?

**2.** Esbrineu les equacions diferencials associades als feixos de corbes següents:

a) Les rectes de pendent 1.
b) La família de circumferències de radi fix $R$ i centre arbitrari.
c) El feix d'exponencials $y = Ke^{3x}$.
d) Totes les circumferències del pla.

**3.** Esbosseu els camps de direccions determinats per les equacions diferencials següents. Dibuixeu-ne l'orientació positiva (en el sentit en què avança la $x$).

a) $y' = \dfrac{y}{x}$.

b) $y' = \dfrac{-y}{x}$.

c) $y' = \dfrac{-x}{y}$.

**4.** Podem assegurar que el problema de Cauchy

$$y' = \frac{x + e^{4x}}{3x^2 + y^2 + 7}, \quad \text{amb} \quad y(1) = -1,$$

té solució única?

**5.** Considereu l'equació diferencial $yy' = 3x^5$. Utilitzeu les funcions $y_1 = x^3$ i $y_2 = -x^3$ per comprovar que no hi ha unicitat de solucions en $(0,0)$. S'hi pot aplicar el teorema d'existència i unicitat de solucions? Per què?

**6.** Trobeu l'equació associada a cadascuna de les famílies de corbes següents i feu un esbós de les seves gràfiques. Quants paràmetres té cada feix?

a) Les circumferències tangents a l'eix d'ordenades a l'origen.
b) Les circumferències que passen per l'origen.

**7.** Calculeu l'equació diferencial associada a la família de totes les circumferències que passen per l'origen.

**8.** Siguin $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$ funcions prou derivables. Comproveu que l'equació diferencial associada a la família de corbes biparamètrica $y = C_1 f(x) + C_2 g(x) + h(x)$ té la forma $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ —lineal de segon ordre—, essent $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ unes funcions determinades que només depenen de $x$.

**9.** Dibuixeu la família de rectes que passen per l'origen de coordenades. Dibuixeu la família de circumferències centrades a l'origen de coordenades. Formen trajectòries ortogonals?

**10.** Determineu les trajectòries ortogonals de les famílies de corbes següents:

a) Les circumferències centrades a l'origen.
b) Les el·lipses $x^2 + 3y^2 = K$.
c) Les paràboles $y^2 = -2x + C$.

**11.** Deduïu si són ortogonals o no cadascuna de les parelles de corbes següents:

a) $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ i $3y^2 - x^2 = C$.
b) $yx^3 = K$ i $x^2 + 3y^2 = C$.
c) $y + \ln|y - x - 2| = C$ i $y = x + Ke^{-x}$.

## 1.3. Breu resum teòric

**Teorema d'existència i unicitat**

Sigui l'equació diferencial $y' = f(x,y)$, on $f(x,y)$ té un cert domini $D \subset \mathbb{R}^2$. Suposem que

- $f(x,y)$ és contínua en $D$ i
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ és contínua en $D$.

Aleshores, per a cada $(x_0, y_0) \in D$, existeix una única solució de l'equació diferencial tal que $y(x_0) = y_0$ (és a dir, satisfà la condició inicial o problema de Cauchy).

**Equació diferencial associada a una família o feix de corbes**

Sigui el feix de corbes uniparamètric

$$\varphi(x,y,c) = 0 \quad (1).$$

Derivem $(1)$ respecte de $x$ i n'obtenim una equació en la forma

$$\phi(x,y,y',c) = 0 \quad (2).$$

Clarament, la família $(1)$ satisfà l'equació $(2)$, però encara hi ha el paràmetre. A continuació, eliminem el paràmetre $c$ de $(1)$ i $(2)$, i n'obtenim l'equació diferencial

$$F(x,y,y') = 0$$

de la qual $(1)$ és la solució.

Si el feix de corbes té $k$ paràmetres, seguim el procés anterior, però derivem $k$ vegades l'equació del feix multiparamètric i n'eliminem els $k$ paràmetres.

**Trajectòries ortogonals**

Per determinar la família de corbes ortogonals a una altra donada, seguim l'esquema següent:

Donem la família $\Phi(x,y,c) = 0$

$\Downarrow$

en trobem l'equació diferencial associada : $F(x,y,y') = 0$

$\Downarrow$

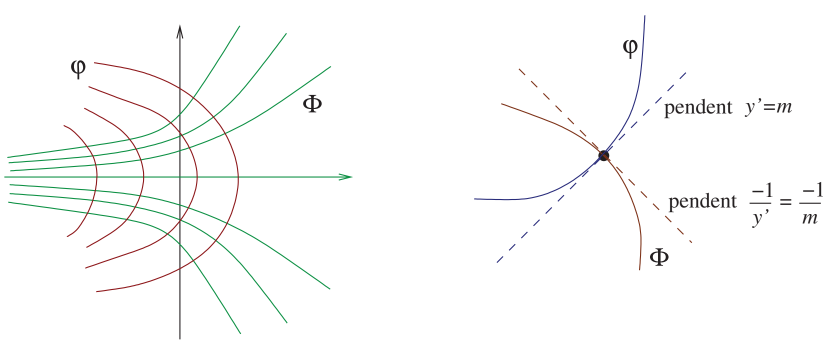
substituïm $y'$ per $\dfrac{-1}{y'}$ : $F(x,y,-\dfrac{1}{y'}) = 0$

$\Downarrow$

integrem la nova equació diferencial i n'obtenim l'altre feix $\varphi(x,y,k) = 0$.

Aquesta idea s'il·lustra a la figura 1.12.

Fig. 1.12
Feixos de corbes ortogonals. Pendents de les rectes tangents




2
1
3

# →2

# Equacions de primer ordre

## 2.1. Problemes resolts

**Problema 1.** Resoleu l'equació diferencial

$$y' = \frac{4x+2y-2}{2x+y+1}.$$

**Resolució**

Es pot veure que es tracta d'una equació diferencial del tipus $y' = f(ax+by+c)$. Concretament, $y' = f(2x+y)$. Aleshores, és convenient fer el canvi de variable $u = 2x+y$.

Derivant, obtenim $u' = 2+y'$. Substituint a l'equació, s'obté:

$$u'-2 = \frac{2u-2}{u+1}.$$

Aquesta equació és de variables separables. Per separar-les, només cal operar una mica:

$$u' = \frac{2u-2}{u+1}+2 = \frac{4u}{u+1}.$$

I, per tant,

$$\frac{u+1}{u}du = 4\,dx. \tag{*}$$

Integrant a ambdues bandes de la igualtat, s'obté

$$u+\ln|u| = 4x+C.$$

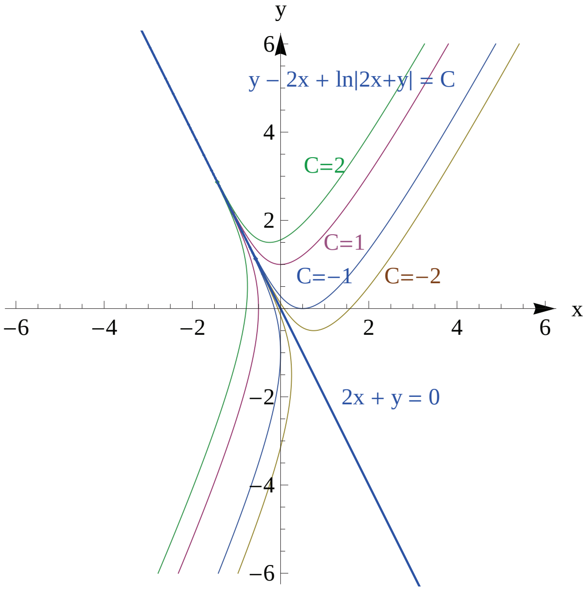
Finalment, hem de desfer el canvi de variable

$$2x+y+\ln|2x+y| = 4x+C,$$

o, equivalentment,

$$y-2x+\ln|2x+y| = C.$$

Fig. 2.1
Solució general de
$y' = \dfrac{4x+2y-2}{2x+y+1}$




Observem que a l'equació (*) hem dividit per $u$. És a dir, per $2x+y$. Ens hem de preguntar si la recta $2x+y=0$ és solució de l'equació original o no. En aquest cas, es pot veure que sí que ho és. Per tant, la solució general és

$$y-2x+\ln|2x+y| = C \quad \text{i} \quad 2x+y=0.$$

La figura 2.1 en mostra la gràfica per a diferents valors de $C$.

**Problema 2.** Resoleu l'equació

$$\left(x^2+\frac{y}{x}\right)dx+\left(\ln x+2y\right)dy = 0,$$

suposant que $x>0$.

**Resolució**

És fàcil veure que es tracta d'una equació diferencial exacta. Si denotem $M(x,y) = x^2 + \frac{y}{x}$ i $N(x,y) = \ln x + 2y$, és clar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Per trobar la solució, integrem, per exemple, $M(x,y)$ respecte de $x$:

$$\Phi(x,y) = \int \left(x^2 + \frac{y}{x}\right) dx + C(y) = \frac{x^3}{3} + y \ln x + C(y).$$

Ara, derivant aquesta darrera expressió respecte a $y$ i igualant el resultat amb $N(x,y)$, podem determinar $C(y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \ln x + C'(y) = \ln x + 2y = N(x,y).$$

Per tant, $C'(y) = 2y$ i, en conseqüència, $C(y) = y^2 + C$.

Finalment, la solució de l'equació diferencial serà

$$\frac{x^3}{3} + y \ln x + y^2 = k.$$

La figura 2.2 en mostra la gràfica per a diferents valors de $k$.

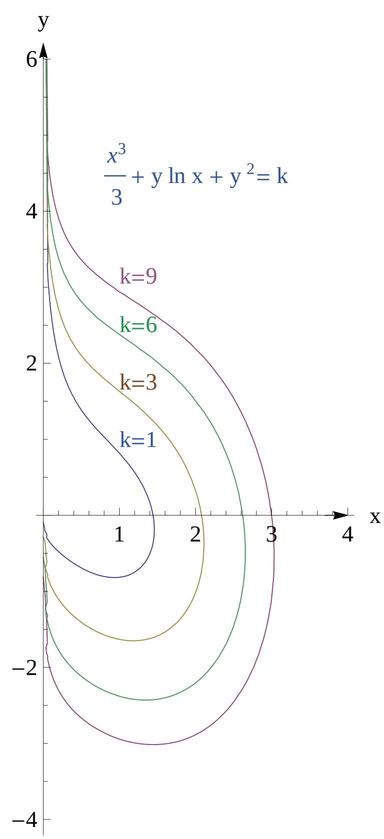



Fig. 2.2
Solució general de $\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)dx + (\ln x + 2y)dy = 0$

**Problema 2.** Determineu les trajectòries ortogonals a les circumferències que són tangents a l'eix d'abscisses en el punt $(0,0)$.

**Resolució**

Less circumferències que són tangents a l'eix d'abscisses en el punt $(0,0)$ tenen equació $x^2+(y-c)^2=c^2$, amb $c\in\mathbb{R}$.

L'equació anterior també es pot escriure com $x^2+y^2-2cy=0$. Si derivem aquesta darrera expressió, obtenim

$$x+yy'-cy'=0.$$

Si aïllem $c$, tenim

$$c=\frac{x+yy'}{y'}.$$

Ara, substituint $c$ a l'equació de les circumferències, obtindrem l'equació diferencial d'aquesta família de corbes:

$$x^2+y^2-2y\left(\frac{x+yy'}{y'}\right)=x^2-y^2-\frac{2xy}{y'}=0.$$

Ara hem de canviar $y'$ per $-1/y'$. D'aquesta manera, ens queda

$$x^2-y^2+2xyy'=0,$$

que és l'equació que hem de resoldre.

Si l'escrivim en forma diferencial, obtenim

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0.$$

Com es pot observar, és una equació homogènia, atès que les funcions que acompanyen tant $dx$ com $dy$ són homogènies de grau 2. Per resoldre-la, fem el canvi de variable $y=ux$. És a dir, $dy=xdu+udx$. Així, obtenim

$$(x^2-u^2x^2)dx+2x^2u(xdu+udx)=0.$$

Simplificant, l'equació anterior es redueix a

$$(1+u^2)dx+2uxdu=0,$$

que és de variables separables:

$$\frac{1}{x}dx=-\frac{2u}{1+u^2}du.$$

Integrant, obtenim

$$\ln|x| + C_1 = -\ln(1+u^2),$$

o, equivalentment,

$$\ln\left(|x|(1+u^2)\right) = C_2.$$

Prenent exponencials a ambdós costats de la igualtat i eliminant-ne el valor absolut, obtenim

$$x(1+u^2) = C,$$

essent $C \in \mathbb{R}$.

Finalment, desfent el canvi de variable, obtenim la família de corbes ortogonals que ens demanaven:

$$\frac{x^2+y^2}{x} = C \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 = Cx$$

o, escrita d'una altra manera, $(x-K)^2 + y^2 = K^2$.

És a dir, les corbes ortogonals a les circumferències que són tangents a l'eix d'abscisses a l'origen de coordenades són també circumferències: les que són tangents a l'eix de les ordenades a l'origen.

A la figura 2.3, tenim dibuixades ambdues famílies de corbes.

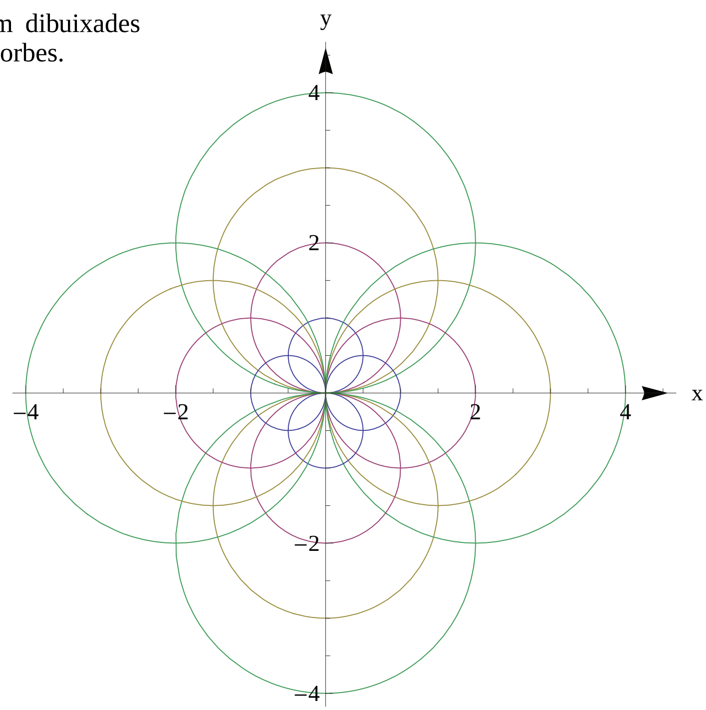



Fig. 2.3
Famílies de corbes ortogonals

**Problema 4.** Sigui l'equació diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ .

a) Què s'entén per factor d'integració d'una equació diferencial?

b) Deduïu la condició que han de satisfer les funcions $M(x,y)$ i $N(x,y)$ per tal que l'equació diferencial anterior tingui un factor d'integració que sigui funció de $z = z(x,y)$.

c) Com podem determinar-ne un d'aquests factors?

**Resolució**

a) Suposem que l'equació diferencial $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$ no és exacta. Una funció $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)\ dx + \mu(x,y)N(x,y)\ dy = 0$$

és exacta s'anomena *factor d'integració* o *factor integrant* de l'equació diferencial.

b) A continuació, estudiem les condicions que satisfan les funcions $M(x,y)$ i $N(x,y)$ perquè l'equació diferencial admeti un factor d'integració de la forma $\mu(z)$.

Si $\mu = \mu(z)$ és un factor d'integració de la nostra equació diferencial, aleshores

$$\mu(z)M(x,y)\ dx + \mu(z)N(x,y)\ dy = 0$$

és una equació exacta. Per tant,

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu(z)M(x,y)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\mu(z)N(x,y)\Big].$$

Així,

$$\mu'(z)\,\frac{\partial z}{\partial y}\,M + \mu(z)\,\frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}\,N + \mu(z)\,\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Llavors,

$$\mu'(z)\left[\frac{\partial z}{\partial y}M - \frac{\partial z}{\partial x}N\right] = \mu(z)\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right].$$

D'aquí,

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}M - \dfrac{\partial z}{\partial x}N}.$$

Atès que el membre de l'esquerra de la igualtat és funció de $z = z(x,y)$, el quocient de l'altra banda també ho ha de ser. Aquesta és, doncs, la condició demanada:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial y} M - \dfrac{\partial z}{\partial x} N} = F(z).$$

c) Observem que la funció $F(z)$ es pot calcular a partir de l'equació diferencial donada i de la funció $z(x,y)$ que triem. És a dir, el quocient

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = F(z)$$

és conegut. Tenim la funció $\mu(z)$ —la nostra incògnita— dins d'una equació diferencial de primer ordre molt senzilla. Podem prendre

$$\mu(z) = e^{\int F(z)\,dz}$$

com a factor d'integració. Observem que a la integral de $F(z)$ hem pres la constant d'integració nul·la, per comoditat.

**Problema 5**

a) Demostreu que tota equació diferencial ordinària lineal completa de primer ordre

$$y'(x) + P(x)y = Q(x)$$

admet un factor integrant que depèn de $x$.

b) Comproveu que l'equació diferencial

$$(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$$

admet un factor integrant que depèn de $x$ i integreu-la.

**Resolució**

a) Busquem un factor integrant $\mu$ que depèn de $x$: $\mu = \mu(x)$. Per fer-ho, escrivim l'equació *normalitzada*, en forma diferencial, i després la multipliquem per $\mu$:

$$\left[P(x)y - Q(x)\right]dx + dy = 0 \Longrightarrow \mu\left[P(x)y - Q(x)\right]dx + \mu dy = 0.$$

Perquè sigui exacta, cal que

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu \left[P(x)y - Q(x)\right]}{\partial y}$$

per tant, com que $\mu = \mu(x)$, tenim que

$$\mu' = \mu P(x) \Longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = P(x) \Longrightarrow \mu = e^{\int P(x)dx}.$$

b) L'equació $(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$ és lineal i, segons hem comprovat a l'apartat (a), admet un factor integrant $\mu(x)$.

Dividint per $x$, l'equació anterior es transforma en

$$\left(\frac{2y}{x} - 3\right)dx + dy = 0.$$

S'observa clarament que, en aquest cas, $P(x) = \frac{2}{x}$. Aleshores,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Per tant, podem escriure

$$(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0 \Longleftrightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y - 3x = 0.$$

O, equivalentment,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3.$$

Multiplicant pel factor integrant que hem trobat abans, s'obté

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 3x^2 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot y\right) = 3x^2.$$

Ara podem integrar a ambdues bandes de la igualtat (observeu que a l'esquerra tenim la derivada d'un producte de funcions):

$$x^2y = x^3 + c.$$

A la figura 2.4, podem veure la gràfica d'aquest feix de corbes per a diferents valors de la constant $c$.

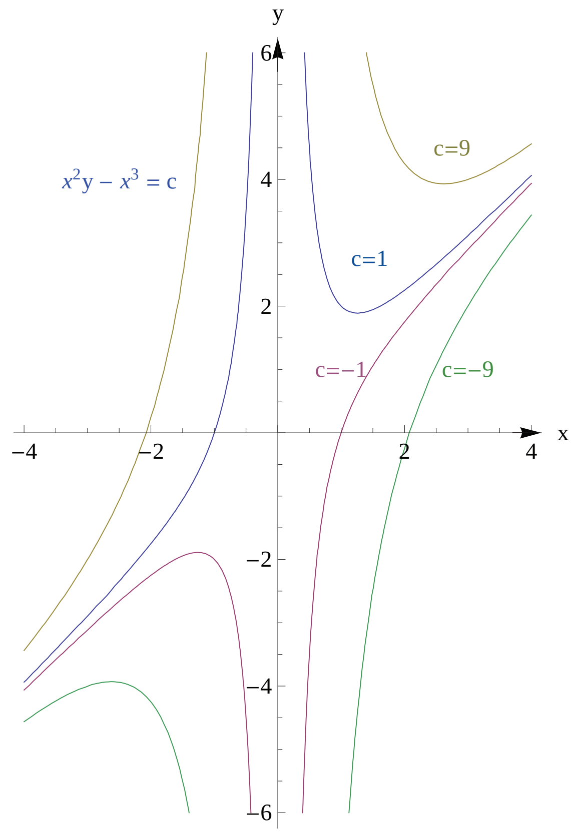



Fig. 2.4
Solucions de l'equació diferencial
$(2y-3x)\,dx + x\,dy = 0$

**Problema 6.** Resoleu l'equació diferencial

$$(x^2+2xy^2)\,dx - 2x^2y\,dy = 0$$

a partir d'un factor d'integració que sigui funció de $z = x+y^2$.

**Resolució**

Pel problema (4), sabem que, per tal que l'equació diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ admeti un factor d'integració funció de $z = z(x,y)$, s'ha de complir

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}M - \dfrac{\partial z}{\partial x}N} = F(z),$$

on $F(z)$ és una funció de $z$ que podem calcular.

En el nostre cas,

$$M(x,y) = x^2 + 2xy^2, \qquad N(x,y) = -2x^2y$$

i tenim

$$\begin{aligned}\frac{-4xy - 4xy}{2y(x^2+2xy^2)+2x^2y} &= \frac{-8xy}{4x^2y+4xy^3} = \frac{-8xy}{4xy(x+y^2)} = \\ &= \frac{-2}{x+y^2} = \frac{-2}{z} = F(z).\end{aligned}$$

Així, doncs, l'equació diferencial admet un factor integrant $\mu(z) = \mu(x+y^2)$. Calculem-lo:

$$\mu(z) = \exp\left[\int F(z)\,dz\right] = \exp\left[\int \frac{-2}{z}\,dz\right].$$

Prenem $\mu(z) = z^{-2} = \dfrac{1}{(x+y^2)^2}$. Multiplicant per aquest factor integrant, s'obté una nova equació diferencial, que és exacta:

$$\frac{x^2+2xy^2}{(x+y^2)^2}\,dx - \frac{2x^2y}{(x+y^2)^2}\,dy = 0.$$

Ara cal trobar una funció $\phi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{x^2+2xy^2}{(x+y^2)^2} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{-2x^2y}{(x+y^2)^2} & (2) \end{cases}$$

Integrem parcialment l'expressió (2) respecte de $y$ i obtenim

$$\phi(x,y) = x^2 \int \frac{-2y}{(x+y^2)^2}\,dy + f(x) = \frac{x^2}{x+y^2} + f(x).$$

Per conèixer $\phi(x,y)$, n'hi ha prou a calcular $f(x)$. D'una banda, derivem l'expressió de $\phi(x,y)$ que acabem d'obtenir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x(x+y^2) - x^2}{(x+y^2)^2} + f'(x) = \frac{x^2+2xy^2}{(x+y^2)^2} + f'(x).$$

D'altra banda, per (1),

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x^2+2xy^2}{(x+y^2)^2}.$$

Igualem ambdues expressions i queda

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = C.$$

Llavors,

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{x+y^2} + C.$$

Finalment, la solució de l'equació diferencial s'obté igualant $\phi(x,y)$ a una constant, és a dir,

$$\frac{x^2}{x+y^2} = k.$$

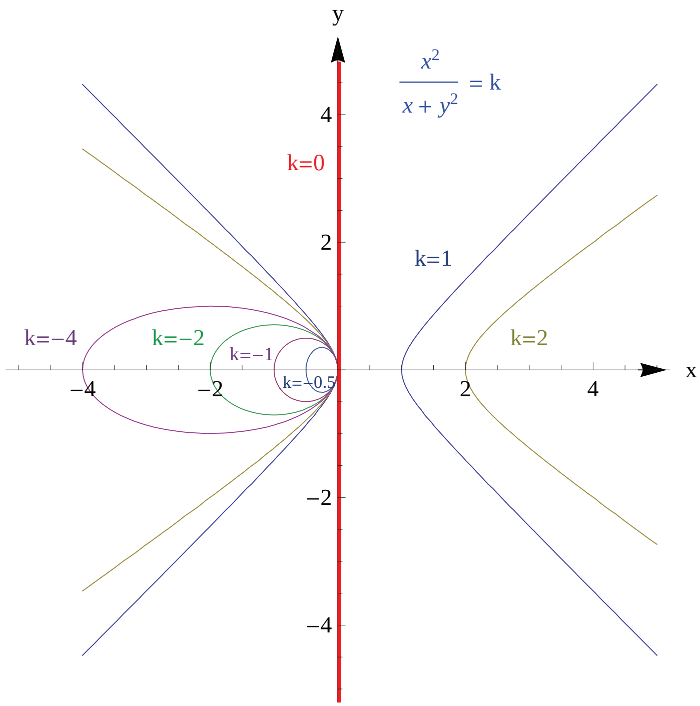



Fig. 2.5
Solucions de l'equació diferencial $(x^2+2xy^2)\,dx - 2x^2y\,dy = 0$

A la figura 2.5, podem veure la gràfica d'aquest feix de corbes per a diferents valors de la constant $k$. Observem que $k = 0$ correspon a l'eix $x = 0$. Si $k > 0$, les solucions són hipèrboles. Per a $k < 0$, les corbes integrals són el·lipses; en particular, $k = -1$ ens dóna una circumferència.

**Problema 7.** Sigui l'equació diferencial

$$(y^2 - xy)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

a) Determineu les funcions $N(x,y)$ tals que $\dfrac{1}{y}$ és un factor d'integració de l'equació anterior.
b) Calculeu $N(x,y)$ tal que $N(0,y) = y^3$.
c) Resoleu l'equació diferencial per aquesta $N(x,y)$ que heu trobat a l'apartat anterior.

**Resolució**

a) Si la funció $\dfrac{1}{y}$ és un factor d'integració de l'equació diferencial, aleshores la nova equació

$$\frac{1}{y}(y^2 - xy)\,dx + \frac{1}{y}N(x,y)\,dy = 0$$

ha de ser exacta. Diguem

$$\overline{M} = \frac{1}{y}(y^2 - xy) = y - x, \qquad \overline{N} = \frac{1}{y}N(x,y).$$

Així, s'ha de complir

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}.$$

En aquest cas,

$$1 = \frac{1}{y}\frac{\partial N}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y.$$

Integrem respecte de $x$ l'expressió anterior i n'obtenim les funcions demanades:

$$N(x,y) = xy + f(y),$$

on $f(y)$ és una funció arbitrària que només depèn de $y$.

b) Per trobar $N(x,y)$ tal que $N(0,y) = y^3$, només cal determinar la funció $f(y)$. Imposem la nostra condició a l'expressió $N(x,y) = xy + f(y)$ i obtenim

$$y^3 = 0 + f(y) \quad \Longrightarrow \quad f(y) = y^3.$$

Així, doncs, $N(x,y) = xy + y^3$.

c) Hem de resoldre l'equació $(y^2 - xy)\,dx + (xy + y^3)\,dy = 0$. Pel primer apartat, sabem que $\frac{1}{y}$ n'és un factor d'integració. Llavors,

$$(y - x)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$$

és una equació diferencial exacta. Volem calcular una funció $\Phi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y - x & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x + y^2 & (2) \end{cases}$$

Integrem (1) respecte de $x$ i obtenim

$$\Phi(x,y) = xy - \frac{x^2}{2} + g(y),$$

on $g(y)$ és una funció que només depèn de $y$. Per tant, la derivada parcial de $\Phi(x,y)$ respecte de $y$ és

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + g'(y).$$

Per (2), aquesta derivada parcial coincideix amb $x + y^2$. Igualem ambdues expressions de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$:

$$x + g'(y) = x + y^2 \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = y^2 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \frac{y^3}{3} + C,$$

on $C$ és una constant arbitrària. La funció $\Phi$ és, doncs,

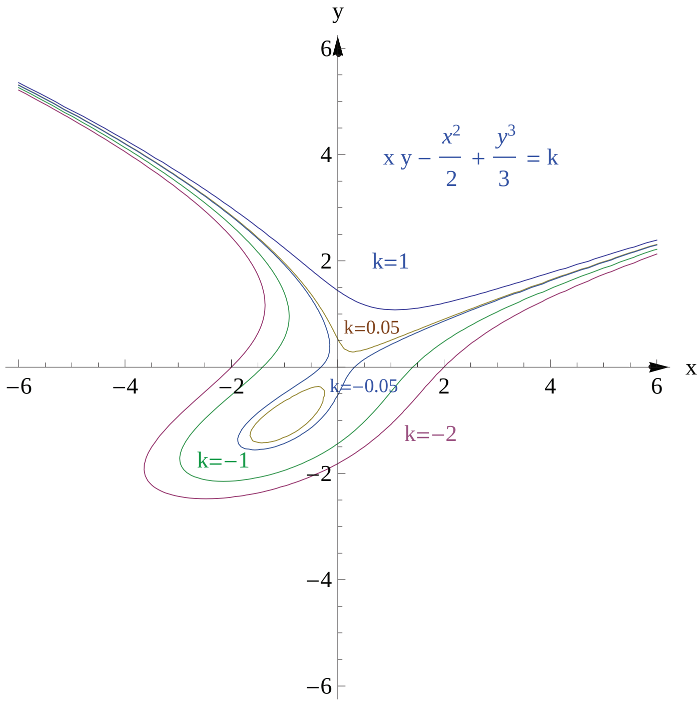
$$\Phi(x,y) = xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Finalment, la solució de l'equació diferencial és $\Phi(x,y) = \text{constant}$, és a dir,

$$xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = k.$$

A la figura 2.6, podem veure la gràfica d'aquest feix de corbes per a diferents valors de la constant $k$.

Fig. 2.6
Solucions de l'equació diferencial
$(y^2 - xy)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$




**Problema 8.** Resoleu l'equació diferencial $y' + \dfrac{y}{x} = 1$, amb la condició inicial $y(1) = 2$.

**Resolució**

És una equació diferencial lineal. La resoldrem pel mètode de variació de les constants. Sabem que la solució general de l'equació completa o no homogènia és la suma de la solució general de l'homogènia més una solució particular de la completa: $y = y_h + y_p$.

Primer considerem l'equació homogènia associada:

$$y' + \frac{y}{x} = 0,$$

que és de variables separables.

Reordenat convenientment, s'obté

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx.$$

La solució d'aquesta equació és $y_h = C/x$.

Ara busquem una solució particular de l'equació completa. Pensarem que aquesta solució particular és de la forma $y_p = \frac{C(x)}{x}$. Per determinar $C(x)$, hem d'imposar que $y_p$ satisfaci l'equació diferencial completa. És a dir,

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)/x}{x} = 1.$$

Simplificant, obtenim

$$\frac{C'(x)}{x} = 1.$$

Això vol dir que podem prendre $C(x) = x^2/2$. (No hi afegim cap constant, atès que només ens interessa *una* solució particular.) Així doncs, $y_p = \dfrac{x}{2}$. Per tant, la solució general és

$$y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}.$$

Si ha de satisfer la condició inicial, ha de ser $C = 3/2$. Finalment, la solució del nostre problema és la corba

$$y = \frac{3}{2x} + \frac{x}{2}.$$

A la figura 2.7, en tenim la gràfica.

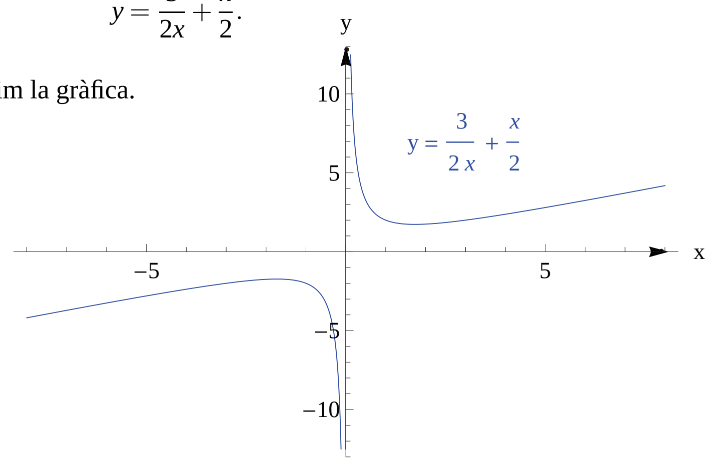



Fig. 2.7
Gràfica de la corba de solució de $y' + \frac{y}{x} = 1$, amb $y(1) = 2$

**Problema 9.** Resoleu l'equació $y' + 3 - \sqrt{3x + y - \pi} = 0$.

**Resolució**

Observem que l'equació no és separable, però es pot escriure com

$$y' = -3 + \sqrt{3x + y - \pi}.$$

Clarament, $y' = f(ax+by+c)$. Així, podem reduir l'equació a una de separable mitjançant el canvi $u = ax+by+c$. En el nostre cas, $u = 3x+y-\pi$. Tenim

$$u' = 3+y' \quad \Longrightarrow \quad y' = u'-3.$$

Apliquem el canvi a l'equació original i obtenim $u' = \sqrt{u}$, que és separable. Aleshores,

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx + c$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{u} = x+c \quad \Longrightarrow 4u = (x+c)^2.$$

Desfem el canvi i en resulta la solució de l'equació de partida

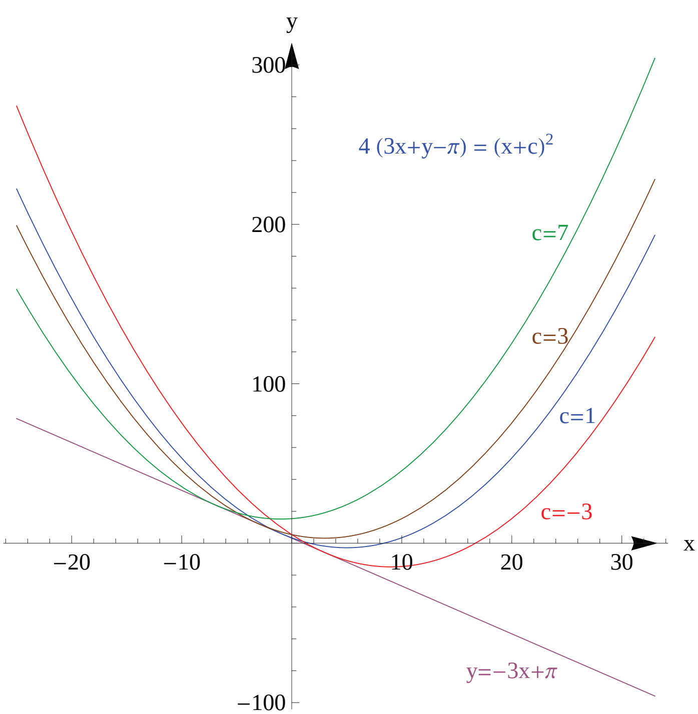
$$4(3x+y-\pi) = (x+c)^2.$$

Per acabar, observem que, en un dels passos de la resolució, hem dividit per $\sqrt{u}$. Llavors, hem d'estudiar si $u = 0$ (o, equivalentment, $3x+y-\pi = 0$) és una solució de l'equació diferencial. En efecte, si $u = 0$, aleshores $u' = 0$ i se satisfà la relació $u' = \sqrt{u}$. Per tant, la solució general demanada és

$$4(3x+y-\pi) = (x+c)^2 \quad \text{i} \quad y = -3x+\pi.$$

A la figura 2.8, podem veure la gràfica d'aquest feix de corbes per a diferents valors de la constant $c$.

Fig. 2.8
Solucions de l'equació diferencial
$y'+3-\sqrt{3x+y-\pi} = 0$



**Problema 10.** Resoleu l'equació $y'' + y' = x$.

**Resolució**

Tot i que aquesta equació diferencial és d'ordre 2, es pot reduir a una de primer ordre fent un petit canvi de variable $y' = z$, ja que no apareix la $y$. Aleshores l'equació serà

$$z' + z = x,$$

que és lineal. Resolem primer l'homogènia associada: $z' + z = 0$. La solució d'aquesta equació és $z_h = Ke^{-x}$.

Ara determinem una solució particular de la no homogènia pel mètode de variació de les constants: $z_p = K(x)e^{-x}$.

Derivant $z_p$ i substituint a l'equació $z' + z = x$, obtenim

$$K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = x.$$

O, equivalentment, $K'(x) = xe^x$. Integrant per parts aquesta darrera expressió, obtenim $K(x) = (x-1)e^x$ i, per tant, $z_p = x - 1$.

La solució general de l'equació diferencial $z' + z = x$ és $z = Ke^{-x} + x - 1$. I la solució del nostre problema la trobem integrant $z$ respecte a $x$:

$$y = C_1 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

A la figura 2.9, podem veure la gràfica d'aquest feix de corbes per a diferents valors de les constants $C_1$ i $C_2$.

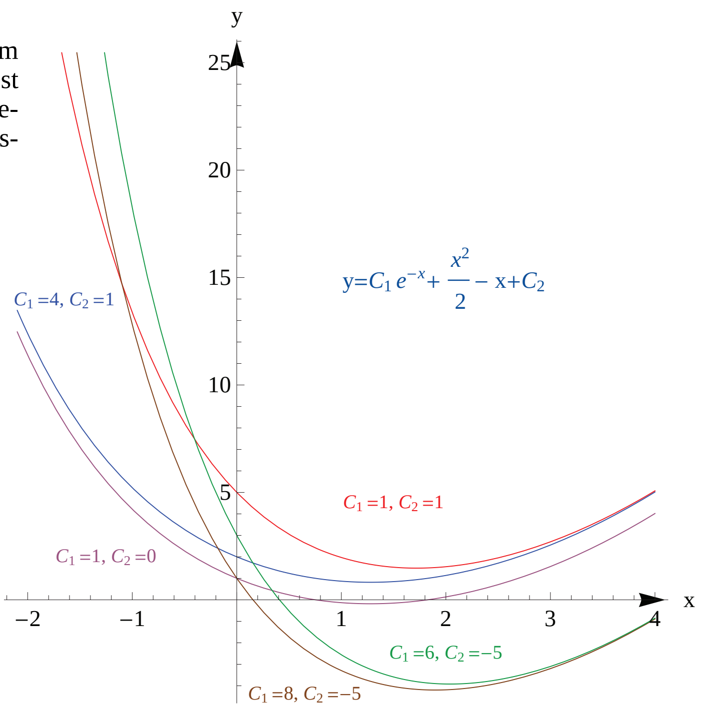



Fig. 2.9
Solucions de l'equació diferencial $y'' + y' = x$

**Problema 11.** Calculeu la velocitat d'escapament de la Terra.

**Resolució**

Quan es llança un satèl·lit amb la intenció que s'escapi de la gravetat de la Terra, l'única component que s'ha d'examinar és la vertical. Considerem $z(t)$ l'altura de l'objecte respecte de la superfície terrestre en el moment $t$. Siguin: $m$ la massa del satèl·lit, $M$ la massa de la Terra, $R$ el radi mitjà de la Terra i $G$ la constant universal de gravitació. Si negligim els efectes de fregament, aleshores la llei de la gravitació universal ens dóna

$$mz'' = -\frac{mMG}{(z+R)^2}.$$

Observem que en aquesta equació diferencial no apareix la variable independent $t$. Podem reduir-la a una equació de primer ordre mitjançant el canvi $v = z'$. Apliquem la regla de la cadena i n'obtenim

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz}v$$

Així, doncs, escrivim la nostra equació de la forma

$$\frac{dv}{dz}v = -\frac{MG}{(z+R)^2}, \quad \text{amb} \quad v(0) = v_0.$$

Això és una equació separable en $v$ i $z$. Es pot integrar sense dificultat:

$$\int v\,dv = -\int \frac{MG}{(z+R)^2}\,dz + C$$

i tenim

$$\frac{v^2}{2} = \frac{MG}{z+R} + C.$$

Hi imposem la condició inicial $v(0) = v_0$ i en determinem la constant d'integració: $C = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{MG}{R}$. Aleshores,

$$v^2(z) = v_0^2 - \frac{2MG}{R} + \frac{2MG}{z+R}. \qquad (*)$$

Si manipulem l'expressió anterior de manera adequada, n'obtenim la conservació de l'energia:

$$E_0 = v_0^2 - \frac{2MG}{R} = v^2 - \frac{2MG}{z+R} = E_z,$$

és a dir, l'energia inicial –a la superfície de la Terra– és igual a l'energia en qualsevol punt. De l'expressió $(*)$, veiem que, per tal que $v(z)$ sigui sempre positiva i, per tant, el satèl·lit escapi de la gravetat de la Terra, és necessari que $v_0^2 - \frac{2MG}{R} \geq 0$, és a dir,

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2MG}{R}}.$$

Aquesta velocitat que ens apareix

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{R}}$$

rep el nom de *velocitat d'escapament*. En conseqüència, perquè el nostre objecte escapi de l'atracció terrestre, tan sols cal que la seva velocitat inicial sigui igual o superior a la velocitat d'escapament. En el cas de la Terra, aquest valor és $v_{esc} = 11'18$ km/s.

A més, com que

$$\frac{dz}{dt} = v = \left(v_0^2 - \frac{2MG}{R} + \frac{2MG}{z+R}\right)^{1/2},$$

si $v_0 > v_{esc}$, aleshores $\dfrac{dz}{dt}$ està fitada inferiorment per una constant positiva i el satèl·lit arribarà a l'infinit amb velocitat positiva; mentre que, si $v_0 = v_{esc}$, hi arribarà amb velocitat zero.

## 2.2. Problemes proposats

**1.** Resoleu l'equació

$$y' = \frac{3x+y+4}{3x+y}.$$

**2.** Integreu l'equació

$$\left(2x + \frac{3y}{x}\right)dx + (3\ln x + 3y^2)dy = 0.$$

**3.** Calculeu la solució general de l'equació $(9x+2y)dx - (2x+y)dy = 0$.

**4.** Resoleu l'equació $(1+x)dx + 2xydy = 0$ sabent que admet un factor integrant que és funció de $z = x + y^2$.

**5.** Integreu l'equació diferencial $y' - 2y = e^{2x}$.

**6.** Resoleu l'equació $-y\,dx + [x + (1-y)e^y]\,dy = 0$ a partir d'un factor d'integració que sigui funció de $z = x + e^y$.

**7.** Integreu

$$y' = 1 - x + \frac{y}{x}.$$

**8.** Esbrineu la solució general de

$$y' - y\tan x = \sin x.$$

**9.** Resoleu l'equació de segon ordre següent:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 4.$$

**10.** Integreu l'equació

$$y' + y = xy^2.$$

**11.** Sigui la família de corbes $y^3 - 3xy = C$.

a) Escriviu l'equació diferencial d'aquest feix de corbes en forma diferencial.
b) Trobeu l'equació diferencial del feix de corbes ortogonal en forma diferencial.
c) Esbrineu un factor integrant de l'equació diferencial de l'apartat (b) que sigui funció de $x$.
d) Escriviu l'equació exacta corresponent al factor anterior.
e) Doneu la solució de l'equació de l'apartat (d).
f) Del feix de corbes ortogonals a la família $y^3 - 3xy = C$, escriviu-ne la que passa pel punt $(0,1)$.

## 2.3. Breu resum teòric

**Tipus més rellevants d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre**

- *Equacions separables*: $g(y)\,dy = f(x)\,dx$.
- *Equacions homogènies*: $y' = f(x,y)$, on $f(x,y)$ és una funció homogènia de grau 0.

  També $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, on $M(x,y)$ i $N(x,y)$ són funcions homogènies del mateix grau.

  Recordem que una funció $f(x,y)$ s'anomena *homogènia de grau n en x i y* si $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.
- *Equacions exactes*: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, on

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y),$$

  per a una determinada funció $\phi(x,y)$.

- *Equacions lineals en $y$ i $y'$*: $y' + P(x)y = Q(x)$, on $P(x)$ i $Q(x)$ són funcions de $x$. En general, $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, on $a_0(x)$, $a_1(x)$ i $f(x)$ són funcions de $x$.
- *Equacions de Bernoulli*: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, on $P(x)$ i $Q(x)$ són funcions de $x$.
- *Equacions de Riccati*: $y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$, on $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$ són funcions de $x$.

### Factor integrant

Sigui $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ una equació diferencial no exacta. Una funció $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

sigui exacta s'anomena *factor d'integració* o *factor integrant* de l'equació diferencial.

### Equacions reductibles a equacions de primer ordre

- *Cas 1*: no apareix la $y$ (variable dependent). Fem el canvi

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \quad \text{i} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = p'.$$

- *Cas 2*: no apareix la $x$ (variable independent). Fem el canvi

$$y' = p \quad \text{i} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p.$$

### Taula amb les integrals immediates més usuals

| | |
|---|---|
| $\int f' \cdot f^r\,dx = \frac{f^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ | $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert + C$ |
| $\int f' \cdot e^f\,dx = e^f + C$ | $\int f' \cdot a^f\,dx = \frac{a^f}{\ln a} + C \quad (a \in (0,\infty)\setminus\{1\})$ |
| $\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f + C$ | $\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f + C$ |
| $\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f + C$ | $\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\text{cotg}\, f + C$ |
| $\int \frac{f'}{\sin f}\,dx = \ln\left\lvert \tan\frac{f}{2}\right\rvert + C$ | $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f + C$ |
| $\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f + C$ | $\int f' \cdot \cosh f\,dx = \sinh f + C$ |
| $\int f' \cdot \sinh f\,dx = \cosh f + C$ | $\int \frac{f'}{\cosh^2 f}\,dx = \text{tgh}\, f + C$ |
| $\int \frac{f'}{\sinh^2 f}\,dx = -\text{cotgh}\, f + C$ | $\int \frac{f'}{\sqrt{f^2+1}}\,dx = \arg\sinh f + C$ |
| $\int \frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}\,dx = \arg\cosh f + C$ | $\int \frac{f'}{1-f^2}\,dx = \arg\text{tgh}\, f + C$ |

→ 3

# Aplicacions

## 3.1. Problemes resolts

**Problema 1.** Esbrineu quina mena de corba és aquella en què totes les seves normals passen per un punt.

**Resolució**

Sigui $y = y(x)$ la nostra corba. Denotem per $(a,b)$ el punt per on passen totes les rectes normals a la corba. Considerem un punt qualsevol de la corba, $P = (x,y)$. Sabem que la recta tangent a $P$ té pendent $y'(x)$ i la recta normal —que és la que ens interessa— té pendent $\dfrac{-1}{y'(x)}$. Atès que totes les normals passen per $(a,b)$, es compleix

$$y - b = \frac{-1}{y'(x)}\,(x-a),$$

és a dir, $(y-b)y'(x) = -(x-a)$. Així, hem obtingut una equació diferencial de variables separables. L'escrivim de forma adequada:

$$(y-b)\,\frac{dy}{dx} = -(x-a)$$

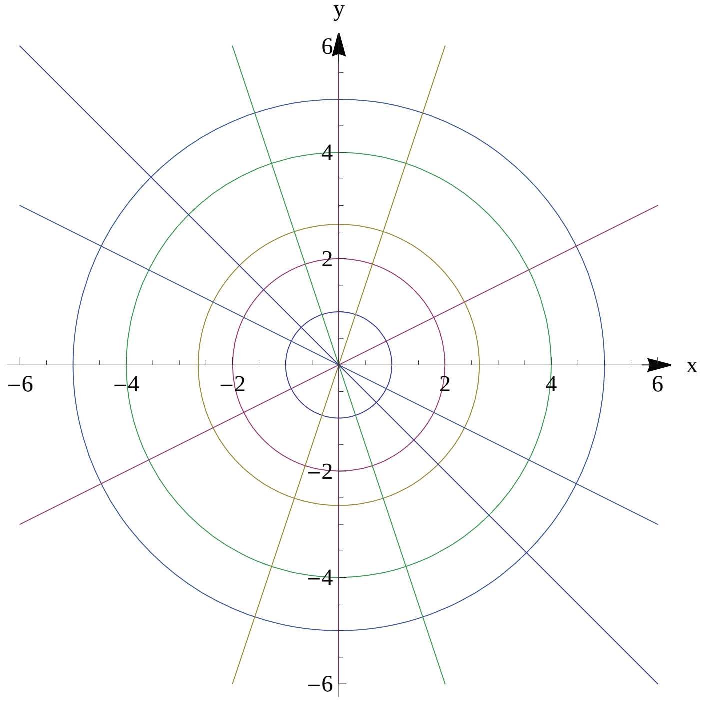
i separem les variables

$$(y-b)\,dy = -(x-a)\,dx.$$

La integrem

$$\int (y-b)\,dy = -\int (x-a)\,dx + C$$

Fig. 3.1
Circumferències centrades a l'origen i les seves normals




i n'obtenim

$$\frac{(y-b)^2}{2} = -\frac{(x-a)^2}{2} + C \iff (y-b)^2 = -(x-a)^2 + K$$

o, equivalentment,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = K.$$

Aquesta família de corbes correspon a les circumferències de centre $(a,b)$ i radi arbitrari $\sqrt{K}$. Gràficament, és molt fàcil veure que, en efecte, totes les normals a una circumferència passen per un punt fix, que és precisament el seu centre. A la figura 3.1, veiem les circumferències centrades a l'origen amb les normals corresponents.

**Problema 2.** Sigui una corba $y = f(x)$. Per a cada punt de la corba $(a,b)$, la recta tangent determina un segment comprès entre els eixos de coordenades. Suposem que el punt mitjà d'aquest segment és el mateix punt $(a,b)$. Determineu l'expressió de totes les corbes que satisfan aquesta propietat.

**Resolució**

La recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(a,b)$ és $y-b = f'(a)(x-a)$. Calculemne les interseccions amb els eixos de coordenades (en podem veure l'esquema a la figura 3.2).

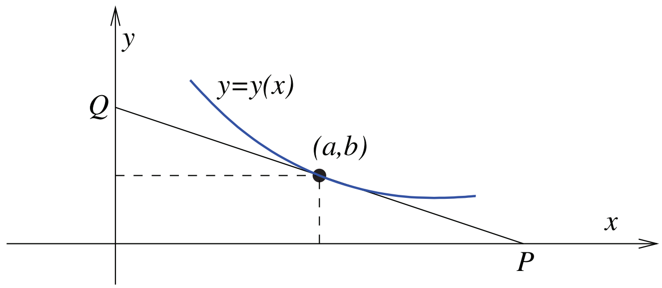



Fig. 3.2
Segment de la recta tangent comprès entre els eixos de coordenades

- Sigui $P$ el punt de tall amb l'eix $y=0$. Aleshores, l'abscissa $x$ compleix

$$-b = f'(a)(x-a) \Longrightarrow x = a - \frac{b}{f'(a)} = \frac{af'(a)-b}{f'(a)}.$$

- Sigui $Q$ el punt de tall amb l'eix $x=0$. Tenim que l'ordenada $y$ satisfà

$$y-b = f'(a)(-a) \Longrightarrow y = b - af'(a).$$

Així, doncs,

$$P = \left(\frac{af'(a)-b}{f'(a)}, 0\right), \quad Q = (0, b-af'(a)).$$

El punt mitjà del segment $PQ$ és

$$\left(\frac{af'(a)-b}{2f'(a)}, \frac{b-af'(a)}{2}\right).$$

Per hipòtesi, aquest punt coincideix amb $(a,b)$. Per tant, es compleix

$$\frac{af'(a)-b}{2f'(a)} = a, \quad \frac{b-af'(a)}{2} = b.$$

D'ambdues relacions, n'obtenim la mateixa condició: $a = \dfrac{-b}{f'(a)}$. Atès que $(a,b)$ és un punt de la corba $y=f(x)$, l'ordenada és $b=f(a)$. Aleshores, $a = \dfrac{-f(a)}{f'(a)}$. Escrivim aquesta condició per a un punt genèric $(x, y(x))$ de la corba i n'obtenim l'equació diferencial

$$x = \frac{-y(x)}{y'(x)}.$$

Ara cal resoldre-la. Separem-ne les variables: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-dx}{x}$. Observem que, en dividir per $x$ i per $y$, no perdem cap solució, ja que les tangents a $x=0$ o $y=0$ no determinen cap segment entre els eixos de coordenades. Així,

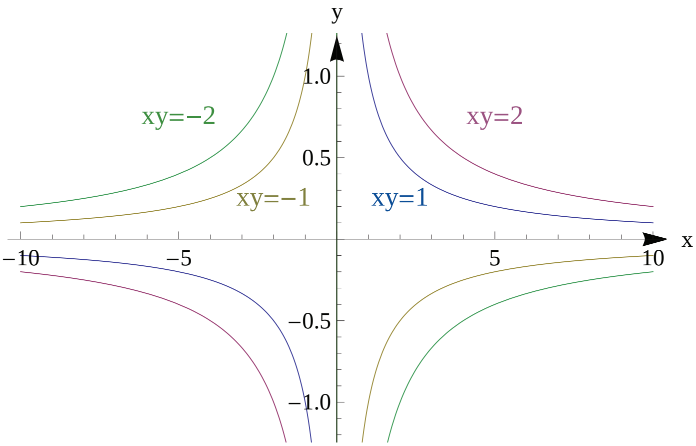



Fig. 3.3
Hipèrboles $xy = K$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1.$$

Prenem exponencials en ambdós cantons i n'obtenim $|y| = C_2|x|^{-1}$. Llavors, $y = \pm C_2 x^{-1}$, d'on $y = Kx^{-1}$. Clarament, segons hem comentat abans, $K \neq 0$. Les corbes demanades són, doncs, les hipèrboles $xy = K$. Si $K > 0$, hi ha dues branques, una al primer quadrant i l'altra al tercer. Si $K < 0$, les branques es troben al segon i al quart quadrants. A la figura 3.3, podem observar-ne uns exemples concrets.

**Problema 3.** Segons la llei d'acció de masses de Guldberg–Waage, la velocitat d'una reacció, és a dir, la quantitat de substància obtinguda o transformada per unitat de temps, és proporcional al producte de les quantitats de substàncies que reaccionen en cada moment. Suposem que es combinen 60 grams d'una determinada substància A amb 30 grams d'una altra substància B per formar–ne un compost C. Suposem que, perquè es formin $X$ grams de C, es necessiten tres parts de A i dues de B. Determineu la quantitat de substància C que hi ha en funció del temps. Quina quantitat màxima de substància C s'obtindrà?

**Resolució**

Anomenem $x(t)$ la quantitat de C en cada moment del temps. En un instant qualsevol del temps, les quantitats de substàncies A i B són, respectivament,

$$60 - \frac{3}{5}x(t) \quad \text{i} \quad 30 - \frac{2}{5}x(t).$$

Aleshores, aplicant de llei de Guldberg–Waage, s'obté l'equació següent:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(60 - \frac{3}{5}x(t)\right)\left(30 - \frac{2}{5}x(t)\right),$$

on $k$ és la constant de proporcionalitat.

En aquest cas, tot i que l'enunciat no ho diu, és clar que s'ha de complir la condició inicial $x(0) = 0$.

L'equació diferencial anterior es pot reescriure com

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{25}k(100-x)(75-x), \quad k>0.$$

És una equació amb variables separables:

$$\frac{dx}{(x-100)(x-75)} = \frac{6}{25}kdt.$$

Integrant, n'obtenim

$$\ln\frac{x-100}{x-75} = 6kt + C_1.$$

Si eliminem el logaritme, tenim

$$\frac{x-100}{x-75} = C_2 e^{6kt}.$$

Imposant la condició inicial, obtenim $C_2 = 4/3$.

És possible aïllar $x$ en funció de $t$. Fent uns quants càlculs, s'obté

$$x = 300\frac{1-e^{6kt}}{3-4e^{6kt}}.$$

Si fem el límit quan $t \to \infty$, com que $k > 0$, obtenim $x = 75$ grams. Aquesta és la quantitat màxima de substància C que es pot obtenir i equival a utilitzar els 30 grams de B que teníem inicialment. Aleshores, quedaran sense reaccionar 15 grams de la substància A. A la figura 3.4, en podem veure l'evolució quan $k = \frac{1}{4}$.

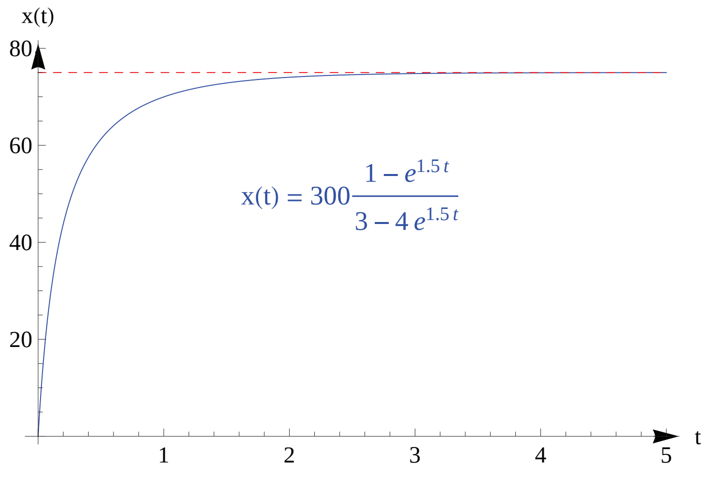



Fig. 3.4
Evolució de $x(t)$ quan $k = \frac{1}{4}$

**Problema 4.** Calculeu el temps de buidatge d'un dipòsit semiesfèric de radi $R$ que té un petit forat d'àrea $a$ al pol sud (vegeu la figura 3.5).

**Resolució**

Per la llei de Torricelli, sabem que l'equació diferencial que regeix el buidatge del dipòsit és

$$A(y)\,\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

La condició inicial ens diu que, per al temps $t = 0$, el dipòsit és ple d'aigua, és a dir, $y(0) = R$. Cal determinar l'àrea de la secció transversal $A(y)$. Atès que es tracta d'un disc de radi $r$, l'àrea és $A(y) = \pi r^2$ (com il·lustra la figura 3.5).

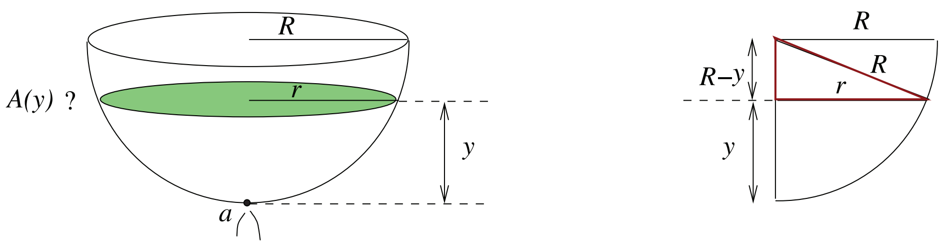



Fig. 3.5
Talls del dipòsit semiesfèric de radi R

Aplicant-hi el teorema de Pitàgores, resulta

$$r^2 = R^2 - (R-y)^2 = 2Ry - y^2.$$

Aleshores,

$$A(y) = \pi r^2 = \pi(2Ry - y^2).$$

L'equació diferencial esdevé

$$\pi\left(2Ry - y^2\right)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy},$$

que és separable. L'escrivim de forma adient

$$\left(2Ry^{1/2} - y^{3/2}\right)dy = -\frac{a}{\pi}\sqrt{2g}\,dt.$$

Integrem ambdós membres

$$\int (8y^{1/2} - y^{3/2})\,dy = -\int \frac{a\sqrt{2g}}{\pi}\,dt + C$$

i en deduïm que

$$\frac{4R}{3}y^{3/2}-\frac{2}{5}y^{5/2}=-\frac{a}{\pi}\sqrt{2g}\,t+C.$$

Imposem la condició inicial $y(0)=R$, per determinar-ne la constant d'integració

$$C=\frac{4R}{3}R^{3/2}-\frac{2}{5}R^{5/2}=\frac{14}{15}R^{5/2}.$$

Finalment, calculem el temps en què $y(0)=0$ (el dipòsit és buit):

$$0=-\frac{a}{\pi}\sqrt{2g}\,t+\frac{14}{15}R^{5/2}.$$

Concloem que el temps de buidatge és

$$t=\frac{14\,\pi\,R^{5/2}}{15\,a\,\sqrt{2g}}.$$

**Problema 5.** Un dipòsit cilíndric de radi $0'5$ i altura 2 està col·locat horitzontalment i ple d'aigua fins dalt. Calculeu el temps que triga a buidar-se si li fem un forat d'àrea $a$ al fons.

**Resolució**

Sigui $y$ l'altura del nivell d'aigua en cada moment. La secció transversal del dipòsit és un rectangle de costats 2 i $2r$, com es veu a la figura 3.6. L'àrea d'aquest rectangle és $4r$. Volem escriure l'àrea en funció de l'altura de l'aigua: $S(y)$.

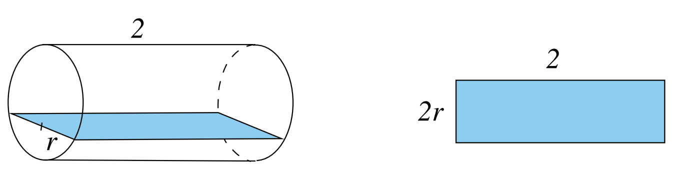



Fig. 3.6
Esbós del dipòsit cilíndric i de la superfície del nivell de l'aigua

En qualsevol tall paral·lel a la cara circular del dipòsit, tenim la secció de la figura 3.7. Pel teorema de Pitàgores,

$$r=\sqrt{y-y^2}.$$

Per tant, la secció que volíem és $S(y)=4\sqrt{y-y^2}$.

Aleshores, l'equació diferencial del buidatge del dipòsit serà

$$4\sqrt{y-y^2}\,\frac{dy}{dt}=-a\sqrt{2g}\sqrt{y}.$$

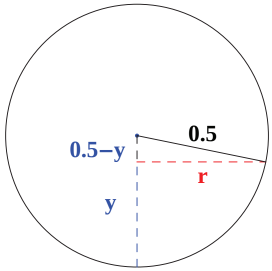



Fig. 3.7
Secció del dipòsit

L'equació anterior és equivalent a

$$4\sqrt{y}\sqrt{1-y}\,\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2g}\sqrt{y}.$$

La funció constant $y = 0$ és solució de l'equació diferencial però, evidentment, no és la solució que busquem. Per tant, podem simplificar l'equació i n'obtenim

$$4\sqrt{1-y}\,\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2g}.$$

Separant les variables, ens queda

$$4\sqrt{1-y}\,dy = -a\sqrt{2g}\,dt.$$

Si integrem als dos membres de la igualtat, tenim

$$-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2} = -\frac{a\sqrt{2g}}{4}\,t + C.$$

Imposem que, per a $t = 0$, l'altura sigui 1 ($y = 1$) i determinem $C = 0$.

Per tant, l'equació que relaciona l'altura de la columna d'aigua amb el temps en el buidatge d'aquest dipòsit és

$$(1-y)^{3/2} = \frac{3a\sqrt{2g}}{8}t.$$

Trobem el temps que triga a buidar-se fent $y = 0$ a l'equació anterior:

$$t = \frac{8}{3a\sqrt{2g}}.$$

**Problema 6.** Un pastís de verdures de 2 kg, inicialment a 10°C, es posa al forn a 270°C a les 11 hores 45 min. A les 12 hores 5 min la temperatura del pastís és de 90°C. A quina hora estarà a 120°C?

**Resolució**

Per resoldre el problema, apliquem la llei de Newton del refredament i establim l'equació diferencial que governa la dinàmica de la temperatura,

$$\frac{dT}{dt} = k(270 - T).$$

Considerem l'hora 11 hores 45 min equivalent al temps inicial $t = 0$ en el "rellotge del laboratori", com s'il·lustra a la figura 3.8.

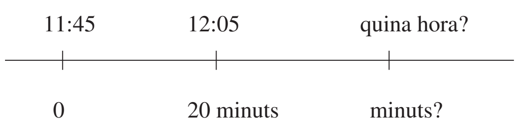



Fig. 3.8
Equivalència entre el rellotge del laboratori i l'hora real

Aleshores, $T(0) = 10$ i volem esbrinar el temps $t$ tal que $T(t) = 120$. Integrem l'equació diferencial

$$\int \frac{dT}{270 - T} = \int k dt + C \implies -\ln(270 - T) = kt + C,$$

d'on

$$270 - T = C_1 e^{-kt}.$$

Si imposem la condició inicial $T(0) = 10$, n'obtenim la constant d'integració $C_1 = 260$ i, per tant,

$$T(t) = 270 - 260e^{-kt}.$$

Amb la segona condició, $T(20) = 90$, podem determinar la constant de proporcionalitat $k = 0'0184$. Així, la funció temperatura queda

$$T(t) = 270 - 260e^{-0'0184t}.$$

Ara volem el temps $t$ tal que $120 = 270 - 260e^{-0'0184t}$. Obtenim $t = 29'9$ minuts i, doncs, tindrem el pastís a 120°, aproximadament, a les 12 hores 15 minuts.

**Problema 7.** En un recipient que inicialment contenia 25 litres d'aigua pura s'hi introdueixen 2 litres d'aigua salada cada hora. La concentració de sal a l'aigua que hi entra és proporcional al temps. Al mateix temps, del recipient en surt 1 litre de líquid per hora. Suposant que la barreja d'aigua i sal es manté uniforme, determineu la quantitat de sal que hi ha al recipient en funció del temps.

**Resolució**

Denotem per $x(t)$ la quantitat de sal al recipient en funció del temps. La variació d'aquesta magnitud ve donada per

$$\frac{dx}{dt} = r_1 c_1 - r_2 c_2,$$

essent $r_1$ el cabal d'aigua d'entrada (2 litres per hora), $r_2$ el cabal d'aigua de sortida (1 litre per hora), $c_1$ la concentració de sal que conté l'aigua que hi entra i $c_2$ la concentració de la que en surt.

De l'enunciat, sabem que $c_1 = kt$. I, per les condicions del problema,

$$c_2 = \frac{x}{V_0 + (r_2 - r_1)t},$$

on $V_0$ és el volum d'aigua al moment inicial i $(r_2 - r_1)t$ representa el volum d'aigua net que es guanya o es perd en funció del temps.

Per tant, l'equació diferencial que governa la variació de la sal en aquest recipient és

$$\frac{dx}{dt} = 2kt - \frac{x}{25+t},$$

amb la condició inicial $x(0) = 0$.

És una equació diferencial lineal de primer ordre. Resolem primer l'homogènia:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{25+t}.$$

Separant les variables, n'obtenim

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{25+t}dt.$$

Integrant a cada banda i aïllant, trobem la solució de l'homogènia:

$$x_h(t) = C\,(25+t)^{-1},$$

essent $C$ una constant arbitrària.

Pel mètode de variació de les constants, podem trobar una solució particular de l'equació completa. Posem $x_p(t) = C(t)(25+t)^{-1}$. Aleshores,

$$x_p'(t) = C'(t)(25+t)^{-1} - C(t)(25+t)^{-2}.$$

Substituint a l'equació del problema, s'obté

$$C'(t)(25+t)^{-1} - C(t)(25+t)^{-2} = 2kt - \frac{1}{25+t}C(t)(25+t)^{-1}.$$

Simplificant i ordenant, queda

$$C'(t) = 2kt(25+t) = 2k(25t+t^2).$$

És a dir,

$$C(t) = 2k\left(\frac{25}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right).$$

La solució particular que buscàvem és

$$x_p(t) = \frac{k}{3}\frac{75t^2+2t^3}{25+t}.$$

I, aleshores, la solució general de l'equació diferencial és

$$x(t) = \frac{C}{25+t} + \frac{kt^2(75+2t)}{3(25+t)}.$$

Imposant la condició inicial, $x(0) = 0$, s'obté $C = 0$. És a dir, la quantitat de sal al recipient en funció del temps ve donada per

$$x(t) = \frac{kt^2(75+2t)}{3(25+t)}.$$

A la figura 3.9, podem veure l'evolució de la quantitat de sal al recipient en el cas particular de $k = 1$.

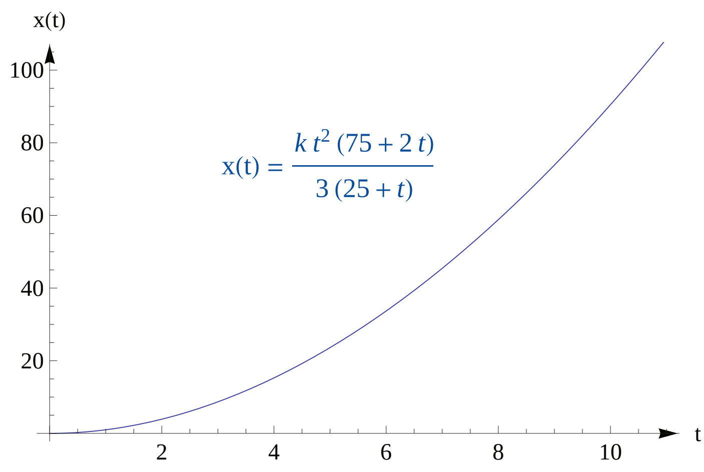



Fig. 3.9
Quantitat de sal en funció del temps quan $k = 1$

**Problema 7.** Suposem que una població donada es pot dividir en dues parts: aquelles persones que tenen una malaltia i poden infectar d'altres, i aquelles que no la tenen però podrien tenir-la. Sigui $x(t)$ la proporció d'individus que no tenen la malaltia a l'instant $t$, i $y(t)$ la proporció dels infectats, amb $y(0)=y_0$; aleshores, $x+y=1$. Suposem que els membres dels dos grups es mouen lliurement entre ells i que el ritme de contagi és proporcional al producte de $x$ i $y$.

a) Determineu $y(t)$.

b) Interpreteu el límit $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

**Resolució**

a) Sabem que el ritme de contagi és proporcional al producte de $x$ i $y$; per tant, hem de resoldre l'equació següent:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt}=kyx=ky(1-y) \\ y(0)=y_0 \end{array}\right.$$

Observem que

$$\frac{dy}{dt}=ky(1-y) \iff \frac{dy}{y(1-y)}=kdt \iff \int\frac{dy}{y(1-y)}=kt+c_1.$$

Tenim una integral racional. La integrem descomponent el quocient en fraccions simples:

$$\frac{1}{y(1-y)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{1-y}=\frac{A(1-y)+By}{y(1-y)},$$

d'on obtenim $A=B=1$. Així,

$$\int\frac{dy}{y(1-y)}=\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{1-y}=\ln|y|-\ln|1-y|=\ln\left|\frac{y}{1-y}\right|=\ln\frac{y}{1-y}.$$

Per tant,

$$\ln\frac{y}{1-y}=kt+c_1 \iff \frac{y}{1-y}=e^{kt}e^{c_1}=Ce^{kt}.$$

Imposant ara la condició inicial, podem determinar $C$:

$$y(0)=y_0 \implies \frac{y_0}{1-y_0}=C \implies \frac{y}{1-y}=\frac{y_0}{1-y_0}e^{kt}.$$

Aïllem la $y$ de l'expressió anterior i obtenim finalment:

$$y(t)=\frac{y_0e^{kt}}{1-y_0+y_0e^{kt}}=\frac{y_0}{y_0+(1-y_0)e^{-kt}}$$

b) D'altra banda,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{y_0 e^{kt}}{1-y_0+y_0e^{kt}} \underset{\text{(aplicant la regla de L'Hôpital)}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{y_0ke^{kt}}{y_0ke^{kt}} = 1.$$

O bé,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{y_0}{y_0+(1-y_0)e^{-kt}} = 1.$$

Per tant, la malaltia tendeix a escampar-se al llarg de tota la població. La figura 3.10 il·lustra aquesta propietat. Hi ha representada la corba solució per a $k=1$ i $y_0 = 0'2$, és a dir, que inicialment el 20% de la població està infectat.

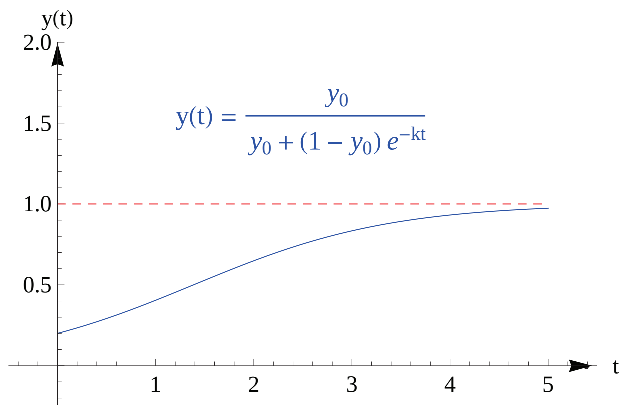



Fig. 3.10
Gràfica de $y(t)$ quan $y_0 = 0'2$ i $k=1$

**Problema 9.** Una determinada colònia de bacteris té inicialment $x_0$ individus. En períodes curts de temps, el ritme de creixement és proporcional al nombre d'individus present en cada instant. Si la colònia triga 2 hores a triplicar-se, calculeu el temps necessari per quintuplicar-se.

**Resolució**

La dinàmica d'aquesta població es pot analitzar a partir de l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad \text{amb} \quad x(0) = x_0.$$

Observem que $k>0$ perquè hi ha creixement. Integrem el problema de Cauchy i n'obtenim

$$x(t) = x_0e^{kt}.$$

La hipòtesi és $x(2) = 3x_0$ i volem trobar el temps $t$ tal que $x(t) = 5x_0$.

Imposem la condició $x(2) = 3x_0$ per calcular la constant de proporcionalitat $k$:

$$3x_0 = x_0 e^{2k} \implies 2k = \ln 3 \implies k = \frac{\ln 3}{2} \backsimeq 0'5493 > 0.$$

D'aquí tenim

$$x(t) = x_0 e^{0'5493t},$$

que és la relació entre el temps i la quantitat de bacteris. A la figura 3.11, en veiem l'evolució en el cas particular $x_0 = 50$. Si volem $x(t) = 5x_0$, ha de complir-se $5x_0 = x_0 e^{0'5493t}$ i llavors

$$0'5493t = \ln 5 \implies t = \frac{\ln 5}{0'5493} \backsimeq 2'93 \text{ hores.}$$

Per tant, podem concloure que han de passar 2h 55min 48s perquè hi hagi $5x_0$ bacteris.

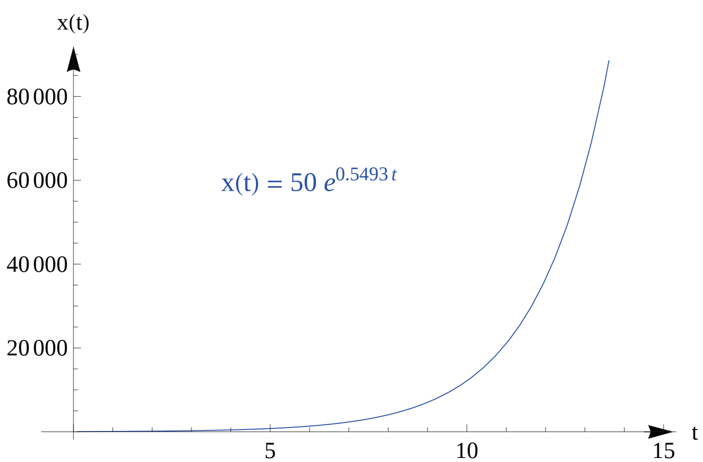



Fig. 3.11
Relació entre el temps i la quantitat de bacteris per a $x_0 = 50$

> **Problema 10.** La semivida d'una substància radioactiva és el temps necessari per tal que la quantitat de substància que hi ha en un instant determinat es redueixi a la meitat. Considereu un material radioactiu amb constant de desintegració $k$ i semivida $T$. Trobeu una relació entre $T$ i $k$. Comproveu que la semivida és independent de la quantitat inicial de material.

**Resolució**

La rapidesa amb què es desintegra una substància radioactiva és proporcional a la quantitat $x(t)$ que resta en cada instant $t$. Així, tenim l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad \text{amb} \quad x(t_0) = x_0.$$

Prenem el temps inicial $t_0 = 0$; llavors, la solució és

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

Si a l'instant $t = 0$ la quantitat de material és $x_0$, aleshores la semivida $T$ satisfà $x(T) = \frac{x_0}{2}$. Tenim, doncs,

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT} \implies e^{-kT} = \frac{1}{2} \implies -kT = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

La relació entre $T$ i $k$ és $kT = \ln 2$ o, equivalentment, $T = \frac{\ln 2}{k}$. És clar que la semivida no depèn de la quantitat inicial de material $x_0$.

**Problema 11.** Determineu l'equació d'una corba que passa per $(1,0)$, sabent que les seves rectes tangents formen un angle constant de 45 graus amb les rectes que passen per $(0,0)$. Un cop trobada, passeu-la a coordenades polars i dibuixeu-la.

**Resolució**

Les rectes que passen per $(0,0)$ són les de la forma $y = mx$. Si denotem per $\alpha$ l'angle que forma aquesta recta amb l'eix d'abscisses, sabem que $m = \tan\alpha$ o, equivalentment, $\tan\alpha = y/x$.

Si $\beta$ és l'angle que forma la recta tangent a la corba que busquem en el punt $(x,y)$, aleshores sabem que el pendent d'aquesta recta és $\tan\beta$. Però, a més, també serà $y' = \tan\beta$, essent $y'$ la derivada respecte a $x$.

L'angle que formen dues rectes en el punt on es tallen és el valor absolut de la diferència entre els angles que formen ambdues rectes amb l'eix de les abscisses. Per determinar aquest angle, es fa servir la fórmula de la tangent d'una diferència d'angles:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.$$

Volem que $\alpha - \beta = 45^\circ$ o que $\beta - \alpha = 45^\circ$. Analitzem el primer cas. L'altre es faria de forma anàloga.

La corba que busquem ha de complir la condició següent:

$$1 = \frac{\frac{y}{x} - y'}{1 + \frac{y}{x} y'}.$$

Operant i aïllant $y'$ a l'expressió anterior, s'obté l'equació diferencial homogènia ($y'$ homogènia de grau 0) següent:

$$y'(x) = \frac{y-x}{y+x}.$$

Per resoldre-la, fem el canvi de variable $u = y/x$. Aleshores, l'equació diferencial es transforma en

$$u' = -\frac{u^2+1}{u+1}\,\frac{1}{x},$$

que és de variables separades i s'integra fàcilment:

$$\arctan u + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = -\ln x + C.$$

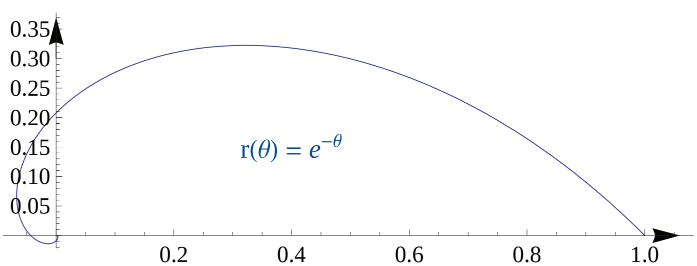
Desfem ara el canvi de variable i n'obtenim

$$\arctan\frac{y}{x} + \ln\sqrt{x^2+y^2} = C,$$

on $C$ és una constant arbitrària. Imposant la condició que la corba passi pel punt $(1,0)$, es troba immediatament $C = 0$.

Per passar la corba a polars, posem $r = \sqrt{x^2+y^2}$ i $\theta = \arctan(y/x)$, de manera que en polars l'equació és $\ln r + \theta = 0$, d'on resulta $r = e^{-\theta}$. La gràfica d'aquesta funció té l'aspecte de la figura 3.12.

Fig. 3.12
Espiral logarítmica




## 3.2. Problemes proposats

1. Tenim un dipòsit en forma de piràmide recta de base quadrada amb el vèrtex cap avall. L'altura de la piràmide i el costat de la base són $H$ i $L$, respectivament. Inicialment, el dipòsit és ple d'aigua. Fem un forat petit d'àrea $A$ al vèrtex i deixem que es buidi. Deduïu l'equació diferencial de l'altura de l'aigua $y$ en funció del temps $t$.

2. Determineu una corba que passi pel punt $(0,2)$ i compleixi la condició següent: a cada punt de la corba, el pendent de la seva recta tangent és quatre unitats més gran que l'abscissa del punt.

3. Determineu una corba que passi pel punt $(0,2)$ i compleixi la condició següent: a cada punt, el pendent de la tangent sigui quatre unitats més gran que l'ordenada del punt.

4. Determineu una corba que passi pel punt $(1,4)$ i compleixi la condició següent: a cada punt, el pendent de la tangent sigui el triple que el de la recta que uneix aquest punt amb l'origen de coordenades.

5. Digueu de quin tipus són les corbes en què, a cada punt, el pendent de la recta tangent és proporcional a l'invers del pendent de la recta que uneix el punt amb l'origen.

6. Sigui un cos de massa $m$ que cau dins un medi viscós amb una resistència proporcional al quadrat de la seva velocitat. Determineu-ne la velocitat límit i l'equació del moviment.

7. Un forense pren la temperatura d'un cadàver a les 12 hores i el troba a 30°C. Al cap d'una hora, la temperatura és de 27°C. L'habitació manté una temperatura constant de 22°C. Suposeu que la temperatura d'una persona sana varia entre 36°C i 37°C. Cap a quina hora s'ha esdevingut la mort?

8. Aquest matí neva al Vallès de manera uniforme. S'envia una màquina llevaneu cap a Terrassa des d'un garatge que es troba a 3 km de la ciutat. La màquina recorre 2 km en una hora i triga una altra hora a arribar a Terrassa. Suposem que la velocitat de la llevaneu és inversament proporcional a l'altura de la neu que hi ha pel camí. Si aquesta màquina arriba a Terrassa a les 10 del matí, a quina hora ha començat a nevar?

9. Considereu un mirall en què, si projectem llum des d'una font situada a l'origen de coordenades, n'obtenim un feix de raigs paral·lels a l'eix $OX$. Esbrineu-ne la forma.

   Indicació: considereu el mirall com una superfície de revolució en fer girar una corba plana $y = y(x)$ al voltant de l'eix $OX$.

10. Es treu un bloc de ferro d'un recipient amb un líquid bullent a una temperatura determinada. Al cap de 20 segons, el bloc està a 120°C i, passats 20 segons més, es troba a 100°C. Determineu la temperatura del líquid a l'instant de treure el ferro, si en tot moment la temperatura de l'aire ambient és de 20°C.

11. La clepsidra —o rellotge d'aigua— és un antic instrument per mesurar el temps. Les primeres clepsidres eren recipients de ceràmica dels quals es deixava caure l'aigua continguda a través d'un petit orifici fet al fons. Calculeu la forma d'una clepsidra per tal que el nivell d'aigua disminueixi a ritme constant.

    Indicació: considereu el recipient com una superfície de revolució d'una corba plana $y = y(x)$ en girar al voltant de l'eix $OY$.

## 3.3. Breu resum teòric

**Creixement de poblacions**

Si considerem períodes curts de temps, en moltes poblacions de bacteris, el ritme de creixement és proporcional al nombre d'individus $x(t)$ present en cada instant $t$:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \text{ amb } x(t_0) = x_0,\ k > 0.$$

**Desintegració de substàncies**

La rapidesa amb què es desintegra una substància radioactiva és proporcional a la quantitat $x(t)$ que en resta a cada instant $t$. Així, tenim l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \text{ amb } x(t_0) = x_0,\ k > 0.$$

**Semivida d'un material radioactiu**

Es defineix la *semivida* (o *període medial*) *d'un material radioactiu* com el temps necessari per tal que la quantitat de substància que hi ha en un instant determinat es redueixi a la meitat.

**Escalfament i refredament**

La *llei de Newton del refredament* estableix que la taxa de canvi de la temperatura d'un cos $T(t)$ respecte del temps que es troba immers en un medi de temperatura constant, $T_A$, és proporcional a la diferència entre ambdues temperatures $T_A - T$. És a dir,

$$\frac{dT}{dt} = k(T_A - T).$$

**Buidatge de dipòsits**

Sigui un dipòsit ple de líquid amb un forat petit d'àrea $a$ al fons. La *llei de Torricelli* relaciona la velocitat de sortida $v$ amb l'altura del líquid a cada instant $y(t)$:

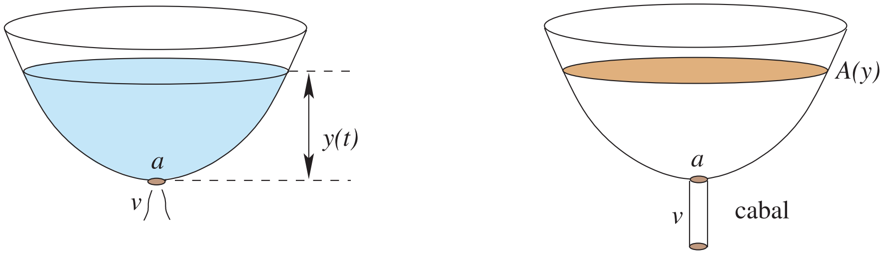
$$v = \sqrt{2gy},$$

on $g$ és la constant gravitatòria. El cabal és el volum del cilindre que té com a base el forat del dipòsit d'àrea $a$ i, com a altura, la velocitat $v$. L'equació que determina la variació de l'altura del líquid és

$$A(y)\,\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy},$$

essent $A(y)$ l'àrea de la secció transversal horitzontal del dipòsit tal com s'il·lustra a la figura 3.13.

Fig. 3.13
Buidatge d'un dipòsit.
Llei de Torricelli




2
1
3

# → 4

# Equacions lineals

## 4.1. Problemes resolts

**Problema 1.** Resoleu les equacions diferencials següents:

(a) $y^{(5)} = 0$.

(b) $y''' = e^{2x} - 30\sin(3x)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

**Resolució**

(a) És una equació lineal i homogènia a coeficients constants. L'equació característica associada és $m^5 = 0$; té una única arrel, el 0, amb multiplicitat 5. Aquesta arrel contribueix a la solució general amb cinc solucions linealment independents:

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3\ \text{ i }\ x^4.$$

Per tant, la solució general és

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4.$$

També podem resoldre el problema sense la teoria d'equacions diferencials. En aquest cas particular, només cal integrar i reduir l'ordre de les derivades successives de la funció incògnita $y$. En efecte, $y^{(5)} = 0$ ens diu que la derivada de $y^{(4)}$ és constant; per tant, $y^{(4)} = C_1$. Ara integrem $y^{(4)}$ i n'obtenim $y^{(3)} = C_1x + C_2$. Reiterem el procés:

$$y'' = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4.$$

L'últim pas ens diu que

$$y = \frac{C_1}{24}x^4 + \frac{C_2}{6}x^3 + \frac{C_3}{2}x^2 + C_4x + C_5.$$

Finalment, canviem el nom a les constants —per comoditat— i escrivim la solució general de la manera més senzilla possible:

$$y = K_1x^4 + K_2x^3 + K_3x^2 + K_4x + K_5.$$

(b) L'equació diferencial és de la forma $y''' = f(x)$. Per tant, la resolem integrant, successivament, ambdós membres:

$$y''' = e^{2x} - 30\sin(3x) \quad\Longrightarrow\quad y'' = \int \left(e^{2x} - 30\sin(3x)\right)dx + C_1,$$

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + 10\cos(3x) + C_1 \quad\Longrightarrow\quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{10}{3}\sin(3x) + C_1x + C_2,$$

d'on la solució general és

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{10}{9}\cos(3x) + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Ara cal imposar-hi les condicions de Cauchy per determinar els valors de les constants $C_1$, $C_2$ i $C_3$.

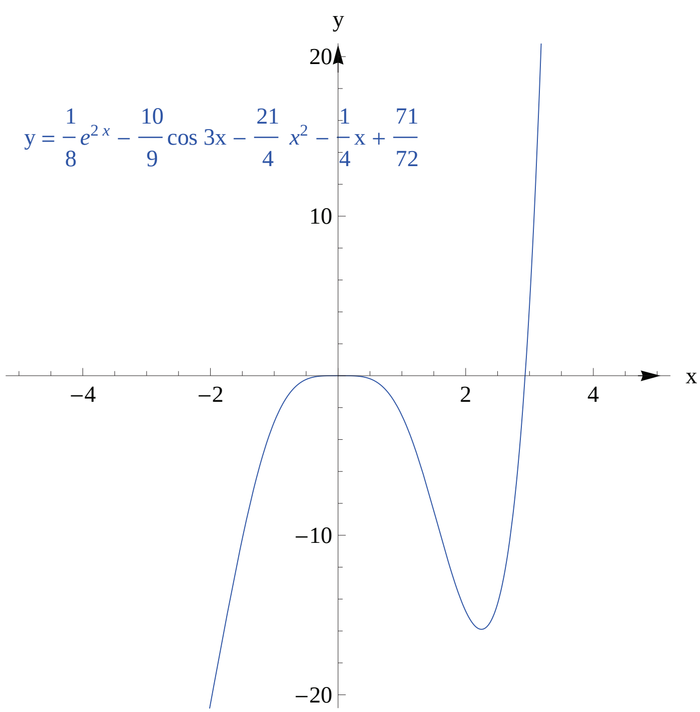



Fig. 4.1 Solució de l'equació diferencial $y''' = e^{2x} - 30\sin(3x)$, amb $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

- $y(0) = 0 \implies 0 = \frac{1}{8} - \frac{10}{9} + C_3 \implies C_3 = \frac{71}{72}.$

- $y'(0) = 0 \implies 0 = \frac{1}{4} + C_2 \implies C_2 = \frac{-1}{4}$.
- $y''(0) = 0 \implies 0 = \frac{1}{2} + 10 + C_1 \implies C_1 = \frac{-21}{2}$.

Per tant, la solució particular demanada és

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{10}{9}\cos(3x) - \frac{21}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{71}{72}.$$

A la figura 4.1, en podem veure la gràfica.

**Problema 2.** Integreu les equacions diferencials següents:

(a) $y^{(4)} + 11y''' + 33y'' + 9y' - 54y = 0$.

(b) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

**Resolució**

Ambdues equacions diferencials són lineals i homogènies, amb coeficients constants. Per resoldre cadascuna d'elles, en considerem l'equació característica associada i n'esbrinem les arrels. Després escrivim la solució general a partir de les contribucions de cada arrel. Cal tenir en compte el resultat següent:

- Per a cada arrel real $m$ amb multiplicitat $k$, n'hi ha $k$ solucions linealment independents:

  $$e^{mx},\ xe^{mx}, \cdots,\ x^{k-1}e^{mx}.$$

  En aquest cas, cada arrel contribueix a la solució general amb la combinació lineal

  $$C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} + \cdots + C_kx^{k-1}e^{mx}.$$

- Per a cada parella d'arrels complexes conjugades $a \pm bi$ amb multiplicitat $k$, tenim $2k$ solucions linealment independents:

  $$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

  Aleshores, cada parella d'arrels contribueix a la solució general amb la combinació lineal

  $$e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx) + xe^{ax}(C_3\cos bx + C_4\sin bx) + \cdots + \\ + x^{x-1}e^{ax}(C_{2k-1}\cos bx + C_{2k}\sin bx).$$

(a) L'equació característica associada és

$$m^4 + 11m^3 + 33m^2 + 9m - 54 = 0.$$

Recordem que les arrels enteres són divisors del terme independent; en aquest cas, $-54$. Amb la regla de Ruffini, trobem que $m_1 = 1$ és simple, $m_3 = -3$ és doble i $m_2 = -6$ és simple:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 11 | 33 | 9 | $-54$ |
| 1 | | 1 | 12 | 45 | 54 |
| | 1 | 12 | 45 | 54 | 0 |
| $-3$ | | $-3$ | $-27$ | $-54$ | |
| | 1 | 9 | 18 | 0 | |
| $-3$ | | $-3$ | $-18$ | | |
| | 1 | 6 | 0 | | |
| $-6$ | | $-6$ | | | |
| | 1 | 0 | | | |

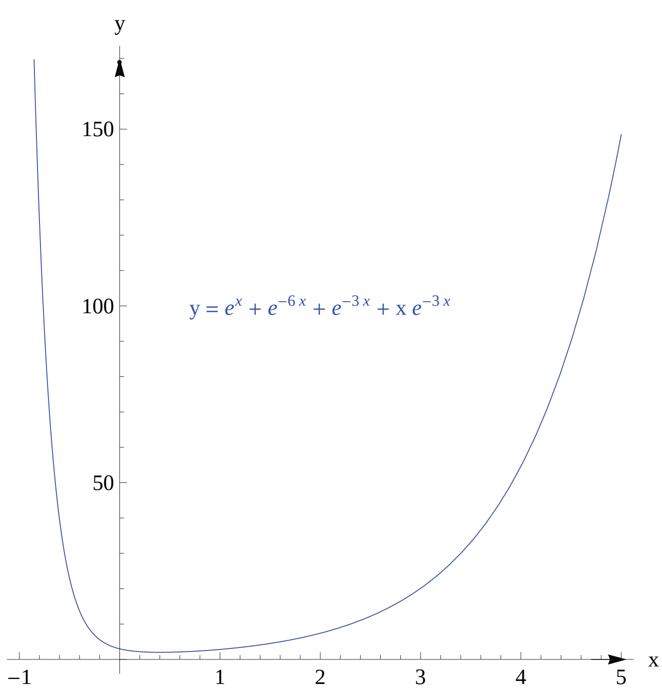
L'arrel $m_1 = 1$ dóna la solució $y_1 = e^x$. L'arrel $m_2 = -6$ simple contribueix amb $y_2 = e^{-6x}$. L'arrel $m_3 = -3$ doble dóna les solucions $y_3 = e^{-3x}$ i $y_4 = xe^{-3x}$. Clarament, aquestes quatre solucions són linealment independents.

Així, doncs, la solució general és $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$, és a dir,

$$y = C_1e^x + C_2e^{-6x} + C_3e^{-3x} + C_4xe^{-3x}.$$

A la figura 4.2, en podem veure la gràfica quan $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$.

Fig. 4.2
Solució de l'equació diferencial
$y^{(4)} + 11y''' + 33y'' + 9y' - 54y = 0$
quan
$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$



(b) L'equació característica és

$$m^5+8m^3+16m=0.$$

La podem escriure com $m\,(m^4+8m^2+16)=0$. Per tant, $m_1=0$ n'és una arrel simple i contribueix a la solució general amb $y_1=1$. És fàcil comprovar que el polinomi $m^4+8m^2+16$ no té cap arrel real. Tanmateix, observem que és un quadrat perfecte: $m^4+8m^2+16=(m^2+4)^2$. Aleshores, les arrels de $m^4+8m^2+16$ són les mateixes de $m^2+4$, però amb doble multiplicitat. Tenim

$$m^2+4=0 \quad\Longrightarrow\quad m=\pm 2i.$$

Per tant, les arrels de la nostra equació característica són $m_1=0$ simple, $m_2=2i$ doble i $m_3=-2i$ doble. Sabem que la parella d'arrels complexes conjugades $\pm 2i$ hi contribueix amb quatre solucions: $2\,(\text{dues solucions})\times 2\,(\text{multiplicitat})$. Aquestes són $y_2=\cos(2x)$, $y_3=\sin(2x)$, $y_4=x\cos(2x)$ i $y_5=x\sin(2x)$. La solució general de l'equació diferencial $y^{(5)}+8y'''+16y'=0$ és, doncs,

$$y=C_1+C_2\cos(2x)+C_3\sin(2x)+C_4x\cos(2x)+C_5x\sin(2x).$$

A la figura 4.3, en podem veure la gràfica quan $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1$.

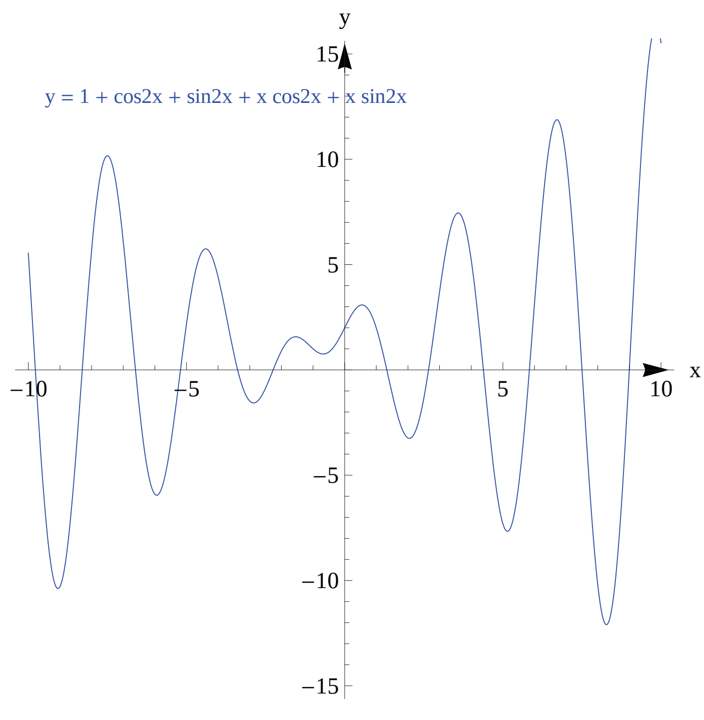



Fig. 4.3
Solució de l'equació diferencial $y^{(5)}+8y'''+16y'=0$ quan $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=1$

**Problema 3.** Sigui $P_4(x)$ un polinomi de grau 4 amb coeficients reals. Considerem una determinada equació diferencial lineal i homogènia amb coeficients constants tal que la seva equació característica és $P_4(x) = 0$. Suposem que $-7$ és l'única arrel real de $P_4(x)$ i que $1+5i$ n'és una arrel complexa simple. Esbrineu la solució general de l'equació diferencial esmentada.

**Resolució**

És clar que la nostra equació diferencial té ordre 4, ja que el polinomi associat a l'equació característica té grau 4. Per determinar-ne la solució general, només cal trobar quatre solucions linealment independents i considerar-ne les combinacions lineals. Aquestes solucions vénen determinades per les arrels de $P_4(x)$. Esbrinem-les.

Primer considerem les arrels complexes. Per hipòtesi, $\lambda_1 = 1+5i$ és una arrel simple. Com que els coeficients de $P_4(x)$ són reals, el conjugat $\lambda_2 = 1-5i$ n'és una altra arrel i, a més, té la mateixa multiplicitat. Recordem que el polinomi $P_4(x)$ ha de tenir quatre arrels, comptant-ne les multiplicitats. Deduïm, doncs, que no hi ha cap més arrel complexa (no real). En efecte, si $\gamma$ fos una altra arrel complexa diferent, el seu conjugat $\overline{\gamma}$ també seria una arrel de $P_4(x)$. Si tenim en compte l'arrel $\lambda_3 = -7$, aleshores el polinomi $P_4(x)$ tindria grau 5 o superior, i això és una contradicció.

Pel que fa a les arrels reals, per hipòtesi, només n'existeix una, $\lambda_3 = -7$. Llavors, aquesta ha de tenir multiplicitat 2 perquè la suma de les multiplicitats és 4. L'esquema següent sintetitza tota aquesta informació:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 1+5i \ \text{ té multiplicitat } 1, \text{ val per } 1\\
&\lambda_2 = 1-5i \ \text{ té multiplicitat } 1, \text{ val per } 1\\
&\lambda_3 = -7 \ \text{ té multiplicitat } 2, \text{ val per } 2\\
&\quad \text{nombre total d'arrels (amb les multiplicitats)} = 4.
\end{aligned}$$

Després de trobar totes les arrels de l'equació característica, cal estudiar la contribució de cadascuna d'elles dins la solució general de l'equació diferencial.

- Les dues arrels complexes conjugades simples $\lambda_1$ i $\lambda_2$ hi contribueixen juntes amb dues solucions:

$$y_1 = e^x \cos(5x) \ \text{ i } \ y_2 = e^x \sin(5x).$$

- L'arrel real doble $\lambda_3$ hi contribueix amb dues solucions:

$$y_3 = e^{-7x} \ \text{ i } \ y_4 = xe^{-7x}.$$

Clarament, les quatre solucions $y_1$, $y_2$, $y_3$ i $y_4$ són linealment independents. En conseqüència, la solució general de la nostra equació diferencial és

$$y = C_1e^{-7x} + C_2xe^{-7x} + C_3e^x\cos(5x) + C_4e^x\sin(5x),$$

on $C_1$, $C_2$, $C_3$ i $C_4$ són constants qualssevol. A la figura 4.4, en podem veure la gràfica en el cas particular $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$.

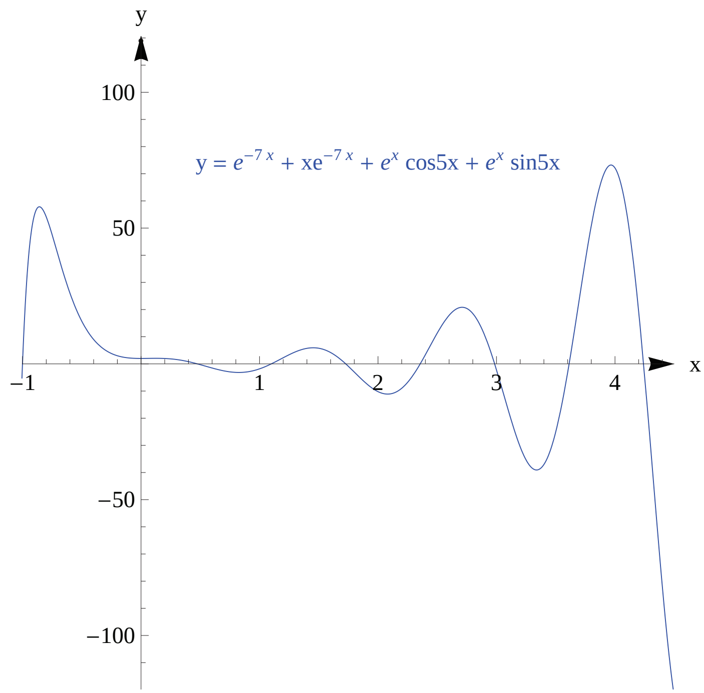



Fig. 4.4
Solució de l'equació diferencial quan $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$

**Problema 4.** Sigui el feix de corbes multiparamètric

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^x\cos(3x) + C_4e^x\sin(3x).$$

Calculeu-ne l'equació diferencial associada.

**Resolució**

Observem que les corbes són combinacions lineals de les quatre solucions linealment independents següents:

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},\ y_3 = e^x\cos(3x)\ \text{ i }\ y_4 = e^x\sin(3x).$$

Totes quatre corresponen al tipus de solucions pròpies de les equacions diferencials lineals i homogènies amb coeficients constants. Per tant, hem de trobar una equació lineal, d'ordre 4, homogènia amb coeficients constants. En primer lloc, calculem l'equació característica corresponent, perquè a partir d'ella s'obté fàcilment l'equació diferencial.

D'una banda, les solucions $y_1 = e^x$ i $y_2 = xe^x$ vénen generades per l'arrel $-1$, que ha de ser doble. De l'altra, la parella de solucions $y_3 = e^x\cos(3x)$ i $y_4 = e^x\sin(3x)$ ve generada per un parell d'arrels complexes conjugades i simples, que són $1 \pm 3i$. El nombre total d'arrels —comptant-ne la multiplicitat— és 4. Així, l'equació característica és

$$(m+1)^2\big(m-(1+3i)\big)\big(m-(1-3i)\big) = 0.$$

N'agrupem els termes de manera adequada:

$$(m+1)^2\left(\underbrace{m-1}_{}-\underbrace{3i}_{}\right)\left(\underbrace{m-1}_{}+\underbrace{3i}_{}\right)=0.$$

Els dos últims factors són de la forma suma per diferència i, doncs,

$$(m+1)^2\left[(m-1)^2-(3i)^2\right]=0 \quad\Longrightarrow\quad (m+1)^2\left[(m-1)^2+9\right]=0.$$

Desenvolupant els càlculs, n'obtenim l'expressió

$$m^4+7m^2+18m+10=0.$$

D'aquí és immediat obtenir l'equació diferencial associada. N'hi ha prou a substituir cada potència de $m$ per la derivada de $y$ de l'ordre corresponent:

$$y^{(4)}+7y''+18y'+10y=0.$$

**Problema 5.** Resoleu l'equació diferencial d'Euler $x^2y''+5xy'+5y=0$.

**Resolució**

En efecte, és una equació d'Euler ja que té la forma $a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$, amb $a_0$, $a_1$ i $a_0$ constants. La resoldrem de dues maneres diferents.

(A) Un dels mètodes de resolució de les equacions d'Euler consisteix a buscar solucions del tipus $y=x^k$, on $k$ és un nombre per determinar. Tenim:

$$y=x^k,\;\; y'=kx^{k-1},\;\; y''=k(k-1)x^{k-2}.$$

Imposem que $y=x^k$ sigui solució de la nostra equació diferencial:

$$k(k-1)x^k+5kx^k+5x^k=0 \quad\Longrightarrow\quad x^k\left(k^2+4k+5\right)=0.$$

Atès que $x^k\neq 0$, deduïm que $k^2+4k+5=0$. Aquesta "equació característica" té dues arrels complexes conjugades: $-2+i$, $-2-i$. Per tant, $y_1=x^{-2+i}$ i $y_2=x^{-2-i}$ són dues solucions linealment independents al camp complex. Nosaltres, però, treballem al camp real. Aleshores, cal trobar-ne dues noves solucions reals linealment independents a partir de $y_1$ i $y_2$. Observem que

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-2+i}=x^{-2}x^i=x^{-2}e^{\ln(x^i)}=x^{-2}e^{i\ln x},\\ y_2 &= x^{-2-i}=x^{-2}x^{-i}=x^{-2}e^{\ln(x^{-i})}=x^{-2}e^{i(-\ln x)}.\end{aligned}$$

Recordem la fórmula d'Euler, $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, per a tot $\theta$ complex. Apliquem-la a $y_1$ per al valor $\theta=\ln x$, i a $y_2$ per al valor $\theta=-\ln x$. Així,

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-2}e^{i\ln x}=x^{-2}\left[\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)\right],\\ y_2 &= x^{-2}e^{i(-\ln x)}=x^{-2}\left[\cos(-\ln x)+i\sin(-\ln x)\right].\end{aligned}$$

Com que la funció $\cos x$ és parella i la funció $\sin x$ és senar, podem escriure

$$y_2 = x^{-2}\left[\cos(\ln x) - i\sin(\ln x)\right].$$

La nostra equació d'Euler és lineal i homogènia. Llavors, pel principi de superposició, les combinacions lineals de $y_1$ i $y_2$ també són solucions de l'equació. Considerem-ne dues de molt concretes. Siguin

$$y_3 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2,$$

$$y_4 = \frac{y_1-y_2}{2i} = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2.$$

Per tant,

$$y_3 = x^{-2}\cos(\ln x) \text{ i } y_4 = x^{-2}\sin(\ln x)$$

són dues solucions de l'equació d'Euler. A més, són linealment independents, ja que el seu quocient no és constant:

$$\frac{y_4}{y_3} = \tan(\ln x) \neq \text{constant}.$$

Així, doncs, la solució general de la nostra equació és $y = C_1y_3 + C_2y_4$, és a dir,

$$y = C_1x^{-2}\cos(\ln x) + C_2x^{-2}\sin(\ln x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A la figura 4.5, en podem veure la gràfica per a diferents valors de $C_1$ i $C_2$.

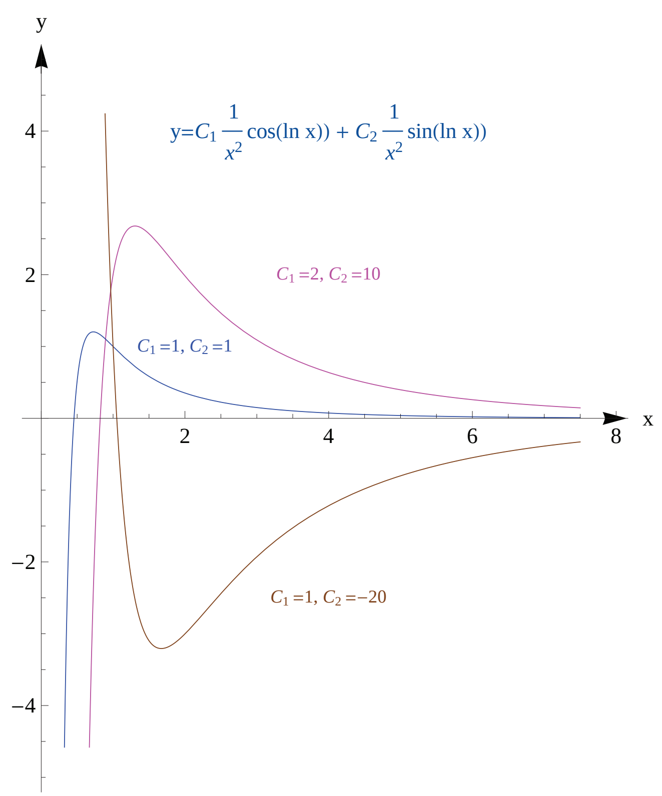



Fig. 4.5
Solució de l'equació diferencial
$x^2y'' + 5xy' + 5y = 0$

(B) Un altre mètode de resolució de les equacions d'Euler consisteix a fer el canvi de variable $x = e^t \longleftrightarrow t = \ln x$. D'aquesta manera, l'equació original es converteix en una altra, que és lineal i homogènia amb coeficients constants.

Si $x = e^t$, aleshores $dx = e^t\, dt$. Per la regla de la cadena, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}e^{-t}$. Posem-hi $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$; llavors, $y' = \dot{y}e^{-t}$. Derivant-hi un cop més, n'obtenim $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})\, e^{-2t}$. Ara ja podem fer les substitucions corresponents a l'equació $x^2y'' + 5xy' + 5y = 0$:

$$e^{2t}e^{-2t}\,(\ddot{y} - \dot{y}) + 5e^te^{-t}\dot{y} + 5y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0.$$

Tal com esperàvem, n'hem obtingut una equació lineal i homogènia amb coeficients constants. L'equació característica associada és $k^2 + 4k + 5 = 0$ —la mateixa d'abans, amb l'altre mètode de resolució. N'obtenim les arrels $-2 \pm i$, amb $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Per tant, la solució general de la nova equació és

$$y = C_1e^{-2t}\cos t + C_2e^{-2t}\sin t.$$

Per acabar, desfem el canvi i escrivim la solució general de l'equació original:

$$y = C_1x^{-2}\cos(\ln x) + C_2x^{-2}\sin(\ln x)\,.$$

**Problema 6.** Resoleu l'equació diferencial $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$ a partir d'una solució que sigui un polinomi de grau 1.

**Resolució**

L'estratègia per resoldre aquest problema és:

- Primer, calculem una solució $y_1$ que sigui un polinomi de grau 1, tal com ens indica l'enunciat.
- Després, apliquem el mètode de reducció d'ordre per trobar-ne una altra solució $y_2$ tal que $y_1$ i $y_2$ siguin linealment independents.
- Com que l'equació diferencial és d'ordre 2, ja en tenim la solució general: $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

Observeu que hem de treballar en un interval en què no s'anul·li el coeficient de $y''$. Atès que aquest coeficient és $(x-1)^2$, considerem un interval $I$ tal que $1 \notin I$.

Per començar, cerquem una solució del tipus $y = Ax + B$. Cal determinar-ne els coeficients $A$ i $B$. Derivem dos cops la possible solució: $y' = A$, $y'' = 0$, i imposem que

$$-2(x-1)A + 2(Ax+B) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Simplifiquem els càlculs i n'obtenim $A + B = 0$. Aquesta relació entre els coeficients es pot escriure com $B = -A$. Així obtenim com a solució $y = Ax - A = A(x-1)$, amb $A$ arbitrària. Per comoditat, prenem $A = 1$ i seleccionem la solució $y_1 = x - 1$.

El pas següent és determinar-ne una altra solució mitjançant el mètode de reducció d'ordre. Assagem una solució del tipus $y = v(x) \cdot y_1 = v(x) \cdot (x-1)$, on $v(x)$ no és constant. Derivem l'expressió $y = (x-1)v$. Tenim

$$y' = v + (x-1)v' \quad \Longrightarrow \quad y'' = 2v' + (x-1)v''.$$

Imposem que

$$(x-1)^2\left[2v' + (x-1)v''\right] - 2(x-1)\left[v + (x-1)v'\right] + 2\left[(x-1)v\right] = 0, \quad \forall x \in I.$$

Simplifiquem els càlculs i n'obtenim $(x-1)^3 v'' = 0$. Atès que treballem en un entorn $I$ que no conté $x = 1$, es compleix $(x-1) \neq 0$ i, per tant, $v'' = 0$. Llavors, $v(x) = Cx + D$. Recordem que només ens interessa una funció $v(x)$ que ens vagi bé per construir la nova solució. Aleshores, podem prendre $C = 1$ i $D = 0$, és a dir, $v(x) = x$. Per tant, $y_2 = x(x-1) = x^2 - x$ és una altra solució de l'equació diferencial.

Clarament, $y_1 = (x-1)$ i $y_2 = x^2 - x$ són linealment independents, ja que el quocient

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{constant}.$$

Podem concloure, doncs, que la solució general de l'equació diferencial és

$$y = C_1(x-1) + C_2(x^2 - x), \text{ amb } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A la figura 4.6, en podem veure la gràfica per a diferents valors de $C_1$ i $C_2$.

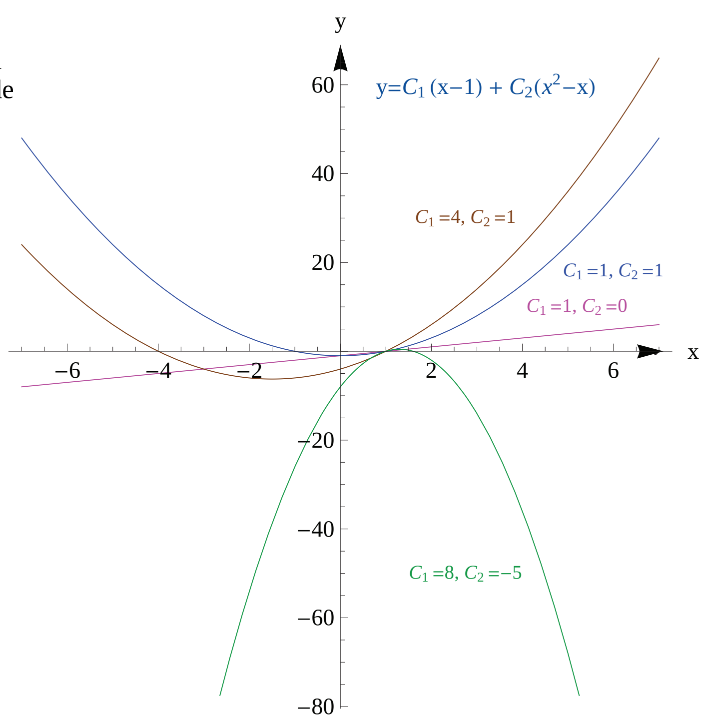



Fig. 4.6
Solució de l'equació diferencial
$(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$

**Problema 7.** Integreu l'equació diferencial

$$y'' + 4y' + 8y = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x).$$

**Resolució**

És una equació lineal no homogènia a coeficients constants.

(a) Resolem l'homogènia $y'' + 4y' + 8y = 0$. L'equació característica és

$$m^2 + 4m + 8 = 0 \Longleftrightarrow m = -2 \pm 2i,$$

per tant, tenim dues arrels complexes simples amb $\alpha = -2$ i $\beta = 2$. Així,

$$y_h = C_1 e^{-2x} \cos 2x + C_2 e^{-2x} \sin 2x.$$

(b) Busquem una solució particular pel *mètode dels coeficients indeterminats*. Assagem solucions de la forma:

$$y_p = e^{3x}\left(A \sin 2x + B \cos 2x\right),$$

ja que $3 \pm 2i$ no són arrels de l'equació característica. Ara en calculem les derivades:

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{3x}\left[(3A - 2B)\sin 2x + (3B + 2A)\cos 2x)\right], \\ y_p'' &= e^{3x}\left[(5A - 12B)\sin 2x + (12A + 5B)\cos 2x\right]. \end{aligned}$$

Substituint a l'equació inicial

$$y'' + 4y' + 8y = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)$$

i n'obtenim el sistema de dues equacions i dues incògnites següent:

$$\left.\begin{array}{l} 25A - 20B = 1 \\ 20A + 25B = 1 \end{array}\right\}$$

d'on deduïm $A = \dfrac{9}{205}$ i $B = \dfrac{1}{205}$.

Finalment, n'obtenim la solució particular

$$y_p = \frac{e^{3x}}{205}\left[9 \sin 2x + \cos 2x\right]$$

i la solució general

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} \cos 2x + C_2 e^{-2x} \sin 2x + \frac{e^{3x}}{205}\left[9 \sin 2x + \cos 2x\right].$$

A la figura 4.7, en podem veure la gràfica per a $C_1 = 4$ i $C_2 = -4$.

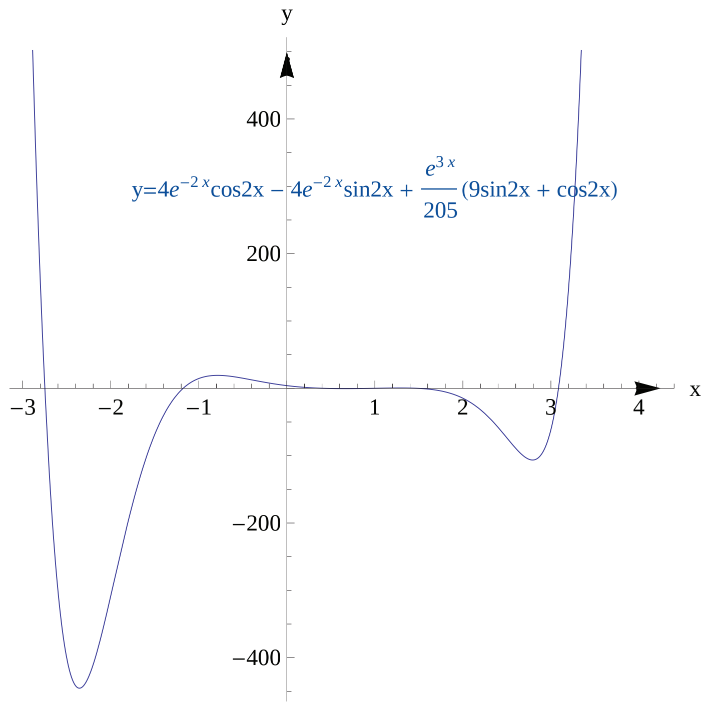



Fig. 4.7
Solució de l'equació diferencial
$y'' + 4y' + 8y = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)$
per a $C_1 = 4$ i $C_2 = -4$

**Problema 8.** Escriviu el tipus de solució particular que caldria assajar en cadascuna de les equacions diferencials següents, a partir del *mètode dels coeficients indeterminats*.

(a) $y''' + y'' - 2y' = e^{3x}$.

(b) $y^{(iv)} + y''' - 2y'' = 4x^3 + 3x - 1$.

(c) $y'' + 2y' + 2y = 2xe^x \sin x$.

(d) $y'' - 2y' - 3y = (8x - 5)\sin(2x) + x^2 \cos(2x)$.

**Resolució**

(a) Tenim $y''' + y'' - 2y' = e^{3x}$ i l'equació característica és

$$m^3 + m^2 - 2m = 0 \Longleftrightarrow m(m^2 + m - 2) = 0$$

d'on deduïm $m_1 = -2$, $m_2 = 0$ i $m_3 = 1$. Per tant, assagem amb la solució particular

$$y_p = Ae^3x.$$

(b) L'equació característica de $y^{(iv)} + y''' - 2y'' = 4x^3 + 3x - 1$ és

$$m^4 + m^3 - 2m^2 = 0 \Longleftrightarrow m^2(m^2 + m - 2) = 0$$

d'on deduïm $m_1 = -2$, $m_2 = 0$ arrel doble i $m_4 = 1$. Per tant, assagem amb la solució particular

$$y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) x^2.$$

(c) Tenim $y'' + 2y' + 2y = 2xe^x \sin x$ i l'equació característica és

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

és a dir,

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

d'on deduïm $\alpha = -1$ i $\beta = 1$. Per tant, assajarem amb la solució particular

$$y_p = e^x \left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right].$$

(d) Finalment, l'equació característica de $y'' - 2y' - 3y = (8x - 5)\sin(2x) + x^2\cos(2x)$ és

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

d'on obtenim $m_1 = -1$ i $m_2 = 3$. Per tant, la solució particular és

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 2x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 2x.$$

**Problema 9.** Integreu l'equació diferencial $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

**Resolució**

Es tracta d'una equació no homogènia a coeficients constants. Determinem primer la solució, $y_h$, de l'equació homogènia associada. Després, aplicant el mètode de variació de les constants o paràmetres, hi trobarem una solució particular, $y_p$. Finalment, la solució general serà $y = y_h + y_p$.

(a) Solució de l'homogènia.

$$y'' + 2y' + y = 0 \Longrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Longleftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow m = -1, \text{arrel doble}.$$

Per tant,

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

(b) Solució particular. Tal com hem esmentat abans, aplicant el mètode de variació de les constants o paràmetres, considerant

$$y_p = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x} \tag{4.1}$$

obtenim el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} c_1'(x)e^{-x} & + & c_2'(x)xe^{-x} & = & 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} & + & c_2'(x)(e^{-x} - xe^{-x}) & = & e^{-x}\ln x \end{array}\right\}$$

és a dir,

$$\left.\begin{array}{rcll} c_1'(x) & + & c_2'(x)x & = 0 \\ -c_1'(x) & + & c_2'(x)(1-x) & = \ln x \end{array}\right\}.$$

Resolem-lo:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln x & 1-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}} = -x\ln x, \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \ln x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}} = \ln x.$$

Ara només cal integrar per parts per deduir $c_1$ i $c_2$:

$$c_1(x) = -\int x\ln x\,dx \underset{\text{(integrant \textit{per parts})}}{=} \frac{x^2}{4}\left(1-\ln x^2\right),$$

$$c_2(x) = \int \ln x\,dx \underset{\text{(integrant \textit{per parts})}}{=} x\left(\ln x - 1\right).$$

Així, una solució particular de l'equació diferencial és

$$y_p \underset{\text{(substituint a (4.1))}}{=} \frac{x^2e^{-x}}{4}\left(\ln x^2 - 3\right).$$

(c) Finalment, la solució general és

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{x^2e^{-x}}{4}\left(\ln x^2 - 3\right).$$

A la figura 4.8, en podem veure la gràfica per a diferents valors de $C_1$ i $C_2$.

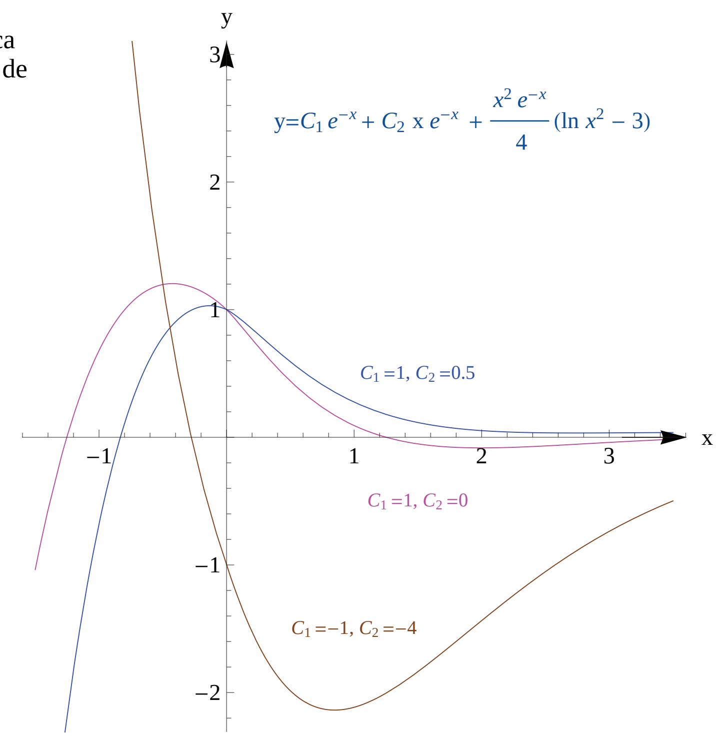



Fig. 4.8
Solució de l'equació diferencial
$y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$

**Problema 10.** Considereu l'equació diferencial

$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$$

(a) Comproveu que hi ha una solució del tipus $y(x) = e^{\lambda x}$ per a un valor determinat de $\lambda$.

(b) Trobeu-ne una altra solució que no sigui múltiple de l'anterior.

(c) Demostreu que les dues solucions trobades anteriorment són linealment independents.

(d) Escriviu la solució general i trobeu-ne la que satisfà $y(1) = y'(1) = e^2$.

**Resolució**

(a) N'hi ha prou a substituir $y = e^{\lambda x}$ i les seves derivades a l'equació diferencial:

$$\lambda^2 x e^{\lambda x} - (2x+1)\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0.$$

Podem dividir per $e^{\lambda x}$, atès que la funció exponencial no és mai zero. Agrupant els termes, n'obtenim

$$(\lambda^2 - 2\lambda)x + 2 - \lambda = 0.$$

Recordem que aquesta és una equació funcional, és a dir, és una igualtat que ha de ser certa per a tots els valors de $x$. Evidentment, això implica que $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ i $2 - \lambda = 0$. La solució comuna d'aquestes dues equacions és $\lambda = 2$.

Per tant, la primera solució d'aquesta equació diferencial és $y_1 = e^{2x}$.

(b) Per trobar una altra solució, fem servir el mètode de reducció d'ordre (o de variació de les constants).

Considerem $y_2 = k(x)e^{2x}$. Imposem que $y_2$ sigui solució de l'equació diferencial. Per simplificar una mica la notació, posem $k = k(x)$. Tenim:

$$y_2' = e^{2x}(2k + k')$$
$$y_2'' = e^{2x}(4k + 4k' + k'').$$

Substituint a l'equació, obtenim

$$x e^{2x}(4k + 4k' + k'') - (2x+1)e^{2x}(2k + k') + 2ke^{2x} = 0.$$

Simplificant,

$$xk'' + (2x-1)k' = 0,$$

o, equivalentment,

$$\frac{k''}{k'} = \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{x} - 2.$$

Integrant a les dues bandes,

$$\ln|k'| = \ln|x| - 2x + C_1.$$

Si aïllem $k'$, ens queda

$$k' = C_2 x e^{-2x}.$$

Integrant per parts, podrem trobar $k$:

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C_3 = -\frac{1}{2} e^{-2x} \big(x + \frac{1}{2}\big) + C_3.$$

Recordem que podem prendre $C_3$ arbitràriament. Així, doncs, triem (per comoditat) $C_3 = 0$. En definitiva

$$k(x) = -C_2 \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Pel principi de superposició, podem donar a $C_2$ el valor que vulguem (sempre que no sigui 0), fem $C_2 = -4$. D'aquesta manera, obtenim

$$y_2 = e^{-2x}(2x+1)e^{2x} = 2x + 1.$$

Per tant, una segona solució pot ser $y_2 = 2x + 1$.

(c) N'hi ha prou a calcular el wronskià:

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & 2x+1 \\ 2e^{2x} & 2 \end{vmatrix} = -4xe^{-2x}.$$

Per a $x \neq 0$, aquest wronskià és diferent de zero i, en conseqüència, ambdues solucions són linealment independents. Recordem que treballem en un interval que no conté el 0, ja que el coeficient de $y''$ és $a_2 = x$ i s'anul·la per a $x = 0$.

(d) La solució general és

$$y = c_1 e^{2x} + c_2(2x+1).$$

La seva derivada és

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 2c_2.$$

De la primera condició inicial, tenim

$$c_1 e^2 + 3c_2 = e^2.$$

I, de la segona,

$$2c_1 e^2 + 2c_2 = e^2.$$

Multiplicant la primera equació per 2 i restant-li la segona, s'obté

$$c_2 = \frac{1}{4}e^2.$$

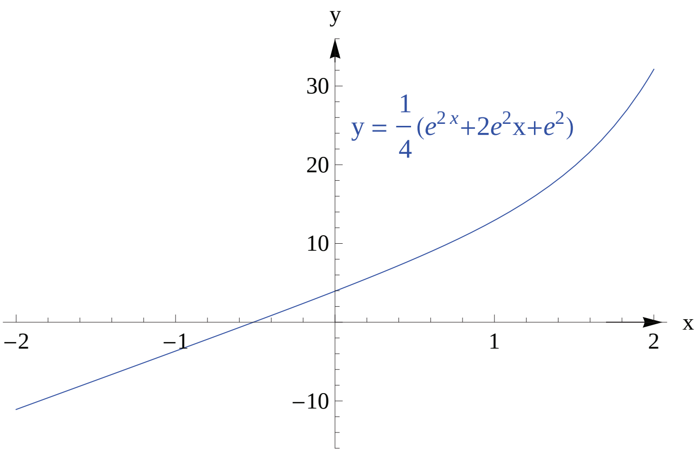
Substituint després, obtenim $c_1 = \frac{1}{4}$.

Per tant, la solució que satisfà les condicions inicials és

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{e^2}{4}(2x+1) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^2x + e^2\right).$$

A la figura 4.9, en veiem la gràfica.

Fig. 4.9
Solució de
$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$
que satisfà
$y(1) = y'(1) = e^2$




**Problema 11.** Una massa de 2 kilos allarga un ressort $61'25$ cm. En $t = 0$, s'allibera la massa des d'un punt situat 10 cm per sota de la posició d'equilibri, amb una velocitat ascendent de 8 cm/s. Determineu-ne l'equació del moviment.

**Resolució**

Per trobar la constant elàstica del ressort, $k$, apliquem la llei de Hooke: $F = -kd$, en què $F$ és la força que hi actua i $d$, l'allargament que es produeix. En el nostre cas, la força és, simplement, el pes. Per tant, serà

$$2 \cdot 980 = 61'25k.$$

Hem considerat $g = 980$ cm/s$^2$. Resolent l'equació anterior, s'obté $k = 32$.

L'equació diferencial que regeix el moviment del ressort és

$$2x''(t) + 32x(t) = 0,$$

on $x(t)$ representa la posició de la massa en cada moment del temps, prenent com a $x = 0$ la posició d'equilibri.

A l'equació diferencial lineal de segon ordre anterior, s'hi han d'afegir les condicions inicials que, en el nostre cas, són $x(0) = 10$ i $x'(0) = -8$.

L'equació característica associada, $\lambda^2 + 16 = 0$, té solucions $\lambda_1 = 4i$ i $\lambda_2 = -4i$. Per tant, la solució general de l'equació diferencial és de la forma

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t.$$

Imposant-ne les condicions inicials, es determinen les constants $c_1$ i $c_2$. És immediat veure que $c_1 = 10$ i $c_2 = -2$.

La posició de la massa en cada moment del temps ve donada per (v. figura 4.10)

$$x(t) = 10 \cos 4t - 2 \sin 4t.$$

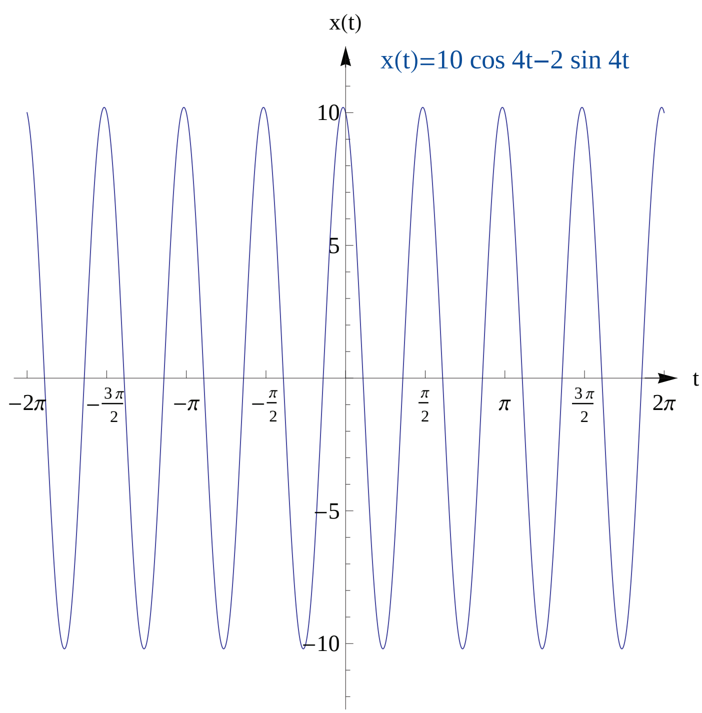



Fig. 4.10
Posició de la massa per a cada *t*

**Nota:** és usual presentar la solució anterior de la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$. Per fer-ho, cal fer servir la fórmula del sinus de la suma de dos angles i igualar-la amb $x(t)$. Fent-ho, s'obté $x(t) = \sqrt{104} \sin(4t + \Phi)$, en què $\Phi \simeq 1'3734$ radians. La constant $A$ s'anomena *amplitud del moviment*. En aquest problema, l'amplitud és $\sqrt{104}$ cm.

## 4.2. Problemes proposats

**1.** Calculeu l'equació diferencial associada al feix de corbes

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x}\cos x + C_5e^{2x}\sin x + C_6xe^{2x}\cos x + C_7xe^{2x}\sin x.$$

**2.** Resoleu les equacions diferencials lineals

(a) $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = 0.$

(b) $y^{(5)} + 3y^{(4)} + y''' - y'' - 4y = 0.$

**3.** Resoleu l'equació $(x+1)y'' - (5x+6)y' + (6x+8)y = 0$ sabent que admet una solució del tipus $y = e^{\lambda x}$.

**4.** Esbrineu la solució general de l'equació diferencial

$$\begin{vmatrix} cccy & e^{-7x} & x^{-1} \\ y' & -7e^{-7x} & -x^{-2} \\ y'' & 49e^{-7x} & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 0.$$

**5.** Resoleu l'equació d'Euler $x^2y'' + 7xy' + 10y = 0.$

**6.** Resoleu l'equació $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ aplicant-hi el mètode de variació de les constants.

**7.** Escriviu el tipus de solució particular que correspon a l'equació diferencial

$$y^{(iv)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = f(x),$$

si

(a) $f(x) = -7.$

(b) $f(x) = (25x^3 - x^2 - 1)e^x.$

(c) $f(x) = e^{2x}\cos x.$

(d) $f(x) = (3x-2)e^x\sin(2x).$

**8.** Siguin $p, q \in \mathbb{R}$ tals que $p^2 + 1 > 2(p+2q)$. Utilitzeu el canvi $x = e^z$ per resoldre els apartats següents:

(a) Demostreu que la solució general de $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ és $y = Ax^{m_1} + Bx^{m_2}$, on $m_1$ i $m_2$ són uns nombres reals determinats.

(b) Suposeu que $\beta \neq m_1, m_2$. Calculeu la solució de $x^2y'' + pxy' + qy = \alpha x^\beta$.

(c) Sigui $\beta = m_1$. Escriviu el tipus de solució general que té l'equació $x^2y'' + pxy' + qy = \alpha x^\beta$.

(d) Resoleu el problema de Cauchy $x^2y'' + 3xy' - 3y = 4x^2$, amb $y(1) = -1$ i $y'(1) = 7$.

**9.** Sigui l'equació diferencial $(3x-7)y''-9(x-2)y'+9y=0$.

(a) Comproveu que $y_1=e^{3x}$ i $y_2=x-2$ són solucions de l'equació anterior.
(b) Demostreu que $y_1$ i $y_2$ són solucions linealment independents.
(c) Calculeu el wronskià de $y_1$ i $y_2$. Avalueu-lo en el punt $x=\frac{7}{3}$. Contradiu aquest resultat cap teorema?

**10.** Demostreu que, si $y_1$ i $y_2$ són solucions de

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x) \quad \text{i} \quad y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x),$$

respectivament, aleshores $y=y_1+y_2$ és solució de l'equació

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x).$$

Com s'anomena aquest resultat?

**11.** Una massa de 2 kg penja d'un ressort que té constant elàstica $k=2$. Suposeu que sobre la massa actua una força esmorteïdora que és cinc vegades la velocitat del moviment. Suposeu també $x(0)=8$ i $x'(0)=-7$. Determineu-ne l'equació del moviment.

## 4.3. Breu resum teòric

**Sobre les solucions de les equacions diferencials lineals**

La diferència de dues solucions de l'equació completa $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ és una solució de l'equació homogènia associada $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

**Principi de superposició per a equacions diferencials lineals i homogènies**

Si $y_1,y_2,\ldots,y_k$ són solucions d'una equació lineal homogènia en $I$, aleshores la combinació lineal

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_k$$

també és solució en $I$, per a qualssevol $C_1,C_2,\ldots,C_k\in\mathbb{R}$.

**Solució general de l'homogènia**

La solució general de l'equació lineal i homogènia d'ordre $n$

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

és

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

on $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ són $n$ solucions linealment independents i $C_1,C_2,\ldots,C_k$ són unes constants qualssevol.

**Equacions lineals homogènies amb coeficients constants**

(A) Ordre 2, $ay'' + by' + cy = 0$. Distingim tres casos segons les arrels de l'equació característica $am^2 + bm + c = 0$.

(1) Dues arrels reals diferents, $m_1$, $m_2$. La solució general és

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.$$

(2) Una arrel real doble $m$. La solució general és

$$y(x) = y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}.$$

(3) Dues arrels complexes conjugades, $\alpha \pm \beta i$. La solució general és

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

(B) Ordre superior, $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, amb $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, constants. Considerem les arrels de l'equació característica

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0.$$

(1) • Per a cada arrel real $m$, amb multiplicitat $k$, hi ha $k$ solucions linealment independents:

$$e^{mx},\ xe^{mx}, \cdots,\ x^{k-1} e^{mx}.$$

Aleshores, cada arrel real contribueix a la solució general amb

$$C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + \cdots + C_k x^{k-1} e^{mx}.$$

• En particular, si l'arrel és simple ($k = 1$), dóna

$$C e^{mx}.$$

(2) • Per a cada parella d'arrels complexes conjugades $a \pm bi$, amb multiplicitat $k$, hi ha $2k$ solucions linealment independents:

$$e^{ax} \cos bx,\ e^{ax} \sin bx,\ xe^{ax} \cos bx,\ xe^{ax} \sin bx, \cdots$$

$$x^{k-1} e^{ax} \cos bx,\ x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

Aleshores, cada parella d'arrels complexes contribueix a la solució general amb

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + xe^{ax}(C_3 \cos bx + C_4 \sin bx) + \cdots +$$

$$+ x^{x-1} e^{ax}(C_{2k-1} \cos bx + C_{2k} \sin bx).$$

• En particular, si la parella té multiplicitat simple ($k = 1$), dóna

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

**Solucions particulars. Mètode dels coeficients indeterminats**

Sigui $ay'' + by' + cy = f(x)$, amb $a, b, c$, constants i, en general,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

(a) $\boldsymbol{f(x) = P_m(x)}$.

- Si 0 no és arrel de l'equació característica,

$$y_p = \overline{P_m}(x).$$

- Si 0 és arrel de l'equació característica amb multiplicitat $k$,

$$y_p = x^k\, \overline{P_m}(x).$$

(b) $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)}$.

- Si $\alpha$ no és arrel de l'equació característica,

$$y_p = e^{\alpha x}\, \overline{P_m}(x).$$

- Si $\alpha$ és arrel de l'equació característica amb multiplicitat $k$,

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\, \overline{P_m}(x).$$

(c) $\boldsymbol{f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x}$. Sigui $s = \max\{m, n\}$.

- Si $\pm\beta i$ no són arrels de l'equació característica,

$$y_p = \overline{P_s}(x) \cos \beta x + \overline{Q_s}(x) \sin \beta x.$$

- Si $\pm\beta i$ són arrels de l'equació característica amb multiplicitat $k$,

$$y_p = x^k \left( \overline{P_s}(x) \cos \beta x + \overline{Q_s}(x) \sin \beta x \right).$$

(d) $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} \left( P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x \right)}$. Sigui $s = \max\{m, n\}$.

- Si $\alpha \pm \beta i$ no són arrels de l'equació característica,

$$y_p = e^{\alpha x} \left( \overline{P_s}(x) \cos \beta x + \overline{Q_s}(x) \sin \beta x \right).$$

- Si $\alpha \pm \beta i$ són arrels de l'equació característica amb multiplicitat $k$,

$$y_p = x^k e^{\alpha x} \left( \overline{P_s}(x) \cos \beta x + \overline{Q_s}(x) \sin \beta x \right).$$

**Principi de superposició per a equacions diferencials lineals no homogènies**

Siguin $y_{p_1}(x)$ i $y_{p_2}(x)$ solucions de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) \text{ i } y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x),$$

respectivament; aleshores, $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ és solució de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

→ 5

# Transformada de Laplace

## 5.1. Problemes resolts

**Problema 1.** El corrent en un circuit elèctric ve donat per l'equació diferencial $\frac{di}{dt} + ai = E(t)$, on $a$ és una constant, $i(t)$ és la intensitat i $E(t)$ és la força electromotriu aplicada. Si $i(0) = 0$, determineu $i(t)$ en els casos següents, essent $E_0$ una constant:

(a) $E(t) = E_0\delta(t-1)$.

(b) $E(t) = E_0\mathscr{U}_1(t)$.

**Resolució**

(a) Apliquem la transformada de Laplace i denotem per $I(p) = \mathscr{L}[i]$:

$$pI(p) + aI(p) = E_0e^{-p}.$$

Aïllant, s'obté

$$I(p) = \frac{E_0e^{-p}}{p+a}.$$

Calculant ara la transformada inversa, es pot determinar la intensitat:

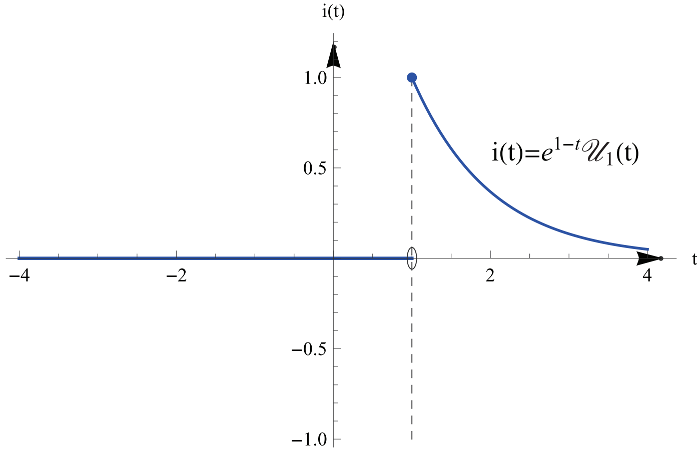
$$i(t) = E_0e^{a(1-t)}\mathscr{U}_1(t).$$

La figura 5.1 mostra la gràfica d'aquesta funció per al cas $a = 1$.

(b) Procedint de manera anàloga a l'anterior, en aquest cas s'obté

$$I(p) = \frac{E_0e^{-p}}{p(p+a)}.$$

Fig. 5.1
Gràfica de
$i(t) = E_0 e^{a(1-t)} \mathscr{U}_1(t)$,
amb $E_0 = a = 1$




El terme de la dreta es pot descompondre en suma de fraccions simples:

$$\frac{1}{p(p+a)} = \frac{1/a}{p} - \frac{1/a}{p+a}.$$

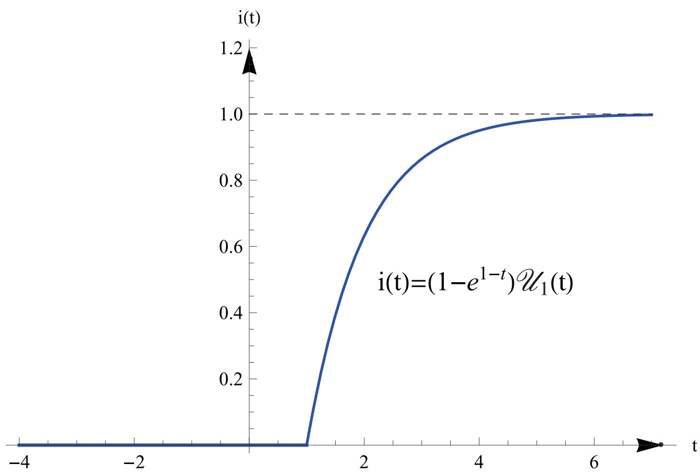
Per tant,

$$I(p) = \frac{E_0}{a} e^{-p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}\right).$$

Aleshores, antitransformant, s'obté (v. figura 5.2)

$$i(t) = \frac{E_0}{a} \left(1 - e^{a(1-t)}\right) \mathscr{U}_1(t).$$

Fig. 5.2
Gràfica de
$i(t) = \frac{E_0}{a}\left(1 - e^{a(1-t)}\right) \mathscr{U}_1(t)$,
amb $E_0 = a = 1$



**Problema 2.** Resoleu el problema de Cauchy $y'' + 2xy' - 4y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

**Resolució**

És una equació diferencial no homogènia amb coeficients no constants. Transformem-la per Laplace i posem-hi $Y(p) = \mathscr{L}[y]$. Atès que els coeficients de l'equació diferencial no són constants, la nova equació transformada també és diferencial.

$$\mathscr{L}[y''] + 2\mathscr{L}[xy'] - 4\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[1] \quad \Longrightarrow$$

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - 2\frac{d}{dp}\Big(\mathscr{L}[y']\Big) - 4Y(p) = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow$$

$$p^2Y(p) - 2\frac{d}{dp}\Big(pY(p) - y(0)\Big) - 4Y(p) = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow$$

$$p^2Y(p) - 2\Big(Y(p) + pY'(p)\Big) - 4Y(p) = \frac{1}{p}.$$

Reordenem els termes i n'obtenim l'equació diferencial lineal (en $Y(p)$ i $Y'(p)$) de primer ordre

$$-2pY'(p) + \left(p^2 - 6\right)Y(p) = \frac{1}{p}.$$

L'escrivim en la forma estàndard per resoldre-la mitjançant factors d'integració:

$$Y'(p) - \frac{p^2-6}{2p}Y(p) = -\frac{1}{2p^2}.$$

Sabem que existeix un factor integrant que és funció de $p$. Anomenem-lo $\mu(p)$. Podem calcular-lo directament:

$$\mu(p) = e^{-\int \frac{p^2-6}{2p}\,dp + K} = e^{\int \left(-\frac{p}{2} + \frac{3}{p}\right)dp + K} = e^{-\frac{p^2}{4} + 3\ln|p| + K}.$$

Per comoditat, prenem $K = 0$ i $\mu(p) = p^3 e^{-p^2/4}$. Ja podem multiplicar per $\mu(p)$ els dos membres de l'equació en la forma estàndard:

$$p^3e^{-p^2/4}Y'(p) - p^3e^{-p^2/4}\frac{p^2-6}{2p}Y(p) = -\frac{p}{2}e^{-p^2/4}.$$

És clar que el membre de l'esquerra és una diferencial exacta. En efecte, és

$$\frac{d}{dp}\Big(\mu(p)Y(p)\Big).$$

Així, doncs,

$$\frac{d}{dp}\left(p^3 e^{-p^2/4} Y(p)\right) = -\frac{p}{2} e^{-p^2/4}.$$

Llavors,

$$d\left(p^3 e^{-p^2/4} Y(p)\right) = -\frac{p}{2} e^{-p^2/4}\, dp.$$

Integrem respecte de $p$ les dues bandes:

$$p^3 e^{-p^2/4} Y(p) = -\int \frac{p}{2} e^{-p^2/4}\, dp + C \quad \Longrightarrow \quad p^3 e^{-p^2/4} Y(p) = e^{p^2/4} + C$$

i n'obtenim

$$Y(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{C}{p^3} e^{p^2/4}.$$

Sabem que, si $Y(p)$ és la transformada de Laplace d'una funció determinada, aleshores,

$$\lim_{p \to +\infty} Y(p) = 0.$$

En el nostre cas, aquesta propietat implica que $C = 0$. Per tant,

$$Y(p) = \frac{1}{p^3}$$

i ja tenim resolta l'equació en l'espai transformat. Per acabar, n'obtenim la solució

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\right] = \frac{x^2}{2}.$$

És fàcil comprovar que la nostra solució satisfà les condicions inicials.

**Problema 3.** Resoleu per Laplace l'equació $f'(x) + 2\int_0^x f(s)\, ds = 2x$, amb la condició inicial $f(0) = 1$.

**Resolució**

En primer lloc, hem de transformar per Laplace aquesta equació. Observem que la integral $\int_0^x f(s)\, ds = \int_0^x 1 \cdot f(s)\, ds$ és la convolució $1 * f$. Per tant, aquest sumand de l'equació queda transformat en $\mathscr{L}[1 * f]$. Pel teorema de convolució, sabem que “la transformada de la convolució és el producte de transformades". En el nostre cas,

$$\mathscr{L}[1 * f] = \mathscr{L}[1] \cdot \mathscr{L}[f].$$

Posem-hi $F(p) = \mathscr{L}[f(x)]$. Aleshores, l'equació transformada és

$$\mathscr{L}[f'] + 2\mathscr{L}[1 * f] = 2\mathscr{L}[x].$$

Per tant,

$$pF(p) - f(0) + 2\mathscr{L}[1] \cdot \mathscr{L}[f] = 2\frac{1}{p^2},$$

és a dir,

$$pF(p) - 1 + 2\frac{F(p)}{p} = \frac{2}{p^2}.$$

A continuació, resolem aquesta nova equació —que no és diferencial, sinó algebraica— en l'espai transformat. La incògnita és $F(p)$. Separem a una banda la $F(p)$ i, a l'altra, la resta de termes.

$$F(p)\left(p + \frac{2}{p}\right) = \frac{2}{p^2} + 1 \quad \Longrightarrow \quad F(p)\,\frac{p^2+2}{p} = \frac{p^2+2}{p^2}.$$

Així, la solució de l'equació transformada és

$$F(p) = \frac{1}{p}.$$

Antitransformem la solució anterior i n'obtenim la solució de l'equació original:

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1.$$

Finalment, comprovem que es compleix la condició inicial. En efecte, $f(0) = 1$.

**Problema 4.** Utilitzeu la transformada de Laplace per trobar la solució de les equacions diferencials següents:

(a) $y' = -y + \mathscr{U}_a(t)$ amb $y(0) = 2$.

(b) $y'' + xy' - y = 0$, amb $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.

**Resolució**

(a) Aplicant la transformada de Laplace a l'equació donada, n'obtenim

$$\mathscr{L}[y'] = -\mathscr{L}[y] + \mathscr{L}[\mathscr{U}_a(t)]$$

és a dir,

$$p\mathscr{L}[y] - y(0) = -\mathscr{L}[y] + \mathscr{L}[1 \cdot \mathscr{U}_a(t)] = -\mathscr{L}[y] + e^{-ap}\frac{1}{p}$$

i, per tant,

$$\mathscr{L}[y] = \frac{e^{-ap}}{p(p+1)} + \frac{2}{p+1}.$$

Apliquem ara l'antitransformada:

$$y=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ap}}{p(p+1)}+\frac{2}{p+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ap}}{p(p+1)}\right]+2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]$$

Descomponem la fracció $\frac{1}{p(p+1)}$ en fraccions simples:

$$\frac{1}{p(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}\Longrightarrow A=1 \text{ i } B=-1.$$

Així,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ap}}{p(p+1)}+\frac{2}{p+1}\right]\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-ap}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\right]+2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-ap}\mathscr{L}\left[1\right]\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-ap}\mathscr{L}\left[e^{-t}\right]\right]+2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]\\
&= \mathscr{U}_a(t)-e^{-(t-a)}\mathscr{U}_a(t)+2e^{-t}\\
&= (1-e^{-t+a})\,\mathscr{U}_a(t)+2e^{-t}.
\end{aligned}$$

O bé,

$$y(t)=\begin{cases}2e^{-t}, & \text{si } \ 0\le t<a,\\ 1-e^{-t+a}+2e^{-t}, & \text{si } \ t\ge a.\end{cases}$$

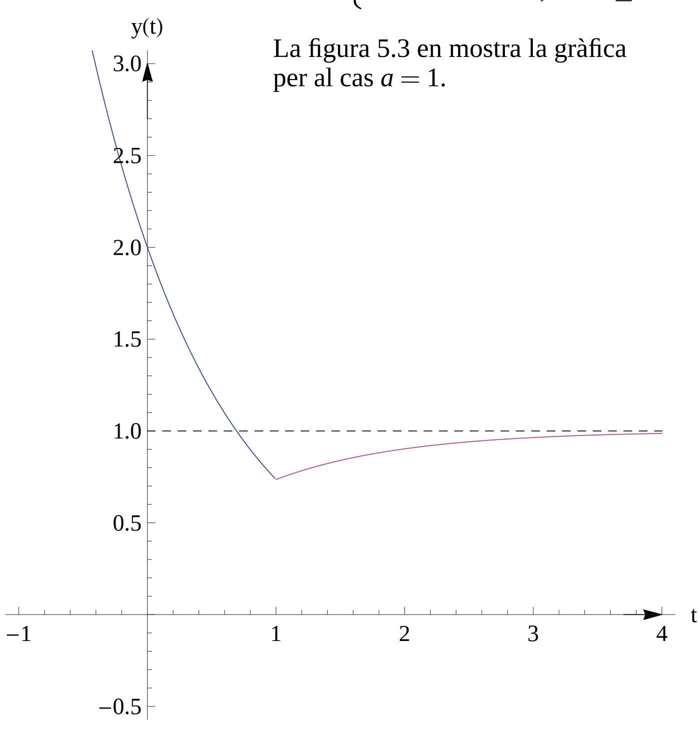



Fig. 5.3
Solució de $y'=-y+\mathscr{U}_a(t)$ amb $y(0)=2$, per al cas particular $a=1$

La figura 5.3 en mostra la gràfica per al cas $a=1$.

(b) Aplicant la transformada de Laplace a l'equació $y'' + xy' - y = 0$, amb $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$, n'obtenim

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[xy'] - \mathscr{L}[y] &= 0 \\
p^2\mathscr{L}[y] - 1 - \frac{d}{dp}\mathscr{L}[y'] - \mathscr{L}[y] &= 0 \\
p^2\mathscr{L}[y] - 1 - \frac{d}{dp}\{p\mathscr{L}[y]\} - \mathscr{L}[y] &= 0 \\
p^2\mathscr{L}[y] - 1 - \mathscr{L}[y] - p\frac{d\mathscr{L}[y]}{dp} - \mathscr{L}[y] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Per abreujar, escrivim $\mathscr{L}[y] = Y$ o bé $\mathscr{L}[y] = Y(p)$ i, llavors, (5.1) s'expressa

$$-pY' + (p^2 - 2)Y = 1 \Longleftrightarrow Y' - \frac{p^2 - 2}{p}Y = -\frac{1}{p}.$$

N'obtenim, doncs, una equació diferencial lineal en $Y$ i $Y'$ que podem resoldre per *factors integrants*, o bé buscant $Y_h$ i $Y_p$. Tant d'una manera com l'altra, n'obtenim la solució

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{c}{p^2}e^{\frac{p^2}{2}}.$$

D'altra banda, perquè $Y(p)$ correspongui a una transformada de Laplace, cal que se satisfaci

$$\lim_{p \to \infty} Y(p) = 0$$

i, donat que

$$\lim_{p \to \infty} \frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2} = \lim_{p \to \infty} \frac{\frac{2p}{2}e^{\frac{p^2}{2}}}{2p} = \infty,$$

ha de ser $C = 0$. Així,

$$\lim_{p \to \infty} Y(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p^2} = 0.$$

Tenim, doncs,

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} = \mathscr{L}[y]$$

és a dir,

$$y(x) = x.$$

**Problema 5.** Calculeu:

(a) $\mathscr{L}\left[e^t t^2 \sin 3t\right]$.

(b) $\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-3p}\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{6}{p^2}+\dfrac{9}{p}\right)\right]$. En aquest cas, expresseu-ne la solució com una funció definida a trossos.

**Resolució**

(a) Aplicant les propietats de la transformada de Laplace, tenim

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[e^t t^2 \sin 3t\right] &= \mathscr{L}\Big[t^2 \underbrace{e^t \sin 3t}\Big] && = \frac{d^2}{dp^2}\mathscr{L}\left[e^t \sin 3t\right] \\
&= \frac{d^2}{dp^2}\mathscr{L}\left[e^t \sin 3t\right]_{p\to p-1} && = \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{3}{(p-1)^2+9}\right] \\
&= \frac{d}{dp}\left[\frac{-3\cdot 2(p-1)}{\left((p-1)^2+9\right)^2}\right] \\
&= \cdots\cdots \\
&= -6\frac{9-3(p-1)^2}{\left((p-1)^2+9\right)^3}.
\end{aligned}$$

Una altra manera, més còmoda de treballar:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[e^t t^2 \sin 3t\right] &= \mathscr{L}\Big[e^t \underbrace{t^2 \sin 3t}\Big] && = \mathscr{L}\left[t^2 \sin 3t\right]_{p\to p-1} \\
&= \frac{d^2}{dp^2}\left(\mathscr{L}\left[\sin 3t\right]\right)_{p\to p-1} && = \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{3}{p^2+9}\right]\Bigg|_{p\to p-1} \\
&= \frac{d}{dp}\left[\frac{-6p}{\left(p^2+9\right)^2}\right]\Bigg|_{p\to p-1} \\
&= \cdots\cdots \\
&= -6\frac{9-3(p-1)^2}{\left((p-1)^2+9\right)^3}.
\end{aligned}$$

(b) Aplicant les propietats de l'antitransformada, obtenim que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-3p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{6}{p^2}+\frac{9}{p}\right)\right]$$

és igual a

$$\mathscr{L}^{-1}\Bigg[e^{-3p}\underbrace{\frac{2}{p^3}}_{\mathscr{L}[x^2]}\Bigg]+6\mathscr{L}^{-1}\Bigg[e^{-3p}\underbrace{\frac{1}{p^2}}_{\mathscr{L}[x]}\Bigg]+9\mathscr{L}^{-1}\Bigg[e^{-3p}\underbrace{\frac{1}{p}}_{\mathscr{L}[1]}\Bigg]=$$

$$3(x-3)^2\mathscr{U}_3(x)+6(x-3)\mathscr{U}_3(x)+9\mathscr{U}_3(x)=\left(3x^2-12x+18\right)\mathscr{U}_3(x).$$

És a dir,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-3p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{6}{p^2}+\frac{9}{p}\right)\right]=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ 3x^2-12x+18, & \text{si} \quad x \ge 3. \end{cases}$$

En tenim la gràfica a la figura 5.4.

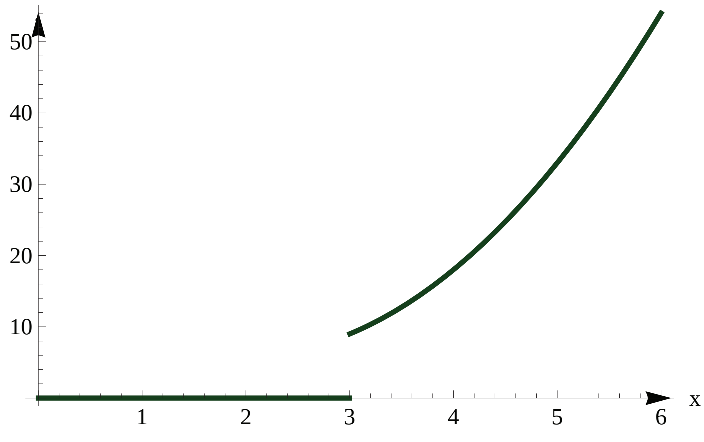



Fig. 5.4
Gràfica de
$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-3p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{6}{p^2}+\frac{9}{p}\right)\right]$

**Problema 6.** Demostreu que, si $f$ és una funció periòdica de període $T$, és a dir, $f(t)=f(t+T)$, aleshores

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt.$$

**Resolució**

Per definició, la transformada de Laplace de $f(t)$ és

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Expressem la integral com a suma de dues integrals: una de 0 fins a $T$ i l'altra de $T$ a $\infty$:

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt+\int_T^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

A la segona integral, fem ara un canvi de variable: $u=t-T$. Tenint en compte que la funció és $T$-periòdica, aquesta segona integral serà

$$\int_T^\infty f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty f(u+T)e^{-s(u+T)}\,du=e^{-sT}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du.$$

Per tant,

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt+e^{-sT}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du.$$

Com que la variable $u$ és una variable muda (és indiferent el nom que tingui), és clar que la darrera integral de l'expressió anterior és, de nou, la transformada de $f$. És a dir,

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt + e^{-sT}\mathscr{L}[f(t)].$$

Aïllant la transformada de $f$, s'obté

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt.$$

**Problema 7.** Considereu un circuit LR, és a dir, un circuit on només hi ha dos components: una resistència i un inductor. L'equació diferencial per a la intensitat del corrent elèctric és

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V(t).$$

Suposeu que la funció d'entrada és l'ona quadrada, definida a l'interval $[0,2)$ per

$$V(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{si } 1 \le t < 2 \end{cases}$$

i, fora d'aquest interval, imposeu que sigui periòdica de període $T = 2$. Suposeu també que $i(0) = 0$. Determineu-ne la intensitat.

**Resolució**

Transformant l'equació per Laplace (i aplicant-hi el resultat del problema anterior referent a les funcions periòdiques), s'obté

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}V(t)\,dt = \cdots = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

Per tant,

$$I(s) = \frac{1/L}{s(s+R/L)} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}}.$$

Calcular l'antitransformada de la funció de la dreta no és trivial. D'una banda, hem de tenir en compte que $e^{-s} < 1$ per a $s > 0$. Aleshores, considerant $-e^{-s}$ com la raó d'una progressió geomètrica de primer terme 1, es té

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - \cdots$$

D'altra banda, podem descompondre la primera fracció en suma de fraccions simples:

$$\frac{1/L}{s(s+R/L)} = \frac{1/R}{s} - \frac{1/R}{s+R/L}.$$

Per tant,

$$I(s) = \left(\frac{1/R}{s} - \frac{1/R}{s+R/L}\right)(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - \cdots).$$

O, equivalentment,

$$I(s) = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) - \cdots\right].$$

Ara, antitransformant terme a terme, s'obté

$$i(t) = \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-k)}\right)\mathscr{U}_k(t).$$

**Problema 8.** El funcionament d'un dispositiu determinat ve modelat per l'equació

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = -3,$$

on la funció $f(t)$ indica les variacions de temperatura i ve donada per

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ t, & \text{si} \quad t \geq 2. \end{cases}$$

Trobeu $y(t)$ i expresseu-la com una funció a trossos.

**Resolució**

Aplicant la transformada de Laplace a l'equació donada, n'obtenim

$$\mathscr{L}[y''(t)] - 3\mathscr{L}[y'(t)] + 2\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \tag{5.2}$$

Observem que $f(t) = t\mathscr{U}_2(t)$. Llavors, tenint en compte les propietats de la transformada i les condicions inicials, l'equació (5.2) es transforma en

$$\begin{aligned} p^2\mathscr{L}[y(t)] - py(0) - y'(0) - 3p\mathscr{L}[y(t)] \ + \ 3y(0) + 2\mathscr{L}[y(t)] &= \mathscr{L}[t\mathscr{U}_2(t)] \\ &= \mathscr{L}[(t-2)\mathscr{U}_2(t)] + \mathscr{L}[2\mathscr{U}_2(t)] \\ &= e^{-2p}\mathscr{L}[t] + 2e^{-2p}\mathscr{L}[1] \\ &= e^{-2p}\frac{1}{p^2} + 2e^{-2p}\frac{1}{p} \end{aligned}$$

per tant,

$$\mathscr{L}[y(t)]\,[\underbrace{p^2 - 3p + 2}_{(p-1)(p-2)}] = e^{-2p}\frac{1}{p^2} + 2e^{-2p}\frac{1}{p} + (p-3)y(0) + y'(0),$$

és a dir,

$$\mathscr{L}[y(t)] = e^{-2p}\frac{1+2p}{p^2(p-1)(p-2)} + \frac{-3}{(p-1)(p-2)}. \tag{5.3}$$

Descomponem les fraccions de l'expressió (5.3) en fraccions simples:

$$\begin{aligned}\frac{1+2p}{p^2(p-2)(p-1)} &= \frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p-1} = \\ &= \frac{Ap(p-2)(p-1)+B(p-2)(p-1)+Cp^2(p-1)+Dp^2(p-2)}{p^2(p-2)(p-1)}\end{aligned}$$

$$\frac{3}{(p-2)(p-1)} = \frac{E}{p-2}+\frac{F}{p-1} = \frac{E(p-1)+F(p-2)}{(p-2)(p-1)}$$

igualem i n'obtenim el valor de les constants:

$$A = \frac{7}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{5}{4}, D = -3, E = 3 \text{ i } F = -3.$$

Aplicant l'antitransformada a l'expressió (5.3), determinem $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2p}\frac{1+2p}{p^2(p-1)(p-2)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-3}{(p-1)(p-2)}\right] \\ &= \frac{7}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2p}\frac{1}{p}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2p}\frac{1}{p^2}\right] - 3\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2p}\frac{1}{p-1}\right] \\ &+ \tfrac{5}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-2p}\frac{1}{p-2}\right] + 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right] - 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] \\ &= \frac{7}{4}\mathscr{U}_2(t) + \frac{1}{2}(t-2)\mathscr{U}_2(t) - 3e^{t-2}\mathscr{U}_2(t) + \tfrac{5}{4}e^{2(t-2)}\mathscr{U}_2(t) + 3e^t - 3e^{2t} \\ &= 3e^t - 3e^{2t} + \left[\frac{7}{4} + \frac{t-2}{2} - 3e^{t-2} + \frac{5}{4}e^{2t-4}\right]\mathscr{U}_2(t). \end{aligned}$$

És a dir (v. figura 5.5),

$$y(t) = \begin{cases} 3e^t - 3e^{2t}, & \text{si} \quad 0 \le t < 2, \\ 3e^t - 3e^{2t} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{t}{2} - 3e^{t-2} + \dfrac{5}{4}e^{2t-4}, & \text{si} \quad t \ge 2. \end{cases}$$

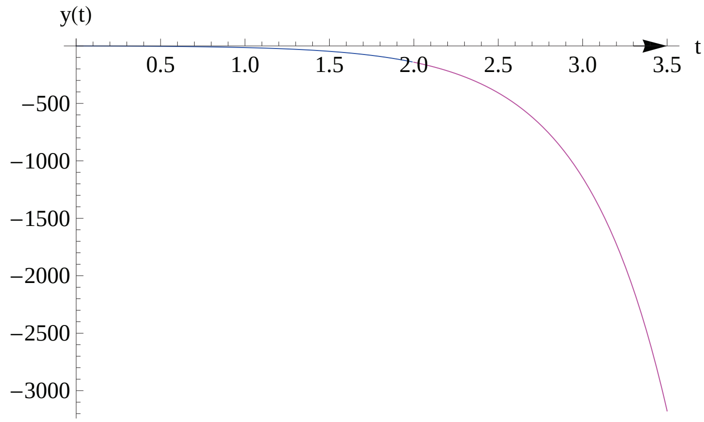



Fig. 5.5
Gràfica de $y(t)$

**Problema 9.** Resoleu el sistema d'equacions diferencials

$$\left.\begin{aligned} y'' - x'' &= 3\delta(t-1) \\ 2x'' + 2y &= 5\delta(t-2\pi) \end{aligned}\right\}$$

amb les condicions inicials $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$. Expresseu-ne les solucions $x(t)$ i $y(t)$ com a funcions definides a trossos.

**Resolució**

Les transformades de les nostres incògnites $x(t)$ i $y(t)$ seran les noves incògnites. Considerem-ne la notació usual:

$$\mathscr{L}[x] = X(p) \ \text{ i } \ \mathscr{L}[y] = Y(p).$$

Transformem les dues equacions del sistema original i n'obtenim el nou sistema

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}[y''] - \mathscr{L}[x''] &= 3\mathscr{L}[\delta(t-1)] \\ 2\mathscr{L}[x''] + 2\mathscr{L}[y] &= 5\mathscr{L}[\delta(t-2\pi)] \end{aligned}\right\}$$

A partir de les propietats de les transformades de Laplace, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - p^2X(p) + px(0) + x'(0) &= 3e^{-p} \\ 2p^2X(p) - 2px(0) - 2x'(0) + 2Y(p) &= 5e^{-2\pi p} \end{aligned}\right\}$$

Hi imposem les condicions inicials i simplifiquem les equacions

$$\left.\begin{aligned} p^2Y(p) - p^2X(p) &= 3e^{-p} + p \qquad &(1) \\ 2Y(p) + 2p^2X(p) &= 5e^{-2\pi p} \qquad &(2) \end{aligned}\right\}$$

A continuació, multipliquem l'equació $(1)$ per 2 i li sumem l'equació $(2)$, per tal d'eliminar-ne $X(p)$. Llavors,

$$2(p^2+1)Y(p) = 6e^{-p} + 5e^{-2\pi p} + 2p.$$

Ara podem aïllar la transformada $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + 3e^{-p}\frac{1}{p^2+1} + \frac{5}{2}e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2+1}.$$

Antitransformem $Y(p)$ mitjançant el segon teorema de translació i les transformades elementals. Aleshores, n'obtenim una de les nostres incògnites:

$$y(t) = \cos t + 3\sin(t-1)\mathscr{U}_1(t) + \frac{5}{2}\sin(t-2\pi)\mathscr{U}_{2\pi}(t) \quad (3).$$

Per obtenir-ne l'altra, aïllem la transformada $X(p)$ a l'equació (1) i la posem en funció de $Y(p)$:

$$p^2X(p) = p^2Y(p) - 3e^{-p} - p \quad \Longrightarrow \quad X(p) = Y(p) - 3e^{-p}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Aleshores, quan antitransformem $X(p)$, podem aplicar-hi directament l'antitransformada de $Y(p)$, és a dir, la $y(p)$ que hem obtingut a $(3)$. Així, doncs,

$$x(t) = y(t) - 3(t-1)\mathscr{U}_1(t) - 1,$$

$$x(t) = -1 + \cos t + 3\left[\sin(t-1) - (t-1)\right]\mathscr{U}_1(t) + \frac{5}{2}\sin t\,\mathscr{U}_{2\pi}(t).$$

Val a dir que hem tingut en compte la $2\pi$-periodicitat de la funció $\sin t$, és a dir, que es compleix $\sin(t-2\pi) = \sin t$.

Finalment, escrivim les solucions com a funcions definides a trossos. Per això, cal ordenar les funcions $\mathscr{U}_a(t)$ que apareixen a les expressions de $x(t)$ i $y(t)$ en sentit creixent del paràmetre $a$. En el nostre cas, ja hem posat primer $\mathscr{U}_1(t)$ i després $\mathscr{U}_{2\pi}(t)$. En efecte, la funció $\mathscr{U}_1(t)$ s'activa a partir de $t=1$, mentre que $\mathscr{U}_{2\pi}(t)$ no ho fa fins a $t=2\pi$ —abans del temps $2\pi$ és nul·la—. La solució demanada és

$$x(t) = \begin{cases} -1+\cos t, & \text{si } 0 \le t < 1, \\ 2+\cos t + 3\sin(t-1) - 3t, & \text{si } 1 \le t < 2\pi, \\ 2+\cos t + 3\sin(t-1) - 3t + \dfrac{5}{2}\sin t, & \text{si } 2\pi \le t, \end{cases}$$

i

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{si } 0 \le t < 1, \\ \cos t + 3\sin(t-1), & \text{si } 1 \le t < 2\pi, \\ \cos t + 3\sin(t-1) + \dfrac{5}{2}\sin t, & \text{si } 2\pi \le t. \end{cases}$$

Les figures 5.6 i 5.7 mostren les gràfiques de $x(t)$ i de $y(t)$.

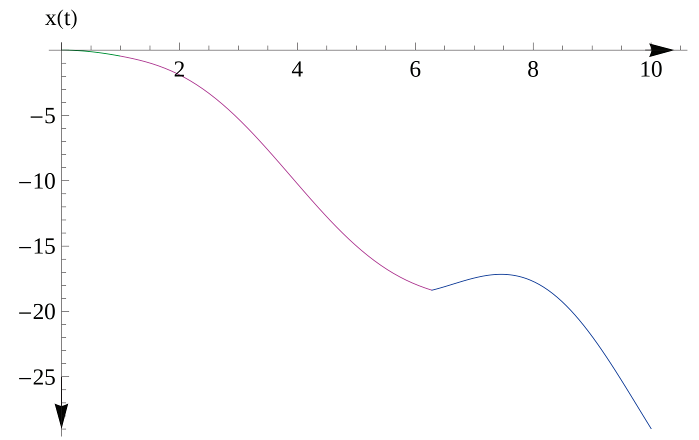



Fig. 5.6
Gràfica de $x(t)$

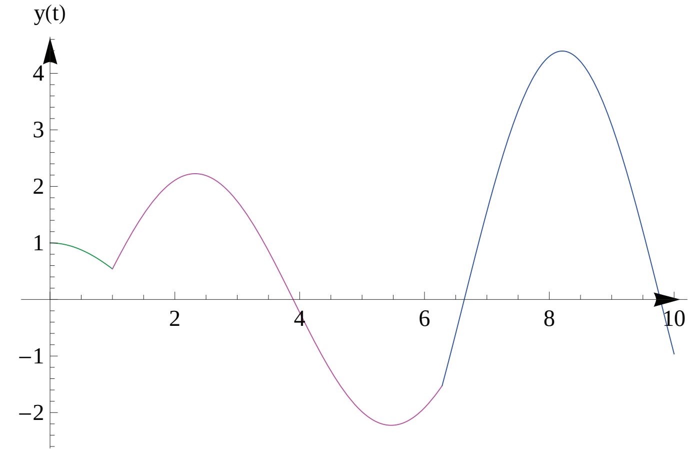



Fig. 5.7
Gràfica de $y(t)$

**Problema 10.** Calculeu

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s-2}\right)\right], \quad s>2.$$

**Resolució**

Sigui $F(s)=\ln\left(\frac{s+1}{s-2}\right)$. Observeu que $F(s)$ satisfà una de les propietats que han de complir les transformades: $\text{lím}_{s\to\infty} F(s)=0$. Per trobar-ne l'antitransformada, fem servir el resultat següent: si $F(s)$ és la transformada de Laplace d'una funció $f(x)$, aleshores

$$F'(s)=-\mathscr{L}\left[xf(x)\right],$$

o, equivalentment, $\mathscr{L}^{-1}\left[F'(s)\right]=-xf(x)$.

Sigui $f(x)$ l'antitransformada de $F(s)$. Com que $F(s)=\ln\left(\frac{s+1}{s-2}\right)=\ln(s+1)-\ln(s-2)$, en el nostre cas tenim

$$F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2} = -\mathscr{L}\left[xf(x)\right].$$

Antitransformant la igualtat anterior, tenim

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}\right] = -xf(x).$$

És fàcil trobar les antitransformades de les fraccions anteriors:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}\right] = e^{-x} - e^{2x}.$$

Per tant,

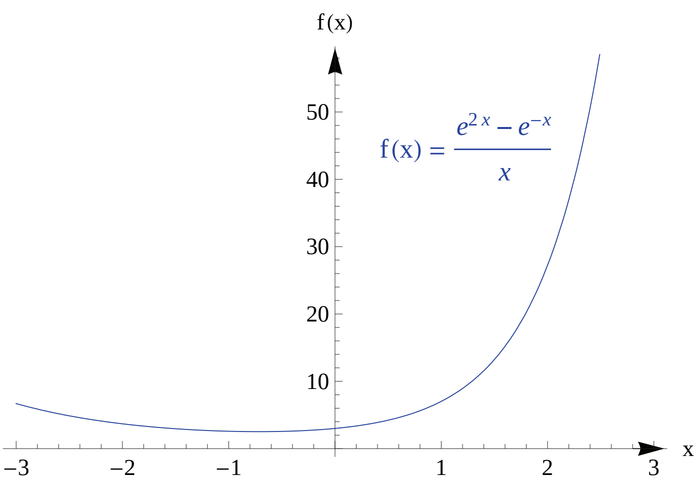
$$e^{-x} - e^{2x} = -xf(x).$$

Aïllant $f(x)$, n'obtenim

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}.$$

A la figura 5.8, en podem veure la gràfica.

Fig. 5.8
Gràfica de
$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s-2}\right)\right]$
per a $s > 2$




**Problema 11.**

(a) Calculeu l'antitransformada de Laplace de $\dfrac{3(1+e^{-\pi s})}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

(b) Resoleu l'equació diferencial de segon ordre $y'' + 4y = f(t)$ amb $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$, on $f(t)$ és la funció

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{si } 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

**Resolució**

(a) Descomponent la part racional de la funció $Y(s)$ en fraccions simples, tenim

$$Y(s) = \frac{3(1+e^{-\pi s})}{(s^2+1)(s^2+4)} = (1+e^{-\pi s})\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{-1}{s^2+4}\right).$$

Multiplicant els dos factors, se n'obtenen quatre termes. L'antitransformada de cadascun d'ells es detalla a continuació:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin(2t),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right] = \sin(t-\pi)\mathscr{U}_\pi(t) = -\sin(t)\mathscr{U}_\pi(t),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin(2(t-\pi))\mathscr{U}_\pi(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\mathscr{U}_\pi(t).$$

Per tant,

$$y(t) = \sin t - \frac{1}{2}\sin(2t) - \sin t\,\mathscr{U}_\pi(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\mathscr{U}_\pi(t).$$

A la figura 5.9, en podem veure la gràfica.

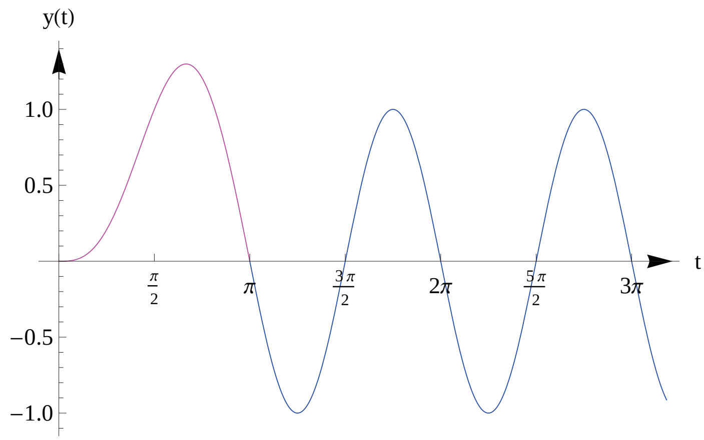



Fig. 5.9
Gràfica de
$y(t) = \sin t - \frac{1}{2}\sin(2t)$
$-\sin t\,\mathscr{U}_\pi(t)$
$-\frac{1}{2}\sin(2t)\mathscr{U}_\pi(t)$

(b) Aplicant la transformada de Laplace a l'equació diferencial, obtenim que

$$\mathscr{L}[y''] + 4\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[f(t)].$$

Anomenem $Y(s)$ la transformada de $y$ i $F(s)$ la de $f$; aplicant-hi la regla per transformar la derivada d'una funció, tenim que

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = F(s),$$

i, per tant,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2+4}.$$

Fent servir la funció salt unitari, podem escriure $f(t)$ com

$$f(t) = \sin t\,\mathscr{U}(t) - \sin t\,\mathscr{U}_\pi(t) = \sin t\,\mathscr{U}(t) + \sin(t-\pi)\mathscr{U}_\pi(t).$$

Aplicant-hi el segon teorema de translació, tenim que

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

i, per tant, $Y(s)$ està donada per

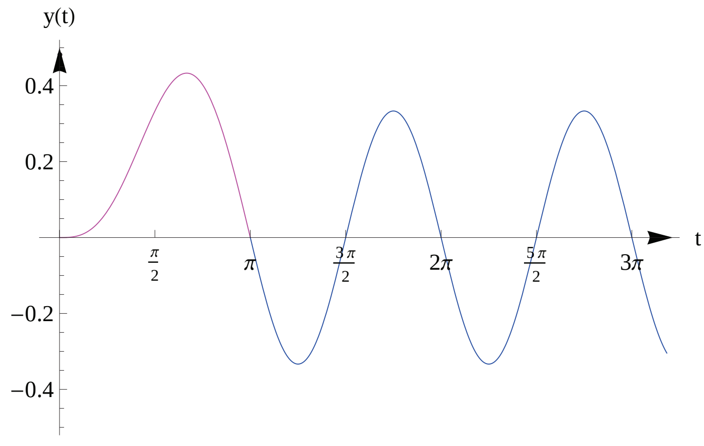
$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)},$$

que és precisament, excepte un factor 3, la funció de la qual el primer apartat demanava l'antitransformada. És a dir, la solució de l'equació és

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t) - \sin t\,\mathscr{U}_\pi(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\mathscr{U}_\pi(t)\right).$$

A la figura 5.10, en podem veure la gràfica.

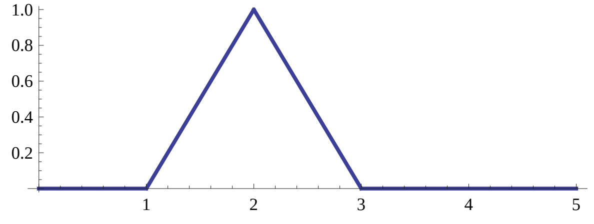
Fig. 5.10
Gràfica de
$y(t) = \frac{1}{3}\Big(\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t)$
$- \sin t\,\mathscr{U}_\pi(t)$
$-\frac{1}{2}\sin(2t)\mathscr{U}_\pi(t)\Big)$




## 5.2. Problemes proposats

**1.** Determineu la transformada de Laplace de la funció $f(x)$ donada per la gràfica de la figura 5.11.

Fig. 5.11
Gràfica d'una determinada funció $f(x)$



**2.** Es defineix la funció *part entera* de $x$, i es denota per $E(x) = [x]$, com el nombre enter més gran que és inferior o igual a $x$ (v. figura 5.12). Determineu la transformada de Laplace de $E(x)$ per a $x \geq 0$.

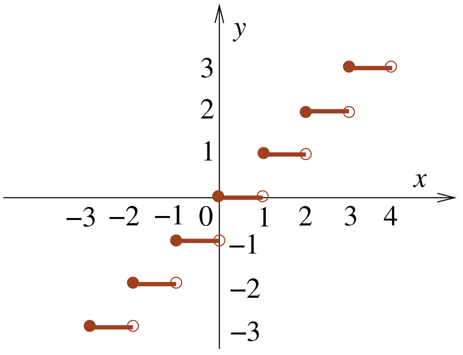



Fig. 5.12
Gràfica de la funció $E(x) = [x]$

**3.** Resoleu per Laplace l'equació diferencial $y'' + 3xy' - 6y = 2$, amb les condicions inicials $y(0) = y'(0) = 0$.

**4.** Calculeu la transformada $\mathscr{L}\left[e^t t^2 \cos(4t)\right]$.

**5.** Per a quins valors de $p$ existeix $F(p) = \mathscr{L}\left[e^{-5x}\right]$?

**6.** Trobeu la transformada de Laplace de la funció

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{si } t \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \\ 0, & \text{si } t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], \end{cases}$$

per a $k$ enter superior o igual a zero.

**7.** Integreu l'equació diferencial $y'' + 4y = \delta(t - 2\pi) - t\mathscr{U}_\pi(t)$, amb les condicions inicials $y(0) = y'(0) = 0$. Escriviu-ne la solució com una funció definida a trossos.

**8.** Trobeu l'antitransformada de la funció

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+3}{s-5}\right).$$

**9.** Resoleu el sistema

$$\left.\begin{aligned} y'' - x'' &= 3\delta(t-1) \\ 2x'' + 2y &= 5\delta(t-2\pi) \end{aligned}\right\}$$

amb les condicions inicials $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**10.** Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x' = -2y + 5z \\ y' = -x - y + 5z \\ z' = 2x - 2y + 3z + e^{-t} \end{cases}$$

amb $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

**11.** Calculeu la solució general de l'equació

$$xf(x) = \int_0^x f(x-t)\,dt + x^2.$$

## 5.3. Breu resum teòric

### Definició de transformada de Laplace

Sigui $f(x)$ una funció definida per a $x \geq 0$. Si la integral impròpia

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx$$

és convergent, s'anomena *la transformada de Laplace de f* i es representa per $\mathscr{L}[f]$ o bé $F(p)$.

### Propietat de linealitat

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ funcions amb transformades de Laplace respectives $\mathscr{L}[f]$ i $\mathscr{L}[g]$. Aleshores,

- $\mathscr{L}[f+g] = \mathscr{L}[f] + \mathscr{L}[g]$,
- $\mathscr{L}[kf] = k\mathscr{L}[f]$, per a tot $k \in \mathbb{R}$.

### Límit d'una transformada

Sigui $F(p)$ la transformada de Laplace d'una funció; aleshores,

$$\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0.$$

### Primer teorema de translació (o fórmula de desplaçament)

Sigui $f(x)$ una funció amb transformada de Laplace $F(p)$; aleshores,

$$\mathscr{L}[e^{ax} f(x)] = F(p-a), \text{ per a tot } a \in \mathbb{R}.$$

### Funció salt unitari

Definim la funció *salt unitari* $\mathscr{U}(x) \equiv \mathscr{U}_0(x)$ com (v. figura 5.14)

$$\mathscr{U}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Sigui $a > 0$. Es defineix la funció $\mathscr{U}_a(x)$ com la translació (v. figura 5.15)

$$\mathscr{U}_a(x) = \mathscr{U}(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq x < a, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq a. \end{cases}$$

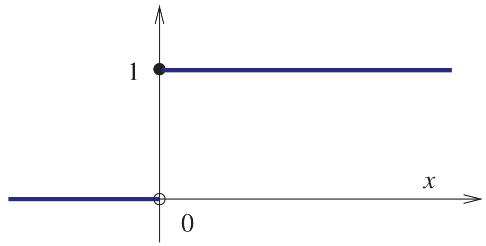



Fig. 5.13
Funció salt unitari $\mathscr{U}(x)$

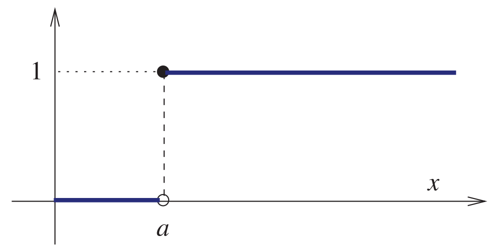



Fig. 5.14
Funció $\mathscr{U}_a(x)$

**Segon teorema de translació**

Siguin $a \geq 0$ i $f(x)$ una funció amb transformada de Laplace. Aleshores,

$$\mathscr{L}\left[f(x-a)\, \mathscr{U}_a(x)\right] = e^{-ap}\, \mathscr{L}\left[f(x)\right].$$

**Funció impuls unitari**

Siguin $t_0 > 0$ i $0 < a < t_0$. Es defineix la funció *impuls unitari* com (v. figura 5.15)

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < t_0 - a, \\ \dfrac{1}{2a}, & \text{si } t_0 - a \leq t < t_0 + a, \\ 0, & \text{si } t \geq t_0 + a. \end{cases}$$

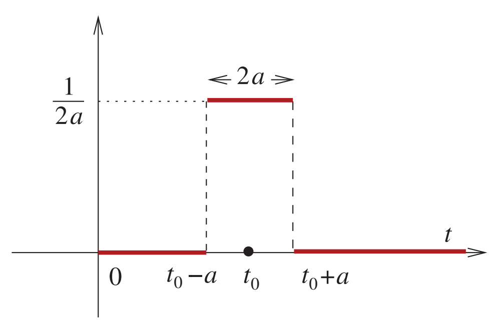



Fig. 5.15
Funció impuls unitari

**Delta de Dirac**

S'anomena funció *delta de Dirac* l'expressió

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t-t_0).$$

**Teorema de convolució**

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ funcions contínues a trossos per a $x \geq 0$ i d'ordre exponencial. Aleshores,

$$\mathscr{L}[f * g] = \mathscr{L}[f] \cdot \mathscr{L}[g].$$

**Transformada d'una funció periòdica**

Sigui $f$ contínua a trossos per a $x \geq 0$ i d'ordre exponencial. Si $f$ és periòdica de període $T$, aleshores

$$\mathscr{L}[f] = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-px} f(x)\, dx.$$

**Transformades de Laplace: $\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$**

- $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{p}$
- $\mathscr{L}[x^n] = \dfrac{n!}{p^{n+1}},\ n = 1,2,3,\cdots$
- $\mathscr{L}\left[x^{-1/2}\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$
- $\mathscr{L}[e^{ax}] = \dfrac{1}{p-a}$
- $\mathscr{L}[\sin ax] = \dfrac{a}{p^2+a^2}$
- $\mathscr{L}[\cos ax] = \dfrac{p}{p^2+a^2}$
- $\mathscr{L}[\sinh ax] = \dfrac{a}{p^2-a^2}$
- $\mathscr{L}[\cosh ax] = \dfrac{p}{p^2-a^2}$
- $\mathscr{L}[x \sin ax] = \dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
- $\mathscr{L}[x \cos ax] = \dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
- $\mathscr{L}[x^2 \sin ax] = \dfrac{6ap^2-2a^3}{(p^2+a^2)^3}$
- $\mathscr{L}[x^2 \cos ax] = \dfrac{2p^3-6a^2p}{(p^2+a^2)^3}$

- $\mathscr{L}[e^{ax} f(x)] = F(p-a)$
- $\mathscr{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} F(p),\ n = 1,2,3,\cdots$
- $\mathscr{L}[f(x-a)\,\mathscr{U}_a(x)] = e^{-ap}F(p),\ a > 0.$
- En particular, $\mathscr{L}[\mathscr{U}_a(x)] = e^{-ap}/p$
- $\mathscr{L}[y'] = pY(p) - y(0),$ on $Y(p) = \mathscr{L}[y]$
- $\mathscr{L}[y''] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$ on $Y(p) = \mathscr{L}[y]$
- $\mathscr{L}\left[y^{(n)}\right] = p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0),$ on $Y(p) = \mathscr{L}[y]$
- $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt\right] = \dfrac{F(p)}{p}$
- $\mathscr{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-pt_0}$

→6

# Solucions dels problemes

## 6.1. Generalitats sobre les equacions diferencials ordinàries

**1.** (a) Sí.
(b) Sí.
(c) No.

**2.** (a) $y' = 1$.
(b) $\left[1 + (y')^2\right]^3 = R^2 (y'')^2$.
(c) $y' = 3x$.
(d) $3y' (y'')^2 = \left[1 + (y')^2\right] y'''$.

**3.** (a) El camp corresponent a $y' = \dfrac{y}{x}$ es mostra a la figura 6.1.

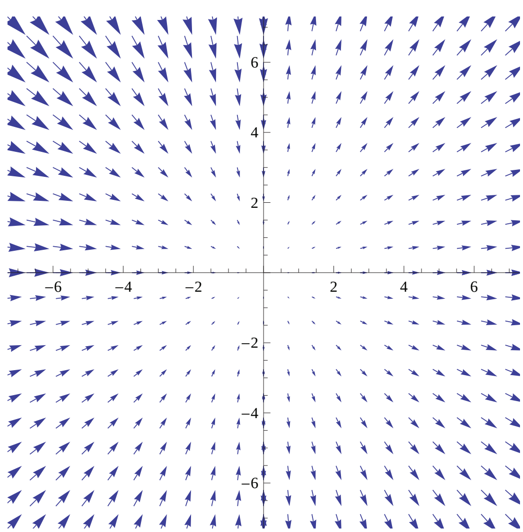
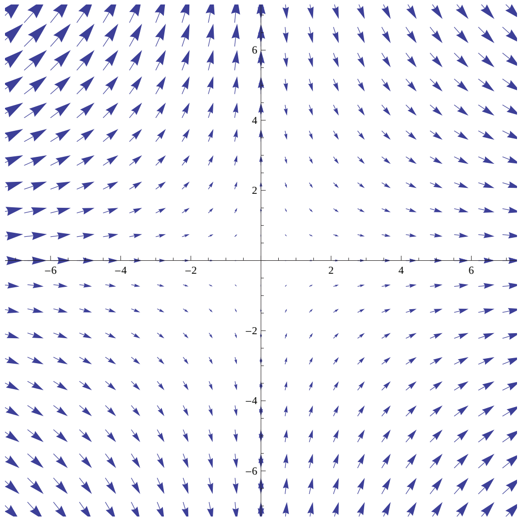



Fig.6.1
Camp donat per $y' = \dfrac{y}{x}$

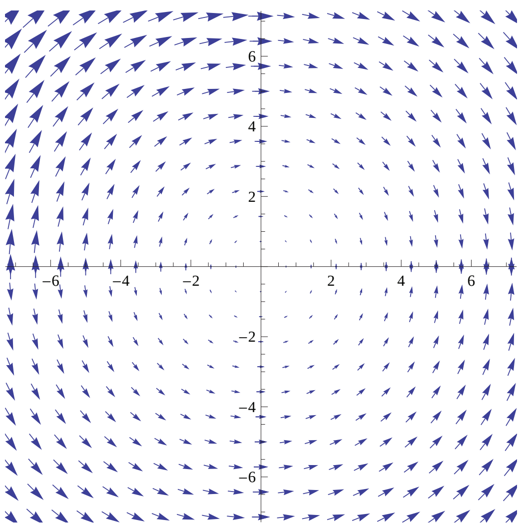
(b) El camp corresponent a $y' = \dfrac{-y}{x}$ s'il·lustra a la figura 6.2.

Fig.6.2
Camp donat per $y' = \dfrac{-y}{x}$




(c) L'esquema del camp corresponent a $y' = \dfrac{-x}{y}$ s'esbossa a la figura 6.3.

Fig. 6.3
Camp corresponent a
$y' = \dfrac{-x}{y}$




**4.** Sí, pel teorema d'existència i unicitat.

**5.** Per demostrar que no hi ha unicitat a l'origen, només cal comprovar que $y_1$ i $y_2$ són dues solucions de l'equació diferencial i que ambdues passen per $(0,0)$. No podem aplicar-hi el teorema d'existència i unicitat perquè les funcions

$$f(x,y) = \frac{3x^5}{y} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ no són contínues en } (0,0).$$

**6.** (a) Equació uniparamètrica: $(x-c)^2+y^2=c^2$, en què $c$ és el paràmetre. L'esbós de la gràfica es mostra a la figura 6.4.

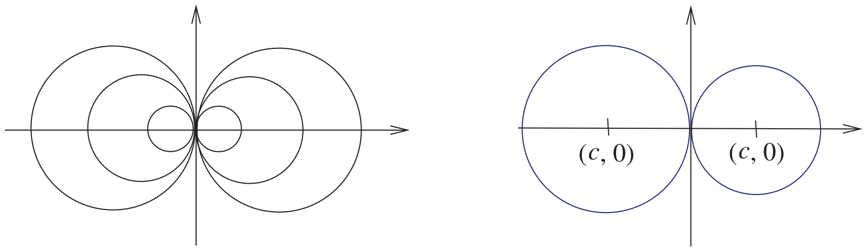



Fig. 6.4
Circumferències tangents a l'eix $OY$ a (0,0)

(b) Equació biparamètrica: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$, en què $a$ i $b$ són els dos paràmetres. En tenim l'esbós de la gràfica a la figura 6.5.

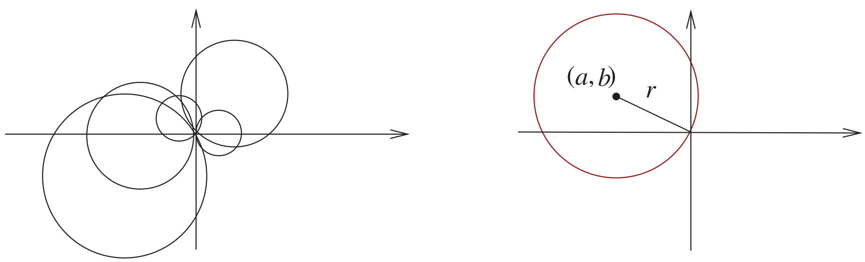



Fig. 6.5
Circumferències que passen per l'origen

**7.** $2(y-xy')\,[1+(y')^2]+y''\,(x^2+y^2)=0$.

**8.** Indicació: podeu derivar el feix de corbes dues vegades i eliminar-ne els dos paràmetres.

**9.** És clar que formen trajectòries ortogonals: les rectes que passen per l'origen tenen la direcció dels diferents radis de les circumferències centrades a l'origen (v. figura 6.6).

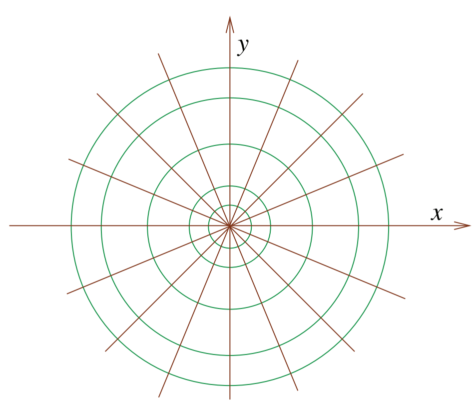



Fig. 6.6
Circumferències centrades a l'origen i les seves normals

**10.** (a) Les rectes que passen per l'origen.
(b) Les cúbiques $y=Cx^3$.
(c) Les exponencials $y=Ce^x$.

**11.** (a) No.
(b) No.
(c) Sí.

## 6.2. Equacions de primer ordre

**1.** $y - x - \ln|3x + y + 1| = C$ i $y = -1 - 3x$.

**2.** $x^2 + 3y\ln x + y^3 = C$.

**3.** $(3x - y)^5(3x + y) = C$.

**4.** $xe^{x+y^2} = C$.

**5.** $y = e^{2x}(x + C)$.

**6.** La solució és la família de corbes $\dfrac{y}{x + e^y} = K$.

**7.** $y = Cx - x^2 + x\ln x$.

**8.** $y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}$.

**9.** $y = C_1x^2 + C_2 + 2x^2\ln x$.

**10.** $y = \frac{1}{1+x+Ce^x}$.

**11.** (a) $-y\,dx + (y^2 - x)dy = 0$.
(b) $(y^2 - x)dx + y\,dy = 0$.
(c) $\mu(x) = e^{2x}$.
(d) $(y^2 - x)e^{2x}\,dx + ye^{2x}\,dy = 0$.
(e) $(2y^2 - 2x + 1)e^{2x} = K$.
(f) $(2y^2 - 2x + 1)e^{2x} = 3$.

## 6.3. Aplicacions

**1.** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-AH^2\sqrt{2gy}}{y^2L^2}$.

**2.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2$.

**3.** $y = 6e^x - 4$.

**4.** $y = 4x^3$.

**5.** Són hipèrboles. De fet, si denotem per $k > 0$ la constant de proporcionalitat, les corbes tenen equació $kx^2 - y^2 = C$.

**6.** La velocitat límit és $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ i l'equació del moviment és $x(t) = \frac{m}{k}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)\right]$, on $k$ és la constant de proporcionalitat corresponent a la resistència del medi.

**7.** Entre les 10 hores 40 min i les 10 hores 49 min.

**8.** A les 7 h 23 minuts.

**9.** És un mirall parabòlic. Hem de fer girar $y^2 = 2xC + C^2$ al voltant de l'eix $OX$.

**10.** La temperatura és de 145°C.

**11.** La corba és de la forma $y = Kx^4$.

## 6.4. Equacions lineals

**1.** $y^{(7)} - 8y^{(6)} + 26y^{(5)} - 40y^{(4)} + 25y''' = 0$.

**2.** (a) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}\cos(3x) + C_4e^{-x}\sin(3x)$.

(b) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x} + C_4\cos x + C_5\sin x$.

**3.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{3x}$.

**4.** $y = C_1e^{-7x} + C_2x^{-1}$.

**5.** $y = C_1x^{-3}\cos(\ln x) + C_2x^{-3}\sin(\ln x)$.

**6.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{2x}\left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]$.

**7.** (a) $y_p = A$.

(b) $y_p = x^2e^x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$.

(c) $y_p = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$.

(d) $y_p = xe^x[(Ax+B)\cos(2x) + (Cx+D)\sin(2x)]$.

**8.** (a) Indicació: $m_1 = \dfrac{1}{2}\left[1 - p + \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right]$, $m_2 = \dfrac{1}{2}\left[1 - p - \sqrt{(p-1)^2 - 4q}\right]$.

(b) $y = Ax^{m_1} + Bx^{m_2} + \dfrac{\alpha}{\beta^2 + (p-1)\beta + q}x^\beta$.

(c) $y = Ax^{m_1} + Bx^{m_2} + Cx^\beta\ln x$.

(d) $y = \dfrac{-9}{5}x^{-3} + \dfrac{4}{5}x^2$.

**9.** (a) Només cal derivar i substituir les funcions.

(b) Vegeu que $\frac{y_2}{y_1}$ no és constant.

(c) $W(x-2, e^{3x}) = 3x - 7$. $W(x-2, e^{3x})(\frac{7}{3})$. No contradiu cap teorema. Precisament per a $x = \frac{7}{3}$ s'anul·la el coeficient $a_2(x) = 3x - 7$ i hem de considerar un interval en què $a_2(x) \neq 0$.

**10.** Només cal derivar les possibles solucions i substituir-ne els resultats a l'equació diferencial. S'anomena *principi de superposició per a equacions lineals no homogènies*.

**11.** $x(t) = 6e^{-t/2} + 2e^{-2t}$.

## 6.5. Transformada de Laplace

**1.** La funció es pot escriure com

$$f(x) = (x-1)\mathscr{U}_1(x) + (4-2x)\mathscr{U}_2(x) + (x-3)\mathscr{U}_3(x).$$

I la seva transformada és

$$F(p) = \frac{e^{-p} + e^{-3p} - 2e^{-2p}}{p^2}.$$

**2.** Indicació: la funció $E(x)$ es pot escriure com la suma de funcions de salt unitari. La seva transformada és

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-p}}.$$

**3.** $y(x) = x^2$.

**4.** Podem escriure

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[e^t t^2 \cos(4t)\right] &= \mathscr{L}\left[t^2 \cos(4t)\right]_{p\to p-1} = \frac{d^2}{dp^2}\mathscr{L}\left[\cos(4t)\right]_{p\to p-1} \\ &= \cdots \\ &= \frac{2(p-1)[(p-1)^2-48]}{[(p-1)^2+16]^3}. \end{aligned}$$

**5.** Apliqueu-hi la definició i comproveu que la integral impròpia només és convergent per a $p > -5$. Per tant, $F(p) = \mathscr{L}\left[e^{-5x}\right]$ té sentit si $p > -5$.

**6.** $F(s) = \dfrac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(1+s^2\right)}$.

**7.** $y(t) = -\left[\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{4}(t-\pi) - \dfrac{\pi}{4}\cos(2t-2\pi) - \dfrac{1}{8}\sin(2t-2\pi)\right]\mathscr{U}_\pi(t) +$

$+\dfrac{1}{2}\sin[2(t-2\pi)]\mathscr{U}_{2\pi}(t)$,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t < \pi, \\ -\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{4}\cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t), & \text{si } \pi \le t < 2\pi, \\ -\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{4}\cos(2t) + \frac{5}{8}\sin(2t), & \text{si } 2\pi \le t. \end{cases}$$

**8.** Indicació: si $F(s)$ és la transformada de Laplace d'una funció $f(x)$, aleshores $F'(s) = -\mathscr{L}\left[xf(x)\right]$. Aplicant aquest resultat (vegeu el problema resolt número 10), s'obté

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{e^{5x} - e^{-3x}}{x}.$$

**9.** $x(t) = -1 + \cos t + 3\,[\sin(t-1) - (t-1)]\,\mathscr{U}_1(t) + \frac{5}{2}\sin t\,\mathscr{U}_{2\pi}(t)$.

$y(t) = \cos t + 3\sin(t-1)\mathscr{U}_1(t) + \sin t\,\mathscr{U}_{2\pi}(t)$.

**10.** $x(t) = y(t) = \dfrac{-5}{4}e^{-t} + e^{-2t} + \dfrac{1}{4}e^{3t}$, $z(t) = \dfrac{-1}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^{3t}$.

**11.** $f(x) = 2x + C$.

# Bibliografia

Boyce, W.; Di Prima, R. *Ecuaciones diferenciales*. Mèxic: Limusa-Wiley, 2010.

Kiseliov, A.; Krasnov, M.; Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Moscou: Mir, 1979.

Rojo, J.; Novo, S.; Obaya, R. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. Madrid: McGraw-Hill, 1995.

Simmons, G. F.; Krantz, S. G. *Ecuaciones diferenciales*. Mèxic: McGraw-Hill, 2007.

Zill, D. G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Madrid: Thomson, 2007.