Capítol 5

El cas on permetem errors

Havent estudiat els dos problemes dels capítols 3 i 4 vam pensar en què passaria si no fóssim tan estrictes amb el concepte de solució i acceptéssim solucions aproximades. En concret, ens permetrem el luxe de recobrir o envoltar algun 0 barrejat entre els 1 que formen la solució.

El capítol resta dividit en dues seccions que tracten el problema de recobriment amb rectangles i el de l'envolupant amb poligonals tancades respectivament.

5.1 Utilitzant Rectangles

En aquesta secció ens ocupem del problema de recobriment amb rectangles, en aquest cas acceptant solucions que cometin algun error. Entenent com errors només els 0 classificats com a 1, però en cap cas ens conformarem amb solucions en les que algun 1 hagi estat classificat com a 0.

Després d'aquestes consideracions podem definir formalment el problema:

RECTILINIAR PICTURE COMPRESSION WITH ERRORS
Instance: Una matriu booleana B, $n \times n$ i un enter positiu. k
Parameters: k i s
Question: Existeixen k rectangles que cobreixin tots els 1 i com a molt s 0 de B?

Admetem doncs, s errors, s 0 inclosos dins d'algun dels rectangles que formen la solució.

Per tal d'estudiar la complexitat d'aquest problema, ens hem preguntat si, havent resolt el problema sense errors, podíem convertir un 0 de la matriu en un 1 de manera prou intel·ligent com per necessitar menys rectangles. El resultat d'aquest plantejament l'enunciem en forma de lema:

Lema 5.1.1 *Sigui B una matriu booleana que es pot recobrir amb k rectangles i no amb menys. Si convertim s 0 de B en 1, necessitarem almenys $k' = max\{k - 3s, 0\}$ rectangles per cobrir tots els 1 de B.*

Demostració

Cal que el recobriment sigui òptim perquè quan eliminem un rectangle, si aquest rectangle simplement estigués repetit, podríem eliminar el mateix rectangle varies vegades i això ens impediria donar una fita assolible pels rectangles que ens estalviem.

Observem que canviar un 0 per un 1 no tindrà cap influencia sobre els rectangles que no estaven en contacte amb el 0 commutat. Aquest fet és trivial perquè el nou 1 no pot afectar en absolut la forma dels rectangles que no estan en contacte amb ell.

Voldria destacar també que l'aparició d'un 1 no pot fer desaparèixer cap rectangle, en tot cas, pot eliminar la diferència entre dos rectangles o més que passin a convertir-se en un de sol.

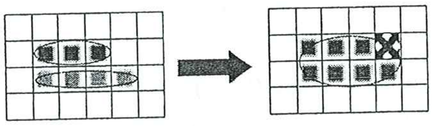

Figura 5.1: Exemple de fusió de dos rectangles en un

De tots els rectangles que aconseguim ajuntar en un de sol commutant un 0, no n'hi pot haver dos en el mateix costat. Fixem-nos que, si tenim dos rectangles que, per exemple, estan per sobre del 0 que volem commutar, han de diferir com a mínim en una posició per raons d'optimalitat. Aquesta diferencia que els distancia no pot quedar solventada de cap manera commutant un 0 que ambdós rectangles tenen per sota seu (tal i com podem observar en l'exemple 5.2 en el que la casella marcada amb una X no ens permet fusionar els dos rectangles, ens caldria commutar el valor de la casella marcada amb una estrella que té els rectangles en costats diferents).

El conjunt de les tres observacions anteriors ens diu que com a molt podem aconseguir ajuntar quatre rectangles en un de sol commutant un 0 (un per cada costat del 0). En la figura 5.3 podem observar que aquest màxim és realitzable mitjançant l'exemple mostrat.

Per cada 0 commutat, si tenim sort i convertim quatre rectangles en un de sol, ens faran falta 3 rectangles menys per cobrir els 1. Si ho aconseguim amb cada 0 que commutem, en tindrem prou amb $k - 3s$ rectangles per cobrir tots els 1 de B.

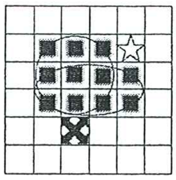

Figura 5.2: Exemple impossibilitat de fusionar dos rectangles al mateix costat del 0

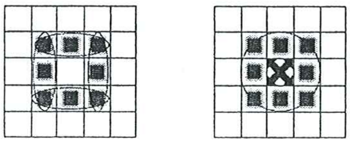

Figura 5.3: Exemple òptim

Els casos degenerats ens obliguen a afegir el màxim en la fórmula. Per exemple una matriu de 0 que no necessita cap rectangle per ser recoberta no pot reduir més el número de rectangles del seu recobriment.

□

Utilitzant aquest lema podem construir un kernel pel problema seguint el mateix esquema del capítol anterior:

Teorema 5.1.2 *El problema de recobrir matrius booleanes amb k rectangles acceptant s errors admet un kernel de mida $2(k + 3s) + 1$.*

Demostració Si podem cobrir una matriu amb k rectangles acceptant s errors, pel lema anterior (5.1.1) sabem que si no acceptéssim aquests errors necessitaríem com a molt $k + 3s$ rectangles per cobrir la matriu.

Dit això, convertim l'entrada pel problema en el que acceptem errors $[B, (k, s)]$ (on B és la matriu booleana, s el nombre d'errors que acceptem i k el número de rectangles que podem utilitzar), en una entrada pel que no n'acceptem $[B', k']$ fent la següent transformació:

- $B' = B$
- $k' = k + 3s$

Pel teorema 3.1.3, el problema $[B', k']$ accepta un kernel de mida $2k' + 1$ i per tan, el problema $[B, (k, s)]$ accepta un kernel de mida $2(k + 3s) + 1$.

□

5.2 Utilitzant Arestes

Analitzarem ara el problema d'envoltar els 1 de la matriu amb poligonals tancades. D'igual manera que en el cas en el que usàvem rectangles acceptarem alguns errors, errors que seran 0 classificats com a 1 però no al revés. Formalment descriurem el problema com:

POLIGONAL PICTURE HULL COVER WITH ERRORS
Instance: Una matriu booleana $n \times n$ que anomenarem B i un enter positiu k
Parameters: k i s
Question: Podem trobar una seqüència S amb k vèrtexs que sigui una envolupant de B acceptant s errors?

La solució d'aquest problema és francament molt similar a la proposada utilitzant rectangles. Primer resolem el problema sense admetre errors i llavors estudiem si podem millorar la solució acceptant algun error. D'igual manera que amb els rectangles, ens preguntarem quants vèrtexs menys necessitem al convertir un 0 de la matriu en un 1.

Qualsevol 0 que hi hagi a la matriu, com a molt estarà en contacte amb quatre vèrtexs diferents de l'envolupant i per tant, si la solució sense errors necessita de k vèrtexs en l'envolupant, la solució amb un error en necessitarà almenys $k - 4$. Generalitzant, la solució admetent s errors necessitarà almenys $k - 4s$ vèrtexs.

Per tal de no deixar lloc a dubtes, voldria comentar un cas que tot i que no enterboleix aquest raonament podria semblar que necessita d'un estudi més detallat. Recordem que els vèrtexs que formen part de la solució poden ser dobles perquè poden ser recorreguts dues vegades. Aquests vèrtexs s'anomenen vèrtexs degenerats i, tal com mostra la primera matriu de la figura 5.5, l'envolupant podria necessitar passar dues vegades pel mateix vèrtex per tal d'envoltar aquesta forma (però no més de dues vegades).

La pregunta que ens ve al cap al fixar-nos en aquesta situació és si podria ser que canviant un únic 0 reduíssim el nombre de vèrtexs necessaris en 8 (els quatre vèrtexs del 0 que acceptem com error contats dues vegades perquè són vèrtexs degenerats)?

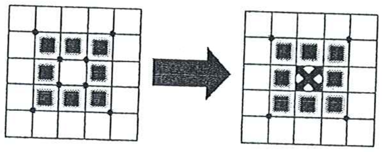

Figura 5.4: Exemple òptim

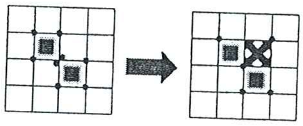

Figura 5.5: Exemple de conversió un vèrtex degenerat en un vèrtex simple

La resposta és que no, els vèrtexs degenerats, en el millor dels casos es poden arribar a convertir en vèrtexs simples perquè tot i que el grau d'incidència d'un vèrtex degenerat és quatre, tan sols dues d'aquestes arestes poden envoltar el 0 que convertirem en un 1. Així doncs, canviant el 0, com a molt eliminarem dos de les arestes incidents en el vèrtex degenerat convertint-lo en un vèrtex simple.

A continuació formalitzem aquest raonament a través d'un lema:

Lema 5.2.1 *Sigui B una matriu booleana que té una envolupant S de mida k i aquesta k és la mínima possible. Si convertim s 0 de B en 1, necessitarem almenys $max\{k-4s, 0\}$ vèrtexs per cobrir tots els 1 de B.*

A partir d'aquest lema podem construir un kernel pel problema seguint exactament el mateix esquema de la secció anterior:

Teorema 5.2.2 *El problema d'envoltar els 1 d'una matriu booleana utilitzant k vèrtexs acceptant s errors admet un kernel de mida $\frac{k+4s}{2}+1$*

Demostració Si podem envoltar els 1 d'una matriu utilitzant k vertexs accepteant s errors, pel lemma (5.2.1) sabem que si no acceptéssim aquests errors necessitaríem com a molt $k+4s$ vèrtexs en l'envolupant la matriu.

Dit això, convertim l'entrada pel problema en el que accpetem errors $[B,(k,s)]$ (on B és la matriu booleana, s el nombre d'errors que acceptem i k el número de rectangles que podem utilitzar), en una pel que no n'acceptem $[B',k']$ de la següent manera:

- $B' = B$
- $k' = k + 4s$

Pel teorema 4.1.7, el problema $[B',k']$ accepta un kernel de mida $\frac{k'}{2}+1$ i per tan, el problema $[B,(k,s)]$ accepta un kernel de mida $\frac{k+4s}{2}+1$.

$\square$

Capítol 6

Relació entre el problema de recobriment i el d'envolupant

L'últim problema que abordarem és el d'analitzar comparativament les dues aproximacions proposades en els capítols 3 i 4 per descriure matrius booleanes. El criteri pel que ens regirem serà el d'espai, de l'espai en memòria que ocupa la descripció de la matriu.

Comencem amb una relació que apareix creuant les fites demostrades pels dos plantejaments proposats. Ja que, l'espai en memòria depèn directament del número de rectangles en el problema de REPICO i del número de vèrtexs en el POPICO

Lema 6.0.3 *Sigui B una matriu booleana de dimensions $n \times n$. Siguin α, el nombre de vèrtexs que formen l'envolupant dels uns de B i γ el nombre de rectangles que formen el recobriment de dels uns de B. Llavors es compleixen les següents relacions:*

a.) $\alpha \leq 4\lceil\frac{(2\gamma+1)^2}{2}\rceil$

b.) $\gamma \leq \lceil\frac{(\frac{\alpha}{2}+1)^2}{2}\rceil$

Demostració La demostració és conseqüència dels límits superiors i inferiors dels dos problemes.

a.) Comencem suposant que la matriu necessita de γ rectangles per ser recoberta. El teorema 3.1.3 ens assegura que la matriu reduïda de B, β, té unes dimensions no superiors a $2\gamma + 1 \times 2\gamma + 1$. El teorema 4.2.1 ens permet dir que el nombre de vèrtexs que podem necessitar com a màxim per envoltar una matriu amb aquestes dimensions és $4\lceil\frac{(2\gamma+1)^2}{2}\rceil$.

b.) L'altra desigualtat es demostra de manera similar. Si necessitem α vèrtexs en l'envolupant de B, el teorema 4.1.7 ens diu que la matriu reduïda de B, β, té com a molt $\frac{\alpha}{2} + 1 \times \frac{\alpha}{2} + 1$ elements. El teorema 3.2.1 ens permet afirmar que com a molt, en

β caven $\lceil \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)^2}{2} \rceil$ rectangles. Per tant, el nombre de rectangles γ satisfà la desigualtat $\gamma \leq \lceil \frac{(\frac{\alpha}{2}+1)^2}{2} \rceil$ que ens demostra la segona desigualtat.

Ajuntant els dos resultats obtenim la demostració que estàvem buscant.

□

Ara bé, aquest resultat, tot i que natural a partir dels apartats anteriors, dista molt de ser útil. És una fita massa generosa per treure'n alguna conclusió. Nosaltres voldríem alguna fita que ens permetés assegurar quina de les dues descripcions de matrius booleanes ocuparà menys espai en memòria i les fites anteriors no ens ho permeten.

Arribats a aquest punt vam plantejar la següent conjectura $\gamma \leq \frac{\alpha}{2}$. Una fita fantàstica perquè decantaria la discussió a favor del recobriment de rectangles. Recordem que per cada rectangle necessitem guardar en memòria la posició de dos dels vèrtexs oposats del rectangle, així que si per guardar l'envolupant necessitéssim, com a mínim, dos punts per rectangle, ens sortiria sempre més barat utilitzar recobriments per rectangles.

Aquesta conjectura prové de l'estudi de matrius que tenen els 1 col·locats en forma d'escala. En la figura 6.1, podem comprovar que en una escala necessitem tants rectangles com esglaons té l'escala. Si considerem l'envolupant de la figura, necessitem 2 vèrtexs en cada esglaó més els dos vèrtexs de la base.

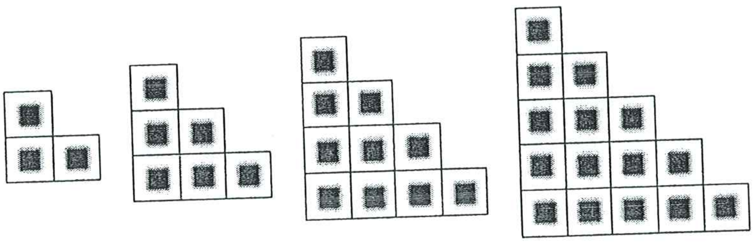

Figura 6.1: Matrius amb els 1 en escala

En un primer estadi vam estar considerant la següent desigualtat $\gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}$ que prové del cas de les escales. Finalment vam desestimar el -1 quan vam trobar un exemple que satisfeia la igualtat $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Aquest exemple és el mateix que hem fet servir per demostrar els kernels quan acceptem errors, la figura 5.3. És un exemple en el que tenim 4 rectangles i 8 vèrtexs.

Fixada la conjectura, els primers intents per resoldre-la van ser infructuosos: Primer vam intentar atacs estructurals al problema basats en la hipòtesi que els 1 de la matriu havien de tenir a la força un vèrtex convex (un vèrtex convex és aquell que només té 1 en una sola direcció, en la part dreta de la figura 6.2 la direcció sud-oest). En les primeres demostracions la idea era que al eliminar el rectangle al que pertanyia aquest vèrtex estàvem eliminant un vèrtex, si aconseguíem demostrar que qualsevol dels altres vèrtex del rectangle també desapareixia aconseguíem la ràtio de 2 a 1 que ens interessava.

Tal i com podem veure en la part esquerra de la figura 6.2, tot i que la hipòtesi sembla versemblant, el vèrtex en qüestió no té perquè desaparèixer a l'eliminar el rectangle perquè pot pertànyer a dos rectangles diferents.

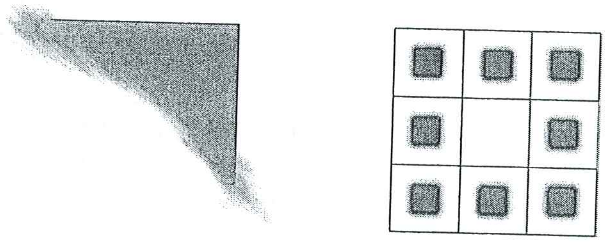

Figura 6.2: Exemples de vèrtexs convexos

El següent intent va ser una demostració per inducció en la que estudiàvem que passava quan eliminàvem un rectangle. Altra vegada, l'exemple dels kernels en que acceptem errors ens mostrava una de les dificultats més importants. Nosaltres volíem demostrar que a l'eliminar un rectangle desapareixien almenys dos vèrtexs, però en la figura 5.3, qualsevol rectangle que trèiem ens fa aparèixer dos vèrtexs!.

Tot i aquest impediment, encara vam provar de fer una inducció en la que el salt fos de dos en dos ja que donava la sensació que si eliminant un rectangle apareixien nous vèrtexs, això volia dir que, en un següent pas podriem eliminar més de dos vèrtexs. Amb aquesta idea en ment vam generar totes les possibles configuracions de matrius booleanes 2×2 (llevat de simetries) per demostrar el cas base (figura 6.3). Després vam desestimar la demostració pel ventall de possibilitats que trobàvem a l'eliminar dos rectangles arbitraris de la matriu on, a més, volíem demostrar que redueïen el nombre de vèrtexs necessaris.

També vam generar totes les configuracions possibles de matrius 3×3 i 4×4 per veure si això ens inspirava. No reprodueixo aquí aquestes configuracions perquè hi ha una gran quantitat de casos i finalment ens van aportar molt poc. A més, tal i com vam descobrir per casualitat, qualsevol exemple que resolgués la conjectura necessitava d'una matriu 5×5 per representar-se.

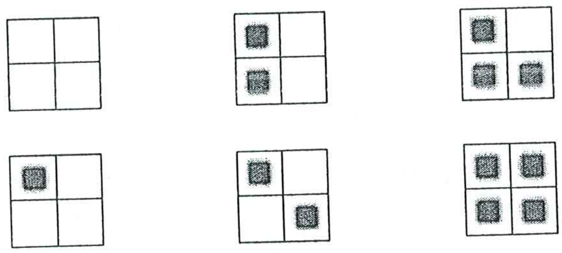

Figura 6.3: Cas base inducció

Malauradament, després de 15 dies intentant demostrar la conjectura, no només no la vam demostrar sinó que a més la vam refutar. En la figura 6.4 podem observar un contraexemple que necessita un recobriment de com a mínim 7 rectangles i tan sols 12 punts en la seva enolupant, clar exemple que $\gamma \leq \frac{\alpha}{2}$ no té perquè ser cert.

Amb aquest resultat negatiu acabem el capítol, esperàvem demostrar que un dels dos plantejaments proposats era millor que l'altre i hem acabat trobant exemples en que utilitzar rectangles ens proporciona solucions molt millors de la mateixa manera que hem trobat exemples en els que les solucions utilitzant envolupants ocupen molt menys lloc. Probablement, completar aquest capítol amb resultats que ens permetessin classificar en quines situacions és millor una aproximació o l'altre necessitaria de tot un altre treball de final de carrera.

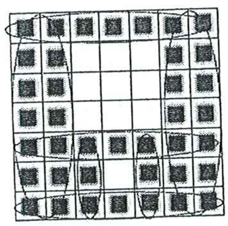

Figura 6.4: Contraexemple

Capítol 7

Balanç Econòmic

A l'hora d'escriure el balanç econòmic, com que ens trobem davant d'un treball teòric, no hem necessitat: ni maquetes, ni hores de càlcul de cap ordinador, ni materials. Les úniques despeses han estat: una vintena de bitllets de metro per acostar-me a la UPC, la gens despreciable matrícula del projecte i el cost d'impressió.

És a dir, l'únic a facturar són les hores de feina dedicades al treball. Sense cap ànim de menys valorar la feina feta per la Maria José Serna i en Dimitrios Thilikos, crec que el pes de la seva aportació sobre el total d'hores dedicades és prou petit per no tenir-lo en compte. És per això que em permetré el luxe de parlar en primera persona a partir d'aquí.

Han estat al voltant de 700 hores dedicades al projecte. D'aquestes: al voltant de 250 dedicades a documentar-me sobre el tema, unes 50 utilitzades en entrevistes amb els tutors del treball, 300 realitzant les demostracions a llapis i 100 invertides en escriure el projecte.

Com que ningú em pagarà aquestes hores de feina, presentaré 3 totals diferents basats en 3 preus per hora que descriuré a continuació:

- El primer preu per hora correspon al sou de becari de doctorat de la UPF. Trio aquest primera minuta perquè he estat becat a la Pompeu durant part del projecte i m'agradaria reflectir d'alguna manera en el projecte el, al meu entendre, mal tracte que reben els becaris allà i a tot arreu. El import d'aquesta beca és de 5.5 euros/hora. Obtenim doncs un total de 3 850 euros per realitzar aquest projecte.

- El segon preu, el calcularé a partir de la factura que els *Lampistes Gomis* van deixar a casa meva després d'arreglar una avaria. Em van cobrar 22.3 euros/hora. En total, 15 610 euros.

- Finalment, el tercer preu per hora l'extrec de la meva nòmina a l'institut en el que treballo atualment, 16.2 euros/hora per un total de 11 340 euros.

No vull fer valoracions més enllà de les que es puguin extreure dels exemples triats que crec que són, a totes llums, aclaridors de la meva opinió.

Capítol 8

Conclusions

Començo dient que els objectius s'han acomplert, almenys els llistat en la Introducció. Suposo que això no sorprèn ningú perquè els objectius, quan els escrivia, era molt conscient de quin grau de realització tindrien. És per això que no parlaré d'ells en aquestes conclusions, la resta del treball està enfocat a demostrar que s'han assolit. Prefereixo parlar de com s'ha arribat a proposar aquests objectius.

Jo vaig estudiar Matemàtiques i, mentre feia totes les optatives de la branca d'Informàtica Teòrica vaig pensar que la meva formació tenia una mancança: com podia ser que algú que es volia especialitzar en complexitat i algorísmica no sabés programar ni una finestra?

Vist amb perspectiva, segurament no hagués estat necessari, però en aquell moment em va semblar indispensable començar la carrera d'Informàtica.

Moltes han estat les assignatures que no m'han interessat el més mínim perquè les meves pulsions anaven cap a camps molt concrets de la Informàtica i, pel meu gust, força oblidades en pla d'estudis. Ara bé, els coneixements realment no ocupen lloc i si en aquella època m'haguessin dit que gràcies a haver estudiat Informàtica em passaria 6 anys ensenyant estructures de computadors no m'ho hagués cregut.

Després de diversos intents i, en el quadrimestre que acabava la carrera, van obrir l'assignatura de Complexitat per tal de fer callar el grup de *freaks* que contínuament la demanàvem. Allà conec, entre d'altres la Carme i en Dimitrios.

Després d'un parell de converses amb en Dimitrios li demano que em dirigeixi el projecte i ell accepta sense pensar-s'ho. És el moment de començar a posar-se objectius. En Dimitrios m'imprimeix un llistat d'uns 250 problemes NP-difícils [13] i em demana que me'ls llegeixi i li digui en quins em veig capaç de treballar.

De la majoria de problemes a dures penes n'entenc l'enunciat, en marco al voltant de 40. D'aquests 40, en Dimitrios n'elimina els que sap que són massa difícils i destria els que creu que ell m'hi pot ajudar més. Després de la discusió ens quedem amb els problemes REPICO i ROMAN DOMINATION.[1]

Comencem atacant els dos problemes en paral·lel, estudiant-ne la complexitat. En dues setmanes se m'acut la reducció mitjançant la que obtenim el kernel del REPICO (teorema 3.1.3). És fruit d'aquest kernel que comencem a marcar-nos objectius. REPICO queda resolt amb aquest resultat, podem revestir-lo amb alguns resultats complementaris? podem trobar variants interessants al problema? podem aprofitar els resultats en el problema de ROMAN DOMINATION?

La desbordant imaginació de en Dimitrios s'inventa tres línies per continuar el treball:

- El problema POPICO, que més endavant vam descobrir que era un problema conegut i molt relacionat [16].
- Estudiar els límits inferiors per tal de tenir cotes sobre les mides de les matrius.
- Generalitzar REPICO i POPICO a matrius amb més dimensions.

Suposo que a aquestes alçades, és clar que l'objectiu d'estudiar POPICO resta assolit. El teorema 4.1.7 en demostra la seva pertinença a FPT. De la mateixa manera, els límits inferiors de pels problemes REPICO i POPICO queden demostrats en els teoremes 3.2.1 i 4.2.1 respectivament.

Les generalitzacions a 3 o més dimensions dels problemes no aporten res d'interessant. Per REPICO, sols cal canviar els rectangles per cubs o hipercubs i tots els resultats s'hi poden reproduir. En canvi, POPICO és força més complex perquè el concepte de corba poligonal és difícilment generalitzable a polígons, políedres i hiper-políedres. És per tot això que desestimem afegir aquest apartat al treball.

A més, paral·lelament a la decisió de no fer les generalitzacions apareix l'objectiu més ambiciós del treball: la comparació entre les dues descripcions a nivell d'espai utilitzat (tot i que en aquell moment utilitzàvem una demostració errònia que ens feia pensar que era una trivialitat).

Pot semblar que acabar el projecte amb aquest resultat negatiu deixa un mal regust de boca, jo crec que no. Realment l'esforç per arribar a algun tipus de resultat (positiu o negatiu) ha estat molt gran i sempre és gratificant superar un repte com aquest.

Ens queden moltes idees en el tinter que com que sabíem que no arribaríem a completar per ser massa ambicioses ja ni tan sols les hem escrit en la Introducció:

- No hem estudiat el problema de ROMAN DOMINATION i molt menys la seva relació amb els dos problemes estudiats. Tot i que després de fer el treball semblen més

[1] ROMAN DOMINATION és un problema que té el seu origen en l'imperi Romà i en la seva necessitat de defensar un territori molt extens. Aquest problema es pregunta, donada una configuració de ciutats i carreteres entre elles, quantes guarnicions hem de disposar per tal que cada ciutat tingui una guarnició o bé tingui una ciutat veïna amb dues guarnicions [13].

llunyans del que pensàvem ja que tots els estudis fets fins ara es fonamenten en la teoria de grafs i sembla agosarat pensar que podríem tractar-ho mitjançant matrius d'adjacències [16].

- El contraexemple amb el que acabem el capítol 6, lluny de ser una espina clavada es converteix en una porta oberta per futurs treballs. Com que cap de les dos descripcions és sempre millor que l'altra podríem intentar dividir les matrius entre les que es descriuen millor usant rectangles i les que es descriuen millor usant arestes. Estudiar en definitiva, les característiques de les matrius que ens permetrien, a priori, seleccionar el millor sistema.

A nivell personal he assolit objectius també molt importants, objectius que no es poden considerar objectius del treball sinó objectius pels que les enginyeries tenen projecte de final de carrera.

He pogut treballar amb en Dimitrios, pot semblar una tonteria però treballar amb algú que té interessos semblants als teus però que et passa la mà per la cara en coneixements és molt motivador i hi he après moltíssim d'ell.

No puc dir que hagi integrat tot el que he après en la carrera en el projecte: no he programat, no he usat bases de dades, no he pensat en sistemes operatius, no he dissenyat sorftware i no m'he preocupat de l'arquitectura dels computadors. Com ja he explicat, vaig venir a la FIB buscant uns coneixements molt concrets i el treball es centra en l'especialitat que m'agrada. M'he dedicat a aprofundir en aquesta àrea.

He après LaTeX, ha estat indispensable per escriure el treball, m'ha robat moltíssimes hores i molts cops he estat a punt de llençar la tovallola per culpa seva: aconseguir, per exemple, que posi una imatge on vols pot ser tota una odissea. Ara bé, el resultat és simplement espectacular. Quan veig el meu treball imprès, la qualitat final em fa sentir orgullós, em fa sentir professional.

El repte d'escriure un treball tan llarg, que ha de ser rigorós i ha de seguir un seguit de normes ha estat molt educatiu. En aquesta part la pobre Maria ha patit la meva inexperiència escrivint textos científics o tècnics. Cada vegada que li he presentat un nou apartat me l'ha tornat ple d'anotacions i correccions que em feien caure la cara de vergonya. No seré tan petulant com per dir que ara ja en sé, simplement en sé més que abans de començar i això ja és molt.

Acabo dient que estic molt satisfet d'aquest projecte, crec que tot el suc que n'he tret a nivell personal és enorme. Al final, em serà molt més profitós tot el que he après pel camí que no pas les demostracions sense importància que aquí presento.

Em permeto la llicència d'aprofitar-me de qui, sens dubte, escriu millor que no pas jo: *Caminante, no hay camino: se hace camino al andar* d'Antonio Machado.

Capítol 9

Agraïments

No voldria acabar aquest treball sense agrair a tota la gent que m'ha ajudat a realitzar-lo (ja sigui directa o indirectament) :

- Gràcies a en Dimitrios Thilikos per motivar el treball, per l'energia que transmets, per la teva joia de treballar. Gràcies Dimitrios.
- Gràcies a na Maria José Serna per l'esforç d'agafar un projecte a mig fer, per ajudar-me a refinar el projecte fins arribar al que és avui, per quedar a hores intempestives, per no engegar-me a fer punyetes. Gràcies Maria.
- Gràcies a la Carme Álvarez i en Josep M. Llaberia per perdre el vostre temps llegint les tonteries que un alumne pot arribar a escriure. Gràcies Carme, Josep M.
- Gràcies a l'escola SUNION per no posar cap trava a la realització d'aquest treball i per facilitar-me un horari prou flexible per acabar-lo. Gràcies SUNION.
- Gràcies a José Luis Balcázar, per ensenyar-me el camí, et reconec com el meu Obi Wan. Gràcies J.L.
- Gràcies a Mercè Molné i Douglas Winand per permetre'm arribar fins aquí: meu és el mèrit i l'esforç, vostre el sacrifici. Gràcies pares.
- Gràcies a Simó Winand per entendre els meus alts i baixos, per compartir el meu sentir, per la convivència necessària per poder treballar amb tranquil·litat. Gràcies germà.
- Gràcies a tothom que cregui que en algun moment em pot haver ajudat, ja sigui en termes tècnics o bé oferint-me certa estabilitat emocional. Simplement, gràcies.

Índex de figures

Bibliografia

[1] L. Lamport. *LaTeX A Document Preparation System* Addison-Wesley, California (1986).

[2] J.L. Balcázar, J.Diaz, J.Gabarró. *Structural Complexity I*, volume 11 of *EATCS Monographs on Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin (1988).

[3] M. Sipser. *Introduction to the theory of computation.* Boston, MA, PWS Publishing Company (1996).

[4] Dimitrios Thilikos. *Introcucción del Proyecto Investigador*, document no publicat, Barcelona (2002).

[5] R.M. Karp. *Reducibility among combinational problems.* Plenum, New York (1972).

[6] R.Balasubramanian, M.R. Fellows, V. Raman. *An improved fixed algorithm for vertex cover*, Inform. Process. Lett. 65, pp 163-168 (1998).

[7] J. Chen, I. Kanj i W. Jia. *Vertex cover: Further observations and further improvements*, 27th International Workshop on Graph - Theoretic Concepts in Computer Science, WG 2001, Vol. 1665, pp. 313-324 (2001).

[8] R.G.Downey, M.R. Fellows, A. Vardy i G.Whittle. *The parametrized complexity of some fundamenal problems in coding theory*, J. SIAM Comput. 29, pp 545-570 (1999).

[9] M.R. Fellows i M.A. Langston. *Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability*, J. Assoc. Comput. MAch. 35, pp 727-739 (1988).

[10] R. Yuster, U.Zwick. *Finding even cycles even faster*, SIAM J. Discrete Math. 10, pp 209-222 (1997).

[11] C.H.Papadimitrou. *Computational Complexity*, Pearson Education (1994).

[12] J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman. *Introducion to Automata Theory, Languages, and Computation*, Pearson Education (1979).

[13] M.Cesati, *Compendium of PArameterized Problems*, CET, citeseer.ist.psu.edu/cesati01compendium.html.

[14] H.Fernau, *Parameterized algorithms: A graph-theoretic approach*, Apr.2005 Habilitationsschrift(Universität Tübingen,Tübingen,Germany).

[15] W.J. Masek, *Some NP-complete set covering problems.* MIT, Cambridge, MA, manuscrit no publicat (1978).

[16] P.Berman, B. DasGupta *Complexities of Efficient Solutions of Rectiliniar Polygon Cover Problems.* Canadian Conference on Computational Geometry, pp 331-356 (1992).